$\boxed{1}$

解答　(1)　$-x^3+4x^2+3x-2$

(2)　x について … $x^2+(4-3y)x+(y^3-5y+1)$

y について … $y^3-(3x+5)y+(x^2+4x+1)$

解説

(1)　(与式)$=-x^3+4x^2+3x-2$

(2)　x について　$x^2+(4-3y)x+(y^3-5y+1)$

y について　$y^3-(3x+5)y+(x^2+4x+1)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x^3+12x^2+48x+64$　(2)　$27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$　(3)　a^3+125

(4)　$8x^3-343y^3$　(5)　x^6-1

解説

(1)　$(x+4)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+4^3$

$=x^3+12x^2+48x+64$

(2)　$(3a-2b)^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot(2b)^2-(2b)^3$

$=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(3)　$(a+5)(a^2-5a+25)=(a+5)(a^2-a\cdot 5+5^2)$

$=a^3+5^3=a^3+125$

(4)　$(2x-7y)(4x^2+14xy+49y^2)=(2x-7y)\{(2x)^2+2x\cdot 7y+(7y)^2\}$

$=(2x)^3-(7y)^3=8x^3-343y^3$

(5)　$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^3-1)(x^3+1)=(x^3)^2-1^2=x^6-1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$　(2)　$(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$　(3)　$(x-2)^3$

解説

(1)　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$

(2)　$64p^3-27q^3=(4p)^3-(3q)^3=(4p-3q)\{(4p)^2+(4p)\cdot(3q)+(3q)^2\}$

$=(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

(3)　$x^3-6x^2+12x-8=(x^3-8)-(6x^2-12x)$

$=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)-6x(x-2)$

$=(x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)$

$=(x-2)(x^2+2x+4-6x)=(x-2)(x^2-4x+4)$

$=(x-2)(x-2)^2=(x-2)^3$

別解　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ の公式を適用してもよい。

$x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$

$=(x-2)^3$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$(x-z)(y-u)$　(2)　$(x+y)(x-y)(y-z)$　(3)　$(a-c)(b-ac+c^2)$

解説

(1)　(与式)$=(x-z)y-ux+zu=(x-z)y-(x-z)u=(x-z)(y-u)$

(2)　(与式)$=(-x^2+y^2)z+x^2y-y^3=-(x^2-y^2)z+(x^2-y^2)y$

$=(x^2-y^2)(-z+y)=(x+y)(x-y)(y-z)$

(3)　(与式)$=(a-c)b-c(a^2-2ac+c^2)=(a-c)b-c(a-c)^2$

$=(a-c)\{b-c(a-c)\}=(a-c)(b-ac+c^2)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(x+y+4)(x-3y+2)$　(2)　$(x-3y+4)(2x+y-1)$

解説

(1)　$x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8$

$=x^2-(2y-6)x-(3y^2+10y-8)$

$=x^2-(2y-6)x-(y+4)(3y-2)$

$=\{x+(y+4)\}\{x-(3y-2)\}$

$=(x+y+4)(x-3y+2)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & y+4 & \longrightarrow & y+4 \\ 1 & & -(3y-2) & \longrightarrow & -3y+2 \\ \hline 1 & & -(y+4)(3y-2) & & -2y+6 \end{array}$$

(2)　$2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4$

$=2x^2-(5y-7)x-(3y^2-7y+4)$

$=2x^2-(5y-7)x-(y-1)(3y-4)$

$=\{x-(3y-4)\}\{2x+(y-1)\}$

$=(x-3y+4)(2x+y-1)$

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \times & -(3y-4) & \longrightarrow & -6y+8 \\ 2 & & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline 2 & & -(y-1)(3y-4) & & -5y+7 \end{array}$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$(a+b)(b+c)(c+a)$　(2)　$(x-y)(y-z)(z-x)$

解説

(1)　$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=(b+c)^2a+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+2bc+2bc-4bc\}a+bc^2+b^2c$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

(2)　$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=-(y-z)x^2+(y^2-z^2)x+yz^2-y^2z$

$=-(y-z)x^2+(y+z)(y-z)x-yz(y-z)$

$=-(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=-(y-z)(x-y)(x-z)$

$=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$

(2)　$(a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)$

解説

(1)　$x^3+3xy+y^3-1=x^3+y^3+(-1)^3-3\cdot x\cdot y\cdot(-1)$

$=\{x+y+(-1)\}\{x^2+y^2+(-1)^2-xy-y\cdot(-1)-(-1)\cdot x\}$

$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$

$=(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$

(2)　$a^3+6ab-8b^3+1=a^3+(-2b)^3+1^3-3\cdot a\cdot(-2b)\cdot 1$

$=\{a+(-2b)+1\}\{a^2+(-2b)^2+1^2-a\cdot(-2b)-(-2b)\cdot 1-1\cdot a\}$

$=(a-2b+1)(a^2+4b^2+1+2ab+2b-a)$

$=(a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)$

$\boxed{1}$

解答　降べきの順，昇べきの順の順に

(1)　$7x^2+4x-8$，$-8+4x+7x^2$　(2)　x^3-x^2-5，$-5-x^2+x^3$

x についての降べきの順，x についての昇べきの順，

y についての降べきの順の順に

(3)　$6x^2-(2y+3)x+(-4y^2+4y+1)$，$(-4y^2+4y+1)-(2y+3)x+6x^2$，

$-4y^2-(2x-4)y+(6x^2-3x+1)$

(4)　$-x^2+(3y+2)x+(2y^2-y+4)$，$(2y^2-y+4)+(3y+2)x-x^2$，

$2y^2+(3x-1)y+(-x^2+2x+4)$

解説

(1)　降べきの順に整理すると　$(-3+10)x^2+(12-8)x+(-17+9)=7x^2+4x-8$

昇べきの順に整理すると　$-8+4x+7x^2$

(2)　降べきの順に整理すると　$x^3+(-2+1)x^2+(-4+3+1)x-5=x^3-x^2-5$

昇べきの順に整理すると　$-5-x^2+x^3$

(3)　x について降べきの順に整理すると　$6x^2-(2y+3)x+(-4y^2+4y+1)$

x について昇べきの順に整理すると　$(-4y^2+4y+1)-(2y+3)x+6x^2$

y について降べきの順に整理すると　$-4y^2-(2x-4)y+(6x^2-3x+1)$

(4)　x について降べきの順に整理すると　$-x^2+(3y+2)x+(2y^2-y+4)$

x について昇べきの順に整理すると　$(2y^2-y+4)+(3y+2)x-x^2$

y について降べきの順に整理すると　$2y^2+(3x-1)y+(-x^2+2x+4)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x^3+9x^2+27x+27$　(2)　$a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(3)　$8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$　(4)　x^3+64　(5)　$27a^3-64b^3$

(6)　x^6-y^6

解説

(1)　与式$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$

$=x^3+9x^2+27x+27$

(2)　与式$=a^3+3\cdot a^2\cdot 2b+3\cdot a\cdot(2b)^2+(2b)^3$

$=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(3)　与式$=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 5b+3\cdot 2a\cdot(5b)^2-(5b)^3$

$=8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$

(4)　与式$=(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2)=x^3+4^3$

$=x^3+64$

(5)　与式$=(3a-4b)\{(3a)^2+3a\cdot 4b+(4b)^2\}$

$=(3a)^3-(4b)^3=27a^3-64b^3$

(6)　与式$=(x+y)(x^2-xy+y^2)\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x^3)^2-(y^3)^2$

$=x^6-y^6$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$　(2)　$(4x-1)(16x^2+4x+1)$

(3)　$(2x-3)^3$

解説

(1)　$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$

$$=(2a+3b)\{(2a)^2-2a\cdot 3b+(3b)^2\}$$
$$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$

(2) $64x^3-1=(4x)^3-1^3=(4x-1)\{(4x)^2+4x\cdot 1+1^2\}$
$$=(4x-1)(16x^2+4x+1)$$

(3) $8x^3-36x^2+54x-27=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2-3^3$
$$=(2x-3)^3$$

別解 $8x^3-36x^2+54x-27=8x^3-27-(36x^2-54x)$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)-18x(2x-3)$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9-18x)$$
$$=(2x-3)(4x^2-12x+9)$$
$$=(2x-3)(2x-3)^2=(2x-3)^3$$

4

解答 (1) $(a-4)(-a+2b-4)$　(2) $(x+1)(x-1)(y+1)$　(3) $(x-y)(x+2y-z)$

解説

(1) $16-8b+2ab-a^2=(2a-8)b-a^2+16=2(a-4)b-(a^2-16)$
$$=2(a-4)b-(a+4)(a-4)$$
$$=(a-4)\{2b-(a+4)\}=(a-4)(-a+2b-4)$$

(2) $x^2y+x^2-y-1=(x^2-1)y+x^2-1=(x^2-1)(y+1)$
$$=(x+1)(x-1)(y+1)$$

(3) $x^2-2y^2+xy+yz-zx=(-x+y)z+x^2+xy-2y^2$
$$=-(x-y)z+(x+2y)(x-y)$$
$$=(x-y)\{-z+(x+2y)\}=(x-y)(x+2y-z)$$

5

解答 (1) $(x+2y-1)(x+y-5)$　(2) $(x-y+1)(x-y-2)$

(3) $(x+2y+3)(2x+y-2)$　(4) $(x+3y-2)(2x-y+3)$

解説

(1) 与式 $=x^2+(3y-6)x+(2y^2-11y+5)$
$$=x^2+(3y-6)x+(2y-1)(y-5)$$
$$=\{x+(2y-1)\}\{x+(y-5)\}$$
$$=(x+2y-1)(x+y-5)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y-1 & \longrightarrow & 2y-1 \\ 1 & & y-5 & \longrightarrow & y-5 \\ \hline & & & & 3y-6 \end{array}$$

(2) 与式 $=x^2-(2y+1)x+y^2+y-2$
$$=x^2-(2y+1)x+(y-1)(y+2)$$
$$=\{x-(y-1)\}\{x-(y+2)\}$$
$$=(x-y+1)(x-y-2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(y-1) & \longrightarrow & -y+1 \\ 1 & & -(y+2) & \longrightarrow & -y-2 \\ \hline & & & & -2y-1 \end{array}$$

別解 与式 $=(x-y)^2-(x-y)-2=\{(x-y)+1\}\{(x-y)-2\}=(x-y+1)(x-y-2)$

(3) 与式 $=2x^2+(5y+4)x+2y^2-y-6$
$$=2x^2+(5y+4)x+(2y+3)(y-2)$$
$$=\{x+(2y+3)\}\{2x+(y-2)\}$$
$$=(x+2y+3)(2x+y-2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \\ 2 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ \hline & & & & 5y+4 \end{array}$$

(4) 与式 $=2x^2+(5y-1)x-(3y^2-11y+6)$
$$=2x^2+(5y-1)x-(3y-2)(y-3)$$
$$=\{x+(3y-2)\}\{2x-(y-3)\}$$
$$=(x+3y-2)(2x-y+3)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3y-2 & \longrightarrow & 6y-4 \\ 2 & & -(y-3) & \longrightarrow & -y+3 \\ \hline & & & & 5y-1 \end{array}$$

6

解答 (1) $-(a-b)(b-c)(c-a)$　(2) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(3) $(a+b)(b+c)(c+a)$　(4) $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

解説

(1) (与式) $=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$
$$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

(2) (与式) $=a^2b+ab^2+bc(b+c)+c^2a+ca^2+2abc$
$$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)$$

(3) (与式) $=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)+8abc$
$$=(b+c)a^2+\{(b^2-2bc+c^2)-2bc-2bc+8bc\}a+bc^2+b^2c$$
$$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)$$

(4) (与式) $=(b+c)\times(a+b)(a+c)+abc$
$$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}+abc$$
$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)+abc$$
$$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$$
$$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$$
$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & b+c & \longrightarrow & (b+c)^2 \\ b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline b+c & & bc(b+c) & & (b+c)^2+bc \end{array}$$

7

解答 (1) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$

(2) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$

解説

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$
$$=a^3+(-b)^3+(-c)^3-3a(-b)(-c)$$
$$=\{a+(-b)+(-c)\}\{a^2+(-b)^2+(-c)^2-a(-b)-(-b)(-c)-(-c)a\}$$
$$=(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$$

(2) $x^3+y^3-3xy+1$
$$=x^3+y^3+1^3-3xy\cdot 1=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-x\cdot y-y\cdot 1-1\cdot x)$$
$$=(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$$

1

解答 (1) $a^2-2ab+b^2-c^2$　(2) $2x^4+5x^3-8x^2+6x-3$

(3) $8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$　(4) $x^5-2x^4+3x^3-5x^2+8x-6$

(5) $x^4+4x^2y^2+16y^4$　(6) x^8-y^8　(7) $1+a^9$

解説

(1) $(a-b+c)(a-b-c)=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$
$$=(a-b)^2-c^2$$
$$=a^2-2ab+b^2-c^2$$

(2) $(2x^2-x+1)(x^2+3x-3)=2x^2(x^2+3x-3)-x(x^2+3x-3)+x^2+3x-3$
$$=2x^4+6x^3-6x^2-x^3-3x^2+3x+x^2+3x-3$$
$$=2x^4+5x^3-8x^2+6x-3$$

(3) $(2a-5b)^3=(2a)^3-3(2a)^2\cdot 5b+3\cdot 2a\cdot(5b)^2-(5b)^3$
$$=8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3$$

(4) $(x^3+x-3)(x^2-2x+2)=x^3(x^2-2x+2)+x(x^2-2x+2)-3(x^2-2x+2)$
$$=x^5-2x^4+2x^3+x^3-2x^2+2x-3x^2+6x-6$$
$$=x^5-2x^4+3x^3-5x^2+8x-6$$

別解

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & x^3 & & +x & -3 \\ \times\,) & & & & x^2 & -2x & +2 \\ \hline & x^5 & & +x^3 & -3x^2 & & \\ & & -2x^4 & & -2x^2 & +6x & \\ & & & 2x^3 & & +2x & -6 \\ \hline & x^5 & -2x^4 & +3x^3 & -5x^2 & +8x & -6 \end{array}$$

(5) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)=(x^2+4y^2)^2-(2xy)^2$
$$=x^4+8x^2y^2+16y^4-4x^2y^2$$
$$=x^4+4x^2y^2+16y^4$$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$
$$=x^8-y^8$$

(7) $(1+a)(1-a^3+a^6)(1-a+a^2)=\{(1+a)(1-a+a^2)\}(1-a^3+a^6)$
$$=(1+a^3)(1-a^3+a^6)$$
$$=(1+a^3)\{1-a^3+(a^3)^2\}$$
$$=1+(a^3)^3=1+a^9$$

2

解答 (1) $t^6-12t^4+48t^2-64$　(2) $a^{12}-2a^6b^6+b^{12}$

解説

(1) (与式) $=\{(t+2)(t-2)\}^3=(t^2-4)^3$
$$=(t^2)^3-3\cdot(t^2)^2\cdot 4+3\cdot t^2\cdot 4^2-4^3$$
$$=t^6-12t^4+48t^2-64$$

(2) (与式) $=\{(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2=\{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\}^2$
$$=\{(a^2)^3-(b^2)^3\}^2=(a^6-b^6)^2=a^{12}-2a^6b^6+b^{12}$$

3

解答 (1) $(x-4)(2x-7)$　(2) $(x+y-2)(x-y+2)$

(3) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$　(4) $(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&2(x-1)^2-11(x-1)+15=\{(x-1)-3\}\{2(x-1)-5\}\\&=(x-4)(2x-7)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -3 & \longrightarrow & -6\\ 2 & & -5 & \longrightarrow & -5\\ \hline 2 & & 15 & & -11\end{array}$$

別解
$$\begin{aligned}&2(x-1)^2-11(x-1)+15=2(x^2-2x+1)-11x+26\\&=2x^2-15x+28\\&=(x-4)(2x-7)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)=x^2-(y-2)^2\\&=\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}\\&=(x+y-2)(x-y+2)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&x^4-10x^2+9=(x^2)^2-10x^2+9\\&=(x^2-1)(x^2-9)\\&=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=\{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-4\}\\&=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)\\&=(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)\end{aligned}$$

4

解答　(1) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$　(2) $4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$
(3) $(x+2)(x-3)(x^2-2x+4)(x^2+3x+9)$　(4) $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3+1)(x^3-1)\\&=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)\\&=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

別解
$$\begin{aligned}&x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)\\&=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)\end{aligned}$$

ここで
$$\begin{aligned}&x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2\\&=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2+1+x)(x^2+1-x)\end{aligned}$$

よって　$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+y)^6-(x-y)^6=\{(x+y)^3\}^2-\{(x-y)^3\}^2\\&=\{(x+y)^3+(x-y)^3\}\{(x+y)^3-(x-y)^3\}\\&=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)\\&\quad\times(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3)\\&=(2x^3+6xy^2)(6x^2y+2y^3)\\&=2x(x^2+3y^2)\cdot 2y(3x^2+y^2)\\&=4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&x^6-19x^3-216=(x^3)^2-19x^3-216=(x^3+8)(x^3-27)\\&=(x+2)(x^2-2x+4)(x-3)(x^2+3x+9)\\&=(x+2)(x-3)(x^2-2x+4)(x^2+3x+9)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&x^6-2x^3+1=(x^3)^2-2x^3+1\\&=(x^3-1)^2\\&=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^2\\&=(x-1)^2(x^2+x+1)^2\end{aligned}$$

5

解答　(1) $(x+3)^2(x-2)^2$　(2) $x(x+5)(x^2+5x+10)$　(3) $8xy(x^2+y^2)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1=\{(x^2+x)-5\}\{(x^2+x)-7\}+1\\&=(x^2+x)^2-12(x^2+x)+36\\&=(x^2+x-6)^2\\&=\{(x+3)(x-2)\}^2\\&=(x+3)^2(x-2)^2\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=\{(x+1)(x+4)\}\times\{(x+2)(x+3)\}-24\\&=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}-24\\&=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)\\&=(x^2+5x)(x^2+5x+10)\\&=x(x+5)(x^2+5x+10)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(\text{与式})=\{(x+y)^2\}^2-\{(x-y)^2\}^2\\&=\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}\\&=(2x^2+2y^2)(2xy+2xy)\\&=2(x^2+y^2)\cdot 4xy=8xy(x^2+y^2)\end{aligned}$$

6

解答　(1) $(a+2)(a-2)(ab-4)$　(2) $(x+z)(x-z)(xy+1)$　(3) $(2x-y)(3x+z)$
(4) $(x+2z)(3x+2y-z)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&a^3b+16-4ab-4a^2=(a^3-4a)b+16-4a^2\\&=a(a^2-4)b-4(a^2-4)\\&=(a^2-4)(ab-4)\\&=(a+2)(a-2)(ab-4)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&x^3y+x^2-xyz^2-z^2=(x^3-xz^2)y+x^2-z^2\\&=x(x^2-z^2)y+x^2-z^2\\&=(x^2-z^2)(xy+1)\\&=(x+z)(x-z)(xy+1)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&6x^2-yz+2xz-3xy=(2x-y)z+6x^2-3xy\\&=(2x-y)z+3x(2x-y)\\&=(2x-y)(3x+z)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz=(2x+4z)y+3x^2+5xz-2z^2\\&=2(x+2z)y+(x+2z)(3x-z)\\&=(x+2z)(2y+3x-z)\\&=(x+2z)(3x+2y-z)\end{aligned}$$

7

解答　(1) $(x-1)\{(a+b)x-a+b\}$　(2) $(a-b-1)(a+3b-2)$
(3) $(x+2y+3)(3x-y+2)$　(4) $(4x+6y-9)(6x-9y+10)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&(a+b)x^2-2ax+a-b\\&=(x-1)\{(a+b)x-a+b\}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -1 & \longrightarrow & -a-b\\ a+b & & -(a-b) & \longrightarrow & -a+b\\ \hline a+b & & a-b & & -2a\end{array}$$

別解
$$\begin{aligned}&(a+b)x^2-2ax+a-b\\&=a(x^2-2x+1)+b(x^2-1)\\&=a(x-1)^2+b(x+1)(x-1)\\&=(x-1)\{a(x-1)+b(x+1)\}\\&=(x-1)\{(a+b)x-a+b\}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&a^2+(2b-3)a-(3b^2+b-2)\\&=a^2+(2b-3)a-(b+1)(3b-2)\\&=\{a-(b+1)\}\{a+(3b-2)\}\\&=(a-b-1)(a+3b-2)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -(b+1) & \longrightarrow & -b-1\\ 1 & & 3b-2 & \longrightarrow & 3b-2\\ \hline 1 & & -(b+1)(3b-2) & & 2b-3\end{array}$$

(3)
$$\begin{aligned}&3x^2-2y^2+5xy+11x+y+6\\&=3x^2+(5y+11)x-2y^2+y+6\\&=3x^2+(5y+11)x-(2y^2-y-6)\\&=3x^2+(5y+11)x-(y-2)(2y+3)\\&=\{x+(2y+3)\}\{3x-(y-2)\}\\&=(x+2y+3)(3x-y+2)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & 2y+3 & \longrightarrow & 6y+9\\ 3 & & -(y-2) & \longrightarrow & -y+2\\ \hline 3 & & -(y-2)(2y+3) & & 5y+11\end{array}$$

(4)
$$\begin{aligned}&24x^2-54y^2-14x+141y-90\\&=24x^2-14x-(54y^2-141y+90)\\&=24x^2-14x-3(18y^2-47y+30)\\&=24x^2-14x-3(2y-3)(9y-10)\\&=\{4x+3(2y-3)\}\{6x-(9y-10)\}\\&=(4x+6y-9)(6x-9y+10)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}4 & \times & 3(2y-3) & \longrightarrow & 36y-54\\ 6 & & -(9y-10) & \longrightarrow & -36y+40\\ \hline 24 & & -3(2y-3)(9y-10) & & -14\end{array}$$

8

解答　(1) $(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$　(2) $(a+b)(b+c)(c+a)$
(3) $(a-b)(b-c)(c+a)$

解説

(1)
$$\begin{aligned}&(\text{与式})=a^3+a^2b-ac^2-ab^2+bc^2-b^3\\&=-(a-b)c^2+a^3-b^3+a^2b-ab^2\\&=-(a-b)c^2+(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)\\&=(a-b)\{-c^2+(a^2+ab+b^2)+ab\}\\&=(a-b)(a^2+2ab+b^2-c^2)=(a-b)\{(a+b)^2-c^2\}\\&=(a-b)\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\\&=(a-b)(a+b+c)(a+b-c)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(\text{与式})=(b+c)^2a+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc\\&=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+2bc+2bc-4bc\}a+bc^2+b^2c\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(\text{与式})=(b-c)a^2-(b^2-2bc+c^2)a-bc(b-c)\\&=(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a+c)\\&=(a-b)(b-c)(c+a)\end{aligned}$$

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$

解答　$(a+b)^2(a-b)(a^2-ab+b^2)$

解説

$(\text{与式})=a^5-a^3b^2+a^2b^3-b^5=a^3(a^2-b^2)+b^3(a^2-b^2)$

$\quad=(a^2-b^2)(a^3+b^3)=(a+b)(a-b)\times(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\quad=(a+b)^2(a-b)(a^2-ab+b^2)$

$\boxed{2}$

解答　$(a+b)(b-c)(a-2c)$

解説

$(\text{与式})=a^2b+ab^2-2bc(b-c)+2c^2a-ca^2-3abc$

$\quad=(b-c)a^2+(b^2-3bc+2c^2)a-2bc(b-c)$

$\quad=(b-c)a^2+(b-c)(b-2c)a-2bc(b-c)$

$\quad=(b-c)\{a^2+(b-2c)a-2bc\}=(b-c)(a+b)(a-2c)$

$\quad=(a+b)(b-c)(a-2c)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(a+b+c)(ab+bc+ca)$　　(2)　$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

解説

(1)　$(\text{与式})=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$\quad=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$\quad=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & b+c & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2 \\ b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ \hline b+c & & bc(b+c) & & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

別解　$(\text{与式})=ab(a+b+c)-abc+bc(a+b+c)-abc+ca(a+b+c)-abc+3abc$

$\quad=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$

$\quad=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

(2)　$(\text{与式})=(b-c)^3a+b(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+c(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$\quad=-(b-c)a^3+\{(b-c)^3+3bc(b-c)\}a-bc(b^2-c^2)$

$\quad=-(b-c)a^3+(b-c)\{(b-c)^2+3bc\}a-bc(b+c)(b-c)$

$\quad=-(b-c)a^3+(b-c)(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)(b-c)$

$\quad=-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

$\quad=-(b-c)\{(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a(a^2-c^2)\}$

$\quad=-(b-c)\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\}$

$\quad=-(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

$\quad=-(b-c)(c-a)\{c(b-a)+b^2-a^2\}$

$\quad=-(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$

$\quad=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$3(y-z)(z-x)(x-y)$　　(2)　$-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)$

解説

(1)　$y-z=a$，$z-x=b$，$x-y=c$ とおくと

$(\text{与式})=a^3+b^3+c^3$

$\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　……①

ここで，$a+b+c=(y-z)+(z-x)+(x-y)=0$ であるから，① より

$(\text{与式})=3abc=3(y-z)(z-x)(x-y)$

(2)　$x-z=a$，$y-z=b$，$-(x+y-2z)=c$ とおくと

$(\text{与式})=a^3+b^3+c^3$

$\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$　……②

ここで，$a+b+c=(x-z)+(y-z)+\{-(x+y-2z)\}=0$ であるから，② より

$(\text{与式})=3abc=3(x-z)(y-z)\{-(x+y-2z)\}$

$\quad=-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)$

別解　$x-z=a$，$y-z=b$ とおくと　$a+b=x+y-2z$

よって　$(\text{与式})=a^3+b^3-(a+b)^3$

$\quad=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$\quad=-3ab(a+b)$

$\quad=-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$　　(2)　$(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

(3)　$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(4)　$(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$

解説

(1)　$(\text{与式})=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}$

$\quad=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2)　$(\text{与式})=(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$

$\quad=(x^2+y^2+3xy)(x^2+y^2-3xy)=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

(3)　$(\text{与式})=x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$\quad=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(4)　$(\text{与式})=(x^4-2x^2y^2+y^4)-25x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(5xy)^2$

$\quad=\{(x^2-y^2)+5xy\}\{(x^2-y^2)-5xy\}=(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$

第２講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x>-7$　　(2)　$x\geqq 4$　　(3)　$x<-2$

解説

(1)　移項すると　$4x-3x>-2-5$

すなわち　$x>-7$

(2)　移項すると　$-x-2x\leqq -3-9$

すなわち　$-3x\leqq -12$

両辺を -3 で割って　$x\geqq 4$

(3)　両辺に２を掛けて　$4-x>2(7+2x)$

右辺を展開して　$4-x>14+4x$

移項して整理すると　$-5x>10$

両辺を -5 で割って　$x<-2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=2$ のとき　解はすべての実数，$a\fallingdotseq 2$ のとき　$x=-3$

(2)　$a>2$ のとき　$x>-3$，$a=2$ のとき　解はない，$a<2$ のとき　$x<-3$

解説

(1)　$ax-6=2x-3a$

移項すると　$ax-2x=-3a+6$

よって　$(a-2)x=-3(a-2)$

[1]　$a-2=0$　すなわち　$a=2$ のとき

$0\cdot x=-3\cdot 0$　　よって，解はすべての実数

[2]　$a-2\fallingdotseq 0$　すなわち　$a\fallingdotseq 2$ のとき　　$x=-3$

(2)　$ax-6>2x-3a$

移項すると　$ax-2x>-3a+6$

よって　$(a-2)x>-3(a-2)$

[1]　$a-2>0$　すなわち　$a>2$ のとき

両辺を正の数 $a-2$ で割って　　$x>-3$

[2]　$a-2=0$　すなわち　$a=2$ のとき

与えられた不等式 $0\cdot x>-3\cdot 0$ には解はない

[3]　$a-2<0$　すなわち　$a<2$ のとき

両辺を負の数 $a-2$ で割って　　$x<-3$

$\boxed{3}$

解答　(1)　6　　(2)　2.7　　(3)　$\dfrac{2}{5}$　　(4)　-4　　(5)　$4-\pi$　　(6)　$2-\sqrt{3}$

解説

(1)　$|-6|=-(-6)=6$

(2)　$|2.7|=2.7$

(3)　$\left|-\dfrac{2}{5}\right|=-\left(-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}$

(4)　$|-2|-|-6|=2-6=-4$

(5)　$\pi-4<0$ であるから　　$|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$

(6)　$\sqrt{3}-2<0$ であるから　　$|\sqrt{3}-2|=-(\sqrt{3}-2)=2-\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=4,\ 2$　　(2)　$x=-1,\ -9$　　(3)　$x=\dfrac{4}{3},\ -2$

解説

(1)　$|x-3|=1$ から　$x-3=\pm1$　よって　$x=4,\ 2$

(2)　$|x+5|=4$ から　$x+5=\pm4$　よって　$x=-1,\ -9$

(3)　$|3x+1|=5$ から　$3x+1=\pm5$　よって　$x=\dfrac{4}{3},\ -2$

5

解答　(1)　$1<x<5$　(2)　$x\leqq-6,\ 2\leqq x$　(3)　$-\dfrac{9}{2}\leqq x\leqq-\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　$|x-3|<2$ から　$-2<x-3<2$

各辺に 3 を加えて　$1<x<5$

(2)　$|x+2|\geqq4$ から　$x+2\leqq-4$ または $4\leqq x+2$

よって　$x\leqq-6,\ 2\leqq x$

(3)　$|2x+7|\leqq2$ から　$-2\leqq2x+7\leqq2$

各辺から 7 を引いて　$-9\leqq2x\leqq-5$　よって　$-\dfrac{9}{2}\leqq x\leqq-\dfrac{5}{2}$

6

解答　(1)　$x\geqq-1$ のとき $x+1$，$x<-1$ のとき $-x-1$

(2)　$x\geqq2$ のとき $2x-4$，$x<2$ のとき $-2x+4$

(3)　$x<-4$ のとき $-2x-2$，$-4\leqq x<2$ のとき 6，$2\leqq x$ のとき $2x+2$

解説

(1)　$x+1\geqq0$ すなわち $x\geqq-1$ のとき

与式$=x+1$

$x+1<0$ すなわち $x<-1$ のとき

与式$=-(x+1)=-x-1$

(2)　$2x-4\geqq0$ すなわち $x\geqq2$ のとき

与式$=2x-4$

$2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき

与式$=-(2x-4)=-2x+4$

(3)　$x<-4$ のとき

与式$=-(x-2)-(x+4)=-2x-2$

$-4\leqq x<2$ のとき

与式$=-(x-2)+(x+4)=6$

$2\leqq x$ のとき

与式$=(x-2)+(x+4)=2x+2$

7

解答　(1)　$x=1$　(2)　$x=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}$

解説

(1)　$x-3\geqq0$　すなわち　$x\geqq3$ のとき　$x-3=2x$

これを解いて　$x=-3$　これは $x\geqq3$ を満たさない。

$x-3<0$　すなわち　$x<3$ のとき　$-(x-3)=2x$

これを解いて　$x=1$　これは $x<3$ を満たす。

よって，方程式の解は　$x=1$

(2)　$x\geqq1$ のとき　$x+2(x-1)=x+3$

これを解いて　$x=\dfrac{5}{2}$　これは $x\geqq1$ を満たす。

$0\leqq x<1$ のとき　$x-2(x-1)=x+3$

これを解いて　$x=-\dfrac{1}{2}$　これは $0\leqq x<1$ を満たさない。

$x<0$ のとき　$-x-2(x-1)=x+3$

これを解いて　$x=-\dfrac{1}{4}$　これは $x<0$ を満たす。

よって，方程式の解は　$x=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}$

8

解答　(1)　$x>1$　(2)　$-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq6$

解説

(1)　[1]　$x\geqq4$ のとき，不等式は　$x-4<3x$

これを解いて　$x>-2$

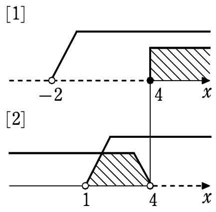
$x\geqq4$ との共通範囲は　$x\geqq4$　…… ①

[2]　$x<4$ のとき，不等式は　$-(x-4)<3x$

これを解いて　$x>1$

$x<4$ との共通範囲は　$1<x<4$　…… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x>1$



(2)　[1]　$x<1$ のとき，不等式は　$-(x-1)-2(x-3)\leqq11$

よって　$x\geqq-\dfrac{4}{3}$

$x<1$ との共通範囲は　$-\dfrac{4}{3}\leqq x<1$　…… ①

[2]　$1\leqq x<3$ のとき，不等式は　$x-1-2(x-3)\leqq11$

よって　$x\geqq-6$

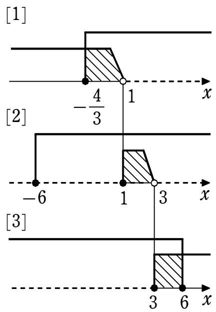
$1\leqq x<3$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$　…… ②

[3]　$3\leqq x$ のとき，不等式は　$x-1+2(x-3)\leqq11$

よって　$x\leqq6$

$3\leqq x$ との共通範囲は　$3\leqq x\leqq6$　…… ③

求める解は，①～③ を合わせた範囲で　$-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq6$



1

解答　(1)　$x\geqq5$　(2)　$x\leqq-\dfrac{11}{7}$　(3)　$x<\dfrac{17}{25}$

解説

(1)　移項して　$5x-9x\leqq-4-16$

整理して　$-4x\leqq-20$

両辺を -4 で割って　$x\geqq5$

(2)　括弧をはずして　$3x-3\geqq10x+8$

よって　$3x-10x\geqq8+3$

すなわち　$-7x\geqq11$

両辺を -7 で割って　$x\leqq-\dfrac{11}{7}$

(3)　両辺に 12 を掛けて　$3(5x+1)-4(2-3x)<2x+12$

括弧をはずして　$15x+3-8+12x<2x+12$

整理して　$25x<17$

両辺を 25 で割って　$x<\dfrac{17}{25}$

2

解答　(1)　$a\fallingdotseq2$ のとき　$x=\dfrac{2a}{a-2}$，　$a=2$ のとき　解はない

(2)　$a>0$ のとき　$x\leqq\dfrac{3}{a}$，　$a=0$ のとき　すべての実数，

$a<0$ のとき　$x\geqq\dfrac{3}{a}$

(3)　$a>1$ のとき　$x>a+1$，　$a=1$ のとき　解はない，

$a<1$ のとき　$x<a+1$

解説

(1)　方程式から　$(a-2)x=2a$　…… ①

[1]　$a-2\fallingdotseq0$　すなわち　$a\fallingdotseq2$ のとき

① の両辺を $a-2$ で割って　$x=\dfrac{2a}{a-2}$

[2]　$a-2=0$　すなわち　$a=2$ のとき

① は $0\cdot x=4$ となり，これを満たす x の値はない。

よって，解はない。

(2)　$ax\leqq3$　…… ②

[1]　$a>0$ のとき

② の両辺を正の数 a で割って　$x\leqq\dfrac{3}{a}$

[2]　$a=0$ のとき

② は $0\cdot x\leqq3$ となり，これはすべての実数 x について成り立つ。

よって，解はすべての実数。

[3]　$a<0$ のとき

② の両辺を負の数 a で割って　$x\geqq\dfrac{3}{a}$

(3)　$ax+1>x+a^2$ から　$(a-1)x>a^2-1$

よって　$(a-1)x>(a+1)(a-1)$　…… ③

[1]　$a-1>0$　すなわち　$a>1$ のとき

③ の両辺を正の数 $a-1$ で割って　$x>a+1$

[2]　$a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき
③ は $0\cdot x>0$ となり，これを満たす x の値はない。
よって，解はない。
[3]　$a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき
③ の両辺を負の数 $a-1$ で割って　　$x<a+1$

3

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}$　　(2)　3　　(3)　-5　　(4)　0　　(5)　$2-\sqrt{2}$　　(6)　1

解説

(1)　$\left|\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$

(2)　$|-5+2|=|-3|=3$

(3)　$|2|-|-7|=2-7=-5$

(4)　$\left|-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-1-2+3}{6}\right|=|0|=0$

(5)　$\sqrt{2}=1.41\cdots\cdots$ であるから，$2-\sqrt{2}=0.5\cdots\cdots$ は正の数である。
よって　　$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$

(6)　$\pi=3.14\cdots\cdots$ であるから，$\pi-3$ は正の数，$\pi-4$ は負の数である。
よって　　$|\pi-3|+|\pi-4|=\pi-3-(\pi-4)=\pi-3-\pi+4=1$

4

解答　(1)　$x=3,\ -1$　　(2)　$x=1,\ -\dfrac{5}{3}$　　(3)　$x=\dfrac{1}{5},\ 1$

解説

(1)　$|x-1|=2$ から　　$x-1=\pm2$
よって　　$x=3,\ -1$

(2)　$|3x+1|=4$ から　　$3x+1=\pm4$
よって　　$x=1,\ -\dfrac{5}{3}$

(3)　$|3-5x|=2$ から　　$3-5x=\pm2$
よって　　$x=\dfrac{1}{5},\ 1$

5

解答　(1)　$-2<x<6$　　(2)　$x\leqq1,\ 5\leqq x$　　(3)　$x<-3,\ \dfrac{1}{3}<x$

解説

(1)　$|x-2|<4$ から　　$-4<x-2<4$
よって　　$-2<x<6$

(2)　$|3-x|\geqq2$ から　　$3-x\leqq-2,\ 2\leqq3-x$
よって　　$x\leqq1,\ 5\leqq x$

(3)　$|3x+4|>5$ から　　$3x+4<-5,\ 5<3x+4$
よって　　$3x<-9,\ 1<3x$
ゆえに　　$x<-3,\ \dfrac{1}{3}<x$

6

解答　(1)　$x\leqq4$ のとき $4-x$，$x>4$ のとき $x-4$
(2)　$x\geqq-\dfrac{2}{3}$ のとき $3x+2$，$x<-\dfrac{2}{3}$ のとき $-3x-2$
(3)　$x<-4$ のとき $-2x-2$，$-4\leqq x<2$ のとき 6，$2\leqq x$ のとき $2x+2$

解説

(1)　$4-x\geqq0$ すなわち $x\leqq4$ のとき
$|4-x|=4-x$
$4-x<0$ すなわち $x>4$ のとき
$|4-x|=-(4-x)=x-4$

(2)　$3x+2\geqq0$ すなわち $x\geqq-\dfrac{2}{3}$ のとき
$|3x+2|=3x+2$
$3x+2<0$ すなわち $x<-\dfrac{2}{3}$ のとき
$|3x+2|=-(3x+2)=-3x-2$

(3)　$x<-4$ のとき
与式$=-(x-2)-(x+4)=-2x-2$
$-4\leqq x<2$ のとき
与式$=-(x-2)+(x+4)=6$
$2\leqq x$ のとき
与式$=(x-2)+(x+4)=2x+2$

7

解答　(1)　$x=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$x=-3$　　(3)　$x=-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}$

解説

(1)　[1]　$x+1\geqq0$　すなわち　$x\geqq-1$ のとき
$|x+1|=x+1$ であるから，方程式は　　$x+1=3x$
ゆえに　　$x=\dfrac{1}{2}$　　　これは $x\geqq-1$ を満たす。
[2]　$x+1<0$　すなわち　$x<-1$ のとき
$|x+1|=-(x+1)$ であるから，方程式は　　$-(x+1)=3x$
ゆえに　　$x=-\dfrac{1}{4}$　　　これは $x<-1$ を満たさない。
よって，解は　　$x=\dfrac{1}{2}$

(2)　[1]　$x-3\geqq0$　すなわち　$x\geqq3$ のとき
$|x-3|=x-3$ であるから，方程式は　　$x-3=-2x$
ゆえに　　$x=1$　　　これは $x\geqq3$ を満たさない。
[2]　$x-3<0$　すなわち　$x<3$ のとき
$|x-3|=-(x-3)$ であるから，方程式は　　$-(x-3)=-2x$
ゆえに　　$x=-3$　　　これは $x<3$ を満たす。
よって，解は　　$x=-3$

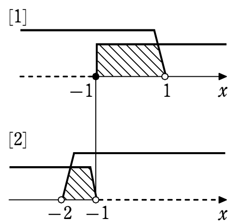
(3)　[1]　$x<0$ のとき
$|2x|=-2x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　　$-2x-(x-2)=6$
ゆえに　　$x=-\dfrac{4}{3}$　　　これは $x<0$ を満たす。
[2]　$0\leqq x<2$ のとき
$|2x|=2x$，$|x-2|=-(x-2)$ であるから，方程式は　　$2x-(x-2)=6$
ゆえに　　$x=4$　　　これは $0\leqq x<2$ を満たさない。
[3]　$x\geqq2$ のとき
$|2x|=2x$，$|x-2|=x-2$ であるから，方程式は　　$2x+(x-2)=6$
ゆえに　　$x=\dfrac{8}{3}$　　　これは $x\geqq2$ を満たす。
よって，解は　　$x=-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}$

8

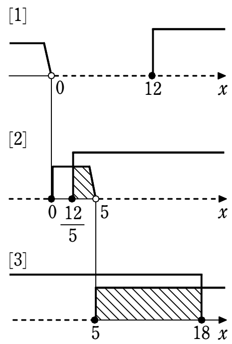
解答　(1)　$-2<x<1$　　(2)　$\dfrac{12}{5}\leqq x\leqq18$

解説

(1)　[1]　$x\geqq-1$ のとき，不等式は　$3(x+1)<x+5$
これを解いて　$x<1$
$x\geqq-1$ との共通範囲は　　$-1\leqq x<1$　……①
[2]　$x<-1$ のとき，不等式は　$-3(x+1)<x+5$
これを解いて　$x>-2$
$x<-1$ との共通範囲は　　$-2<x<-1$　……②
求める解は，① と ② を合わせた範囲で
$-2<x<1$



(2)　$|x-5|\leqq\dfrac{2}{3}|x|+1$ から　$3|x-5|\leqq2|x|+3$
[1]　$x<0$ のとき，不等式は　$-3(x-5)\leqq-2x+3$
ゆえに　$-x\leqq-12$　　よって　$x\geqq12$
これは $x<0$ を満たさない。
[2]　$0\leqq x<5$ のとき，不等式は　$-3(x-5)\leqq2x+3$
ゆえに　$-5x\leqq-12$　　よって　$x\geqq\dfrac{12}{5}$
$0\leqq x<5$ との共通範囲は　$\dfrac{12}{5}\leqq x<5$　……①
[3]　$5\leqq x$ のとき，不等式は　$3(x-5)\leqq2x+3$
これを解いて　$x\leqq18$
$5\leqq x$ との共通範囲は　　$5\leqq x\leqq18$　……②
求める解は，① と ② を合わせた範囲で
$\dfrac{12}{5}\leqq x\leqq18$



第２講　レベルA

1

解答　(1)　$a \fallingdotseq 0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき $x=\dfrac{1}{a}$；$a=0$ のとき 解はない；

$a=1$ のとき 解はすべての数

(2)　$a>1$ のとき $x>a+2$，$a=1$ のとき 解はない，$a<1$ のとき $x<a+2$

解説

(1)　$a^2x+1=ax+a$ から　　$a(a-1)x=a-1$　……①

$a(a-1) \fallingdotseq 0$　すなわち　$a \fallingdotseq 0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき　　$x=\dfrac{1}{a}$

$a=0$ のとき，① は　　$0 \cdot x=-1$

これを満たす x の値はない。すなわち，解はない。

$a=1$ のとき，① は　　$0 \cdot x=0$

これはすべての数 x について成り立つ。

すなわち，解はすべての数。

(2)　与式から　　$(a-1)x>(a-1)(a+2)$　……①

[1]　$a-1>0$　すなわち　$a>1$ のとき　　$x>a+2$

[2]　$a-1=0$　すなわち　$a=1$ のとき　　① は　$0 \cdot x>0$

これを満たす x の値はない。

[3]　$a-1<0$　すなわち　$a<1$ のとき　　$x<a+2$

よって　$\begin{cases} a>1 \text{ のとき} & x>a+2 \\ a=1 \text{ のとき} & \text{解はない} \\ a<1 \text{ のとき} & x<a+2 \end{cases}$

2

解答　(1)　$x \leqq 4$　　(2)　$\dfrac{5}{2}<x \leqq 3$　　(3)　$-2<x<12$　　(4)　$x<-\dfrac{7}{3}$，$1<x$

解説

(1)　両辺に 6 を掛けると　　$4(x+1)-5 \geqq 6x-9$

すなわち　　$4x+4-5 \geqq 6x-9$

移項すると　$-2x \geqq -8$　　　よって　　$x \leqq 4$

(2)　$-x+5 \geqq 2x-4$ から　　$-3x \geqq -9$

よって　　$x \leqq 3$　……①

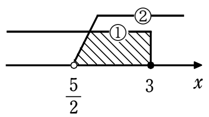
$3(2x-1)+1>4x+3$ から　　$6x-3+1>4x+3$

すなわち　　$2x>5$

よって　　$x>\dfrac{5}{2}$　……②

① と ② の共通範囲を求めて

$\dfrac{5}{2}<x \leqq 3$



(3)　$|x-5|<7$ から　　$-7<x-5<7$

各辺に 5 を足して　　$-2<x<12$

(4)　$|3x+2|>5$ から　　$3x+2<-5$，$5<3x+2$

各辺から 2 を引いて　　$3x<-7$，$3<3x$

各辺を 3 で割って　　$x<-\dfrac{7}{3}$，$1<x$

3

解答　(1)　$x=-\dfrac{5}{3}$，1，5　　(2)　$x=6$，-4

解説

(1)　[1]　$x<-1$ のとき，方程式は　　$-2(x+1)+(x-3)=2x$

よって　　$-3x=5$　　　ゆえに　　$x=-\dfrac{5}{3}$　　　$x=-\dfrac{5}{3}$ は $x<-1$ を満たす。

[2]　$-1 \leqq x<3$ のとき，方程式は　　$2(x+1)+(x-3)=2x$

これを解いて　　$x=1$　　　$x=1$ は $-1 \leqq x<3$ を満たす。

[3]　$3 \leqq x$ のとき，方程式は　　$2(x+1)-(x-3)=2x$

これを解いて　　$x=5$　　　$x=5$ は $3 \leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は　　$x=-\dfrac{5}{3}$，1，5

(2)　[1]　$x \geqq 1$ のとき，方程式は　　$|(x-1)-2|-3=0$

すなわち　　$|x-3|=3$　　　よって　　$x-3=\pm 3$

ゆえに　　$x=6$，0

これらのうち，$x \geqq 1$ を満たすのは　　$x=6$

[2]　$x<1$ のとき，方程式は　　$|-(x-1)-2|-3=0$

すなわち　$|x+1|=3$　　　よって　$x+1=\pm 3$

ゆえに　　$x=2$，-4

これらのうち，$x<1$ を満たすのは　　$x=-4$

以上から，求める解は　　$x=6$，-4

別解　$||x-1|-2|=3$ から　　$|x-1|-2=\pm 3$

よって　　$|x-1|=5$，-1

$|x-1|=5$ から　　$x-1=\pm 5$　　　これを解いて　　$x=6$，-4

$|x-1|=-1$ を満たす x は存在しない。

以上から，求める解は　　$x=6$，-4

第２講　レベルB

1

解答　$a>3$ のとき $x>-\dfrac{b}{a-3}$，$a=3$ かつ $b>0$ のとき 解はすべての数，

$a=3$ かつ $b \leqq 0$ のとき 解はない，$a<3$ のとき $x<-\dfrac{b}{a-3}$

解説

$ax>3x-b$ から　　$(a-3)x>-b$　……①

[1]　$a-3>0$　すなわち　$a>3$ のとき，① から　　$x>-\dfrac{b}{a-3}$

[2]　$a-3=0$　すなわち　$a=3$ のとき，① は　　$0 \cdot x>-b$

（i）　$b>0$ のとき，$-b<0$ であるから，解はすべての数。

（ii）　$b \leqq 0$ のとき，$-b \geqq 0$ であるから，解はない。

[3]　$a-3<0$　すなわち　$a<3$ のとき，① から　　$x<-\dfrac{b}{a-3}$

よって　　$a>3$ のとき　$x>-\dfrac{b}{a-3}$

$a=3$ かつ $b>0$ のとき　解はすべての数

$a=3$ かつ $b \leqq 0$ のとき　解はない

$a<3$ のとき　$x<-\dfrac{b}{a-3}$

2

解答　$-7<k<9$

解説

$|x-1|<6$ から　　$-6<x-1<6$

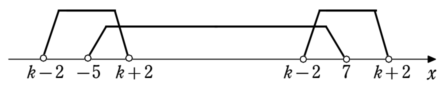
よって　　$-5<x<7$

$|x-k|<2$ から　　$-2<x-k<2$

よって　　$k-2<x<k+2$

与えられた連立不等式を満たす実数 x が存在するための条件は

$-5<k+2$ かつ $k-2<7$



よって　　$-7<k<9$

3

解答　(1)　$x=-1$，5　　(2)　$x=1$　　(3)　$x \leqq -5$，$\dfrac{1}{5} \leqq x$　　(4)　$-5<x<5$

解説

(1)　[1]　$x<\dfrac{3}{2}$ のとき，方程式は　　$-(x-3)-(2x-3)=9$

これを解いて　　$x=-1$　　　$x=-1$ は $x<\dfrac{3}{2}$ を満たす。

[2]　$\dfrac{3}{2} \leqq x<3$ のとき，方程式は　　$-(x-3)+(2x-3)=9$

これを解いて　　$x=9$　　　$x=9$ は $\dfrac{3}{2} \leqq x<3$ を満たさない。

[3]　$3 \leqq x$ のとき，方程式は　　$(x-3)+(2x-3)=9$

これを解いて　　$x=5$　　　$x=5$ は $3 \leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は　$x=-1,\ 5$

(2) [1] $x<2$ のとき，方程式は　$|-(x-2)-4|=3x$

よって　$|-x-2|=3x$　　ゆえに　$|x+2|=3x$　……①

(i) $x<-2$ のとき，① は　$-(x+2)=3x$

よって　$x=-\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{1}{2}$ は $x<-2$ を満たさない。

(ii) $-2\leqq x<2$ のとき，① は　$x+2=3x$

ゆえに　$x=1$　　$x=1$ は $-2\leqq x<2$ を満たす。

[2] $x\geqq 2$ のとき，方程式は　$|x-2-4|=3x$

よって　$|x-6|=3x$　……②

(i) $2\leqq x<6$ のとき，② は　$-(x-6)=3x$

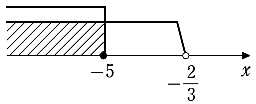
ゆえに　$x=\dfrac{3}{2}$　　$x=\dfrac{3}{2}$ は $2\leqq x<6$ を満たさない。

(ii) $x\geqq 6$ のとき，② は　$x-6=3x$

よって　$x=-3$　　$x=-3$ は $x\geqq 6$ を満たさない。

以上から，求める解は　$x=1$

(3) [1] $x<-\dfrac{2}{3}$ のとき，不等式は



$-(2x-3)\leqq -(3x+2)$

ゆえに　$-2x+3\leqq -3x-2$

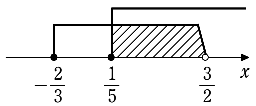
よって　$x\leqq -5$

$x<-\dfrac{2}{3}$ との共通範囲は　$x\leqq -5$　……①

[2] $-\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{3}{2}$ のとき，不等式は　$-(2x-3)\leqq 3x+2$

ゆえに　$-2x+3\leqq 3x+2$

よって　$x\geqq \dfrac{1}{5}$



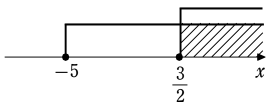
$-\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{3}{2}$ との共通範囲は

$\dfrac{1}{5}\leqq x<\dfrac{3}{2}$　……②

[3] $\dfrac{3}{2}\leqq x$ のとき，不等式は　$2x-3\leqq 3x+2$

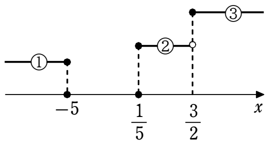
ゆえに　$-x\leqq 5$　　よって　$x\geqq -5$

$\dfrac{3}{2}\leqq x$ との共通範囲は　$\dfrac{3}{2}\leqq x$　……③



求める解は，① と ② と ③ を合わせた範囲であるから

$x\leqq -5,\ \dfrac{1}{5}\leqq x$

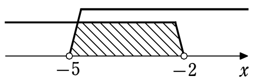


(4) [1] $x<-2$ のとき，不等式は

$-2(x+2)-(x-4)<15$

ゆえに　$-2x-4-x+4<15$

よって　$x>-5$



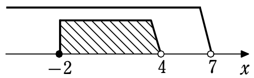
$x<-2$ との共通範囲は　$-5<x<-2$　……①

[2] $-2\leqq x<4$ のとき，不等式は

$2(x+2)-(x-4)<15$

ゆえに　$2x+4-x+4<15$

よって　$x<7$



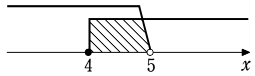
$-2\leqq x<4$ との共通範囲は　$-2\leqq x<4$　……②

[3] $4\leqq x$ のとき，不等式は

$2(x+2)+(x-4)<15$

ゆえに　$2x+4+x-4<15$

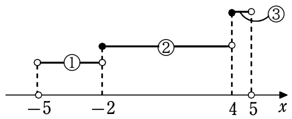
よって　$x<5$



$4\leqq x$ との共通範囲は　$4\leqq x<5$　……③

求める解は，① と ② と ③ を合わせた範囲であるから

$-5<x<5$



1

解答　(1) $2\sqrt{6}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

解説

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=(5+2\sqrt{6})-5$

$=2\sqrt{6}$

(2) (1) の結果を利用して

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2-(8-2\sqrt{15})}{2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{15}-6}{2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{15}-6)\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{6\sqrt{10}-6\sqrt{6}}{2\cdot 6}$$

$$=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$$

2

解答　(1) 18　(2) 1　(3) 18　(4) 322　(5) 5778

解説

(1) $x+y=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\times\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=1$

(3) $x^2y+xy^2=xy(x+y)=1\cdot 18=18$

(4) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=18^2-2\cdot 1=322$

(5) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=18^3-3\cdot 1\cdot 18=5778$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=18(322-1)=5778$

参考　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ から　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ から　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

3

解答　(1) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$　(2) $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

解説

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)-2\sqrt{7\cdot 2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\cdot 2\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}=\sqrt{(8+3)+2\sqrt{8\cdot 3}}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(5+3)-2\sqrt{5\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

4

解答　(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$　(2) $\{100,\ 105,\ 110,\ \cdots\cdots,\ 995\}$

(3) $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$　(4) $\{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots\cdots\}$

解説

(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$　　(2) $\{100,\ 105,\ 110,\ \cdots\cdots,\ 995\}$

(3) $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

(4) $\{3\cdot1-1,\ 3\cdot2-1,\ 3\cdot3-1,\ 3\cdot4-1,\ \cdots\cdots\}$

すなわち　$\{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots\cdots\}$

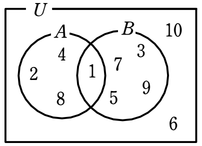
$\boxed{5}$★☆☆

解答　(1) $\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$　(2) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$　(3) $\{6,\ 10\}$

(4) $\{6,\ 10\}$　(5) $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$　(6) $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

解説

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ である。



(1) $\overline{A}=\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

(2) $\overline{B}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(3) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{6,\ 10\}$

(4) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$ であるから

$\overline{A\cup B}=\{6,\ 10\}$

(5) $A\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

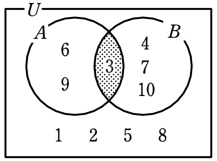
(6) $\overline{A}\cap B=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$\boxed{6}$★★☆

解答　$A=\{3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 10\}$，$A\cap\overline{B}=\{6,\ 9\}$

解説

与えられた集合の要素を図に書き込むと，右のようになるから



$A=\{3,\ 6,\ 9\}$

$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 10\}$

$A\cap\overline{B}=\{6,\ 9\}$

$\boxed{1}$

解答　(1) $\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{35}}{5}$

解説

(1) (与式)

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+2\sqrt{6}+6)-7}$$

$$=\frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}=\frac{(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}$$

(2) (与式)

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{7}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{7}\}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{(2+2\sqrt{14}+7)-5}{(2+2\sqrt{10}+5)-7}=\frac{4+2\sqrt{14}}{2\sqrt{10}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{14}}{\sqrt{10}}=\frac{(2+\sqrt{14})\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}+2\sqrt{35}}{10}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{35}}{5}$$

$\boxed{2}$

解答　(1) $x+y=14$，$xy=1$　(2) 194　(3) 14　(4) 2702

解説

(1) $$x+y=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+4\sqrt{3}+3)+(4-4\sqrt{3}+3)}{4-3}=14$$

$$xy=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=1$$

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14^2-2\cdot1=194$

(3) $x^4y^3+x^3y^4=x^3y^3(x+y)=(xy)^3(x+y)=1^3\cdot14=14$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=14^3-3\cdot1\cdot14=2702$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=14(194-1)=2702$

$\boxed{3}$

解答　(1) $\sqrt{3}+1$　(2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　(3) $2\sqrt{2}+1$　(4) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot1}}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$$

(2) $$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

(3) $$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}$$

$$=\sqrt{(8+1)+2\sqrt{8\cdot1}}$$

$$=\sqrt{8}+\sqrt{1}=2\sqrt{2}+1$$

(4) $$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5\cdot1}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$　(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

(3) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$　(4) $\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$

解説

(1) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$

(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$

(3) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(4) $\{3\cdot1-2,\ 3\cdot2-2,\ 3\cdot3-2,\ 3\cdot4-2,\ 3\cdot5-2\}$

すなわち　$\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$

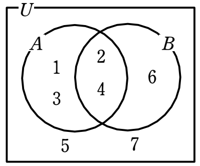
$\boxed{5}$

解答　(1) $\{5,\ 6,\ 7\}$　(2) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$　(3) $\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$　(4) $\{5,\ 7\}$

(5) $\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$　(6) $\{1,\ 3\}$

解説

A，B，U の要素を図に書き込んでいくと，右のようになる。



(1) $\overline{A}=\{5,\ 6,\ 7\}$

(2) $\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(3) $\overline{A\cap B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{5,\ 7\}$

(5) $\overline{A}\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

(6) $A\cap\overline{B}=\{1,\ 3\}$

参考　(3)，(4) は，ド・モルガンの法則

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

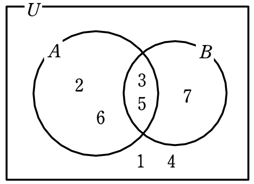
を用いて求めてもよい。

$\boxed{6}$

解答　(1) $\{1,\ 4\}$　(2) $\{2,\ 6\}$

解説

全体集合を U とし，与えられた集合の要素を図に書き込むと，右のようになる。



(1) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1,\ 4\}$

(2) $A\cap\overline{B}=\{2,\ 6\}$

1

解答　(1)　$2\sqrt{2}$　　(2)　6　　(3)　$10\sqrt{2}$　　(4)　$58\sqrt{2}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

よって　$x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{2})^2-2=6$

(3)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(2\sqrt{2})^3-3\cdot 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

別解　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2\sqrt{2}(6-1)=10\sqrt{2}$

(4)　$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=10\sqrt{2}\cdot 6-2\sqrt{2}=58\sqrt{2}$

参考　$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ から　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x}+3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ から　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^5+x^3\cdot\dfrac{1}{x^2}+x^2\cdot\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}=x^5+\dfrac{1}{x^5}+x+\dfrac{1}{x}$ から

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

2

解答　(1)　$2\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　(2)　$2+\sqrt{3}$　　(3)　$\sqrt{10}$　　(4)　$2\sqrt{3}+1$

解説

(1)　$\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}=\sqrt{(8+3)+2\sqrt{8\cdot 3}}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}=\dfrac{1}{\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

(3)　$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$

同様に　$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$

よって　$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10}$

(4)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}=\sqrt{3}+1$

よって　(与式)$=\sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(12+1)+2\sqrt{12\cdot 1}}=\sqrt{12}+1=2\sqrt{3}+1$

3

解答　(1)　$x-2$　　(2)　$-x+2$

解説

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

(1)　$x\geqq 2$ のとき，$x-2\geqq 0$ であるから

(与式)$=x-2$

(2)　$x<2$ のとき，$x-2<0$ であるから

(与式)$=-(x-2)=-x+2$

4

解答　(1)　$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ h\}$，$\overline{A\cup C}=\{g,\ h,\ i\}$，

$\overline{A\cap B}=\{a,\ c,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i\}$

(2)　$A\cup B\cup C=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ h\}$，$(A\cup C)\cap B=\{b,\ d,\ f\}$，

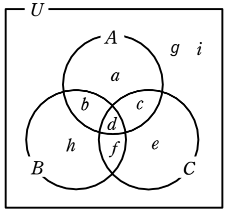
$\overline{(A\cap B)}\cup C=\{a,\ g,\ h,\ i\}$

解説

(1)　$A\cap B\cap C=\{d\}$，$A\cap B=\{b,\ d\}$

$B\cap C=\{d,\ f\}$，$C\cap A=\{c,\ d\}$

よって，図のようになり，



$A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ h\}$

$\overline{A\cup C}=\{g,\ h,\ i\}$

$\overline{A\cap B}=\{a,\ c,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i\}$

(2)　図から

$A\cup B\cup C=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ h\}$

$(A\cup C)\cap B=\{b,\ d,\ f\}$

$\overline{(A\cap B)}\cup C=\{a,\ g,\ h,\ i\}$

5

解答　(1)　$\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$

(2)　$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

解説

(1)　要素を書き並べて表すと

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$P=\{3,\ 6,\ 9\}$

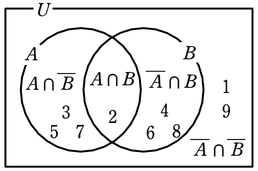
よって　$\overline{P}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$

(2)　$\overline{A}\cap\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$U$ の要素を，図に順に書き込んでいくと，右のようになる。

よって

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，　$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$



6

解答　$a=3$

解説

$A\cap B=\{0,\ 4\}$ より $0\in A$ であるから

$a-1=0$　または　$a^2-5a+6=0$

[1]　$a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

$A=\{0,\ 2,\ 4\}$，$B=\{-3,\ 1,\ 4,\ 6\}$

よって，$0\notin B$ となるから，条件に適さない。

[2]　$a^2-5a+6=0$ のとき　$(a-2)(a-3)=0$

したがって　$a=2,\ 3$

(i)　$a=2$ の場合　$A=\{0,\ 1,\ 4\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$

よって，$A\cap B=\{0,\ 1,\ 4\}$ となるから，条件に適さない。

(ii)　$a=3$ の場合　$A=\{0,\ 2,\ 4\}$，$B=\{0,\ 1,\ 4,\ 5\}$

よって，$A\cap B=\{0,\ 4\}$ となるから，条件に適する。

以上から，求める a の値は　$a=3$

7

解答　(1)　(ア)　$\{x\mid x\leqq -4,\ 4\leqq x\}$　　(イ)　$\{x\mid x\leqq -4,\ -3\leqq x\}$

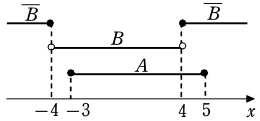
(ウ)　$\{x\mid 4\leqq x\leqq 5\}$

(2)　$2<k\leqq 4$

解説

(1)　$|x|<4$ から　$-4<x<4$

よって，右の図が得られる。



したがって

(ア)　$\overline{B}=\{x\mid x\leqq -4,\ 4\leqq x\}$

$(\overline{B}=\{x\mid |x|\geqq 4\}$ でもよい$)$

(イ)　$A\cup\overline{B}=\{x\mid x\leqq -4,\ -3\leqq x\}$

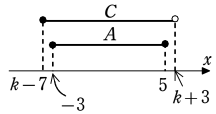
(ウ)　$A\cap\overline{B}=\{x\mid 4\leqq x\leqq 5\}$

(2)　$A\subset C$ となるための条件は

$k-7\leqq -3$　……①

$k+3>5$　……②

が同時に成り立つことである。



①から　$k\leqq 4$　　②から　$k>2$

共通範囲を求めて　$2<k\leqq 4$

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$

解答　393

解説

$$\frac{x^{10}-1}{x^5}=x^5-\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ から　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3+\sqrt{13}}=\dfrac{2(\sqrt{13}-3)}{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)}=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

ゆえに　$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}-\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=3$

よって　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$

$x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=3\cdot(11+1)=36$

したがって　$\dfrac{x^{10}-1}{x^5}=11\cdot36-3=393$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$

解説

$x=\sqrt{12+2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)+2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$

$y=\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)-2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

(1)　$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}}$

$=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{7-5}}=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+2\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{2\sqrt{7}+2\sqrt{7-5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{7}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{3}$

解答　$x<-2$ のとき　$-2x+3$

$-2\leqq x<5$ のとき　7

$5\leqq x$ のとき　$2x-3$

解説

$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$，$\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|$

[1]　$x<-2$ のとき　$|x-5|=-(x-5)$，$|x+2|=-(x+2)$ であるから

与式$=-(x-5)-(x+2)=-2x+3$

[2]　$-2\leqq x<5$ のとき　$|x-5|=-(x-5)$，$|x+2|=x+2$ であるから

与式$=-(x-5)+x+2=7$

[3]　$5\leqq x$ のとき　$|x-5|=x-5$，$|x+2|=x+2$ であるから

与式$=x-5+x+2=2x-3$

$\boxed{4}$

解答　9組

解説

$X=\{1,\ 2,\ 3\}$ のすべての部分集合は

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

このうち，条件 (ii) を満たす B は　$\{1\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

$B=\{1\}$ のとき，条件 (i) を満たす A は　$A=\{1\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

$B=\{1,\ 2\}$ のとき，条件 (i) を満たす A は　$A=\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

$B=\{2,\ 3\}$ のとき，条件 (i) を満たす A は　$A=\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3\}$ のとき，条件 (i) を満たす A は　$A=\{1,\ 2,\ 3\}$

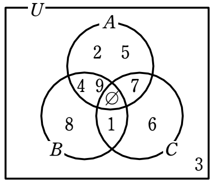
したがって，条件を満たす A，B の組は　9組

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\{2,\ 3,\ 5\}$　　(2)　$A\cap(\overline{B\cup C})=\{2,\ 5\}$，$A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

解説

与えられた条件から，集合 A，B，C の要素を調べて図に書き込むと，右のようになる。



よって，図から

(1)　$\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}=\{2,\ 3,\ 5\}$

(2)　$A\cap(\overline{B\cup C})=\{2,\ 5\}$，

$A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$

第４講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　真　　(2)　偽　　(3)　偽　　(4)　真

解説

(1)　真

(証明)　n が8の倍数のとき，$n=8k$ (k は自然数) と表される。

このとき，$n=4\cdot2k$ で，$2k$ は自然数であるから，n は4の倍数である。

(2)　偽

(反例)　$m=1$，$n=1$ のとき，$m+n=2$ (偶数) であるが，m，n は奇数である。

(3)　偽

(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，$xy=2$ (有理数) であるが，x，y は無理数である。

(4)　真

(証明)　x，y が有理数のとき，$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$ と表される (p，q，r，s は整数で，$q\neq0$，$s\neq0$)。

このとき，$xy=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{r}{s}=\dfrac{pr}{qs}$ となり，pr，qs は整数で $qs\neq0$ であるから，xy は有理数である。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=1$ または $y\neq4$　　(2)　$x>3$ かつ $y\leqq7$　　(3)　$x<-1$ または $x\geqq2$

(4)　m は奇数かつ3の倍数でない。

(5)　x，y の少なくとも一方は有理数である。

解説

(1)　$x=1$ または $y\neq4$　　(2)　$x>3$ かつ $y\leqq7$

(3)　$-1\leqq x<2$ を言い換えると　$x\geqq-1$ かつ $x<2$

よって，$-1\leqq x<2$ の否定は　$x<-1$ または $x\geqq2$

(4)　m は奇数かつ3の倍数でない。

(5)　x，y の少なくとも一方は有理数である。

$\boxed{3}$

解答　(1)　十分条件であるが必要条件ではない

(2)　必要条件であるが十分条件ではない　　(3)　必要十分条件である

(4)　必要条件でも十分条件でもない

解説

(1)　$x=2$ のとき　$x^2+x-6=2^2+2-6=0$

よって，「$x=2\Longrightarrow x^2+x-6=0$」は真である。

$x^2+x-6=0$ を解くと　$x=-3,\ 2$

よって，「$x^2+x-6=0\Longrightarrow x=2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(2)　「$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR}\Longrightarrow\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}$」は偽であり，

「$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PQR}\Longrightarrow\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{PQR}$」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(3)　$a=b$ のとき，この両辺に c を加えると　$a+c=b+c$

よって，「$a=b\Longrightarrow a+c=b+c$」は真である。

$a+c=b+c$ のとき，この両辺から c を引くと　$a=b$

よって，「$a+c=b+c\Longrightarrow a=b$」は真である。

したがって，必要十分条件である。

(4)　$a=1$，$b=-2$ のとき，$a>b$ であるが，$a^2>b^2$ でない。

よって，「$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$」は偽である。

$a=-2$，$b=1$ のとき，$a^2>b^2$ であるが，$a>b$ でない。

よって，「$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$」は偽である。

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

4

解答　逆：「$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$」，真

対偶：「$x\fallingdotseq 1$ または $y\fallingdotseq 2 \Longrightarrow x+y\fallingdotseq 3$」，偽

裏：「$x+y\fallingdotseq 3 \Longrightarrow x\fallingdotseq 1$ または $y\fallingdotseq 2$」

解説

逆：「$x=1$ かつ $y=2 \Longrightarrow x+y=3$」　これは　真

対偶：「$x\fallingdotseq 1$ または $y\fallingdotseq 2 \Longrightarrow x+y\fallingdotseq 3$」

ここで，与えられた命題は　偽　（反例：$x=0$，$y=3$）

したがって，対偶も　偽

裏：「$x+y\fallingdotseq 3 \Longrightarrow x\fallingdotseq 1$ または $y\fallingdotseq 2$」

5

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は「n が奇数ならば，n^2+1 は偶数」である。

奇数 n は，整数 m を用いて $n=2m+1$ と表され

$$\begin{aligned} n^2+1&=(2m+1)^2+1\\ &=4m^2+4m+1+1\\ &=2(2m^2+2m+1) \end{aligned}$$

よって，n^2+1 は偶数である。

したがって，対偶が真であるから，与えられた命題も真である。

(2)　与えられた命題の対偶は「n が３の倍数でないならば，n^2 は３の倍数でない」である。

n が３の倍数でないとき，k を整数として，$n=3k+1$ または $n=3k+2$ と表される。

$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

ここで，$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，n^2 は３の倍数ではない。

したがって，対偶が真であるから，与えられた命題も真である。

6

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$1+\sqrt{6}$ は無理数でないと仮定すると，$1+\sqrt{6}$ は有理数である。

$1+\sqrt{6}=r$（r は有理数）とすると　$\sqrt{6}=r-1$

r は有理数であるから $r-1$ も有理数であり，この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$1+\sqrt{6}$ は無理数である。

(2)　$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は無理数でないと仮定すると，$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は有理数である。

$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=r$（r は有理数）とし，この両辺を２乗すると

$$r^2=18-12\sqrt{6}+12$$

よって　$\sqrt{6}=\dfrac{30-r^2}{12}$

r は有理数であるから $\dfrac{30-r^2}{12}$ も有理数であり，この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ は無理数である。

1

解答　(1)　偽　(2)　真　(3)　偽　(4)　偽

解説

(1)　$x=1$，$y=-1$ とすると，$|x|=1$，$|y|=1$ であるから

$|x|=|y|$ を満たすが　$x\fallingdotseq y$

よって，命題「$|x|=|y|$ ならば $x=y$ である」は偽である。

(2)　$x=2$ のとき　$2^2-5\cdot 2+6=0$

よって，命題「$x=2$ ならば $x^2-5x+6=0$ である」は真である。

(3)　$m=2$，$n=3$ とすると，m，n はともに素数であるが　$m+n=5$（奇数）

よって，命題「m，n がともに素数ならば $m+n$ は偶数である」は偽である。

(4)　$n=3$ とすると，n は３の倍数であるが，９の倍数でない。

よって，命題「n が３の倍数ならば n は９の倍数である」は偽である。

2

解答　(1)　$x\geqq -1$ または $y\leqq 0$　(2)　n は奇数 かつ３の倍数でない

(3)　$3>x$ または $x\geqq 7$　(4)　$y>-1$ かつ $y\fallingdotseq 2$

(5)　m，n の少なくとも一方は５の倍数でない　(6)　m，n はともに奇数

解説

(1)　$x\geqq -1$ または $y\leqq 0$

(2)　n は奇数 かつ３の倍数でない

(3)　$3\leqq x<7 \Longleftrightarrow 3\leqq x$ かつ $x<7$

であるから，その否定は　$3>x$ または $x\geqq 7$

(4)　$y>-1$ かつ $y\fallingdotseq 2$

(5)　m，n の少なくとも一方は５の倍数でない

(6)　m，n はともに奇数

3

解答　(1)　十分　(2)　十分　(3)　×　(4)　必要　(5)　必要十分

解説

(1)　「$x=5$ かつ $y=7 \Longrightarrow x+y=12$」は真。

「$x+y=12 \Longrightarrow x=5$ かつ $y=7$」は $x=7$，$y=5$ のとき成り立たない。

したがって　十分

(2)　「$x=2 \Longrightarrow x^2-4=0$」は真。

「$x^2-4=0 \Longrightarrow x=2$」は $x=-2$ のとき成り立たない。

したがって　十分

(3)　「$x(x-2)=0 \Longrightarrow x(x+3)=0$」は $x=2$ のとき成り立たない。

「$x(x+3)=0 \Longrightarrow x(x-2)=0$」は，$x=-3$ のとき成り立たない。

したがって　×

(4)　「$x>0 \Longrightarrow x>1$」は $x=0.5$ のとき成り立たない。

「$x>1 \Longrightarrow x>0$」は真。

したがって　必要

(5)　「$x=y \Longrightarrow x+z=y+z$」は真。「$x+z=y+z \Longrightarrow x=y$」は真。

したがって　必要十分

4

解答　(1)　逆：「$x=2$ かつ $y=3 \Longrightarrow x+y=5$」，真；

対偶：「$x\fallingdotseq 2$ または $y\fallingdotseq 3 \Longrightarrow x+y\fallingdotseq 5$」，偽；

裏：「$x+y\fallingdotseq 5 \Longrightarrow x\fallingdotseq 2$ または $y\fallingdotseq 3$」，真

(2)　逆：「x，y の少なくとも一方が無理数ならば，xy は無理数である」，偽；
対偶：「x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である」，真；
裏：「xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である」，偽

解説

(1)　逆：「$x=2$ かつ $y=3 \Longrightarrow x+y=5$」
これは明らかに成り立つから　真。
対偶：「$x \neq 2$ または $y \neq 3 \Longrightarrow x+y \neq 5$」
これは　偽。　(反例)　$x=1$，$y=4$
裏：「$x+y \neq 5 \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」
裏の対偶，すなわち逆が真であるから　真。

(2)　逆：「x，y の少なくとも一方が無理数ならば，xy は無理数である」
これは　偽。　(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=0$
対偶：「x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である」
これは　真。
(証明)　$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$　(p，q，r，s は整数；$qs \neq 0$) とおくと　$xy=\dfrac{pr}{qs}$
ここで，pr，qs はいずれも整数で，$qs \neq 0$ である。
よって，xy は有理数である。
裏：「xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である」
これは　偽。　(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$

5

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は　　「n が 5 の倍数でないならば，n^2 は 5 の倍数でない」
n が 5 の倍数でないとき，n はある整数 k を用いて
$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$
のいずれかで表される。
[1]　$n=5k+1$ のとき
$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$
[2]　$n=5k+2$ のとき
$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$
[3]　$n=5k+3$ のとき
$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$
[4]　$n=5k+4$ のとき
$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$
よって，[1]～[4] のいずれの場合も，n^2 は 5 の倍数でない。
したがって，対偶が真であるから，もとの命題は真である。

(2)　与えられた命題の対偶は
「m，n がともに 3 の倍数でないならば，mn は 3 の倍数でない」
k，l を整数とする。
m，n がともに 3 の倍数でないのは，次の [1]～[4] のいずれかの場合である。
[1]　$m=3k+1$，$n=3l+1$ のとき
$mn=(3k+1)(3l+1)=3(3kl+k+l)+1$
[2]　$m=3k+1$，$n=3l+2$ のとき
$mn=(3k+1)(3l+2)=3(3kl+2k+l)+2$
[3]　$m=3k+2$，$n=3l+1$ のとき
$mn=(3k+2)(3l+1)=3(3kl+k+2l)+2$
[4]　$m=3k+2$，$n=3l+2$ のとき
$mn=(3k+2)(3l+2)=3(3kl+2k+2l+1)+1$
よって，[1]～[4] のいずれの場合も mn は 3 の倍数でない。
したがって，対偶が真であるから，もとの命題は真である。

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$4\sqrt{3}$ は無理数でないと仮定すると，$4\sqrt{3}$ は有理数である。
$4\sqrt{3}=r$ (r は有理数) とすると　　$\sqrt{3}=\dfrac{r}{4}$
r は有理数であるから $\dfrac{r}{4}$ も有理数であり，この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって，$4\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　$\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は有理数である。
$\sqrt{2}+\sqrt{6}=r$ (r は有理数) とし，この両辺を 2 乗すると　　$r^2=2+4\sqrt{3}+6$
よって　　$\sqrt{3}=\dfrac{r^2-8}{4}$
r は有理数であるから $\dfrac{r^2-8}{4}$ も有理数であり，この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって，$\sqrt{2}+\sqrt{6}$ は無理数である。

(3)　$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は有理数である。
$\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$ (r は有理数) とすると　　$r-\sqrt{3}=\sqrt{5}$
この両辺を 2 乗すると　　$r^2-2\sqrt{3}r+3=5$　　　よって　　$2\sqrt{3}r=r^2-2$
$r \neq 0$ であるから　　$\sqrt{3}=\dfrac{r^2-2}{2r}$
r は有理数であるから $\dfrac{r^2-2}{2r}$ も有理数であり，この等式は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数である。

1

解答　(1)　真　　(2)　偽　　(3)　偽

解説

(1)　$a=3$ のとき　　$a^2+4a-21=3^2+4\cdot 3-21=0$
よって，この命題は真である。
(2)　$a=1$，$b=2$，$c=0$ のとき，$ac=bc$ であるが，$a=b$ でない。
よって，この命題は偽である。
(3)　$a=1+\sqrt{2}$，$b=1-\sqrt{2}$ のとき，$a+b=2$，$ab=-1$ (ともに整数) であるが，a，b は整数でない。
よって，この命題は偽である。

2

解答　(1)　必要条件であるが十分条件ではない
(2)　十分条件であるが必要条件ではない　　(3)　必要十分条件である
(4)　必要条件であるが十分条件ではない　　(5)　必要条件でも十分条件でもない

解説

(1)　「$(x-y)(y-z)=0 \Longrightarrow x=y=z$」は偽。(反例：$x=y=1$，$z=0$)
「$x=y=z \Longrightarrow (x-y)(y-z)=0$」は真。
したがって，必要条件であるが十分条件ではない。
(2)　「$xy=0$ かつ $x \neq 0 \Longrightarrow y=0$」は真。
「$y=0 \Longrightarrow xy=0$ かつ $x \neq 0$」は偽。(反例：$x=0$，$y=0$)
したがって，十分条件であるが必要条件ではない。
(3)　「$x=y=0 \Longrightarrow xy=0$ かつ $x+y=0$」は真。
$xy=0$ かつ $x+y=0$ とする。
$x+y=0$ から　　$y=-x$
これを $xy=0$ に代入すると　　$-x^2=0$　　　よって　　$x=0$
$x+y=0$ に代入して　　$0+y=0$　　　ゆえに　　$y=0$
よって，「$xy=0$ かつ $x+y=0 \Longrightarrow x=y=0$」は真。
したがって，必要十分条件である。
(4)　「$\angle A<90° \Longrightarrow \triangle ABC$ は鋭角三角形」は偽。
(反例：$\angle A=60°$，$\angle B=100°$，$\angle C=20°$ の三角形)
「$\triangle ABC$ は鋭角三角形 $\Longrightarrow \angle A<90°$」は真。
したがって，必要条件であるが十分条件ではない。
(5)　「$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \Longrightarrow \triangle ABC$ は直角二等辺三角形」は偽。
(反例：$a=1$，$b=1$，$c=1$ の正三角形)
「$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形 $\Longrightarrow (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$」は偽。
(反例：$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$ の直角二等辺三角形)
したがって，必要条件でも十分条件でもない。

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は
「a，b がともに 3 の倍数でないならば，ab は 3 の倍数でない」である。
k，l を整数とすると
[1]　$a=3k+1$，$b=3l+1$ のとき　　$ab=(3k+1)(3l+1)=3(3kl+k+l)+1$
$3kl+k+l$ は整数であるから，ab は 3 の倍数でない。

[2]　$a=3k+1$，$b=3l+2$ のとき　　$ab=(3k+1)(3l+2)=3(3kl+2k+l)+2$

$3kl+2k+l$ は整数であるから，ab は 3 の倍数でない。

[3]　$a=3k+2$，$b=3l+1$ のとき　　$ab=(3k+2)(3l+1)=3(3kl+k+2l)+2$

$3kl+k+2l$ は整数であるから，ab は 3 の倍数でない。

[4]　$a=3k+2$，$b=3l+2$ のとき　　$ab=(3k+2)(3l+2)=3(3kl+2k+2l+1)+1$

$3kl+2k+2l+1$ は整数であるから，ab は 3 の倍数でない。

[1]～[4] により，対偶は真である。

したがって，与えられた命題は真である。

(2)　与えられた命題の対偶は

「整数 m，n について，mn が奇数ならば m^2+n^2 は偶数である。」

mn が奇数ならば，m，n はともに奇数であり

$$m=2k+1,\ n=2l+1 \quad (k,\ l \text{ は整数})$$

とおける。このとき

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= (2k+1)^2+(2l+1)^2 \\ &= (4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1) \\ &= 2(2k^2+2l^2+2k+2l+1) \end{aligned}$$

$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ は整数であるから，m^2+n^2 は偶数である。

よって，対偶は真である。

したがって，与えられた命題は真である。

4

解答　(1)　略　　(2)　[1]　$p=3$，$q=-2$　　[2]　$p=0$，$q=0$

解説

(1)　$b\neq 0$ と仮定すると，$a+bu=0$ であるから　　$u=-\dfrac{a}{b}$

a，b が有理数ならば $-\dfrac{a}{b}$ も有理数であるから，この等式は u が無理数であることに矛盾する。

よって　　$b=0$　　　　$b=0$ を $a+bu=0$ に代入すると　　$a=0$

したがって，$a+bu=0$ であるならば，$a=0$ かつ $b=0$ である。

(2)　[1]　p，q が有理数であるから　$p-3$，$q+2$ も有理数である。

また，$\sqrt{5}$ は無理数である。

よって，(1) から　$p-3=0$，$q+2=0$　　　ゆえに　$p=3$，$q=-2$

[2]　等式から　$(p+3q)+(p-2q)\sqrt{5}=0$

p，q が有理数であるから，$p+3q$，$p-2q$ も有理数である。

また，$\sqrt{5}$ は無理数である。

よって，(1) から　　$p+3q=0$，$p-2q=0$　　　　これを解いて　　$p=0$，$q=0$

1

解答　(ア)　①　　(イ)，(ウ)　①，④ または ④，①　　(エ)　②

解説

(1)　「$r \Longrightarrow (p$ または $q)$」の対偶は　　「$\overline{(p \text{ または } q)} \Longrightarrow \overline{r}$」

すなわち　　「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q}) \Longrightarrow \overline{r}$」

(2)　⓪ ～ ④ について，条件 p，q，$(p$ または $q)$，r を満たすかどうかを調べると，右の表のようになる。ただし，○は満たすこと，×は満たさないことを表す。

「$(p$ または $q) \Longrightarrow r$」の反例は，$(p$ または $q)$ を満たし，r を満たさないものであるから　① と ④

	p	q	p または q	r
⓪	×	×	×	×
①	○	○	○	×
②	×	○	○	○
③	○	×	○	○
④	×	○	○	×

(3)　「$r \Longrightarrow (p$ または $q)$」の対偶「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q}) \Longrightarrow \overline{r}$」は真。

(証明)　$\overline{p}$：3 つの内角のうち，少なくとも 2 つは等しい

$\overline{q}$：直角三角形である

$\overline{r}$：45° の内角が少なくとも 1 つある

$\overline{p}$ を満たす三角形は，二等辺三角形であるから，$(\overline{p}$ かつ $\overline{q})$ を満たす三角形は，直角二等辺三角形である。

直角二等辺三角形は，$\overline{r}$ を満たす。

したがって，「$(\overline{p}$ かつ $\overline{q}) \Longrightarrow \overline{r}$」は真。　　(証明終)

ゆえに，「$r \Longrightarrow (p$ または $q)$」も真。

一方，(2) より「$(p$ または $q) \Longrightarrow r$」は反例があるから偽。

よって，r は $(p$ または $q)$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(②)

2

解答　(1)　真，証明略　　(2)　偽，反例：$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3)　偽，反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$

解説

(1)　真

(証明)　$x+y+z=0$ から　　$z=-(x+y)$

$x^3+y^3+z^3=0$ に代入して　　$x^3+y^3-(x+y)^3=0$

ゆえに　　$(x+y)^3-3xy(x+y)-(x+y)^3=0$

よって　　$-3xy(x+y)=0$　すなわち　$xyz=0$

したがって，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

別解　[$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の因数分解を利用]

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ に $x^3+y^3+z^3=0$，$x+y+z=0$ を代入すると　　$-3xyz=0$

よって，x，y，z のうち少なくとも 1 つは 0 である。

(2)　偽

(反例)　$x^2+x=1$ とすると　　$x^2+x-1=0$

これを解いて　　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから，x は無理数である。

(3)　偽

(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき x，y はともに無理数であるが，$x+y=0$，$x^2+y^2=4$ であるから，$x+y$，x^2+y^2 はどちらも無理数でない。

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　命題「n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である。」の対偶は，次の命題である。

「n が 5 の倍数でないならば，n^2 は 5 の倍数でない。」　……①

n が 5 の倍数でないとき，n は $5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ (k は整数) のいずれかで表される。

[1]　$n=5k+1$ のとき

$$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$$

[2]　$n=5k+2$ のとき

$$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$$

[3]　$n=5k+3$ のとき

$$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$$

[4]　$n=5k+4$ のとき

$$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$$

[1]～[4] のいずれの場合も，n^2 は 5 の倍数でない。

よって，命題 ① は真である。

したがって，n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である。

(2)　$\sqrt{5}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a，b を用いて　$\sqrt{5}=\dfrac{a}{b}$　と表される。

このとき　　$a=\sqrt{5}\,b$

両辺を 2 乗すると　　$a^2=5b^2$　……②

よって，a^2 は 5 の倍数である。

ゆえに，(1) より a も 5 の倍数であるから，ある自然数 c を用いて

$a=5c$　……③　　と表される。

③ を ② に代入すると　　$25c^2=5b^2$

よって　　　$b^2=5c^2$

ゆえに，b^2 は 5 の倍数であるから，(1) より b も 5 の倍数である。

よって，a と b は公約数 5 をもつ。

このことは，a と b が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{5}$ は無理数である。

$\boxed{1}$

解答 (1) x^4-16 (2) $1-a^9$ (3) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$
(4) $a^8-2a^4b^4+b^8$ (5) x^6-1

解説

(1) $(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x+2)(x-2)\times(x^2+4)$
$=(x^2-4)(x^2+4)=x^4-16$

(2) $(1-a)(1+a+a^2)(1+a^3+a^6)=(1-a^3)\{1+a^3+(a^3)^2\}=1-(a^3)^3$
$=1-a^9$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$
$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$
$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

(4) $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2=\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\}^2$
$=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2$
$=(a^4-b^4)^2=a^8-2a^4b^4+b^8$

(5) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1)$
$=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$

$\boxed{2}$

解答 (1) $(x+y+1)(x+y-2)$ (2) $(3x-2y-4)(4x+3y-5)$
(3) $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

解説

(1) 与式$=(x+y)^2-(x+y)-6+4=(x+y)^2-(x+y)-2$
$=(x+y+1)(x+y-2)$

(2) 与式$=12x^2+(y-31)x-2(3y^2+y-10)$
$=12x^2+(y-31)x-2(y+2)(3y-5)$
$=\{3x-2(y+2)\}\{4x+(3y-5)\}$
$=(3x-2y-4)(4x+3y-5)$

(3) 与式$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

参考 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$ に着目して，次のように因数分解してもよい。

与式$=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
$=(x+y)(x-y)\{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\}$
$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$
$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$
$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$\boxed{3}$

解答 (1) $(x-y)(x-y-1)$ (2) $(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$
(3) $(x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$ (4) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

解説

(1) $x^2-2xy+y^2-x+y=(x^2-2xy+y^2)-(x-y)$
$=(x-y)^2-(x-y)$
$=(x-y)(x-y-1)$

別解 (与式)$=x^2-(2y+1)x+y(y+1)$
$=(x-y)(x-y-1)$

(2) $81x^4-y^4=(9x^2)^2-(y^2)^2$
$=(9x^2+y^2)(9x^2-y^2)$
$=(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$

(3) $4x^4-37x^2y^2+9y^4=4(x^2)^2-37y^2\cdot x^2+9y^4$
$=(x^2-9y^2)(4x^2-y^2)$
$=(x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -9y^2 & \longrightarrow -36y^2 \\ 4 & & -y^2 & \longrightarrow -y^2 \\ \hline 4 & & 9y^4 & -37y^2 \end{array}$$

(4) $x^2-x=X$ とおくと，$-8x^2+8x=-8X$ であるから
$(x^2-x)^2-8x^2+8x+12=X^2-8X+12$
$=(X-2)(X-6)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

$\boxed{4}$

解答 (1) $x=4,\ -1$ (2) $x=1$ (3) $x=-\frac{1}{4},\ \frac{5}{2}$

解説

(1) $|2x-3|=5$ から $2x-3=\pm5$
すなわち $2x=3+5$ または $2x=3-5$
よって $x=4,\ -1$

(2) $x-3\geqq0$ すなわち $x\geqq3$ のとき $x-3=2x$
これを解いて $x=-3$ これは $x\geqq3$ を満たさない。
$x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき $-(x-3)=2x$
これを解いて $x=1$ これは $x<3$ を満たす。
よって，方程式の解は $x=1$

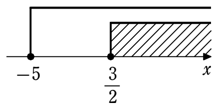
(3) $x\geqq1$ のとき $x+2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=\frac{5}{2}$ これは $x\geqq1$ を満たす。
$0\leqq x<1$ のとき $x-2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=-\frac{1}{2}$ これは $0\leqq x<1$ を満たさない。
$x<0$ のとき $-x-2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=-\frac{1}{4}$ これは $x<0$ を満たす。
よって，方程式の解は $x=-\frac{1}{4},\ \frac{5}{2}$

$\boxed{5}$ [西南学院大]

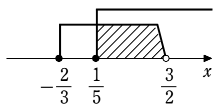
解答 (1) $x\leqq-5,\ \frac{1}{5}\leqq x$ (2) $-\frac{4}{3}\leqq x\leqq6$

解説

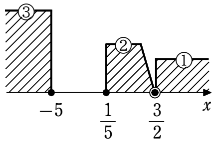
(1) [1] $2x-3\geqq0,\ 3x+2\geqq0$ すなわち $x\geqq\frac{3}{2}$ のとき
$2x-3\leqq3x+2$
これを解いて $x\geqq-5$
これと $x\geqq\frac{3}{2}$ の共通範囲は $x\geqq\frac{3}{2}$ ……①



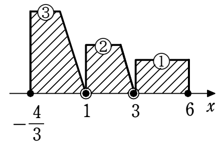
[2] $2x-3<0,\ 3x+2\geqq0$ すなわち $-\frac{2}{3}\leqq x<\frac{3}{2}$
のとき $-(2x-3)\leqq3x+2$
すなわち $5x\geqq1$ これを解いて $x\geqq\frac{1}{5}$
これと $-\frac{2}{3}\leqq x<\frac{3}{2}$ の共通範囲は $\frac{1}{5}\leqq x<\frac{3}{2}$ ……②



[3] $2x-3<0,\ 3x+2<0$ すなわち $x<-\frac{2}{3}$ のとき
$-(2x-3)\leqq-(3x+2)$
これを解いて $x\leqq-5$
これと $x<-\frac{2}{3}$ の共通範囲は $x\leqq-5$ ……③
不等式の解は①，②，③を合わせた範囲であるから
$x\leqq-5,\ \frac{1}{5}\leqq x$



(2) [1] $x-1\geqq0,\ x-3\geqq0$ すなわち $x\geqq3$ のとき $x-1+2(x-3)\leqq11$
すなわち $3x\leqq18$ これを解いて $x\leqq6$
これと $x\geqq3$ の共通範囲は $3\leqq x\leqq6$ ……①
[2] $x-1\geqq0,\ x-3<0$ すなわち $1\leqq x<3$ のとき $x-1-2(x-3)\leqq11$
これを解いて $x\geqq-6$
これと $1\leqq x<3$ の共通範囲は $1\leqq x<3$ ……②
[3] $x-1<0,\ x-3<0$ すなわち $x<1$ のとき $-(x-1)-2(x-3)\leqq11$
すなわち $-3x\leqq4$ これを解いて $x\geqq-\frac{4}{3}$
これと $x<1$ の共通範囲は $-\frac{4}{3}\leqq x<1$ ……③
不等式の解は①，②，③を合わせた範囲であるから
$-\frac{4}{3}\leqq x\leqq6$



$\boxed{6}$

解答 (1) 28 (2) 144 (3) 3936 (4) $-\sqrt{2}$

解説

$x=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=3-\sqrt{5}$

$y=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$

よって $x+y=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$
$xy=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=4$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot4=36-8=28$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot4\cdot6=216-72=144$

(3) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$\qquad=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$

(1)，(2) の結果から　$x^5+y^5=28\cdot144-6\cdot4^2=3936$

(4)　$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{4}=6-4=2$

ここで，$0<3-\sqrt{5}<3+\sqrt{5}$ であるから　$0<x<y$

よって　$\sqrt{x}<\sqrt{y}$　すなわち　$\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$

したがって　$\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$

$\boxed{7}$

解答　$a^3+b^3=35$

解説

$a^2+b^2=13$ ……①，　$a^4+b^4=97$ ……②　とする。

② から　$(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=97$

① を代入して　$13^2-2a^2b^2=97$　　よって　$a^2b^2=36$

$ab>0$ であるから　$ab=6$

① から　$(a+b)^2-2ab=13$

$\qquad(a+b)^2-2\times6=13$　　よって　$(a+b)^2=25$

$a+b>0$ であるから　$a+b=5$

したがって　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=5(13-6)=35$

$\boxed{8}$

解答　$x^2+y^2+z^2=18$，$x^3+y^3+z^3=24\sqrt{3}$

解説

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$\qquad=(2\sqrt{3})^2-2(-3)=18$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$\qquad=2\sqrt{3}\{18-(-3)\}+3(-6\sqrt{3})=24\sqrt{3}$

$\boxed{9}$

解答　$a=2$

解説

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ であるから　$5\in A$

よって　$a^2+1=5$　　ゆえに　$a=\pm2$

[1]　$a=2$ のとき　$a+7=9$，$a^2-4a+5=1$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 9,\ 1\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となり，条件に適する。

[2]　$a=-2$ のとき　$a+7=5$，$a^2-4a+5=17$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 5,\ 17\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2\}$ となり，条件に適さない。

以上から　$a=2$

$\boxed{10}$

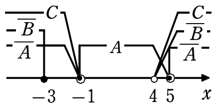
解答　(1)　$A\cap C=\{x\mid4<x<5\}$，$A\cup\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x<5\}$

(2)　$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$，$A\cap B\cap C=\{1,\ 2\}$，

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30\}$，

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12\}$

解説



(1)　$\overline{A}=\{x\mid x<-1,\ 5\leqq x\}$，

$\overline{B}=\{x\mid x\leqq-3,\ 4<x\}$

であるから

$C=\overline{A}\cup\overline{B}=\{x\mid x<-1,\ 4<x\}$

よって　$A\cap C=\{x\mid4<x<5\}$

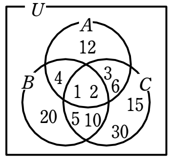
また，$\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x\leqq4\}$ であるから

$A\cup\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x<5\}$

別解　ド・モルガンの法則により

$C=\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\overline{\{x\mid-1\leqq x\leqq4\}}$

$\quad=\{x\mid x<-1,\ 4<x\}$　　(以下同じ)



(2)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$，

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$，

$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

であるから

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$，

$A\cap B\cap C=\{1,\ 2\}$，

$A\cup B\cup C$

$\quad=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30\}$

また，$B\cap C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ であり

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12\}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　十分条件であるが必要条件ではない　　(2)　必要十分条件である

(3)　十分条件であるが必要条件ではない

(4)　必要条件であるが十分条件ではない

(5)　必要条件でも十分条件でもない

(6)　必要条件であるが十分条件ではない

解説

(1)　$a=3$ かつ $b=2$ のとき　$a+b=3+2=5$

よって，「$a=3$ かつ $b=2\Longrightarrow a+b=5$」は真である。

$a=1$，$b=4$ のとき，$a+b=5$ であるが，$a=3$ かつ $b=2$ でない。

よって，「$a+b=5\Longrightarrow a=3$ かつ $b=2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

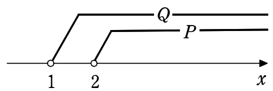
(2)　$x=3$ のとき　$x^2-6x+9=3^2-6\cdot3+9=0$

よって，「$x=3\Longrightarrow x^2-6x+9=0$」は真である。

$x^2-6x+9=0$ を解くと　$(x-3)^2=0$　　ゆえに　$x=3$

よって，「$x^2-6x+9=0\Longrightarrow x=3$」は真である。

したがって，必要十分条件である。



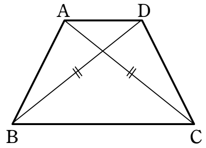
(3)　$P=\{x\mid x>2\}$，$Q=\{x\mid x>1\}$ とする。

P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

よって，「$x>2\Longrightarrow x>1$」は真であり，

「$x>1\Longrightarrow x>2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。



(4)　右の図のような AD∥BC，AB＝DC の等脚台形において，2 本の対角線の長さは等しいが，長方形でない。

よって，「2 本の対角線の長さが等しい $\Longrightarrow$ 長方形である」は偽である。

また，「長方形である $\Longrightarrow$ 2 本の対角線の長さは等しい」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(5)　$a=1$，$b=2$，$c=-1$ のとき，$a<b$ であるが，$ac<bc$ でない。

よって，「$a<b\Longrightarrow ac<bc$」は偽である。

$a=-1$，$b=-2$，$c=-1$ のとき，$ac<bc$ であるが，$a<b$ でない。

よって，「$ac<bc\Longrightarrow a<b$」は偽である。

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

(6)　12 は 4 かつ 6 の倍数であるが，24 の倍数でない。

よって，「4 かつ 6 の倍数 $\Longrightarrow$ 24 の倍数」は偽である。

また，「24 の倍数 $\Longrightarrow$ 4 かつ 6 の倍数」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$4a^2+4b^2+4c^2$　　(2)　$-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$

解説

(1)　$(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

$=\{a+(b+c)\}^2+\{-a+(b+c)\}^2+\{a-(b-c)\}^2+\{a+(b-c)\}^2$

$=\ a^2+2a(b+c)+(b+c)^2+a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$

$\quad+a^2-2a(b-c)+(b-c)^2+a^2+2a(b-c)+(b-c)^2$

$=4a^2+2(b+c)^2+2(b-c)^2$

$=4a^2+2(b^2+2bc+c^2)+2(b^2-2bc+c^2)$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

別解　$(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

$=\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

(2)　$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

$=\{(y+z)+x\}\{(y+z)-x\}\times\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

$=\{(y+z)^2-x^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$

$=-x^4+\{(y+z)^2+(y-z)^2\}x^2-(y+z)^2(y-z)^2$

$=-x^4+2(y^2+z^2)x^2-(y^2-z^2)^2$

$=-x^4+2x^2y^2+2z^2x^2-y^4+2y^2z^2-z^4$

$=-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(a+b-1)(ab+1)$　　(2)　$(x-y)(x-1)(y-1)$　　(3)　$-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4)　$(a+b)(b+c)(c+a)$

解説

(1)　$a^2b+ab^2+a+b-ab-1$

$=ba^2+(b^2-b+1)a+(b-1)$

$=\{a+(b-1)\}(ba+1)$

$=(a+b-1)(ab+1)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & b-1 & \longrightarrow b^2-b \\ b & 1 & \longrightarrow 1 \\ \hline b & b-1 & b^2-b+1 \end{array}$$

別解　$a^2b+ab^2+a+b-ab-1=ab(a+b)+(a+b)-(ab+1)$

$=(a+b)(ab+1)-(ab+1)$

$=(ab+1)(a+b-1)$

(2)　$x^2(y-1)+y^2(1-x)+x-y=(y-1)x^2+y^2-y^2x+x-y$

$=(y-1)x^2-(y^2-1)x+y^2-y$

$=(y-1)x^2-(y+1)(y-1)x+y(y-1)$

$=(y-1)\{x^2-(y+1)x+y\}$

$=(y-1)(x-1)(x-y)$

$=(x-y)(x-1)(y-1)$

別解　$x^2(y-1)+y^2(1-x)+x-y=x^2y-x^2+y^2-xy^2+x-y$

$=(x^2y-xy^2)-(x^2-y^2)+(x-y)$

$=xy(x-y)-(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)(xy-x-y+1)$

$=(x-y)\{(y-1)x-(y-1)\}$

$=(x-y)(x-1)(y-1)$

(3)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-c)a^2+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4)　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=(b+c)a^2+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2)　$(xy+x+1)(xy+y+1)$　　(3)　$(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

解説

(1)　(与式)$=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

別解　(与式)$=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a+b)(a-b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2)　(与式)$=(x+1)\{xy^2+(x+1)y+1\}+xy$

$=x(x+1)y^2+\{(x+1)^2+x\}y+x+1$

$=\{x\cdot y+(x+1)\}\{(x+1)\cdot y+1\}$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$

$$\begin{array}{ccc} x & x+1 & \longrightarrow (x+1)^2 \\ x+1 & 1 & \longrightarrow x \\ \hline x(x+1) & x+1 & (x+1)^2+x \end{array}$$

別解　$(x+1)(y+1)(xy+1)+xy=(xy+x+y+1)(xy+1)+xy$

$=\{(xy+1)+x+y\}(xy+1)+xy$

$=(xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$

$=\{(xy+1)+x\}\{(xy+1)+y\}$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$

(3)　(与式)$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+\{(b+c)(b-c)\}^2$

$=a^4-\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

別解　$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$=\{(a^2)^2+(b^2)^2+(-c^2)^2+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\}-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$

$=\{(a^2+b^2-c^2)+2ab\}\{(a^2+b^2-c^2)-2ab\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{(a^2-2ab+b^2)-c^2\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

$\boxed{4}$

解答　$(x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

解説

(与式)$=(x^2-1)y^2+(x^3+x^2-x-1)y+x^3-x$

$=(x+1)(x-1)y^2+(x+1)^2(x-1)y+x(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)\{y^2+(x+1)y+x\}=(x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

$\boxed{5}$

解答　$(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

解説

$a^3+a^2b-a(c^2+b^2)+bc^2-b^3=a^3+a^2b-ac^2-ab^2+bc^2-b^3$

$=-(a-b)c^2+a^3-b^3+a^2b-ab^2$

$=-(a-b)c^2+(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)$

$=(a-b)\{-c^2+(a^2+ab+b^2)+ab\}$

$=(a-b)(a^2+2ab+b^2-c^2)=(a-b)\{(a+b)^2-c^2\}$

$=(a-b)\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

$\boxed{6}$

解答　$a+b+c$

解説

(与式)$=\dfrac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(分子)$=-a^3(b-c)+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)=-(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)+(a^3-c^2a)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}=-(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)\{-c-(a+b)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって　　(与式)$=a+b+c$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$a\fallingdotseq 0$ のとき $x=1,\ \dfrac{1}{a}$；$a=0$ のとき $x=1$

(2)　$a\fallingdotseq\pm1$ のとき $x=\dfrac{1}{a+1},\ y=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$　のとき $x=1-t,\ y=t$ (t は実数)

$a=-1$ のとき 解はない

解説

(1)　方程式の左辺を因数分解して　　$(x-1)(ax-1)=0$

ゆえに　　$x-1=0$　または　$ax-1=0$

よって　　$a\fallingdotseq 0$ のとき $x=1,\ \dfrac{1}{a}$；$a=0$ のとき $x=1$

(2)　①$\times a-$② から　　$(a^2-1)x=a-1$

すなわち　　$(a+1)(a-1)x=a-1$　…… ③

$a\fallingdotseq\pm1$ のとき　　$x=\dfrac{1}{a+1}$　　① から　　$y=1-a\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$　のとき　　①，② はともに $x+y=1$ となる。

$y=t$ （t は実数）とすると　$x=1-y=1-t$

$a=-1$ のとき　③は　$0\cdot x=-2$　これを満たす x の値はない。

したがって　$a\neq\pm1$ のとき $x=\dfrac{1}{a+1}$，$y=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$　のとき $x=1-t$，$y=t$ （t は実数）

$a=-1$ のとき 解はない

$\boxed{8}$

解答　(1)　$6\leqq x\leqq 12$　(2)　$k\geqq 2$　(3)　$k\geqq 8$

解説

(1)　① から　$-2\leqq|x-9|-1\leqq 2$

よって　$-1\leqq|x-9|\leqq 3$

$|x-9|\geqq -1$ は常に成り立つ。

$|x-9|\leqq 3$ から　$-3\leqq x-9\leqq 3$　よって　$6\leqq x\leqq 12$

したがって，① の解は　$6\leqq x\leqq 12$

(2)　$k>0$ であるから，② より　$-k\leqq x-4\leqq k$

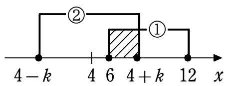
よって　$4-k\leqq x\leqq 4+k$

$k>0$ から　$4-k<4$

①，② をともに満たす実数 x が存在するための条件は

$6\leqq 4+k$

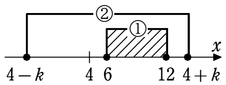
よって　$k\geqq 2$



(3)　(2) により，① の解が ② の解に含まれるための条件は

$12\leqq 4+k$

よって　$k\geqq 8$



$\boxed{9}$

解答　(1)　(ア)　-1　(イ)　2　(ウ)　1　(エ)　4

(2)　(オ)　3　(カ)　3　(キ)　2

(3)　(ク)　1　(ケ)　7　(コ)　10　(サ)　4　(シ)　7

解説

(1)　$a=1$ のとき，方程式 ① は　$|x-1|=3|x|$

(i)　$x<0$ のとき，方程式は　$-(x-1)=-3x$

これを解くと　$x=-\dfrac{1}{2}$　これは，$x<0$ を満たす。

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき，方程式は　$-(x-1)=3x$

これを解くと　$x=\dfrac{1}{4}$　これは，$0\leqq x<1$ を満たす。

(iii)　$x\geqq 1$ のとき，方程式は　$x-1=3x$

これを解くと　$x=-\dfrac{1}{2}$　これは，$x\geqq 1$ を満たさない。

(i)，(ii)，(iii) より，$a=1$ のとき，① の解は　$x=\dfrac{{}^{ア}-1}{{}^{イ}2}$，$\dfrac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}4}$

(2)　(i)　$x<0$ のとき，方程式は　$-a(x-a)=-3x$

これを解くと，$a\neq 3$ のとき　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$

$a<3$ のとき，これは，$x<0$ を満たす。

(ii)　$0\leqq x<a$ のとき，方程式は　$-a(x-a)=3x$

これを解くと　$x=\dfrac{a^2}{a+3}$　これは，$0\leqq x<a$ を満たす。

(iii)　$x\geqq a$ のとき，方程式は　$a(x-a)=3x$

これを解くと，$a\neq 3$ のとき　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$

$a>3$ のとき，これは，$x\geqq a$ を満たす。

(i)，(ii)，(iii) より，① の解の個数は，$a\neq 3$ のとき 2 個，$a=3$ のとき 1 個となる。

したがって，① の解の個数が 1 個のとき，$a={}^{オ}3$ であり，その解は

$$x=\frac{a^2}{a+3}=\frac{3^2}{3+3}=\frac{{}^{カ}3}{{}^{キ}2}$$

(3)　$x=2$ が ① の解であるとき　$a|2-a|=6$　……②

[1]　$0<a<2$ のとき，方程式 ② は

$a(2-a)=6$　すなわち　$a^2-2a+6=0$

2 次方程式 $a^2-2a+6=0$ の判別式を D とすると $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot6=-20<0$ であるから，方程式 ② は実数解をもたない。

[2]　$a\geqq 2$ のとき，方程式 ② は

$-a(2-a)=6$　すなわち　$a^2-2a-6=0$

これを解くと　$a=1\pm\sqrt{7}$

$a\geqq 2$ を満たすのは　$a=1+\sqrt{7}$

[1]，[2] より，$x=2$ が ① の解であるとき　$a={}^{ク}1+\sqrt{{}^{ケ}7}$

$a=1+\sqrt{7}$ とする。

$1+\sqrt{7}>3$ であるから，(2) より ① の解は　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$，$\dfrac{a^2}{a+3}$

ここで　$\dfrac{a^2}{a-3}=\dfrac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})-3}=\dfrac{(2\sqrt{7}+8)(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

$=\dfrac{14+4\sqrt{7}+8\sqrt{7}+16}{(\sqrt{7})^2-2^2}=10+4\sqrt{7}$

$\dfrac{a^2}{a+3}=\dfrac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})+3}=\dfrac{(2\sqrt{7}+8)(4-\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}$

$=\dfrac{8\sqrt{7}-14+32-8\sqrt{7}}{4^2-(\sqrt{7})^2}=2$

したがって，① の解は　$x=2$，${}^{コ}10+{}^{サ}4\sqrt{{}^{シ}7}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　順に 52，194　(2)　$4+\sqrt{2}$　(3)　$\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}$　(4)　$\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

解説

(1)　$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ とおくと

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$，

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

よって　$(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

また　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=14$

ゆえに　$(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

$=14^2-2\cdot1^2=194$

(2)　$\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}=\dfrac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}=\dfrac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$

$=(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$

$\sqrt{10+4\sqrt{6}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}=\sqrt{(6+4)+2\sqrt{6\cdot4}}=\sqrt{6}+\sqrt{4}=\sqrt{6}+2$

よって　$\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{10+4\sqrt{6}}=(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})+(\sqrt{6}+2)=4+\sqrt{2}$

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{3}+\sqrt{6})}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}}{(1-2)(2-3)}=\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}$

(4)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$

$=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}+\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{-2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{6}-5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\dfrac{2\sqrt{30}}{6}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

$\boxed{11}$

解答　$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解説

$a+b=3$，$ab=1$ から

$\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}=\dfrac{3-2}{3+2}=\dfrac{1}{5}$

$a>b$ から　$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}>0$　よって　$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$x\in B$ ならば　$x=6n+5$ （n は整数）と表される。

このとき　$x=6(n+1)-1=3\cdot2(n+1)-1$

$2(n+1)$ は整数であるから　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ であるから　$A\supset B$

(2)　[1]　$x\in A$ ならば　$x=2n-1$ （n は整数）と表される。

このとき　$x=2(n-1)+1$

$n-1$ は整数であるから　$x\in B$

よって，$x\in A$ ならば $x\in B$ であるから　　$A\subset B$

[2]　$x\in B$ ならば　$x=2n+1$ (n は整数) と表される。

このとき　　$x=2(n+1)-1$

$n+1$ は整数であるから　　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ であるから　　$A\supset B$

[1]，[2] から　　$A=B$

$\boxed{13}$

解答　(1)　$P=\{-3,\ a\}$，$Q=\{1,\ b\}$，$R=\{2a,\ 5b\}$

(2)　負の数 -3；$a=-\frac{3}{2}$，$b=-3$

解説

(1)　① から　$(x+3)(x-a)=0$　　　よって　$P=\{-3,\ a\}$

② から　$(x-1)(x-b)=0$　　　よって　$Q=\{1,\ b\}$

③ から　$(x-2a)(x-5b)=0$　　　よって　$R=\{2a,\ 5b\}$

(2)　$P\cap Q\cap R$ がただ 1 つの負の数からなることと，$Q=\{1,\ b\}$ から　　$P\cap Q\cap R=\{b\}$

$b=5b$ とすると，$b=0$ となり不適であるから　　$b=2a$　……④

$b=a$ とすると，④ から $b=0$ となり不適である。

したがって　　　　$b=-3$

このとき，④ から　　$a=-\frac{3}{2}$

以上から，求める負の数は -3 であり，そのときの a，b の値は

$$a=-\frac{3}{2},\ b=-3$$

$\boxed{14}$

解答　5，15，25，35，45

解説

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49\}$

$50=2\cdot5^2$ であるから　　$V=\{2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 48,\ 5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45\}$

$W=\{2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 48\}$

(i) から　　$A\cup\overline{B}=V$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，(ii) から　　$\overline{A\cup B}=W$

よって　　$A=(A\cup\overline{B})\cap(A\cup B)=V\cap\overline{W}$

したがって，A の要素は V の要素から W の要素を除いたもので

5，15，25，35，45

$\boxed{15}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は

「a，b がともに 3 の倍数でないならば，ab は 3 の倍数でない」

a，b がともに 3 の倍数でないならば，k，l を整数として　$a=3k\pm1$，$b=3l\pm1$ (複号任意) と表される。

このとき　$ab=\begin{cases}(3k+1)(3l\pm1)\\(3k-1)(3l\pm1)\end{cases}=\begin{cases}9kl\pm3k+3l\pm1\\9kl\pm3k-3l\mp1\end{cases}=\begin{cases}3(3kl\pm k+l)\pm1\\3(3kl\pm k-l)\mp1\end{cases}$　(複号同順)

よって，ab は 3 の倍数でない。

したがって，対偶が真であるから，もとの命題は真である。

(2)　ab が 3 の倍数であるから，(1) より a または b は 3 の倍数である。

a が 3 の倍数のとき $b=(a+b)-a$ より，b は 3 の倍数である。

b が 3 の倍数のとき $a=(a+b)-b$ より，a は 3 の倍数である。

したがって，$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a，b はともに 3 の倍数である。

(3)　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ から　$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

$a+b$，a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるから，$2ab$ は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるから，ab は 3 の倍数である。

よって，$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるから，(2) より，a と b はともに 3 の倍数である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$x\in D(m)\cap D(n)$ ならば　$x\in D(m+n)$ を示す。

$x\in D(m)\cap D(n)$ より，$x\in D(m)$ かつ $x\in D(n)$ であるから，x は m の約数かつ n の約数である。

すなわち　　$m=xm_1$ かつ $n=xn_1$ (m_1，n_1 は自然数)

このとき　　$m+n=xm_1+xn_1=x(m_1+n_1)$

よって，x は $m+n$ の約数であるから　　$x\in D(m+n)$

したがって　　$D(m)\cap D(n)\subset D(m+n)$

(2)　$y\in D(m)\cup D(n)$ ならば　$y\in D(mn)$ を示す。

$y\in D(m)\cup D(n)$ より，$y\in D(m)$ または $y\in D(n)$ であるから，y は m の約数または n の約数である。

すなわち　　$m=ym_2$ または $n=yn_2$ (m_2，n_2 は自然数)

$m=ym_2$ のとき　　　$mn=(ym_2)n=y(m_2n)$

$n=yn_2$ のとき　　　$mn=m(yn_2)=y(mn_2)$

よって，いずれの場合も y は mn の約数であるから　　$y\in D(mn)$

したがって　　$D(m)\cup D(n)\subset D(mn)$

(3)　$m\in D(n)$ のとき，$n=mn_3$ (n_3 は自然数) と表される。

このとき，$D(m)$ の任意の要素 z について，$m=zm_3$ (m_3 は自然数) と表される。

よって　　$n=mn_3=(zm_3)n_3=z(m_3n_3)$

ゆえに，$z\in D(n)$ であるから　　$D(m)\subset D(n)$

逆に，$D(m)\subset D(n)$ のとき，m は明らかに $D(m)$ の要素である。

$D(m)\subset D(n)$ であるから　　　$m\in D(n)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$m\in(A\cap B)'$ ならば $m\in(A'\cap B')$ を示す。

$m\in(A\cap B)'$ であるとき，次の [1] または [2] の場合が考えられる。

[1]　m は奇数で　$m\in(A\cap B)$　　　[2]　$2m\in(A\cap B)$

[1] のとき，m が奇数で $m\in A$ かつ $m\in B$ であるから

$m\in A'$　かつ　$m\in B'$

[2] のとき，$2m\in A$ かつ $2m\in B$ で，$2m$ は偶数であるから

$m\in A'$　かつ　$m\in B'$

よって，[1]，[2] のいずれの場合にも $m\in(A'\cap B')$ が成り立つ。

したがって　　$(A\cap B)'\subset(A'\cap B')$

(2)　仮定より，$7\notin(A\cap B)$ かつ $14\notin(A\cap B)$ であるから　　$7\notin(A\cap B)'$

一方，$7\in A$，$14\in B$ であるから　　$7\in(A'\cap B')$

すなわち，$A'\cap B'$ に含まれ，$(A\cap B)'$ に含まれない要素 7 が存在する。

したがって　　$(A\cap B)'\neq(A'\cap B')$

(3)　$A\neq\varnothing$ であるから，A には最小の要素 n が存在し，n は偶数である。

よって　　$\frac{n}{2}\in A'$

一方，$\frac{n}{2}<n$ であり，n が A の最小の要素であることから　　$\frac{n}{2}\notin A$

すなわち，A' に含まれ，A に含まれない要素 $\frac{n}{2}$ が存在する。

したがって　$A' \neq A$

3

解答　略

解説

[1]　$a \in A$ ならば　$a=2m+3n$ $(m \in Z,\ n \in Z)$　と表される。

また　$2m+3n=3(-m+n)+5m$

$-m+n \in Z,\ m \in Z$ であるから　$a \in B$

よって　$A \subset B$

[2]　$b \in B$ ならば　$b=3m+5n$ $(m \in Z,\ n \in Z)$　と表される。

また　$3m+5n=2n+3(m+n)$

$n \in Z,\ m+n \in Z$ であるから　$b \in A$

よって　$B \subset A$

[1]，[2] より，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから　$A=B$

4

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　方程式が有理数の解 $x=\alpha$ をもつとする。$\alpha=0$ のとき，α は整数である。

$\alpha>0$ のとき，$\alpha=\frac{n}{m}$ (m，n は互いに素な自然数) とおく。

$x=\alpha$ は方程式の解であるから　$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$

すなわち　$\left(\frac{n}{m}\right)^3+a\left(\frac{n}{m}\right)^2+b\cdot\frac{n}{m}+c=0$

ゆえに　$n^3+amn^2+bm^2n+cm^3=0$

よって　$n^3=-m(an^2+bmn+cm^2)$

a，b，c，m，n は整数であるから，n^3 は m の倍数である。また，m と n は互いに素であるから，m と n^3 も互いに素である。

したがって，$m=1$ であり，α は整数である。

$\alpha<0$ のときは $\alpha=-\frac{n}{m}$ とおくと，同様に示される。

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ が有理数の解 $x=\alpha$ をもつと仮定する。

(1) から，α は整数である。

$\alpha^3+2\alpha^2+2=0$ から　$\alpha^2(\alpha+2)=-2$

α，α^2 は整数で，$\alpha^2 \geqq 0$ であるから　$(\alpha^2,\ \alpha+2)=(1,\ -2),\ (2,\ -1)$

ところが，これを満たす整数 α は存在しないから，矛盾。

よって，$x^3+2x^2+2=0$ は有理数の解をもたない。

5

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　p，q の少なくとも一方が偶数であると仮定する。

このとき，$\frac{q}{p}$ は既約分数であるから，p，q の一方が偶数で他方が奇数となる。

ここで，$a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\cdot\frac{q}{p}+c=0$ であるから　$aq^2+bpq+cp^2=0$　……①

a，b，c はすべて奇数であり，p，q の一方だけが偶数で他方が奇数であるから，bpq は偶数である。

また，aq^2 と cp^2 の一方が偶数で他方が奇数となる。

よって，$aq^2+bpq+cp^2$ は奇数となる。

これは ① の右辺が 0 であることに矛盾する。

したがって，p と q はともに奇数である。

(2)　この方程式が有理数の解をもつと仮定すると，その解は $\frac{q'}{p'}$ (p'，q' は互いに素である整数，$p' \neq 0$) と表される。

(1) から，p'，q' はともに奇数である。

このとき，(1) と同様にして　$aq'^2+bp'q'+cp'^2=0$　……②

ここで，a，b，c は奇数であるから，aq'^2，$bp'q'$，cp'^2 はすべて奇数となる。

よって，② の左辺は奇数となり，右辺が 0 であることに矛盾する。

したがって，この 2 次方程式は有理数の解をもたない。

6

解答　$a+b$，$a-b$，c が偶数

解説

[1]　条件 (A) で $x=0$，$x=1$，$x=-1$ とすると，

$$f(0)=c,\ f(1)=a+b+c,\ f(-1)=a-b+c$$

は偶数である。

ゆえに，l，m，n を整数として

$$c=2l,\quad a+b+c=2m,\quad a-b+c=2n$$

と表される。これを解いて

$$a=m+n-2l,\quad b=m-n,\quad c=2l \quad \cdots\cdots ①$$

[2]　逆に，① であるとき

$$f(x)=(m+n-2l)x^2+(m-n)x+2l=m(x^2+x)+n(x^2-x)+2l(1-x^2)$$
$$=mx(x+1)+nx(x-1)+2l(1-x^2)$$

x が整数のとき，連続 2 整数の積 $x(x+1)$，$x(x-1)$ は偶数であり，$2l(1-x^2)$ も偶数であるから，$f(x)$ の値は偶数になる。

したがって，求める必要十分条件は ① が成り立つことである。

① は，$c=2l$，$a+b=2(m-l)$，$a-b=2(n-l)$ と同値であるから，求める必要十分条件は　$a+b$，$a-b$，c が偶数

7

解答　(命題 p) 正しくない，理由略　(命題 q) 正しい，証明略

解説

(命題 p)　正しくない。

(理由)　ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数であると仮定すると，

$\sqrt{n}=\frac{a}{b}$ (a と b は互いに素な自然数)　と表される。

両辺を 2 乗すると　$n=\frac{a^2}{b^2}$

a と b は互いに素であるから，a^2 と b^2 も互いに素である。

よって，n が自然数となるのは，$b^2=1$ のときであるから

$n=a^2$　……①

同様に　$n+1=c^2$　……②　(c は自然数，$c>a \geqq 1$)　とおける。

②−① から　$1=c^2-a^2$　変形すると　$(c+a)(c-a)=1$　……③

$c>a \geqq 1$ より　$c+a \geqq 3$，$c-a \geqq 1$

これと ③ を同時に満たす自然数 a，c は存在しないから，矛盾する。

したがって，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数になることはない。

別解　(一般に，自然数 N に対して，$\sqrt{N}$ が有理数のとき，$\sqrt{N}$ は自然数となることを利用する。)

n が自然数となるのは，$b^2=1$ すなわち $b=1$ のときであるから　$\sqrt{n}=a$

ここで　$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数であるから　$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>1$

よって　$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<1$

2 数 $\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の差の絶対値が 1 より小さいから，$\sqrt{n}$ が自然数のとき，$\sqrt{n+1}$ は自然数ではない。すなわち，$\sqrt{n+1}$ は有理数ではない。

同様に，$\sqrt{n+1}$ が自然数のときは，$\sqrt{n}$ は有理数ではない。

したがって，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数になることはない。

(命題 q)　正しい。

(証明)　ある自然数 n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると，

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=r$　……④　(r は正の有理数)　と表される。

④ の両辺に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ を掛けると　$1=r(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$r \neq 0$ であるから　$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\frac{1}{r}$　……⑤

④，⑤ から　$\sqrt{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$，$\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$

よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ がともに有理数となり，命題 p が正しくないことに矛盾する。

したがって，すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。