

第2章～複素数と方程式～ 第1講 例題

1

【解答】 (1) $2-4i$ (2) $-3+11i$ (3) $-1-4i$ (4) $17-\sqrt{5}i$ (5) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

【解説】

(1) $(-3+2i)+(5-6i)=(-3+5)+(2-6)i=2-4i$

(2) $(5-i)(-1+2i)=-5+10i+i-2i^2$
 $=-5+11i-2\cdot(-1)$
 $=-3+11i$

(3) $i(-2+i)+(1-i)^2=(-2+i^2)+(1-2i+i^2)$
 $=-1-4i+2i^2=1-4i+2\cdot(-1)$
 $=-1-4i$

(4) $(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(4+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)$
 $=12-\sqrt{5}i-5i^2=17-\sqrt{5}i$

(5) $\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i-4i-2i^2}{4-i^2}$
 $=\frac{2-3i+2}{4+1}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

2

【解答】 (1) $x=6, y=-7$ (2) $x=-3$

【解説】

(1) 与えられた等式を変形すると

$$(2x+3y)+(x-2y)i=-9+20i$$

x, y は実数であるから, $2x+3y, x-2y$ も実数である。

よって $2x+3y=-9, x-2y=20$

これを解いて $x=6, y=-7$

(2) 等式を整理すると

$$(3x^2+8x-3)+(2x^2+5x-3)i=0$$

x が実数のとき, $3x^2+8x-3, 2x^2+5x-3$ は実数であるから

$$3x^2+8x-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2+5x-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② をともに満たす実数 x を求めればよい。

① から $(x+3)(3x-1)=0$ これを解いて $x=-3, \frac{1}{3}$

② から $(x+3)(2x-1)=0$ これを解いて $x=-3, \frac{1}{2}$

したがって, 求める x の値は $x=-3$

3

【解答】 $a=-2, b=-3$

【解説】

$$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$$

これが純虚数であるとき $a+2=0$ かつ $b-3 \neq 0$

よって $a=-2$ かつ $b \neq 3$

このとき

$$(a+bi)(2-3i)=(-2+bi)(2-3i)=-4+6i+2bi-3bi^2=(-4+3b)+2(b+3)i$$

これが実数であるとき $2(b+3)=0$

よって $b=-3$ これは $b \neq 3$ を満たす。

以上から $a=-2, b=-3$

4

【解答】 (1) $x=\pm 2\sqrt{6}i$ (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{6}i}{2}$

【解説】

(1) $2x^2+48=0$ から $x^2=-24$

よって $x=\pm\sqrt{-24}=\pm\sqrt{24}i=\pm 2\sqrt{6}i$

(2) 方程式の両辺を3で割ると $2x^2-4x+5=0$

よって $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot 5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{6}i}{2}$

5

【解答】 (前半) $a=-4, b=13$ (後半) 証明略

【解説】

$x^2+ax+b=0$ に $x=2+3i$ を代入すると

$$(2+3i)^2+a(2+3i)+b=0$$

整理すると $(-5+2a+b)+(3a+12)i=0$

a, b は実数であるから, $-5+2a+b, 3a+12$ も実数である。

よって $-5+2a+b=0, 3a+12=0$

これを解いて $a=-4, b=13$

よって $x^2+ax+b=x^2-4x+13$

この式に $x=2-3i$ を代入すると

$$(2-3i)^2-4(2-3i)+13=-5-12i-8+12i+13=0$$

よって, $x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

【別解】 (後半) $x^2-4x+13=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 13}}{2}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$

よって, $x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

【参考】 a, b の値を求めなくとも $x=2+3i$ が解ならば $x=2-3i$ も解であることを示すことができる。

$x=2+3i$ が方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるから, 代入して

$$-5+2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}, 3a+12=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が得られる。

$x=2-3i$ を方程式の左辺に代入すると

$$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=(-5+2a+b)-(3a+12)i$$

①, ② から $(-5+2a+b)-(3a+12)i=0$ よって $(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$

よって $x=2-3i$ も元の方程式の解である。

6

【解答】 $1+12\sqrt{2}i$

【解説】

$x=1-\sqrt{2}i$ から $x-1=-\sqrt{2}i$

両辺を2乗して $(x-1)^2=-2$

これを整理して $x^2-2x+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$3x^3-8x^2+x+7$ を x^2-2x+3 で割ると

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x^2-2x+3 \overline{) 3x^3-8x^2+x+7} \\ \underline{3x^3-6x^2+9x} \\ -2x^2-8x+7 \\ \underline{-2x^2+4x-6} \\ -12x+13 \end{array}$$

よって $3x^3-8x^2+x+7=(x^2-2x+3)(3x-2)-12x+13$

① と $x=1-\sqrt{2}i$ を代入して

$$\begin{aligned} 3x^3-8x^2+x+7 &= 0-12(1-\sqrt{2}i)+13 \\ &= 1+12\sqrt{2}i \end{aligned}$$

【別解】 $x^2-2x+3=0$ から $x^2=2x-3$

$$\begin{aligned} \text{よって } 3x^3-8x^2+x+7 &= 3x(2x-3)-8(2x-3)+x+7 \\ &= 6x^2-24x+31 \\ &= 6(2x-3)-24x+31 \\ &= -12x+13 \\ &= -12(1-\sqrt{2}i)+13 \\ &= 1+12\sqrt{2}i \end{aligned}$$

第1講 例題演習

1

【解答】 (1) $1+7i$ (2) $3+4i$ (3) $11+\sqrt{5}i$ (4) $-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$ (5) 2

【解説】

(1) $(4+5i)-(3-2i)=4+5i-3+2i=(4-3)+(5+2)i=1+7i$

(2) $(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i+(-1)=3+4i$

(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(2+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)$
 $=2\cdot 3-2\sqrt{5}i+3\sqrt{5}i-(\sqrt{5})^2i^2$
 $=6+\sqrt{5}i-5\cdot(-1)=11+\sqrt{5}i$

(4) $\frac{2+5i}{3-2i}=\frac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\frac{6+19i+10\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}$
 $=\frac{-4+19i}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$

(5) $\frac{3+2i}{2+i}-\frac{i}{1-2i}=\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
 $=\frac{6-3i+4i-2i^2}{4-i^2}-\frac{i+2i^2}{1-4i^2}$
 $=\frac{6+i-2\cdot(-1)}{4-(-1)}-\frac{i+2\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}$
 $=\frac{8+i}{5}-\frac{i-2}{5}=\frac{10}{5}=2$

2

【解答】 (1) $x=-2, y=1$ (2) $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$ (3) $x=2$

【解説】

(1) 与式から $4x+y+7+2(x+2y)i=0$
 x, y は実数であるから, $4x+y+7$ と $2(x+2y)$ も実数である。
 よって $4x+y+7=0$ ……①, $x+2y=0$ ……②
 ①, ② を連立して解くと $x=-2, y=1$

(2) 与式から $x+2yi=\frac{3-2i}{1+i}$
 $\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-5i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3-5i-2}{1+1}=\frac{1-5i}{2}$

であるから $x+2yi=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
 $x, 2y$ は実数であるから $x=\frac{1}{2}, 2y=-\frac{5}{2}$

よって $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$

【別解】 (左辺) $=x+xi+2yi+2yi^2=x-2y+(x+2y)i$

ゆえに $x-2y+(x+2y)i=3-2i$
 x, y は実数であるから, $x-2y$ と $x+2y$ も実数である。
 よって $x-2y=3, x+2y=-2$

これを解いて $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$

(3) 与式を整理すると $x^2-x-2+(x^2-3x+2)i=0$
 x は実数であるから, x^2-x-2, x^2-3x+2 は実数である。
 よって $x^2-x-2=0$ ……①

$x^2-3x+2=0$ ……②

①から $(x+1)(x-2)=0$ ゆえに $x=-1, 2$

②から $(x-1)(x-2)=0$ ゆえに $x=1, 2$

①, ② をともに満たす x の値が求める解で $x=2$

3

【解答】 $x=-2, y=-3$

【解説】

$(x+yi)+(2-3i)=(x+2)+(y-3)i$
 和が純虚数であるから $x+2=0$ かつ $y-3=0$

よって $x=-2$ かつ $y=3$

このとき

$(x+yi)(2-3i)=(-2+yi)(2-3i)=-4+6i+2yi-3y^2$
 $=(-4+3y)+2(y+3)i$

積が実数であるから $2(y+3)=0$

よって $y=-3$ これは, $y=3$ を満たす。

以上から $x=-2, y=-3$

4

【解答】 (1) $x=\pm\frac{2}{3}i$ (2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$ (4) $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

【解説】

(1) $9x^2+4=0$ から $x^2=-\frac{4}{9}$

よって $x=\pm\sqrt{-\frac{4}{9}}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}i=\pm\frac{2}{3}i$

(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) 両辺に -1 を掛けると $3x^2-x-5=0$

よって $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$

(4) $x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-5}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

5

【解答】 $a=-4, b=13, x=2+3i$

【解説】

$x=2-3i$ がこの方程式の解であるから

$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$

よって $4-12i+9i^2+2a-3ai+b=0$

ゆえに $(2a+b-5)+(-3a-12)i=0$

a, b は実数であるから, $2a+b-5, -3a-12$ も実数である。

よって $2a+b-5=0, -3a-12=0$

これを解いて $a=-4, b=13$

このとき, 方程式は $x^2-4x+13=0$

これを解いて $x=2\pm 3i$

よって, 求める他の解は $x=2+3i$

6

【解答】 $10+2\sqrt{2}i$

【解説】

$P(x)=x^4-4x^3+2x^2+6x-7$ とおく。

$x=1+\sqrt{2}i$ から $x-1=\sqrt{2}i$

両辺を2乗して $(x-1)^2=-2$

整理すると $x^2-2x+3=0$ ……①

$P(x)$ を x^2-2x+3 で割ると, 右のようになり

商 x^2-2x-5 , 余り $2x+8$

である。よって

$P(x)=(x^2-2x+3)(x^2-2x-5)+2x+8$

$x=1+\sqrt{2}i$ のとき, ①から

$P(1+\sqrt{2}i)=0+2(1+\sqrt{2}i)+8=10+2\sqrt{2}i$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad -5 \\ 1 \quad -2 \quad 3 \overline{) 1 \quad -4 \quad 2 \quad 6 \quad -7} \\ \underline{1 \quad -2 \quad 3} \\ -2 \quad -1 \quad 6 \\ \underline{-2 \quad 4 \quad -6} \\ -5 \quad 12 \quad -7 \\ \underline{-5 \quad 10 \quad -15} \\ 2 \quad 8 \end{array}$$

第1講 レベルA

1

【解答】 (1) $5-i$ (2) $-\sqrt{6}(43+15i)$ (3) $\frac{66-213i}{221}$ (4) -1 (5) 1

【解説】

$$(1) \frac{(3-2i)(1+5i)}{2+3i} = \frac{3+13i-10i^2}{2+3i} = \frac{13(1+i)}{2+3i}$$

$$= \frac{13(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13(2-i-3i^2)}{4-9i^2} = 5-i$$

$$(2) (\sqrt{-50}-\sqrt{72})(\sqrt{27}+\sqrt{-75}) = (5\sqrt{2}i-6\sqrt{2})(3\sqrt{3}+5\sqrt{3}i)$$

$$= \sqrt{2}(5i-6) \times \sqrt{3}(3+5i)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{3}(-6+5i)(3+5i)$$

$$= \sqrt{6}(-18-15i+25i^2)$$

$$= -\sqrt{6}(43+15i)$$

$$(3) \frac{4-i}{3+2i} - \frac{2}{4-i} = \frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} - \frac{2(4+i)}{(4-i)(4+i)}$$

$$= \frac{12-11i+2i^2}{9-4i^2} - \frac{8+2i}{16-i^2} = \frac{10-11i}{13} - \frac{8+2i}{17}$$

$$= \frac{17(10-11i)-13(8+2i)}{221} = \frac{66-213i}{221}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i^2} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$$

よって $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2 = \frac{2(1-i)^2}{4} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$

ゆえに $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$

【別解】 $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2 = \left\{\frac{2(1-i)^2}{4}\right\}^2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 = \frac{1}{i^2} = -1$

$$(5) \frac{1}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}} = \frac{(1+i)(1-i)}{\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right)(1+i)(1-i)} = \frac{1-i^2}{(1-i)+(1+i)} = \frac{2}{2} = 1$$

2

【解答】 (ア) 0 (イ) $-1+i$

【解説】

$$i+i^2+i^3+i^4 = i+(-1)+(-i)+1 = 0$$

$$i+i^2+i^3+i^4 + \dots + i^{30}$$

$$= (i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) + \dots + i^{24}(i+i^2+i^3+i^4) + i^{28}(i+i^2)$$

$$= i^{28}(i+i^2) = (i^4)^7(i-1) = 1-1 = 0$$

3

【解答】 $3+2i, -3-2i$

【解説】

求める複素数を $a+bi$ (a, b は実数) とすると $(a+bi)^2 = 5+12i$

$$\text{整理して } a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

$$a^2 - b^2, 2ab \text{ は実数であるから } a^2 - b^2 = 5, 2ab = 12$$

$$\text{よって } a^2 - b^2 = 5 \dots\dots \textcircled{1}, ab = 6 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の両辺を 2 乗して } a^2 b^2 = 36 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } a^2 = b^2 + 5 \quad \text{これを } \textcircled{3} \text{ に代入して } (b^2 + 5)b^2 = 36$$

$$\text{ゆえに } b^4 + 5b^2 - 36 = 0 \quad \text{すなわち } (b^2 + 9)(b^2 - 4) = 0$$

$$b^2 \geq 0 \text{ であるから } b^2 = 4 \quad \text{よって } b = \pm 2$$

$$\textcircled{2} \text{ から } b = 2 \text{ のとき } a = 3, b = -2 \text{ のとき } a = -3$$

したがって、求める複素数は $3+2i, -3-2i$

4

【解答】 (1) $x=4, y=-2$ (2) $-\frac{7}{5} - \frac{16}{5}i$

【解説】

$$(1) i^{30} + i^{65} = (i^2)^{15} + (i^2)^{32} \cdot i = (-1)^{15} + (-1)^{32} \cdot i = -1 + i$$

ゆえに、 $(-1+i)(x+yi) = -2+6i$ から

$$x+yi = \frac{-2+6i}{-1-i} = \frac{2(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2(1-3i)(1+i)}{1+1} = 1-2i-3i^2$$

$$= 4-2i$$

x, y は実数であるから $x=4, y=-2$

$$(2) \frac{x+yi}{i} + \frac{x-yi}{x+yi} = \frac{(x+yi)i}{i^2} + \frac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}$$

$$= y-xi + \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$$

$$= -2-4i + \frac{4^2 - (-2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (-2)i}{4^2 + (-2)^2}$$

$$= -2-4i + \frac{3+4i}{5}$$

$$= -\frac{7}{5} - \frac{16}{5}i$$

5

【解答】 (1) $k \leq \frac{1}{2}, 2 \leq k$

(2) $k = \frac{1}{2}$ のとき、重解は $x = \frac{1}{2}$; $k = 2$ のとき、重解は $x = -1$

【解説】

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 1 \cdot (-k^2 + 3k - 1) = k^2 - 2k + 1 + k^2 - 3k + 1$$

$$= 2k^2 - 5k + 2 = (2k-1)(k-2)$$

(1) 実数解をもつための条件は $D \geq 0$

$$\text{よって } (2k-1)(k-2) \geq 0 \quad \text{ゆえに } k \leq \frac{1}{2}, 2 \leq k$$

(2) 重解をもつための条件は $D = 0$

$$\text{よって } (2k-1)(k-2) = 0 \quad \text{ゆえに } k = \frac{1}{2}, 2$$

$$\text{また、重解は } x = -\frac{2(k-1)}{2 \cdot 1} = 1-k$$

$$\text{したがって } k = \frac{1}{2} \text{ のとき、重解は } x = \frac{1}{2}$$

$$k = 2 \text{ のとき、重解は } x = -1$$

【別解】 (後半) $k = \frac{1}{2}$ のとき、方程式は $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$$\text{これを解いて } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{よって } x = \frac{1}{2}$$

$k = 2$ のとき、方程式は $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\text{これを解いて } (x+1)^2 = 0 \quad \text{よって } x = -1$$

6

【解答】 $\frac{4}{3} \leq a \leq 4$

【解説】

$$\begin{cases} x+y-a+4=0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x^2+y^2+a^2-4a=0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } y = -x+a-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}'$$

これを $\textcircled{2}$ に代入して $x^2 + (-x+a-4)^2 + a^2 - 4a = 0$

$$\text{よって } x^2 - (a-4)x + a^2 - 6a + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

x の方程式 $\textcircled{3}$ が実数解をもてば、 $\textcircled{1}'$ から、 y も実数となる。

$\textcircled{3}$ の判別式を D とすると

$$D = [-(a-4)]^2 - 4(a^2 - 6a + 8) = -3a^2 + 16a - 16$$

$$= -(3a^2 - 16a + 16) = -(3a-4)(a-4)$$

求める条件は $D \geq 0$ すなわち $(3a-4)(a-4) \leq 0$

$$\text{したがって } \frac{4}{3} \leq a \leq 4$$

1

解答 $k = -4$

解説

方程式の実数解を α とすると

$$(1+i)\alpha^2 + (k+i)\alpha + 3+3ki = 0$$

整理して $(\alpha^2 + k\alpha + 3) + (\alpha^2 + \alpha + 3k)i = 0$

α, k は実数であるから, $\alpha^2 + k\alpha + 3, \alpha^2 + \alpha + 3k$ も実数.

よって $\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \dots\dots ①$

$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \dots\dots ②$

①-② から $(k-1)\alpha - 3(k-1) = 0$

ゆえに $(k-1)(\alpha-3) = 0$

よって $k=1$ または $\alpha=3$

[1] $k=1$ のとき

①, ② はともに $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$ となる.

これを満たす実数 α は存在しないから, 不適.

[2] $\alpha=3$ のとき

①, ② はともに $12 + 3k = 0$ となる.

ゆえに $k = -4$

[1], [2] から, 求める k の値は $k = -4$

2

解答 $2 \leq b \leq 6$

解説

実数解をもつための条件は, 判別式 D について

$$D = (8-a)^2 - 4(12-ab) \geq 0$$

すなわち $a^2 + 4(b-4)a + 16 \geq 0 \dots\dots [A]$

a についての2次方程式 $a^2 + 4(b-4)a + 16 = 0$ の判別式を D_1 とすると, [A] がすべての実数 a に対して成り立つための条件は, a^2 の係数が正であるから $D_1 \leq 0$

$$\frac{D_1}{4} = 4(b-4)^2 - 16 = 4[(b-4)^2 - 4] = 4(b-2)(b-6)$$

であるから, $(b-2)(b-6) \leq 0$ を解いて $2 \leq b \leq 6$

3

解答 8個

解説

2次方程式 $x^2 - ax + 3 = 0, x^2 + ax + 2a = 0$ の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = (a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})$$

$$D_2 = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = a(a-8)$$

2つの2次方程式の一方が実数解をもち, 他方が虚数解をもつための条件は

「 $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 < 0$ 」 または 「 $D_1 < 0$ かつ $D_2 \geq 0$ 」

[1] $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 < 0$ のとき

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) \geq 0 \text{ かつ } a(a-8) < 0$$

よって $(a \leq -2\sqrt{3} \text{ または } 2\sqrt{3} \leq a) \text{ かつ } 0 < a < 8$

ゆえに $2\sqrt{3} \leq a < 8$

a は整数であるから

$$a = 4, 5, 6, 7$$

[2] $D_1 < 0$ かつ $D_2 \geq 0$ のとき

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) < 0 \text{ かつ } a(a-8) \geq 0$$

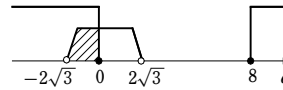
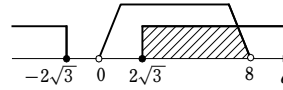
よって $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$ かつ $(a \leq 0 \text{ または } 8 \leq a)$

ゆえに $-2\sqrt{3} < a \leq 0$

a は整数であるから

$$a = -3, -2, -1, 0$$

[1], [2] から, 求める a の個数は 8個



1

解答 (1) $-\frac{8}{9}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{28}{9}$ (4) $-\frac{7}{3}$ (5) $\frac{52}{9}$ (6) $\frac{80}{27}$

解説

解と係数の関係から $\alpha + \beta = \frac{2}{3}, \alpha\beta = -\frac{4}{3}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{8}{3} = \frac{28}{9}$

(4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{28}{9} \div \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{3}$

(5) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta = \frac{28}{9} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{9} + \frac{8}{3} = \frac{52}{9}$

(6) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} + \frac{8}{3} = \frac{80}{27}$

別解 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \frac{2}{3} \left[\frac{28}{9} - \left(-\frac{4}{3}\right) \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{9} = \frac{80}{27}$

2

解答 (1) $k = 32; 4, 8$ (2) $k = 27$ のとき $3, 9; k = -64$ のとき $-4, 16$

解説

(1) 1つの解が他の解の2倍であるから, 2つの解は $\alpha, 2\alpha$ と表すことができる.

解と係数の関係から

$$\alpha + 2\alpha = 12 \dots\dots ①, \alpha \cdot 2\alpha = k \dots\dots ②$$

①から $\alpha = 4$ これを②に代入して $k = 32$

また, 他の解は $2\alpha = 8$

よって $k = 32$, 2つの解は $4, 8$

(2) 1つの解が他の解の2乗であるから, 2つの解は α, α^2 と表すことができる.

解と係数の関係から

$$\alpha + \alpha^2 = 12 \dots\dots ①, \alpha \cdot \alpha^2 = k \dots\dots ②$$

①から $\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$ よって $(\alpha + 4)(\alpha - 3) = 0$

ゆえに $\alpha = -4, 3$

$\alpha = -4$ のとき, ②から $k = -64$ 他の解は, $\alpha^2 = 16$

$\alpha = 3$ のとき, ②から $k = 27$ 他の解は, $\alpha^2 = 9$

よって $k = 27$ のとき, 2つの解は $3, 9$

$k = -64$ のとき, 2つの解は $-4, 16$

3

解答 (1) $6x^2 - 5x - 6 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 13 = 0$

解説

(1) 2数の和は $\frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}$, 2数の積は $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

よって $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ すなわち $6x^2 - 5x - 6 = 0$

(2) 2数の和は $(2+3i) + (2-3i) = 4$, 2数の積は $(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i^2 = 13$

よって $x^2 - 4x + 13 = 0$

第2講 例題

4

【解答】 $4x^2+11x+9=0$

【解説】

解と係数の関係により $\alpha + \beta = -\frac{-11}{2} = \frac{11}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{9}{4}$

よって $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{121}{4} - \frac{9}{2} = \frac{103}{4}$

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

ゆえに、 α^2, β^2 を解とする2次方程式の1つは

$x^2 - \left(\frac{11}{4}\right)x + \frac{9}{4} = 0$ すなわち $x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{9}{4} = 0$

両辺に4を掛けて $4x^2 + 11x + 9 = 0$

5

【解答】 (1) $m > 10$ (2) $m < -\frac{5}{2}$

【解説】

2次方程式 $x^2 - mx + 2m + 5 = 0$ の異なる2つの解を α, β とし、判別式を D とする。

(1) $\alpha > 0, \beta > 0$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

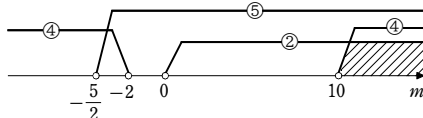
$$\begin{cases} D = (-m)^2 - 4(2m+5) > 0 & \dots\dots ① \\ \alpha + \beta = m > 0 & \dots\dots ② \\ \alpha\beta = 2m+5 > 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①から $m^2 - 8m - 20 > 0$ ゆえに $(m+2)(m-10) > 0$

よって $m < -2, 10 < m$ $\dots\dots ④$

③から $m > -\frac{5}{2}$ $\dots\dots ⑤$

②, ④, ⑤の共通範囲を求めて $m > 10$



【別解】 $f(x) = x^2 - mx + 2m + 5$ とおくと、異なる2つの解がともに正となる条件は

$D > 0, (\text{軸}) -\frac{-m}{2 \cdot 1} > 0, f(0) > 0$

よって $(-m)^2 - 4(2m+5) > 0, m > 0, 2m+5 > 0$

(2) 正と負の解をもつための条件は、 $\alpha\beta < 0$ が成り立つことである。

ゆえに $2m+5 < 0$ よって $m < -\frac{5}{2}$

【参考】 $\alpha\beta < 0$ のとき、解と係数の関係から $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$ よって $ac < 0$

したがって $D = b^2 - 4ac > 0$

【別解】 $f(0) < 0$

第2講 例題演習

1

【解答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) -1 (4) $\frac{5}{2}$ (5) $-\frac{1}{2}$ (6) -1

【解説】

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\frac{-2}{2} = 1, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

(3) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

(4) $(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(5) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

【別解】 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 1 \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

(6) $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

2

【解答】 (1) $m=2$ のとき $x=1, 2; m=-4$ のとき $x=-1, -2$

(2) $m=8$ のとき $x=2, 4; m=-27$ のとき $x=-3, 9$

【解説】

(1) 2つの解は、 $\alpha, \alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha + (\alpha+1) = m+1, \quad \alpha(\alpha+1) = 2$

すなわち $2\alpha = m, \quad \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ から $(\alpha-1)(\alpha+2) = 0$ ゆえに $\alpha = 1, -2$

$\alpha = 1$ のとき $m = 2\alpha = 2 \cdot 1 = 2$ 他の解は $\alpha + 1 = 1 + 1 = 2$

$\alpha = -2$ のとき $m = 2\alpha = 2 \cdot (-2) = -4$ 他の解は $\alpha + 1 = -2 + 1 = -1$

よって、 $m=2$ のとき、2つの解は 1, 2

$m=-4$ のとき、2つの解は -1, -2

(2) 2つの解は、 α, α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha + \alpha^2 = 6, \quad \alpha \cdot \alpha^2 = m$

すなわち $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0, \quad \alpha^3 = m$

$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$ から $(\alpha-2)(\alpha+3) = 0$ ゆえに $\alpha = 2, -3$

$\alpha = 2$ のとき $m = \alpha^3 = 8$ 他の解は $\alpha^2 = 2^2 = 4$

$\alpha = -3$ のとき $m = (-3)^3 = -27$ 他の解は $\alpha^2 = (-3)^2 = 9$

よって、 $m=8$ のとき、2つの解は 2, 4

$m=-27$ のとき、2つの解は -3, 9

3

【解答】 (1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (2) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ (3) $4x^2 + 2x + 1 = 0$

【解説】

(1) 2数の和は $-1+3=2$

2数の積は $(-1) \cdot 3 = -3$

よって、-1, 3を解とする2次方程式は $x^2 - 2x - 3 = 0$

【別解】 -1, 3を解とする2次方程式は $(x+1)(x-3) = 0$

左辺を展開して $x^2 - 2x - 3 = 0$

(2) 2数の和は $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

2数の積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

よって、 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ を解とする2次方程式は $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

両辺に6を掛けて $6x^2 - 5x + 1 = 0$

【別解】 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ を解とする2次方程式は $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$

左辺を展開して $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

両辺に6を掛けて $6x^2 - 5x + 1 = 0$

(3) 2数の和は $\frac{-1+\sqrt{3}i}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}$

2数の積は $\frac{-1+\sqrt{3}i}{4} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{4} = \frac{1-3i^2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

よって、 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{4}$ を解とする2次方程式は

$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0$

両辺に4を掛けて $4x^2 + 2x + 1 = 0$

4

【解答】 (1) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (2) $x^2 + 4x + 16 = 0$ (3) $x^2 + x + 1 = 0$

【解説】

解と係数の関係により $\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 4$

(1) $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -2 + 4 = 2, \quad (\alpha + \beta)\alpha\beta = -2 \cdot 4 = -8$

したがって、求める2次方程式は $x^2 - 2x - 8 = 0$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot 4 = -4, \quad \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 4^2 = 16$

したがって、求める2次方程式は $x^2 + 4x + 16 = 0$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 4}{4} = -1, \quad \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1$

したがって、求める2次方程式は $x^2 + x + 1 = 0$

5

【解答】 (1) $m > 8$ (2) $0 < m < 2$ (3) $m < 0$

【解説】

$x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ $\dots\dots ①$

①の判別式を D とし、2つの解を α, β とする。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2(m-4), \quad \alpha\beta = 2m$

(1) ①が異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は

$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m > 0 & \dots\dots ② \\ \alpha + \beta > 0 & \dots\dots ③ \\ \alpha\beta > 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$

②から $m^2 - 10m + 16 > 0$

ゆえに $(m-2)(m-8) > 0$ よって $m < 2, 8 < m$ ……⑤
 ③から $2(m-4) > 0$
 よって $m > 4$ ……⑥
 ④から $2m > 0$
 よって $m > 0$ ……⑦
 ⑤, ⑥, ⑦の共通範囲を求めて $m > 8$

(2) ①が異なる2つの負の解をもつための必要十分条件は

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m > 0 & \dots\dots ⑧ \\ \alpha + \beta < 0 & \dots\dots ⑨ \\ \alpha\beta > 0 & \dots\dots ⑩ \end{cases}$$

⑧から $m < 2, 8 < m$ ……⑪
 ⑨から $2(m-4) < 0$
 よって $m < 4$ ……⑫
 ⑩から $m > 0$ ……⑬
 ⑪, ⑫, ⑬の共通範囲を求めて $0 < m < 2$

(3) ①の2つの解が異符号であるための必要十分条件は

$\alpha\beta < 0$ すなわち $2m < 0$
 よって $m < 0$

1

解答 $a = -2, 1$

解説

$x^2 + ax - 1 = 0$ の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = -1 \quad \dots\dots ②$$

また、 $x^2 - a^2x - a = 0$ の2つの解が $\alpha+1, \beta+1$ であるから、解と係数の関係により

$$(\alpha+1) + (\beta+1) = a^2 \quad \dots\dots ③, \quad (\alpha+1)(\beta+1) = -a \quad \dots\dots ④$$

③から $\alpha + \beta = a^2 - 2$ ①を代入して $-a = a^2 - 2$

整理すると $a^2 + a - 2 = 0$

ゆえに $(a+2)(a-1) = 0$ よって $a = -2, 1$

また、②を④に代入すると、 $\alpha + \beta = -a$ となり、①と同じ式が得られる。

以上から、求める定数 a の値は $a = -2, 1$

2

解答 $x + y = 4; (x, y) = (2 \pm \sqrt{5}i, 2 \mp \sqrt{5}i)$ (複号同順)

解説

$$(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = -2 + 2 \cdot 9 = 16$$

$$x + y > 0 \text{ であるから } x + y = 4$$

よって、 x, y は2次方程式 $t^2 - 4t + 9 = 0$ の解である。

これを解くと $t = 2 \pm \sqrt{5}i$

したがって $(x, y) = (2 \pm \sqrt{5}i, 2 \mp \sqrt{5}i)$ (複号同順)

3

解答 (1) $2 < m < 3$ (2) $m < -1$ (3) $m > 3$ (4) $m > 2$

解説

2次方程式 $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ の異なる2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = 2m, \quad \alpha\beta = m + 2$$

また、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-m)^2 - (m+2) = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$$

(1) $\alpha > 1, \beta > 1$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

$$\frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 \quad \dots\dots ①$$

$$(\alpha-1) + (\beta-1) = \alpha + \beta - 2 = 2m - 2 > 0 \quad \dots\dots ②$$

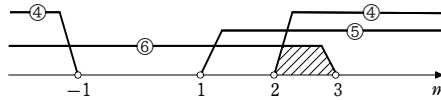
$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -m + 3 > 0 \quad \dots\dots ③$$

①から $m < -1, 2 < m$ ……④

②から $m > 1$ ……⑤

③から $m < 3$ ……⑥

④, ⑤, ⑥の共通範囲を求めて $2 < m < 3$



別解 $f(x) = x^2 - 2mx + m + 2$ とおく。

異なる2つの解がともに1より大きくなる条件は

$$D > 0, (\text{軸}) \quad -\frac{-2m}{2 \cdot 1} > 1, f(1) > 0$$

よって $m < -1$ または $2 < m, m > 1, m < 3$

(2) $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

$$\frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 \quad \dots\dots ①$$

$$(\alpha-1) + (\beta-1) = 2m - 2 \leq 0 \quad \dots\dots ②$$

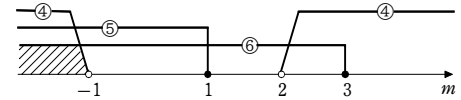
$$(\alpha-1)(\beta-1) = -m + 3 \geq 0 \quad \dots\dots ③$$

①から $m < -1, 2 < m$ ……④

②から $m \leq 1$ ……⑤

③から $m \leq 3$ ……⑥

④, ⑤, ⑥の共通範囲を求めて $m < -1$



別解 異なる2つの解がともに1以下となる条件は

$$D > 0, (\text{軸}) \quad -\frac{-2m}{2 \cdot 1} < 1, f(1) \geq 0$$

よって $m < -1$ または $2 < m, m < 1, m \leq 3$

(3) 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さくなるための条件は

$$(\alpha-1)(\beta-1) = -m + 3 < 0$$

よって $m > 3$

別解 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さい条件は

$$f(1) < 0$$

よって $m > 3$

(4) 異なる2つの実数解をもつような m の値の範囲は

$$\frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 \text{ から } m < -1, 2 < m \quad \dots\dots ①$$

また、異なる2つの解がともに1以下となるような m の値の範囲は (2) より $m < -1$

よって、少なくとも1つの解が1より大きくなるような m の値の範囲は

①から $m < -1$ を除いて $m > 2$

別解 少なくとも1つの解が1より大きくなるような m の値の範囲は

[1] ともに1より大きくなるとき

$$(1) \text{ より } 2 < m < 3$$

[2] 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さいとき

$$(3) \text{ より } m > 3$$

[3] 1つの解が1のとき

$$1^2 - 2m \cdot 1 + m + 2 = 0 \text{ から } m = 3$$

このとき、方程式は $x^2 - 6x + 5 = 0$ すなわち $(x-1)(x-5) = 0$

他の解は5 (> 1) であるから、条件を満たす。

[1], [2], [3]から、求める m の値の範囲は

$$m > 2$$

4

解答 (1) $2x^2 + 4x - 7 = 0$ (2) $p = \pm 2, q = 2$

解説

(1) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{1}{2}$

よって $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 - 4 = -2$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2} - 8 + 2 + 2 = -\frac{7}{2}$$

したがって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + 2x - \frac{7}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 + 4x - 7 = 0$$

(2) 2つの2次方程式において、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -p \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = q \quad \dots\dots ②$$

$$(\alpha^2 + 1) + (\beta^2 + 1) = 2 \quad \dots\dots ③, \quad (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 5 \quad \dots\dots ④$$

③から $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \dots\dots ⑤$

よって $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 0$

これに①、②を代入すると $p^2 - 2q = 0 \quad \dots\dots ⑥$

④から $(\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) + 1 = 5$

これに②、⑤を代入すると $q^2 = 4$

ゆえに $q = \pm 2$

$q = 2$ のとき、⑥から $p^2 = 4$ となり $p = \pm 2$

$q = -2$ のとき、⑥から $p^2 = -4$ となり、 $p^2 = -4$ を満たす実数 p は存在しない。

以上から $p = \pm 2, q = 2$

1

解答 $(x, y) = (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

解説

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 & \dots\dots ① \\ x^2y + xy^2 = 30 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②から $xy(x + y) = 30 \quad \dots\dots ③$

$x + y = u, xy = v$ とおくと、①、③から $u + v = 11, uv = 30$

よって、 u, v は $t^2 - 11t + 30 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 5)(t - 6) = 0$ ゆえに $t = 5, 6$

よって $(u, v) = (5, 6), (6, 5)$

すなわち $(x + y, xy) = (5, 6), (6, 5)$

[1] $x + y = 5, xy = 6$ のとき、 x, y は $t^2 - 5t + 6 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 2)(t - 3) = 0$ よって $t = 2, 3$

[2] $x + y = 6, xy = 5$ のとき、 x, y は $t^2 - 6t + 5 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 1)(t - 5) = 0$ よって $t = 1, 5$

[1], [2]から $(x, y) = (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

2

解答 $k = 2, (x + y - 2)(x + 2y - 1)$

解説

$P = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 5y + k$ とすると

$$P = x^2 + 3(y - 1)x + 2y^2 - 5y + k$$

$P = 0$ を x についての2次方程式と考えると、解の公式から

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{9(y - 1)^2 - 4(2y^2 - 5y + k)}}{2} \\ &= \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{y^2 + 2y + 9 - 4k}}{2} \end{aligned}$$

P が x, y の1次式の積に因数分解できるためには、この解が y の1次式で表されなければならない。

よって、根号内の式 $y^2 + 2y + 9 - 4k$ は完全平方式でなければならないから、

$y^2 + 2y + 9 - 4k = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (9 - 4k) = 4k - 8 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 2$$

このとき $x = \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{(y + 1)^2}}{2} = \frac{-3y + 3 \pm (y + 1)}{2}$

すなわち $x = -y + 2, -2y + 1$

よって $P = \{x - (-y + 2)\}\{x - (-2y + 1)\} = (x + y - 2)(x + 2y - 1)$

3

解答 (1) $x = a, b$ (2) 0

解説

(1) $(x - a)(x - b) - 2x + 1 = 0$ の解が α, β であるから、等式

$$(x - a)(x - b) - 2x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ。

よって $(x - \alpha)(x - \beta) + 2x - 1 = (x - a)(x - b)$

ゆえに、 $(x - \alpha)(x - \beta) + 2x - 1 = 0$ の解は $x = a, b$

別解 第1の方程式から $x^2 - (a + b + 2)x + ab + 1 = 0$

解と係数の関係により $\alpha + \beta = a + b + 2 \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = ab + 1 \quad \dots\dots ②$

第2の方程式から $x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + \alpha\beta - 1 = 0$

①、②から $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

ゆえに $(x - a)(x - b) = 0$ よって $x = a, b$

(2) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)x + x(x - 1) = 0$ の2つの解が α, β であるから、次の等式が成り立つ。

$$(x - 1)(x - 2) + (x - 2)x + x(x - 1) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

両辺に $x = 0, 1, 2$ を代入すると、それぞれ

$$2 = 3\alpha\beta, \quad -1 = 3(1 - \alpha)(1 - \beta), \quad 2 = 3(2 - \alpha)(2 - \beta)$$

ゆえに $\alpha\beta = \frac{2}{3}, (\alpha - 1)(\beta - 1) = -\frac{1}{3}, (\alpha - 2)(\beta - 2) = \frac{2}{3}$

よって、求める式の値は $\frac{3}{2} - 3 + \frac{3}{2} = 0$

4

解答 $a = 3, b = 11$; 整数解は $x = 1, 11$

解説

2つの整数解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とする。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 4a, \alpha\beta = \frac{ab}{3} \quad \dots\dots ①$

α, β は整数、 a, b は素数であるから、①により

$$a = 3 \quad \text{または} \quad b = 3 \quad \text{また} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

[1] $a = 3$ のとき $\alpha + \beta = 12, \alpha\beta = b$

$\alpha\beta = b$ で、 b は素数であるから $\alpha = 1, \beta = b$

よって $1 + b = 12$ ゆえに $b = 11, \beta = 11$

[2] $b = 3$ のとき $\alpha + \beta = 4a, \alpha\beta = a$

$\alpha\beta = a$ で、 a は素数であるから $\alpha = 1, \beta = a$

よって $1 + a = 4a$ このとき、 $a = \frac{1}{3}$ となり不適。

以上から $a = 3, b = 11$; 整数解は $x = 1, 11$

第3講 例題

1

【解答】 (1) 40 (2) 8

【解説】

(1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ とする。

求める余りは $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 27 + 18 - 9 + 4 = 40$

(2) $P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 10x + 3$ とする。

求める余りは $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3$
 $= -1 + 1 + 5 + 3 = 8$

2

【解答】 (1) $a = 4$ (2) $a = 10$

【解説】

(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + a$ とする。

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが2となるための条件は

$$P(1) = 2 \quad \text{すなわち} \quad 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a = 2$$

よって $a = 4$

(2) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 6$ とする。

$P(x)$ が $2x+1$ で割り切れるための条件は $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\text{すなわち} \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 0$$

よって $a = 10$

3

【解答】 (1) 商 $3x^2 - 7x + 14$, 余り -25 (2) 商 $x^2 - x + 2$, 余り -9

(3) 商 $x^2 - 2x + 1$, 余り 0

【解説】

$$(1) \begin{array}{r} 3 \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad -2 \\ \underline{-6 \quad 14 \quad -28} \\ 3 \quad -7 \quad 14 \quad -25 \end{array} \quad (2) \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad -1 \quad -3 \quad | \quad -3 \\ \underline{-3 \quad 3 \quad -6} \\ 1 \quad -1 \quad 2 \quad -9 \end{array}$$

商 $3x^2 - 7x + 14$, 余り -25

商 $x^2 - x + 2$, 余り -9

$$(3) \begin{array}{r} 2 \quad -7 \quad 8 \quad -3 \quad | \quad 3 \\ \underline{3 \quad -6 \quad 3} \\ 2 \quad -4 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

ゆえに $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) = (2x - 3)(x^2 - 2x + 1)$

よって 商 $x^2 - 2x + 1$, 余り 0

4

【解答】 (1) $(x+1)(x+2)(x-4)$ (2) $(2x-3)(x^2+2x+3)$

(3) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

【解説】

(1) 与式を $P(x)$ とすると $P(-1) = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

ゆえに, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\text{よって} \quad P(x) = (x+1)(x^2 - 2x - 8) \\ = (x+1)(x+2)(x-4)$$

(2) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 9$ とすると

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - 9 = 0$$

よって, $P(x)$ は $2x-3$ を因数にもつ。

右の割り算から $P(x) = (2x-3)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -10 \quad -8 \quad | \quad -1 \\ \underline{-1 \quad 2 \quad 8} \\ 1 \quad -2 \quad -8 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ 2x - 3 \overline{) 2x^3 + x^2 - 9} \\ \underline{2x^3 - 3x^2} \\ 4x^2 - 6x - 9 \\ \underline{4x^2 - 6x} \\ 6x - 9 \\ \underline{6x - 9} \\ 0 \end{array}$$

(3) $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ とすると

$$P(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$P(x) = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 14x + 8 \\ x - 1 \overline{) x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8} \\ \underline{x^4 - x^3} \\ 7x^3 + 7x^2 \\ \underline{7x^3 - 7x^2} \\ 14x^2 - 6x \\ \underline{14x^2 - 14x} \\ 8x - 8 \\ \underline{8x - 8} \\ 0 \end{array}$$

ここで, $Q(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ とすると

$$Q(-1) = -1 + 7 - 14 + 8 = 0$$

よって, $Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$Q(x) = (x+1)(x^2 + 6x + 8) = (x+1)(x+2)(x+4)$$

$P(x) = (x-1)Q(x)$ であるから

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x + 8 \\ x + 1 \overline{) x^3 + 7x^2 + 14x + 8} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 6x^2 + 14x \\ \underline{6x^2 + 6x} \\ 8x + 8 \\ \underline{8x + 8} \\ 0 \end{array}$$

5

【解答】 $-2x+3$

【解説】

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割った余りを $ax+b$ において, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b$$

等式の両辺に $x=2, -3$ を代入すると

$$P(2) = 2a + b, \quad P(-3) = -3a + b$$

また, $x-2$ で割った余りが $-1, x+3$ で割った余りが 9 であるから

$$P(2) = -1, \quad P(-3) = 9$$

よって $2a + b = -1, -3a + b = 9$

これを解くと $a = -2, b = 3$

したがって, 求める余りは $-2x+3$

6

【解答】 x

【解説】

x^{99} を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割った余りを $ax+b$ において, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$x^{99} = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

この両辺に $x=-1, 1$ を代入すると $(-1)^{99} = -a+b, 1^{99} = a+b$

すなわち $-1 = -a+b, 1 = a+b$ これを解くと $a=1, b=0$

よって, 求める余りは x

7

【解答】 $-4x^2 + 10x + 5$

【解説】

$P(x)$ を 3次式 $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + R(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (R(x) \text{ は 2次以下の整式})$$

$(x+1)^2(x-2)Q(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから, $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは, $R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りと等しい。

よって, $R(x)$ は次のように表される。

$$R(x) = a(x+1)^2 + 18x + 9 \quad (a \text{ は定数})$$

ゆえに, 等式①は, 次のように表される。

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + a(x+1)^2 + 18x + 9$$

よって $P(2) = 9a + 45$

$P(x)$ を $x-2$ で割った余りは 9 であるから $P(2) = 9$

ゆえに $9a + 45 = 9$ すなわち $a = -4$

したがって, 求める余りは $-4(x+1)^2 + 18x + 9 = -4x^2 + 10x + 5$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1) 9 (2) 0

【解説】

- (1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ とすると、求める余りは
 $P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -8 + 12 + 4 + 1 = 9$
- (2) $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 1$ とすると、求める余りは
 $P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 10\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{9} - \frac{10}{9} + 1 = 0$

2

【解答】 (1) $a = -7$ (2) $a = -4$ (3) $a = 2, b = -6$

【解説】

- (1) $P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は
 $P(-3) = 0$ すなわち $(-3)^3 + a(-3) + 6 = 0$
 よって $-3a - 21 = 0$ ゆえに $a = -7$
- (2) $P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 になるための条件は
 $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$ すなわち $4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 4$
 よって $\frac{a}{4} + 5 = 4$ ゆえに $a = -4$
- (3) $P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は
 $P(-3) = 0$ すなわち $(-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) - 9 = 0$
 よって $3a - b - 12 = 0$ ……①
 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが -5 となるための条件は
 $P(2) = -5$ すなわち $2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 9 = -5$
 よって $2a + b + 2 = 0$ ……②
 ①, ②を連立して解くと $a = 2, b = -6$

3

【解答】 (1) 商 $2x^2 - 2x - 1$, 余り 4 (2) 商 $5x^2 - 3x + 6$, 余り -15
 (3) 商 $x^2 + 3x - 2$, 余り 1

【解説】

- (1)
- | | | | | | |
|-------|----|----|----|--|---|
| 2 | -4 | 1 | 5 | | 1 |
| | 2 | -2 | -1 | | |
| <hr/> | | | | | |
| 2 | -2 | -1 | 4 | | |
- (2)
- | | | | | | |
|-------|-----|---|-----|--|----|
| 5 | 7 | 0 | -3 | | -2 |
| | -10 | 6 | -12 | | |
| <hr/> | | | | | |
| 5 | -3 | 6 | -15 | | |
- よって 商 $2x^2 - 2x - 1$, 余り 4 よって 商 $5x^2 - 3x + 6$, 余り -15
- (3) 整式 A を $x - \frac{1}{2}$ で割る組立除法は
- | | | | | | |
|-------|---|----|----|--|---------------|
| 2 | 5 | -7 | 3 | | $\frac{1}{2}$ |
| | 1 | 3 | -2 | | |
| <hr/> | | | | | |
| 2 | 6 | -4 | 1 | | |
- したがって $2x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 6x - 4) + 1$
 $= (2x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 1$
 よって 商 $x^2 + 3x - 2$, 余り 1

4

【解答】 (1) $(x+1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+1)(x+2)(2x+3)$
 (3) $(2x+1)(x^2-3x+4)$ (4) $(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

【解説】

- (1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ とすると
 $P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$
 よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x+1)(x-2)(x-3)$$
- (2) $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$ とおくと
 $P(-1) = 2(-1)^3 + 9(-1)^2 + 13(-1) + 6 = 0$
 ゆえに、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。
 右のように割り算を行うと

$$P(x) = (x+1)(2x^2 + 7x + 6)$$
 したがって

$$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$$

$$= (x+1)(2x^2 + 7x + 6)$$

$$= (x+1)(x+2)(2x+3)$$
- (3) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 4$ とすると
 $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 4 = 0$$

 よって、 $P(x)$ は $x + \frac{1}{2}$ を因数にもつから

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6x + 8) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2(x^2 - 3x + 4)$$

$$= (2x+1)(x^2 - 3x + 4)$$
- (4) 与式を $P(x)$ とすると
 $P(2) = 32 - 24 - 4 - 6 + 2 = 0$
 ゆえに、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。
 よって $P(x) = (x-2)(2x^3 + x^2 + x - 1)$
 $Q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

 ゆえに、 $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。
 よって $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = (2x-1)(x^2 + x + 1)$
 したがって $P(x) = (x-2)(2x-1)(x^2 + x + 1)$

5

【解答】 $-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

【解説】

$P(x)$ を 2次式 $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-1)(2x+1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ①$$

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから $P(1) = 3$

①の両辺に $x=1$ を代入すると $P(1) = a+b$

よって $a+b=3$ ……②

また、 $P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 であるから $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

①の両辺に $x = -\frac{1}{2}$ を代入すると $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2} + b$

よって $-\frac{a}{2} + b = 4$ ……③

②, ③を解くと $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{11}{3}$

したがって、求める余りは $-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

6

【解答】 x

【解説】

$P(x) = x^{2017}$ ……① とする。

$P(x)$ を $x^2 + x$ すなわち $x(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = x(x+1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ②$$

①から $P(0) = 0, P(-1) = -1$

よって、②から $b = 0, -a + b = -1$

ゆえに $a = 1, b = 0$

したがって、求める余りは x

7

【解答】 $x^2 + 2x - 4$

【解説】

$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

このときの余りは、2次以下の整式または 0 であるから、

$ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) とおける。

よって $P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c$

更に、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $4x-5$ であるから

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 4x - 5 \quad \dots\dots ①$$

と表される。

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから $P(-2) = -4$

また、①から $P(-2) = 9a - 13$

よって $9a - 13 = -4$ ゆえに $a = 1$

したがって、求める余りは $(x-1)^2 + 4x - 5$ すなわち $x^2 + 2x - 4$

【別解】 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)^2Q_1(x) + 4x - 5 \quad \dots\dots ①$$

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから $P(-2) = -4$

また、①から $P(-2) = 9Q_1(-2) - 13$

よって $9Q_1(-2) - 13 = -4$ ゆえに $Q_1(-2) = 1$

よって、 $R(x)$ を整式として

$$Q_1(x) = (x+2)R(x) + 1$$

と表される。これを①に代入して

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2\{(x+2)R(x)+1\}+4x-5 \\ &= (x-1)^2(x+2)R(x)+(x-1)^2+4x-5 \\ &= (x-1)^2(x+2)R(x)+x^2+2x-4 \end{aligned}$$

ゆえに、求める余りは x^2+2x-4

1

解答 (1) 5 (2) $\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$ (3) $-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

解説

(1) $P(x)$ を $x^2-4=(x-2)(x+2)$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+2)Q_1(x)+2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって $P(2)=2\cdot 2+1=5$

(2) $P(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$P(x)$ を $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ で割った商を $Q_3(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+ax+b$$

よって $P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

①から $P(-2)=2\cdot(-2)+1=-3$

②から $P(1)=1+3=4$

ゆえに $-2a+b=-3$, $a+b=4$

これを解いて $a=\frac{7}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

よって、余りは $\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$

(3) $P(x)$ を $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x+2)(x-2)$ で割った商を $Q_4(x)$ 、余りを px^2+qx+r とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)Q_4(x)+px^2+qx+r$$

よって $P(1)=p+q+r$

$$P(-2)=4p-2q+r$$

$$P(2)=4p+2q+r$$

①から $P(-2)=-3$, $P(2)=5$

②から $P(1)=4$

ゆえに $p+q+r=4$

$$4p-2q+r=-3$$

$$4p+2q+r=5$$

これらの連立方程式を解いて $p=-\frac{1}{3}$, $q=2$, $r=\frac{7}{3}$

よって、余りは $-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

2

解答 (1) $a=3$, $b=2$ (2) $nx-n$

解説

(1) $f(x)$ は $x-1$ で割り切れるから $f(1)=0$

よって $1-a+b=0$ ゆえに $b=a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

したがって $f(x)=x^3-ax+a-1$

$$=(x-1)(x^2+x+1-a)$$

$g(x)=x^2+x+1-a$ とすると $g(1)=0$

よって $3-a=0$ ゆえに $a=3$

これを①に代入して $b=2$

(2) x^n-1 を 2次式 $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると、次の等

式が成り立つ。

$$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$0=a+b \quad \text{よって} \quad b=-a$$

ゆえに $x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ であるから

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$1+1+\cdots+1+1=a$$

よって $a=n$ ゆえに $b=-a=-n$

したがって、求める余りは $nx-n$

3

解答 (1) $-2x+1$ (2) x^2-2x

解説

(1) $P(x)$ を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_1(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件から $P(1)=-1$, $P(-1)=3$

①から $P(1)=a+b$, $P(-1)=-a+b$

よって $a+b=-1$, $-a+b=3$

この連立方程式を解いて $a=-2$, $b=1$

したがって、求める余りは $-2x+1$

(2) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+px^2+qx+r \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $(x-1)^2(x+1)Q_2(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは、 px^2+qx+r を $(x-1)^2$ で割ったときの余りに等しい。

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが定数であるとき、その定数を c とすると

$$px^2+qx+r=p(x-1)^2+c$$

②から $P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+p(x-1)^2+c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

条件から $P(1)=-1$, $P(-1)=3$

③から $P(1)=c$, $P(-1)=4p+c$

ゆえに $c=-1$, $4p+c=3$ よって $p=1$

したがって、求める余りは $1\cdot(x-1)^2-1$ すなわち x^2-2x

1

【解答】 (ア) 1 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3

【解説】

$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$, x^2+1 で割ったときの商を $R(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x^2-1)Q(x) + x + 2$$

$$P(x) = (x^2+1)R(x) + 3x + 4$$

ゆえに

$$P(1) = 3 \quad \text{よって} \quad a + b + c + d = 3 \quad \dots\dots ①$$

$$P(-1) = 1 \quad \text{よって} \quad -a + b - c + d = 1 \quad \dots\dots ②$$

$$P(i) = 4 + 3i \quad \text{よって} \quad ai^3 + bi^2 + ci + d = 4 + 3i$$

すなわち $(-b+d) + (-a+c)i = 4+3i \quad \dots\dots ③$

a, b, c, d は実数であるから、③より $-b+d=4, -a+c=3 \quad \dots\dots ④$

また、①+②、①-②から $2b+2d=4, 2a+2c=2$

すなわち $b+d=2, a+c=1 \quad \dots\dots ⑤$

④、⑤を解いて $a=-1, b=-1, c=2, d=3$

2

【解答】 (1) n が偶数のとき $-n^2+5n-4$, n が奇数のとき $2(n-1)x-n^2+3n-2$

(2) $n=1, 4$

【解説】

(1) $P(x)$ を 2次式 x^2-1 で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと、次の等式が成り立つ。

$$x^{3n} + (3n-2)x^{2n} + (2n-3)x^n - n^2 = (x^2-1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ①$$

[1] n が偶数のとき

①に $x=1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = a + b$$

①に $x=-1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = -a + b$$

これを解くと $a=0, b=-n^2+5n-4$

よって、余りは $-n^2+5n-4$

[2] n が奇数のとき

①に $x=1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = a + b$$

①に $x=-1$ を代入すると

$$-1 + (3n-2) - (2n-3) - n^2 = -a + b$$

これを解くと

$$a = 2n - 2 = 2(n-1), \quad b = -n^2 + 3n - 2$$

よって、余りは $2(n-1)x - n^2 + 3n - 2$

(2) [1] n が偶数のとき

$$-n^2 + 5n - 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (n-1)(n-4) = 0$$

n は偶数であるから $n=4$

[2] n が奇数のとき

$$2(n-1)x - n^2 + 3n - 2 = 0$$

よって $2(n-1)=0$ かつ $-n^2+3n-2=-(n-1)(n-2)=0$

ゆえに $n=1$

以上から $n=1, 4$

3

【解答】 x^3+2x^2+4x+4

【解説】

整式 $P(x)$ を 4次式 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)Q(x) + R(x) \quad R(x) \text{ は 3次以下}$$

$P(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割ったときの余りは、 $R(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割ったときの余りにそれぞれ等しいから、求める整式は $R(x)$ [3次以下の式] である。

$R(x)$ を x^2+1 で割ったときの商は、1次式または定数であり、条件から

$$R(x) = (x^2+1)(ax+b) + 3x + 2$$

同様に $R(x) = (x^2+x+1)(ax+c) + 2x + 3$ と書ける。

$$\text{よって} \quad (x^2+1)(ax+b) + 3x + 2 = (x^2+x+1)(ax+c) + 2x + 3$$

これは x についての恒等式である。

両辺を展開して整理すると

$$ax^3 + bx^2 + (a+3)x + b + 2 = ax^3 + (a+c)x^2 + (a+c+2)x + c + 3$$

係数を比較して $b=a+c, a+3=a+c+2, b+2=c+3$

これを解くと $a=1, b=2, c=1$

したがって、求める整式は

$$R(x) = (x^2+1)(x+2) + 3x + 2 = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$$P(x) = (x-1)(x^{2n}-1)(x^{2n}+1) \\ = (x-1)(x^n-1)(x^n+1)(x^{2n}+1)$$

$$Q(x) = (x^2-1)(x^2+1)(x^n-1) \\ = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^n-1)$$

(1) n が正の奇数のとき、 $(-1)^n = -1$ であるから

$$x = -1 \text{ のとき} \quad x^n + 1 = 0, \quad x = \pm i \text{ のとき} \quad x^{2n} + 1 = 0$$

よって、 x^n+1 は $x+1$ を、 $x^{2n}+1$ は x^2+1 を因数にもつから、 $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れる。

(2) n が正の偶数のとき、 $(-1)^n = 1$ であるから

$$x = -1 \text{ のとき} \quad x^n + 1 = 2, \quad x^{2n} + 1 = 2$$

よって、 $(x^n+1)(x^{2n}+1)$ は $x+1$ を因数にもたないから、 $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れない。

1

【解答】 (1) $x=5, \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x=\pm 2, \pm 3i$ (3) $x=2, 1 \pm 2i$

(4) $x=5, -1 \pm \sqrt{11}i$

【解説】

(1) 移項すると $x^3 - 125 = 0$

左辺を因数分解して $(x-5)(x^2+5x+25) = 0$

よって $x-5=0$ または $x^2+5x+25=0$

$$\text{ゆえに} \quad x = 5, \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ から $(x^2+9)(x^2-4) = 0$

よって $x^2+9=0$ または $x^2-4=0$

ゆえに $x = \pm 2, \pm 3i$

(3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ とすると $P(2) = 8 - 16 + 18 - 10 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 5)$$

$P(x) = 0$ から $x-2=0$ または $x^2-2x+5=0$

したがって $x=2, 1 \pm 2i$

(4) $P(x) = (x-2)(x-1)x - 3 \cdot 4 \cdot 5$ とすると $P(5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 0$

また $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 60$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-5)(x^2 + 2x + 12)$$

$P(x) = 0$ から $x-5=0$ または $x^2+2x+12=0$

よって $x=5, -1 \pm \sqrt{11}i$

2

【解答】 $a=-4, b=20$; 他の解 $x=5$

【解説】

$P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ とおくと

$P(-2) = 0$ から $(-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0$

よって $-2a + b - 28 = 0 \quad \dots\dots ①$

$P(2) = 0$ から $2^3 - 5 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

よって $2a + b - 12 = 0 \quad \dots\dots ②$

①、②を解いて $a=-4, b=20$

ゆえに $P(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

$P(-2) = 0, P(2) = 0$ から、 $P(x)$ は $(x+2)(x-2)$ で割り切れる。

よって $P(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$ したがって $(x+2)(x-2)(x-5) = 0$

ゆえに、他の解は $x=5$

3

【解答】 $a=0, b=1$, 他の解 $x=-2, 1-2i$

【解説】

$1+2i$ が解であるから

$$(1+2i)^3 + a(1+2i)^2 + b(1+2i) + 10 = 0$$

整理すると $(-3a+b-1) + 2(2a+b-1)i = 0$

$-3a+b-1, 2(2a+b-1)$ は実数であるから $-3a+b-1=0, 2(2a+b-1)=0$

第4講 例題

これを解いて $a=0, b=1$

このとき、方程式は $x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて $x=-2, 1\pm 2i$

したがって、他の解は $x=-2, 1-2i$

別解 方程式の係数は実数であるから、 $1+2i$ と共役な複素数 $1-2i$ も解である。

よって、方程式の左辺は $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$ すなわち x^2-2x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx+10$ を x^2-2x+5 で割ると

商は $x+a+2$ 余りは $(2a+b-1)x-5a$

余りが0であるとき $2a+b-1=0, -5a=0$

よって $a=0, b=1$

このとき、方程式は $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて $x=-2, 1\pm 2i$

したがって、他の解は $x=-2, 1-2i$

4

解答 (1) $2t^2-9t-5=0$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

解説

(1) $x=0$ は解ではないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2-9x-1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

よって $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2 \text{ であるから } 2(t^2-2)-9t-1=0$$

ゆえに ① $2t^2-9t-5=0$ …… ①

(2) ① から $(t-5)(2t+1)=0$ よって $t=5, -\frac{1}{2}$

[1] $t=5$ のとき $x+\frac{1}{x}=5$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2-5x+1=0$

これを解くと $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

[2] $t=-\frac{1}{2}$ のとき $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$

両辺に $2x$ を掛けて整理すると $2x^2+x+2=0$

これを解くと $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

したがって、解は $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

5

解答 (1) 0 (2) -1 (3) -2

解説

ω は $x^3=1$ の解であるから $\omega^3=1$

よって $\omega^3-1=0$ すなわち $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \neq 1$ であるから $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{14}+\omega^7+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$
 $=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで、 $\omega^2+\omega+1=0$ から $\omega+1=-\omega^2$

よって $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

別解 $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\frac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

(3) $\omega^2+\omega+1=0$ から $\omega^2+1=-\omega$

よって $\frac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{\omega^3\cdot\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{(\omega^2+1)+3\omega}{\omega^2+1}$
 $=\frac{-\omega+3\omega}{-\omega}=\frac{2\omega}{-\omega}=-2$

6

解答 (1) 順に $1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ (2) -2 (3) -5 (4) 2

解説

(1) α, β, γ が方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の解であるから、次の等式が成り立つ。

$$2x^3-2x^2+3x+1=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \text{ …… ①}$$

よって $2x^3-2x^2+3x+1=2x^3-2(\alpha+\beta+\gamma)x^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-2\alpha\beta\gamma$

これは x についての恒等式であるから、両辺の係数を比較すると

$$\alpha+\beta+\gamma=1, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1^2-2\cdot\frac{3}{2}=-2$

(3) α は方程式の解であるから

$$2\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^3=\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}$$

同様に $\beta^3=\beta^2-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}, \quad \gamma^3=\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma-\frac{1}{2}$

よって $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left(\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)+\left(\beta^2-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma-\frac{1}{2}\right)$
 $=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{3}{2}=-2-\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{3}{2}=-5$

別解 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha))+3\alpha\beta\gamma$
 $=1\cdot\left(-2-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma, \quad \beta+\gamma=1-\alpha, \quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって (与式) $= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
 $=1-1+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

別解 $\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma, \quad \beta+\gamma=1-\alpha, \quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって (与式) $= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

①の両辺に $x=1$ を代入して $2\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって $4=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ ゆえに $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2$

したがって (与式) $=2$

第4講 例題演習

1

【解答】 (1) $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = -1, 1, \pm\sqrt{2}i$

(3) $x = -1, 2 \pm 2\sqrt{2}$ (2) $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

【解説】

(1) 移項すると $x^3 + 27 = 0$

左辺を因数分解して $(x+3)(x^2-3x+9) = 0$

よって $x+3=0$ または $x^2-3x+9=0$

ゆえに $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^4 + x^2 - 2 = 0$ から $(x^2-1)(x^2+2) = 0$

よって $(x+1)(x-1)(x^2+2) = 0$

ゆえに $x+1=0$ または $x-1=0$ または $x^2+2=0$

$x^2 = -2$ から $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

したがって $x = -1, 1, \pm\sqrt{2}i$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ とすると

$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 4 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$P(x) = (x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x^2-4x-4=0$

ゆえに $x = -1, 2 \pm 2\sqrt{2}$

(4) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2$ とすると

$P(-1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^3 + 5(-1)^2 - 2 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 5 & 5 & 0 & -2 & | & -1 \\ & -2 & -3 & -2 & 2 & & \\ \hline 2 & 3 & 2 & -2 & 0 & & \end{array}$$

また、 $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ とすると

$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0$

よって、 $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 2 & -2 & | & \frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & 2 & & \\ \hline 2 & 4 & 4 & 0 & & \end{array}$$

ゆえに $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 4)$

$= (2x-1)(x^2+2x+2)$

よって $(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2) = 0$

ゆえに $x+1=0$ または $2x-1=0$ または $x^2+2x+2=0$

$x+1=0$ から $x = -1$

$2x-1=0$ から $x = \frac{1}{2}$

$x^2+2x+2=0$ から $x = -1 \pm i$

したがって $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

2

【解答】 $a=2, b=-5$, 他の解 $x = -3$

【解説】

$x = -1, 2$ が解であるから

$(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 = 0, 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 = 0$

整理すると $a - b = 7, 2a + b = -1$

これを解いて $a = 2, b = -5$

このとき、方程式は $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$

したがって、他の解は $x = -3$

【別解】 他の解を $x = \alpha$ とおくと、条件から、次の等式が成り立つ。

$x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x+1)(x-2)(x-\alpha)$

右辺を展開して整理すると

$x^3 + ax^2 + bx - 6 = x^3 - (\alpha+1)x^2 + (\alpha-2)x + 2\alpha$

両辺の係数を比較すると

$a = -\alpha - 1, b = \alpha - 2, -6 = 2\alpha$

これを解いて $\alpha = -3, a = 2, b = -5$

3

【解答】 $a = -6, b = 13$, 他の解は $2, 2 - i$

【解説】

(解1) $2+i$ が解であるから $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) - 10 = 0$

整理して $3a + 2b - 8 + (4a + b + 11)i = 0$

$3a + 2b - 8, 4a + b + 11$ は実数であるから

$3a + 2b - 8 = 0, 4a + b + 11 = 0$

これを解いて $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-2)(x^2-4x+5) = 0$

これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

(解2) 方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって、方程式の左辺は $(x-(2+i))(x-(2-i))$ すなわち x^2-4x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3 + ax^2 + bx - 10$ を $x^2 - 4x + 5$ で割ると、

商は $x + a + 4$, 余りは $(4a + b + 11)x - 5(a + 6) = 0$

余りが0であるとき $4a + b + 11 = 0, -5(a + 6) = 0$

よって $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $(x^2 - 4x + 5)(x - 2) = 0$ これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

【参考】 「3次方程式の解と係数の関係」を利用して、次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう1つの解を p とすると、解と係数の関係により

$p + (2+i) + (2-i) = -a$

$(2+i)p + (2-i)p + (2+i)(2-i) = b$

$(2+i)(2-i)p = 10$

これを解いて $p = 2, a = -6, b = 13$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

4

【解答】 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

【解説】

$x=0$ は方程式の解でないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

よって $x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$ であるから $(t^2 - 2) - 7t + 14 = 0$

ゆえに $t^2 - 7t + 12 = 0$ よって $(t-3)(t-4) = 0$

したがって $t = 3, 4$

[1] $t = 3$ のとき $x + \frac{1}{x} = 3$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - 3x + 1 = 0$

これを解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

[2] $t = 4$ のとき $x + \frac{1}{x} = 4$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - 4x + 1 = 0$

これを解くと $x = 2 \pm \sqrt{3}$

したがって、解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

5

【解答】 (1) -1 (2) 0 (3) 3

【解説】

(1) ω は方程式 $x^2 + x + 1 = 0, x^3 = 1$ の解であるから

$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$

よって $\omega^7 + \omega^8 = (\omega^3)^2 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

(2) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1 = \frac{\omega + 1 + \omega^2}{\omega^2} = 0$

(3) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ から、 $\omega^2 = -\omega - 1$ となり

$(\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 = (\omega + 2(-\omega - 1))^2 + (2\omega - \omega - 1)^2$

$= (-\omega - 2)^2 + (\omega - 1)^2$

$= 2\omega^2 + 2\omega + 5$

$= 2(-\omega - 1) + 2\omega + 5 = 3$

6

【解答】 (1) $\frac{2}{7}$ (2) 13 (3) 24 (4) 77 (5) 3 (6) 1

【解説】

解と係数の関係から

$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \alpha\beta\gamma = -7$

(1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$
 $= 3(13 - (-2)) + 3 \cdot (-7) = 45 - 21 = 24$

(4) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

ここで $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\alpha + \gamma\alpha \cdot \alpha\beta)$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= (-2)^2 - 2 \cdot (-7) \cdot 3 = 46$$

よって $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 13^2 - 2 \cdot 46 = 169 - 92 = 77$

(5) $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$ の3つの解が α, β, γ であるから

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \quad \dots\dots ①$$

①の両辺に $x=1$ を代入して

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

よって $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 3$

別解 $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$

$$= 1 - 3 + (-2) - (-7) = 3$$

(6) $\alpha + \beta + \gamma = 3$ から $\alpha + \beta = 3 - \gamma, \beta + \gamma = 3 - \alpha, \gamma + \alpha = 3 - \beta$

したがって $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma)$

①の両辺に $x=3$ を代入して $3^3 - 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 7 = (3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma)$

よって $(3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma) = 1$ すなわち $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = 1$

別解 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (3 - \alpha)(3 - \beta)(3 - \gamma)$

$$= 27 - 9(\alpha + \beta + \gamma) + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 27 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) - (-7) = 1$$

1

解答 $a=0, -4, \frac{1}{2}$

解説

与えられた3次方程式の左辺を a について整理すると

$$(x^2 - 1)a + x^3 + x^2 = 0$$

$$(x+1)(x-1)a + x^2(x+1) = 0$$

ゆえに $(x+1)\{x^2 + (x-1)a\} = 0$

よって $(x+1)(x^2 + ax - a) = 0$

したがって $x+1=0$ または $x^2 + ax - a = 0$

この3次方程式が2重解をもつのは、次の[1]または[2]の場合である。

[1] $x^2 + ax - a = 0$ が $x \neq -1$ の重解をもつ。

判別式を D とすると $D=0$ かつ $-\frac{a}{2 \cdot 1} \neq -1$

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = a(a+4)$$

$D=0$ とすると $a=0, -4$

これは $a \neq 2$ を満たす。

[2] $x^2 + ax - a = 0$ の解の1つが -1 で、他の解が -1 でない。

-1 が解であるための条件は $(-1)^2 + a(-1) - a = 0$

これを解いて $a = \frac{1}{2}$

このとき、方程式は $(x+1)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0$

したがって $(x+1)^2(2x-1) = 0$

ゆえに、 $x = -1$ は2重解である。

以上から $a=0, -4, \frac{1}{2}$

2

解答 $a = -\frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}, \alpha = -\frac{4}{5}$

解説

条件から $x^3 + 2ax^2 + ax + b = (x-1)^2(x-\alpha)$

右辺を展開すると $x^3 + 2ax^2 + ax + b = x^3 - (\alpha+2)x^2 + (2\alpha+1)x - \alpha$

両辺の各項の係数を比較して

$$2a = -(\alpha+2), a = 2\alpha+1, b = -\alpha$$

これを解いて $a = -\frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}, \alpha = -\frac{4}{5}$

3

解答 (ア) 5 (イ) -15 (ウ) -75

解説

3次方程式の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -5$$

よって $\alpha + \beta = -\gamma, \beta + \gamma = -\alpha, \gamma + \alpha = -\beta$

ゆえに $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (-\gamma) \cdot (-\alpha) \cdot (-\beta)$

$$= -\alpha\beta\gamma = -(-5)$$

$$= 5$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= 0 + 3 \cdot (-5) = -15$$

また、 $\alpha^3 = 3\alpha - 5, \beta^3 = 3\beta - 5, \gamma^3 = 3\gamma - 5$ であるから

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = \alpha^2(3\alpha - 5) + \beta^2(3\beta - 5) + \gamma^2(3\gamma - 5)$$

$$= 3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - 5(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$= 3(3\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - 5\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\}$$

$$= 3 \cdot (-15) - 5\{0^2 - 2 \cdot (-3)\}$$

$$= -75$$

別解 (イ)について、(ウ)と同様に次数を下げる方法で解いてもよい。

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (3\alpha - 5) + (3\beta - 5) + (3\gamma - 5)$$

$$= 3(\alpha + \beta + \gamma) - 15 = 3 \cdot 0 - 15$$

$$= -15$$

4

解答 $x^3 - 3x - 7 = 0$

解説

3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) + (\gamma - 1) = (\alpha + \beta + \gamma) - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) + (\beta - 1)(\gamma - 1) + (\gamma - 1)(\alpha - 1)$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3$$

$$= 0 - 2 \cdot 3 + 3 = -3$$

また、 $x^3 - 3x^2 - 5 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ が成り立つ。

この両辺に $x=1$ を代入して $-7 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$

よって $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = 7$

ゆえに、求める3次方程式は $x^3 - 3x - 7 = 0$

別解 $x-1=X$ とおくと、 $x=X+1$ は $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ を満たすから

$$(X+1)^3 - 3(X+1)^2 - 5 = 0 \quad \text{整理すると} \quad X^3 - 3X - 7 = 0$$

よって $x^3 - 3x - 7 = 0$

第4講 レベルB

1

【解答】 -27

【解説】

$$x^3 - 1 = 0 \text{ から } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\text{よって } x = 1 \text{ または } x^2 + x + 1 = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の解の1つを ω とおくと、他の解は ω^2 となる。

$$\text{また } \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$A^2 = \{(a-b)(a-c)(b-c)\}^2$ は、 a, b, c の3文字のうち、どの2つの文字を入れ替えても符号は同じである。

ゆえに、 $a = 1, b = \omega, c = \omega^2$ としてよい。

$$\begin{aligned} A &= (1-\omega)(1-\omega^2)(\omega-\omega^2) = (1-\omega-\omega^2+\omega^3)(\omega-\omega^2) \\ &= (1-\omega-\omega^2+1)(\omega-\omega^2) = \{2-(\omega^2+\omega)\}(\omega-\omega^2) \\ &= \{2-(-1)\}(\omega-\omega^2) = 3(\omega-\omega^2) \end{aligned}$$

$$\omega^2 = -(\omega+1) \text{ であるから } A = 3\{\omega + (\omega+1)\} = 3(2\omega+1)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } A^2 &= \{3(2\omega+1)\}^2 = 9(4\omega^2 + 4\omega + 1) \\ &= 9\{4(\omega^2 + \omega + 1) - 3\} = 9(4 \cdot 0 - 3) = -27 \end{aligned}$$

2

$$\text{【解答】 (1) } a = -3, b = -6, c = 5 \quad (2) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

【解説】

(1) $x = 0$ は①の解ではないから、①の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 6x - 1 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\text{すなわち } x^2 + \frac{9}{x^2} - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) + 5 = 0$$

よって、 $y = x - \frac{3}{x}$ とおくと、 y についての2次方程式 $y^2 - 6y + 5 = 0$ が得られる。

したがって $a = -3, b = -6, c = 5$

(2) $y^2 - 6y + 5 = 0$ から $(y-1)(y-5) = 0$

これを解いて $y = 1, 5$

$$\text{[1] } y = 1 \text{ のとき } x - \frac{3}{x} = 1$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \text{ であるから } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{[2] } y = 5 \text{ のとき } x - \frac{3}{x} = 5$$

$$x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ であるから } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$\text{ゆえに、①の解は } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

3

【解答】 割り切れる

【解説】

$$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1 \text{ とおく.}$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の1つの解を ω とすると、他の解は ω^2 となる。

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ であるから } \omega^3 = \omega(-\omega - 1) = -(\omega^2 + \omega + 1) + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= \{\omega \cdot (\omega^3)^{33} + 1\}^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (\omega + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= \omega^{200} + \omega^{100} + 1 \\ &= \omega^2 \cdot (\omega^3)^{66} + \omega \cdot (\omega^3)^{33} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様に } f(\omega^2) &= \{(\omega^2)^{100} + 1\}^{100} + \{(\omega^2)^2 + 1\}^{100} + 1 \\ &= (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^4 + 1)^{100} + 1 \\ &= (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{100} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

よって、 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$ で割り切れる。

章末問題A

1

【解答】 $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

【解説】

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{3}i)^2-1^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{aligned}$$

$$2014=3 \times 671+1 \text{ から } \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2014} = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3\right\}^{671} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = (-1)^{671} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

【別解】 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2014} &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2014} = \cos \frac{2014}{3}\pi + i \sin \frac{2014}{3}\pi \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

【注意】 別解は、数学Ⅲで学習する「複素数平面」の内容を利用している。

2

【解答】 (ア) -2 (イ) $-2\sqrt{3}$ (ウ) 8 (エ) 0
(オ) n が 3 の倍数であること

【解説】

$$(-1+\sqrt{3}i)^2 = 1-2\sqrt{3}i+3i^2 = -2-2\sqrt{3}i$$

よって、 $(-1+\sqrt{3}i)^2$ の実部は -2 、虚部は $-2\sqrt{3}$ である。

$$\begin{aligned} \text{また } (-1+\sqrt{3}i)^3 &= (-1+\sqrt{3}i)^2(-1+\sqrt{3}i) \\ &= -2(1+\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i) = 8 \end{aligned}$$

よって、 $(-1+\sqrt{3}i)^3$ の実部は 8 、虚部は 0 である。

ゆえに、 k を自然数とすると、 $n=3k$ のとき $(-1+\sqrt{3}i)^{3k} = 8^k$

このとき、実部は 8^k 、虚部は 0 でともに整数である。

また、 $n=3k+1$ 、 $3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} (-1+\sqrt{3}i)^{3k+1} &= (-1+\sqrt{3}i)^{3k}(-1+\sqrt{3}i) \\ &= 8^k(-1+\sqrt{3}i) = -8^k + 8^k\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1+\sqrt{3}i)^{3k+2} &= (-1+\sqrt{3}i)^{3k}(-1+\sqrt{3}i)^2 \\ &= 8^k(-2-2\sqrt{3}i) = -2 \cdot 8^k - 2 \cdot 8^k\sqrt{3}i \end{aligned}$$

よって、 $n=3k+1$ 、 $3k+2$ のとき、実部と虚部がともに整数となることはない。

また、 $n=1$ 、 2 のときも実部と虚部はともに整数ではない。

したがって、 $(-1+\sqrt{3}i)^n$ の実部と虚部がともに整数となるために自然数 n が満たすべき必要十分条件は n が 3 の倍数であることである。

3

【解答】 略

【解説】

x の 2 次方程式

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2+2(\tan\theta)x+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の判別式を、それぞれ D_1 、 D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4} = \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{D_2}{4} = \tan^2\theta - 3$$

[1] $D_2 < 0$ のとき $\textcircled{2}$ は虚数解をもつ。

[2] $D_2 \geq 0$ すなわち $\tan^2\theta \geq 3$ のとき

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ より、 $\tan\theta \geq 0$ であるから $\tan\theta \geq \sqrt{3}$

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ の範囲で解くと $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$ このとき $0 < \cos\theta \leq \frac{1}{2}$

$$\textcircled{3} \text{ から } \frac{D_1}{4} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

よって、 $D_1 < 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ は虚数解をもつ。

[1]、[2] から、与えられた 4 次方程式は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

4

【解答】 (ア) -2 (イ) 2 (ウ) 2

【解説】

(1) $x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて、その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = p^2 - (3p^2 - 8) = 8 - 2p^2 = -2(p+2)(p-2)$$

x が実数であるための条件は

$$D \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad -2(p+2)(p-2) \geq 0$$

これを解いて $-2 \leq p \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(2) $x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて解くと

$$x = -p \pm \sqrt{8-2p^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

p は整数であるから、 $\textcircled{1}$ より p のとりうる値は $-2, -1, 0, 1, 2$

$\textcircled{2}$ は、 $p=-2$ のとき $x=2$ $p=-1$ のとき $x=1 \pm \sqrt{6}$

$p=0$ のとき $x=\pm 2\sqrt{2}$ $p=1$ のとき $x=-1 \pm \sqrt{6}$

$p=2$ のとき $x=-2$

よって、整数の組 (x, p) は $(2, -2)$ 、 $(-2, 2)$ の 2 通りある。

5

【解答】 (1) $k = \frac{3}{4}$ 、 $\alpha = -\frac{3}{2}$ (2) $x = -\frac{3}{2}$ 、 $-\frac{3}{2}-2i$

【解説】

(1) $\alpha^2+(3+2i)\alpha+k(2+i)=0$ から $(\alpha^2+3\alpha+3k)+(2\alpha+4k)i=0$

$\alpha^2+3\alpha+3k$ 、 $2\alpha+4k$ は実数であるから

$$\alpha^2+3\alpha+3k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2\alpha+4k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ から $\alpha=-2k$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $(-2k)^2+3 \cdot (-2k)+3k=0$

すなわち $k(4k-3)=0$

$k \neq 0$ であるから $k = \frac{3}{4}$ このとき $\alpha = -\frac{3}{2}$

(2) $k = \frac{3}{4}$ であるから $x^2+(3+2i)x+\frac{3}{4}(2+i)^2=0$

すなわち $x^2+(3+2i)x+\frac{9}{4}+3i=0$

$x = -\frac{3}{2}$ がこの等式を満たすことを利用して、左辺を因数分解すると

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + 2i\right) = 0$$

よって、等式を満たす複素数は $x = -\frac{3}{2}$ 、 $-\frac{3}{2}-2i$

6

【解答】 $a = -2$ 、 0

【解説】

2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+4=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$ の判別式を D とすると、条件から

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 4 < 0$$

よって $(a+3)(a-1) < 0$ から $-3 < a < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

また、 $\textcircled{1}$ の虚数解を α とおくと $\alpha^2-2(a+1)\alpha+4=0$ から

$$\alpha^2=2(a+1)\alpha-4$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha[2(a+1)\alpha-4] = 2(a+1)\alpha^2-4\alpha \\ &= 2(a+1)[2(a+1)\alpha-4]-4\alpha = 4(a+1)^2\alpha-8(a+1)-4\alpha \\ &= [4(a+1)^2-4]\alpha-8(a+1) \end{aligned}$$

条件より、 a 、 α^3 は実数であり、 α は虚数であるから

$$4(a+1)^2-4=0$$

ゆえに、 $(a+1)^2=1$ から $a=-2$ 、 0

これらはともに $\textcircled{2}$ を満たす。

したがって $a=-2$ 、 0

7

【解答】 $0 \leq t < 4$

【解説】

方程式は、異なる 2 つの実数解をもつから、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= p^2-4(p^2+p-1) = -(3p^2+4p-4) \\ &= -(p+2)(3p-2) > 0 \end{aligned}$$

よって $(p+2)(3p-2) < 0$

ゆえに $-2 < p < \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

また、解と係数の関係から $\alpha+\beta=-p$ 、 $\alpha\beta=p^2+p-1$

よって $t=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$$= p^2+p-1-p+1 = p^2$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ の範囲において $0 \leq t < 4$

8

【解答】 (1) $\frac{3^n-1}{2}x + \frac{3-3^n}{2}$ (2) $a = -2$ 、余り 1

【解説】

(1) x^n を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax+b$

章末問題A

とすると、次の等式が成り立つ。

$$x^n = (x-1)(x-3)Q(x) + ax + b$$

両辺に $x=1$ を代入すると $a+b=1$

$$x=3$$
 を代入すると $3a+b=3^n$

この連立方程式を解いて $a = \frac{3^n-1}{2}, b = \frac{3-3^n}{2}$

したがって、求める余りは $\frac{3^n-1}{2}x + \frac{3-3^n}{2}$

(2) $f(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $2x-1$ であるから、このときの商を $Q_1(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + 2x-1$$

この等式の両辺に $x=1, 2$ を代入すると

$$f(1)=1, f(2)=3 \dots\dots ①$$

また、 $f(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは $ax+7$ であるから、このときの商を $Q_2(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q_2(x) + ax+7$$

この等式の両辺に $x=2, 3$ を代入すると

$$f(2)=2a+7, f(3)=3a+7 \dots\dots ②$$

更に、 $f(x)$ を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ 、余りを $bx+c$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$f(x) = (x-1)(x-3)Q_3(x) + bx+c$$

この等式の両辺に $x=1, 3$ を代入すると

$$f(1)=b+c, f(3)=3b+c \dots\dots ③$$

①, ②, ③ から $b+c=1, 2a+7=3, 3b+c=3a+7$

この連立方程式を解いて $a=-2, b=0, c=1$

したがって、求める余りは 1

9

【解答】 (1) $a=-1$ のとき $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}; a=1$ のとき $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2) $-\frac{1}{4} < a < 2, 2 < a$ (3) $a = -\frac{1}{4}, 2$

【解説】

$f(x) = x^3 - (a+1)x + a$ とおく。

$f(1) = 1^3 - (a+1) \cdot 1 + a = 0$ から、 $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$f(x) = (x-1)(x^2+x-a)$$

よって、①は $(x-1)(x^2+x-a) = 0$

(1) [1] $a=-1$ のとき、①は $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

よって、①の解は $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

[2] $a=1$ のとき、①は $(x-1)(x^2+x-1) = 0$

よって、①の解は $x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2) ①の異なる実数解の個数が3個となるためには、 $x^2+x-a=0$ が1でない異なる2つの実数解をもてばよい。

$x^2+x-a=0$ において $x=1$ とすると、 $1+1-a=0$ から

$$a=2 \quad \text{よって} \quad a \neq 2 \dots\dots ②$$

また、 $x^2+x-a=0$ の判別式を D とすると

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = 4a + 1$$

よって、 $x^2+x-a=0$ が異なる2つの実数解をもつとき、 $D = 4a + 1 > 0$ から

$$a > -\frac{1}{4} \dots\dots ③$$

②, ③ から、求める a の条件は $-\frac{1}{4} < a < 2, 2 < a$

(3) ①の異なる実数解の個数が2個となるためには、次の条件[1], [2]のどちらか一方を満たせばよい。

[1] $x^2+x-a=0$ が1でない重解をもつ

[2] $x^2+x-a=0$ が $x=1$ と1でない解を1つずつもつ

[1]の場合

$$(2) \text{ から } D = 4a + 1 = 0 \text{ かつ } a \neq 2$$

$$4a + 1 = 0 \text{ から } a = -\frac{1}{4}$$

これは $a \neq 2$ を満たす。

[2]の場合

$$(2) \text{ から } D = 4a + 1 > 0 \text{ かつ } a = 2$$

$a=2$ のとき $D = 4 \cdot 2 + 1 = 9 > 0$ となり、 $D > 0$ を満たす。

[1], [2] から、求める a の条件は $a = -\frac{1}{4}, 2$

章末問題B

1

【解答】 $a=1, \frac{5}{3}$

【解説】

方程式は、異なる2つの実数解をもつから、判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4(a-1)^2 = -3a^2 + 8a - 4 = -(3a-2)(a-2) > 0$$

ゆえに $(3a-2)(a-2) < 0$ よって $\frac{2}{3} < a < 2 \dots\dots ①$

次に、方程式の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = (a-1)^2$$

ゆえに $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4(a-1)^2 = -3a^2 + 8a - 4 > 0$

$|\alpha - \beta|$ が整数であるとき、 $(\alpha - \beta)^2$ も整数である。

よって、 $-3a^2 + 8a - 4$ が整数の平方になる場合を考える。

$$b = -3a^2 + 8a - 4 \text{ とすると } b = -3\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

①の範囲における b のとりうる値の範囲は $0 < b \leq \frac{4}{3}$

b が整数の平方となるのは、 $b=1$ のときである。

ゆえに $-3a^2 + 8a - 4 = 1$ 整理して $3a^2 - 8a + 5 = 0$

よって $(a-1)(3a-5) = 0$ したがって $a = 1, \frac{5}{3}$

これはともに①を満たす。

2

【解答】 $\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

【解説】

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0 \dots\dots ①$$

①を y について整理すると $3y^2 + (4x+5)y + 2x^2 + 4x - 4 = 0 \dots\dots ②$

座標平面上の点 (x, y) が①を満たすということは、①を満たす実数 x, y があるということであり、 y についての2次方程式②が実数解をもつことと同値である。

そのための必要十分条件は、②の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ である。

$$D = (4x+5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2x^2 + 4x - 4) = -8x^2 - 8x + 73$$

$D \geq 0$ から $-8x^2 - 8x + 73 \geq 0$ よって $8x^2 + 8x - 73 \leq 0$

これを解くと $\frac{-2-5\sqrt{6}}{4} \leq x \leq \frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって、 x のとりうる最大の値は $\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

3

【解答】 略

【解説】

①, ②の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とする。

$a > 0$ であるから $D_1 = 1 + 4a > 0, D_2 = a^2 + 4 > 0$

よって、①, ②はいずれも異なる2つの実数解をもつ。

①の2つの解を α, β とすると $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -a$

章末問題B

また、 $\alpha^2 = \alpha + a$, $\beta^2 = \beta + a$ が成り立つ。

②の左辺について、 $f(x) = x^2 + ax - 1$ とすると

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= (\alpha^2 + a\alpha - 1)(\beta^2 + a\beta - 1) \\ &= ((a+1)\alpha + a - 1)((a+1)\beta + a - 1) \\ &= (a+1)^2\alpha\beta + (a^2 - 1)(\alpha + \beta) + (a-1)^2 \\ &= (a+1)^2 \cdot (-a) + (a^2 - 1) \cdot 1 + (a-1)^2 = -a(a^2 + 3) \end{aligned}$$

条件 $a > 0$ から $f(\alpha)f(\beta) < 0$

よって、放物線 $y = f(x)$ は $\alpha < x < \beta$ の範囲で x 軸と交点を1つもつ。

したがって、②の解のうち1つだけが①の解の間にある。

4

解答 -8

解説

$$\alpha = 1 + \sqrt{3}i, \beta = 1 - \sqrt{3}i \text{ のとき } \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 4$$

よって、 α, β は2次方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ の2つの解である。

$$\text{ゆえに } \alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 2\beta + 4 = 0 \dots\dots ①$$

したがって、①から

$$\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 4\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 4) = \alpha^{n-1}(\alpha + 1)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) = 0$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 2 = \alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 4) + \alpha - 2 = \alpha - 2 = -\beta$$

$$\beta^2 - 4\beta + 8 = (\beta^2 - 2\beta + 4) - 2\beta + 4 = 0 - 2(\beta - 2) = 2\alpha$$

$$\text{よって、値を求める式を } P \text{ とすると } P = \left(\frac{2\alpha}{-\beta}\right)^3 = -\frac{8\alpha^3}{\beta^3}$$

ここで、①より $\alpha^2 = 2\alpha - 4$ であるから

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(2\alpha - 4) = 2\alpha^2 - 4\alpha = 2(2\alpha - 4) - 4\alpha = -8$$

同様に $\beta^3 = -8$

$$\text{したがって } P = -\frac{8 \cdot (-8)}{-8} = -8$$

参考 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$ のとき、 $x + 2 \neq 0$ であるから、 $x^2 - 2x + 4 = 0$ の両辺に $x + 2$ を掛けると

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\text{すなわち } x^3 + 8 = 0$$

よって、 α, β は -8 の3乗根で $\alpha^3 = -8, \beta^3 = -8$

5

解答 (1) $\alpha^3 = 14 - 3\alpha$ (2) 略

解説

$$\begin{aligned} (1) \alpha^3 &= (\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3 \\ &= (\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3 - (\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3 \\ &\quad - 3 \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} \times \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} \times (\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}) \\ &= (5\sqrt{2}+7) - (5\sqrt{2}-7) - 3 \times \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} \times \alpha \\ &= 14 - 3 \times \sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} \times \alpha = 14 - 3 \times \sqrt[3]{1} \times \alpha \\ &= 14 - 3\alpha \end{aligned}$$

(2) (1)より $\alpha^3 + 3\alpha - 14 = 0$

よって、 α は3次方程式 $x^3 + 3x - 14 = 0$ の実数解である。

$$x^3 + 3x - 14 = 0 \text{ から } (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0$$

$$\text{ここで、} x^2 + 2x + 7 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると } \frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 7 = -6 < 0$$

ゆえに、 $x^2 + 2x + 7 = 0$ は実数解をもたない。

よって、3次方程式 $x^3 + 3x - 14 = 0$ の実数解は $x = 2$ だけである。

したがって、 $\alpha = 2$ であるから、 α は整数である。

6

解答 (1) $\omega^2 + \omega^4 = -1, \omega^5 + \omega^{10} = -1$

(2) k を正の整数とすると $n = 3k - 2, 3k - 1$ のとき $-1, n = 3k$ のとき 2

(3) 略

解説

$$(1) \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ から } 2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

$$\text{両辺を2乗すると } (2\omega + 1)^2 = -3$$

$$\text{整理すると } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$\text{両辺に } \omega - 1 \text{ を掛けると } (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\text{よって } \omega^3 - 1 = 0 \text{ すなわち } \omega^3 = 1 \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ より } \omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

$$\omega^5 + \omega^{10} = \omega^3 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

(2) ①, ②より、 k を正の整数とすると

[1] $n = 3k - 2$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k-2} + \omega^{6k-4} = (\omega^3)^{k-1} \cdot \omega + (\omega^3)^{2k-2} \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

[2] $n = 3k - 1$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k-1} + \omega^{6k-2} = (\omega^3)^{k-1} \cdot \omega^2 + (\omega^3)^{2k-1} \cdot \omega = \omega^2 + \omega = -1$$

[3] $n = 3k$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k} + \omega^{6k} = (\omega^3)^k + (\omega^3)^{2k} = 1 + 1 = 2$$

[1]~[3]から、 k を正の整数とすると

$$n = 3k - 2, 3k - 1 \text{ のとき } \omega^n + \omega^{2n} = -1$$

$$n = 3k \text{ のとき } \omega^n + \omega^{2n} = 2$$

(3) $(\omega + 2)^n, (\omega^2 + 2)^n$ をそれぞれ二項定理により展開すると

$$\begin{aligned} (\omega + 2)^n &= \omega^n + {}_n C_1 \cdot \omega^{n-1} \cdot 2 + {}_n C_2 \cdot \omega^{n-2} \cdot 2^2 \\ &\quad + \dots\dots + {}_n C_{n-1} \cdot \omega \cdot 2^{n-1} + 2^n \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 + 2)^n &= (\omega^2)^n + {}_n C_1 \cdot (\omega^2)^{n-1} \cdot 2 + {}_n C_2 \cdot (\omega^2)^{n-2} \cdot 2^2 \\ &\quad + \dots\dots + {}_n C_{n-1} \cdot \omega^2 \cdot 2^{n-1} + 2^n \dots\dots ④ \end{aligned}$$

③+④より

$$\begin{aligned} &(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n \\ &= \{\omega^n + (\omega^2)^n\} + {}_n C_1 \cdot 2 \cdot \{\omega^{n-1} + (\omega^2)^{n-1}\} + \dots\dots + {}_n C_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot \{\omega + \omega^2\} + 2 \cdot 2^n \\ &= (\omega^n + \omega^{2n}) + 2 \cdot {}_n C_1 \cdot (\omega^{n-1} + \omega^{2n-1}) + \dots\dots + 2^{n-1} \cdot {}_n C_{n-1} \cdot (\omega + \omega^2) + 2^{n+1} \end{aligned}$$

ここで(2)から、 $\omega^n + \omega^{2n}, \omega^{n-1} + \omega^{2n-1}, \dots\dots, \omega + \omega^2$ は2または-1であり、整数である。

また、 ${}_n C_1, {}_n C_2, \dots\dots, {}_n C_{n-1}$ も整数である。

よって、 n を正の整数とすると、 $(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n$ は整数である。

7

解答 (1) 略 (2) $p = 3$

解説

(1) $x^3 + nx^2 + n^2x = p \dots\dots ①$ とする。

①は $x = \alpha$ を解にもつから $\alpha(\alpha^2 + n\alpha + n^2) = p$

右辺の p は2以上の整数で、 α は正の整数、 $\alpha^2 + n\alpha + n^2$ は整数であるから、 α は素数 p の正の約数である。

よって $\alpha = 1$ または $\alpha = p$

$$\alpha = p \text{ のとき } p^2 + np + n^2 = 1 \dots\dots ②$$

ところが、 p は2以上であるから

$$n^2 + pn + p^2 = \left(n + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 \geq \frac{3}{4}p^2 \geq 3$$

これは②の右辺が1であることに矛盾する。

したがって $\alpha = 1$

(2) 実数係数の3次方程式が虚数解 $k + \sqrt{2}i$ をもつから、それと共役な複素数 $k - \sqrt{2}i$ もこの方程式の解である。

$x = 1$ も解であるから、3次方程式の解と係数の関係により

$$1 + (k + \sqrt{2}i) + (k - \sqrt{2}i) = -n \dots\dots ①$$

$$1 \cdot (k + \sqrt{2}i) + (k + \sqrt{2}i)(k - \sqrt{2}i) + (k - \sqrt{2}i) \cdot 1 = n^2 \dots\dots ②$$

$$1 \cdot (k + \sqrt{2}i)(k - \sqrt{2}i) = p \text{ すなわち } k^2 + 2 = p \dots\dots ③$$

$$① \text{ から } 2k + 1 = -n \text{ すなわち } n = -(2k + 1) \dots\dots ④$$

$$② \text{ から } k^2 + 2k + 2 = n^2 \dots\dots ⑤$$

$$④, ⑤ \text{ から } n \text{ を消去して整理すると } 3k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } (k+1)(3k-1) = 0 \text{ よって } k = -1, \frac{1}{3}$$

③から、 $k = -1$ のとき $p = 3$ (素数となり適する)

$$k = \frac{1}{3} \text{ のとき } p = \frac{19}{9} \text{ (整数でないから不適)}$$

したがって、求める p の値は $p = 3$

8

解答 (1) $a + b + c = 0$ (2) $c = a - 1$ (3) $b = 7$

解説

(1) $x^3 f(x) = (x-1)g(x)$ から

$$x^3(ax^2 + bx + c) = (x-1)g(x) \dots\dots ①$$

①に $x = 1$ を代入すると $a + b + c = 0 \dots\dots ②$

(2) ②から $c = -a - b \dots\dots ③$

①に代入すると $x^3(ax^2 + bx + a - b) = (x-1)g(x)$

よって $x^3\{a(x+1)(x-1) + b(x-1)\} = (x-1)g(x)$

両辺を $x-1$ で割ると $x^3(ax + a + b) = g(x) \dots\dots ④$

④に $x = 1$ を代入すると $2a + b = g(1)$

$g(1) = 1$ であるから $2a + b = 1$

よって $b = 1 - 2a \dots\dots ⑤$

⑤を③に代入して $c = -a - (1 - 2a) = a - 1$

(3) ④から $g(x) - 1 = x^3(ax + a + b) - 1$

⑤を代入すると

$$\begin{aligned} g(x) - 1 &= x^3(ax + a + 1 - 2a) - 1 = ax^4 - (a-1)x^3 - 1 \\ &= (x-1)(ax^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

よって、 $g(x) - 1$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき、 $ax^3 + x^2 + x + 1$ は $x-1$ で割り切れる。

ゆえに、 $h(x) = ax^3 + x^2 + x + 1$ とすると $h(1) = 0$
 よって $a \cdot 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 0$ ゆえに $a = -3$
 このとき、⑤ から $b = 7$

1

【解答】 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $a=2, b=2$ (3) $\alpha^3=8, \beta^3=8$

(4) n が 3 の倍数のとき $c(n) = \frac{i}{2}$, n が 3 の倍数でないとき $c(n) = -i$

【解説】

(1) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 4$

よって $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 4}{4^2} = -\frac{1}{4}$

(2) $\frac{\beta}{\alpha}$ が $2x^2 + ax + b = 0$ の解であるから $2 \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + a \cdot \frac{\beta}{\alpha} + b = 0$

よって $2\beta^2 + a\alpha\beta + b\alpha^2 = 0 \dots\dots ①$

α, β は $x^2 + 2x + 4 = 0$ の解であるから $\alpha^2 = -2\alpha - 4, \beta^2 = -2\beta - 4$

① に代入して $2(-2\beta - 4) + a\alpha\beta + b(-2\alpha - 4) = 0$

$\alpha\beta = 4, \beta = -2 - \alpha$ を代入して $-4(-2 - \alpha) - 8 + 4a - 2b\alpha - 4b = 0$

α について整理して $4a - 4b + (4 - 2b)\alpha = 0$

a, b は実数, α は虚数であるから $4a - 4b = 0, 4 - 2b = 0$

よって $a = 2, b = 2$

(3) $\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = (-2\alpha - 4) \cdot \alpha = -2\alpha^2 - 4\alpha = -2(-2\alpha - 4) - 4\alpha = 8$

同様に $\beta^3 = 8$

(4) $c(n) = \frac{1}{\left\{i - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right\} \left\{i - \left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}} = \frac{1}{-1 - \left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n + \left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}i + \left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)^n}$

$\alpha\beta = 4$ から $c(n) = -\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n + \left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}i}$

(3) から $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = 1, \left(\frac{\beta}{2}\right)^3 = 1$

[1] $n = 3k$ (k は自然数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k} = \left[\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\right]^k = 1$$

同様に $\left(\frac{\beta}{2}\right)^n = 1$

よって $c(n) = -\frac{1}{(1+i)i} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$

[2] $n = 3k + 1$ (k は 0 以上の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+1} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

同様に $\left(\frac{\beta}{2}\right)^n = \frac{\beta}{2}$

よって $c(n) = -\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\beta}{2}\right)\right\}i} = -\frac{1}{\frac{\alpha + \beta}{2}i} = \frac{1}{i} = -i$

[3] $n = 3k + 2$ (k は 0 以上の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

同様に $\left(\frac{\beta}{2}\right)^n = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{よって } c(n) &= -\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}i} = -\frac{1}{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}i} \\ &= -\frac{1}{\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{4}i} = \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

[1] ~ [3] から n が 3 の倍数のとき $c(n) = \frac{i}{2}$

n が 3 の倍数でないとき $c(n) = -i$

2

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) $n = 4$, 解は $x = 2$ (重解)

【解説】

(1) $\alpha\beta - (\alpha + \beta - 1) = \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = (\alpha - 1)(\beta - 1)$

$\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ より, $\alpha - 1 \geq 0, \beta - 1 \geq 0$ であるから $(\alpha - 1)(\beta - 1) \geq 0$

したがって $\alpha\beta \geq \alpha + \beta - 1$

(2) 解と係数の関係により $p + q = m \dots\dots ①, pq = k \dots\dots ②$

① より $q = m - p$

m, p は整数であるから, q も整数である。

p, q が整数であるから, ② より k も整数である。

(3) 2次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0 \dots\dots ③$ が整数の解 p をもつと仮定する。

③ の x の係数は整数であるから, (2) より, ③ のもう 1 つの解 q も整数である。

また, ③ において, 解と係数の関係により $p + q = n^2 \dots\dots ④, pq = n \dots\dots ⑤$

$p + q = n^2 > 0, pq = n > 0$ より $p > 0, q > 0$

p, q は整数であるから $p \geq 1, q \geq 1$

よって, (1) より $pq \geq p + q - 1$

これに ④, ⑤ を代入して $n \geq n^2 - 1$ したがって $n^2 - n - 1 \leq 0$

これを解いて $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

n は自然数であるから $n = 1$

これを ④ に代入すると $p + q = 1$

これは $p \geq 1, q \geq 1$ に矛盾する。

したがって, 2次方程式 ③ は整数の解をもたない。

(4) 2次方程式 $x^2 - (n - 2)^2x + n = 0 \dots\dots ⑥$ が整数の解 p をもつとする。

⑥ の x の係数は整数であるから, (2) より, ⑥ のもう 1 つの解 q も整数である。

また, ⑥ において, 解と係数の関係により

$$p + q = (n - 2)^2 \dots\dots ⑦, pq = n \dots\dots ⑧$$

$p + q = (n - 2)^2 \geq 0, pq = n > 0$ より $p > 0, q > 0$

p, q は整数であるから $p \geq 1, q \geq 1$

よって, (1) より $pq \geq p + q - 1$

これに ⑦, ⑧ を代入して $n \geq (n - 2)^2 - 1$ したがって $n^2 - 5n + 3 \leq 0$

これを解いて $\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \leq n \leq \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$

n は自然数であるから $n = 1, 2, 3, 4$

$p \geq 1, q \geq 1$ より $p + q \geq 2$

したがって, ⑦ より $(n - 2)^2 \geq 2$

$n = 1, 2, 3, 4$ のうち, これを満たす自然数は $n = 4$ のみである。

$n = 4$ のとき, ⑥ は $x^2 - 4x + 4 = 0$

章末問題C

これを解くと $x=2$ となり、2次方程式⑥は整数解をもつ。

したがって、求める n の値と2次方程式の解は $n=4$, 解は $x=2$ (重解)

3

【解答】(1) $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left[(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ でもよい

(2) $(y, z) = (3, 4)$ $[(y, z) = (4, 3)]$ でもよい (3) $x = -7, \frac{7 \pm \sqrt{3}i}{2}$

【解説】

(1) 等式の両辺に $x=1, y=1, z=1$ を代入すると $0=3(2a+1)^2$

ゆえに $a = -\frac{1}{2}$ ……①

また、両辺に $x=0, y=0, z=1$ を代入すると $1=a^2+b^2$

①から $b^2 + \frac{1}{4} = 1$ よって $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ……②

したがって、①、②が (a, b) の必要条件である。ここで

$$\begin{aligned} & \{x+(a+bi)y+(a-bi)z\}\{x+(a-bi)y+(a+bi)z\} \\ &= \{x+(y+z)a+(y-z)bi\}\{x+(y+z)a-(y-z)bi\} \\ &= \{x+(y+z)a\}^2 - (y-z)^2(bi)^2 \\ &= x^2 + 2a(y+z)x + a^2(y+z)^2 + b^2(y-z)^2 \quad (=P \text{ とする}) \end{aligned}$$

であり、 P に①、②を代入すると

$$P = x^2 - (y+z)x + \frac{(y+z)^2 + 3(y-z)^2}{4} = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

ゆえに、与えられた等式の右辺は

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$$

よって、すべての実数 x, y, z に対して与えられた等式は成り立つ。

したがって、求める1組の (a, b) は

$$(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \text{でもよい}$$

(2) 1組求めればよいから、 $yz=12$ を満たす正の整数で $y < z$ のものについて考えると

$(y, z) = (1, 12), (2, 6), (3, 4)$

$y^3+z^3=91$ を満たすものは $(y, z) = (3, 4)$

これが求める1組である。 $[(y, z) = (4, 3)]$ でもよい

(3) (1)の等式において、 $y=3, z=4$ とすると

$$\begin{aligned} x^3 - 36x + 91 &= (x+7) \left\{ x + 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ x + 3 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= (x+7) \left(x - \frac{7+\sqrt{3}i}{2} \right) \left(x - \frac{7-\sqrt{3}i}{2} \right) \end{aligned}$$

よって、求める解は $x = -7, \frac{7 \pm \sqrt{3}i}{2}$

4

【解答】(1) x (2) x

【解説】

(1) 条件から、剰余の定理により $P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3 \dots \dots$ ①

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは0または2次以下の整式であるから

ax^2+bx+c とおけて、商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

よって、①から $a+b+c=1, 4a+2b+c=2, 9a+3b+c=3$

これを解いて $a=0, b=1, c=0$

したがって、求める余りは x

(2) $Q(x)=P(x)-x$ とおくと

$$Q(1)=P(1)-1=0, Q(2)=P(2)-2=0, \dots, Q(n)=P(n)-n=0$$

よって、 $Q(x)$ は $(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ で割り切れるから

$$Q(x) = P(x) - x = (x-1)(x-2)\dots(x-n)S(x)$$

とおける。

ゆえに $P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)S(x) + x$

したがって、求める余りは x

5

【解答】 $(a, b, c) = (-1, 0, -1), (-2, 2, -2), (-3, 4, -3), (3, 4, 3),$

$(2, 2, 2), (1, 0, 1)$

【解説】

方程式 $f(x)=0$ の整数解の1つを $x=n$ とすると

$$n(n^3+an^2+bn+c) = -1$$

a, b, c, n はすべて整数であるから $n = \pm 1$

[1] $f(x)=0$ が $x=1$ を重解にもつとき $f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$ と表される。

よって $f(x) = x^4 + (p-2)x^3 - 2(p-1)x^2 + (p-2)x + 1 \dots \dots$ ①

ゆえに、 a, b, c は整数であるから p は整数。

また $x^2+px+1=0$ は虚数解をもつ。

よって $D=p^2-4 < 0$ かつ p は整数。

ゆえに $p = \pm 1, 0$

①から、 $p=1$ のとき $a=c=-1, b=0$

$p=0$ のとき $a=c=-2, b=2$

$p=-1$ のとき $a=c=-3, b=4$

[2] $f(x)=0$ が $x=\pm 1$ を解にもつとき $f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$ と表される。

このとき、 $x^2+qx-1=0$ は虚数解をもたない。

よって、不適。

[3] $f(x)=0$ が $x=-1$ を重解にもつとき $f(x)=(x+1)^2(x^2+rx+1)$ と表される。

よって $f(x) = x^4 + (r+2)x^3 + 2(r+1)x^2 + (r+2)x + 1 \dots \dots$ ②

[1]と同様にして $r = \pm 1, 0$

②から $r=1$ のとき $a=c=3, b=4$

$r=0$ のとき $a=b=c=2$

$r=-1$ のとき $a=c=1, b=0$

以上から $(a, b, c) = (-1, 0, -1), (-2, 2, -2), (-3, 4, -3), (3, 4, 3),$

$(2, 2, 2), (1, 0, 1)$

6

【解答】(1) $a=0$ のとき $z=-1, a \neq 0$ のとき $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ (2) $a \geq -\frac{1}{4}$

(3) $a > 0$

【解説】

(1) [1] $a=0$ のとき $z+1=0$ から $z=-1$

[2] $a \neq 0$ のとき

$z+1-\frac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて $z^2+z-a=0$

よって $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

したがって $a=0$ のとき $z=-1,$

$a \neq 0$ のとき $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

(2) $z=x+yi$ (x, y は実数)とおく。

$\bar{z}+1-\frac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて $z\bar{z}+z-a=0$

すなわち $x^2+y^2+x+yi-a=0$

整理して $x^2+y^2+x-a+yi=0$

x, y, a は実数であるから $x^2+y^2+x-a=0, y=0$

よって $x^2+x-a=0 \dots \dots$ ①

$z \neq 0$ であるから、①が $x \neq 0$ である実数解を少なくとも1つもつような a の値の範囲が求めるものである。

$x=0$ は①の重解ではないから、判別式を D とすると

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq -\frac{1}{4}$$

(3) $z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$ の両辺に z を掛けて $(z\bar{z})^2 + z\bar{z} - a = 0$

$z\bar{z}$ は実数であるから、 X を実数として、 $z\bar{z}=X$ とおく。

すなわち $X^2+X-a=0 \dots \dots$ ②

$z \neq 0$ により、 $X=z\bar{z} > 0$ であるから、②が正の実数解をもつような a の値の範囲が求めるものである。

②が実数解をもつための条件は、判別式を D とすると

$$D = 1 + 4a \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq -\frac{1}{4} \dots \dots$$
 ③

このとき、2つの実数解を α, β とすると、 $\alpha+\beta=-1 < 0$ より、 α, β がともに正であることはないから、正の実数解をもつためには

$$\alpha\beta = -a < 0 \quad \text{すなわち} \quad a > 0 \dots \dots$$
 ④

③、④の共通範囲をとって $a > 0$

7

【解答】(1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ (a, b, c, d は実数)とし、 $\alpha\beta=0$ とすると

$$(a+bi)(c+di) = 0$$

よって $(ac-bd) + (ad+bc)i = 0$

$ac-bd, ad+bc$ は実数であるから $ac-bd=0$ かつ $ad+bc=0$

[1] $a=0$ のとき $bd=0$ かつ $bc=0$

ゆえに $b=0$ または $c=d=0$

[2] $a \neq 0$ のとき、 $c = \frac{bd}{a}$ であるから

$$ad + b \cdot \frac{bd}{a} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{d(a^2 + b^2)}{a} = 0$$

$a \neq 0$ より $a^2+b^2 \neq 0$ であるから $d=0$

ゆえに $c=0$

章末問題C

[1], [2]から, $\alpha\beta=0$ ならば, $\alpha=0$ または $\beta=0$ である。
 (別証) 「 $\alpha\beta=0$ ならば, $\alpha=0$ または $\beta=0$ 」を ① とする。

[1] $\alpha=0$ のとき, ① は成り立つ。
 [2] $\alpha\neq 0$ のとき, 複素数 $\frac{1}{\alpha}$ が存在するから, $\alpha\beta=0$ ならば

$$\beta = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\beta = \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$$

[1], [2]から, ① は成り立つ。
 (2) $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とすると

$$\alpha^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

よって, α^2 が正の実数ならば $a^2 - b^2 > 0$ かつ $ab = 0$
 $ab = 0$ から $a = 0$ または $b = 0$

[1] $a = 0$ のとき
 $a^2 - b^2 > 0$ は $-b^2 > 0$ となり, 不適。

[2] $a \neq 0$ のとき
 $ab = 0$ から $b = 0$
 このとき, $a^2 - b^2 = a^2 > 0$ である。
 よって $\alpha = a$ (実数)

[1], [2]から, α^2 が正の実数ならば, α は実数である。

(別証) $\alpha^2 = r$ (r は正の実数) とすると $\alpha^2 - r = 0$

r は正の実数であるから $(\alpha + \sqrt{r})(\alpha - \sqrt{r}) = 0$

(1) より $\alpha + \sqrt{r} = 0$ または $\alpha - \sqrt{r} = 0$

ゆえに $\alpha = -\sqrt{r}$ または $\alpha = \sqrt{r}$

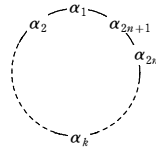
$-\sqrt{r}$ と \sqrt{r} は実数であるから, α は実数である。

(3) 正の実数 $\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_{2n}\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+1}\alpha_1$ のすべての積 $(\alpha_1 \cdots \alpha_{2n}\alpha_{2n+1})^2$ は, 正の実数である。

よって, (2)により, $\alpha_1 \cdots \alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$ は実数である。

この実数を P とする。

次に, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{2n+1}$ を右の図のように円形に並べる。



このとき, どの α_k ($1 \leq k \leq 2n+1$) についても α_k 以外の数は $2n$ 個あり, α_k の隣から順に 2 個ずつをとって掛けた積は, 仮定からすべて正の実数である。

よって, α_k を除く $2n$ 個の複素数の積は正の実数であり, これ

を Q_k とすると, $\frac{P}{Q_k} = \alpha_k$ は実数である。

したがって, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$ はすべて実数である。

[8]

【解答】 略

【解説】

[A] $P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りが, それぞれ, $P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った商と余りに一致する

[B] $a=c, b=d$

とする。

[B] \Rightarrow [A] は明らかに成り立つ。

次に, [A] \Rightarrow [B] を示す。

[A] のとき, 商を $x-e$, 余りを $mx+n$ とすると

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-e) + mx + n,$$

$$P(x) = (x-c)(x-d)(x-e) + mx + n$$

と表される。

よって $(x-a)(x-b)(x-e) = (x-c)(x-d)(x-e)$

$$\{(x-a)(x-b) - (x-c)(x-d)\}(x-e) = 0$$

これが x の恒等式であり, $x \neq e$ のとき

$$(x-a)(x-b) - (x-c)(x-d) = 0$$

x について整理すると

$$\{(a+b) - (c+d)\}x - (ab - cd) = 0$$

これが, $x \neq e$ のとき常に成り立つための条件は

$$a+b = c+d \quad \text{かつ} \quad ab = cd$$

$a+b = c+d = u, ab = cd = v$ とおくと, a と b, c と d はともに t の 2 次方程式

$t^2 - ut + v = 0$ の 2 つの解である。

$a < b$ および $c < d$ であるから $a = c, b = d$

したがって, [A] \Rightarrow [B] が成り立つ。

以上から, [A] \Leftrightarrow [B] が成り立つ。

[9]

【解答】 $a = -4, b = 4$

【解説】

$x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ …… ① とする。

$0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ で, α, β, γ のどれかは整数であるから, 整数解は $x = 1$ または $x = 2$ である。

一方, 整数解を $x = n$ とすると $n^3 + an^2 + bn - 1 = 0$

よって $n(n^2 + an + b) = 1$

$n, n^2 + an + b$ は整数で, $n > 0$ であるから $n = 1$

ゆえに, ① は $x = 1$ を解にもつ。

よって $1 + a + b - 1 = 0$ ゆえに $b = -a$ …… ②

このとき $x^3 + ax^2 + bx - 1 = x^3 + ax^2 - ax - 1$

$$= (x-1)\{x^2 + (a+1)x + 1\}$$

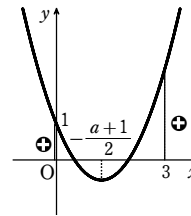
条件から, $x^2 + (a+1)x + 1 = 0$ は $0 < x < 3$ において, $x = 1$ でない異なる 2 つの実数解をもつ。

$f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$ とし, $f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} D = (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 & \dots\dots ③ \\ f(0) = 1 > 0 & \dots\dots ④ \\ f(3) = 9 + 3(a+1) + 1 > 0 & \dots\dots ⑤ \\ \text{軸について } 0 < -\frac{a+1}{2} < 3 & \dots\dots ⑥ \\ f(1) = 1 + a + 1 + 1 \neq 0 & \dots\dots ⑦ \end{cases}$$

③ から $(a+3)(a-1) > 0$ よって $a < -3, 1 < a$

④ は常に成り立つ。⑤ から $a > -\frac{13}{3}$



⑥ から $-7 < a < -1$ ⑦ から $a \neq -3$

共通範囲を求めて $-\frac{13}{3} < a < -3$

a は整数であるから $a = -4$

このとき, ② から $b = 4$

ゆえに $a = -4, b = 4$

[10]

【解答】 略

【解説】

$P(x)$ を 2 次式 $Q(x)$ で割ったときの商を $f(x)$, 余りを $ax + b$ とすると

$$P(x) = Q(x)f(x) + ax + b$$

と表せる。ただし, $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

ここで $\{P(x)\}^2 = \{Q(x)f(x) + ax + b\}^2$

$$= \{Q(x)f(x)\}^2 + 2Q(x)f(x)(ax + b) + (ax + b)^2$$

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから, $(ax + b)^2$ が 2 次式 $Q(x)$ で割り切れる。

よって $(ax + b)^2 = kQ(x)$ (k は定数)

$Q(x)$ は 2 次式で, $(a, b) \neq (0, 0)$ であるから, $k \neq 0$ であり, $a \neq 0$ となる。

したがって $Q(x) = \frac{1}{k}(ax + b)^2 = \frac{a^2}{k}\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$

よって, $Q(x) = 0$ は重解 $x = -\frac{b}{a}$ をもつ。

【別解】 $Q(x) = 0$ の解を α, β とすると, $Q(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($a \neq 0$) と表せる。

ここで, $\alpha \neq \beta$ と仮定する。

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから, $\{P(x)\}^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$ を満たす整式 $g(x)$ が存在する。

$\{P(\alpha)\}^2 = 0, \{P(\beta)\}^2 = 0$ であるから $P(\alpha) = 0, P(\beta) = 0$

よって, $\alpha \neq \beta$ のとき, $P(x)$ は $x-\alpha, x-\beta$ を因数にもち, $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れることになるが, これは矛盾である。

したがって $\alpha = \beta$ すなわち, $Q(x) = 0$ は重解をもつ。

