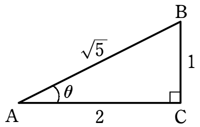
$\boxed{1}$

解答　(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

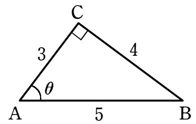
解説



(1)　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{2}$



(2)　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$

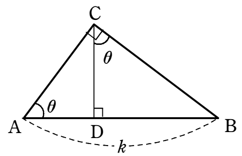
$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$k\cos\theta$　　(2)　$k\sin\theta\cos\theta$

(3)　$k\sin^2\theta$　（$k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$　または　$k(1-\cos^2\theta)$ でもよい）

解説



(1)　△ABC において

$AC=AB\cos\theta=k\cos\theta$

(2)　△ADC において

$CD=AC\sin\theta=(k\cos\theta)\sin\theta$

$=k\sin\theta\cos\theta$

(3)　(解 1)　△ABC において

$BC=AB\sin\theta=k\sin\theta$

また　　$\angle BCD=90^\circ-\angle ACD=\angle CAD=\theta$

よって，△BCD において

$BD=BC\sin\theta=(k\sin\theta)\sin\theta=k\sin^2\theta$

(解 2)　$\angle BCD=\theta$ から，△BCD において

$BD=CD\tan\theta=(k\sin\theta\cos\theta)\tan\theta=k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

(解 3)　△ADC において

$AD=AC\cos\theta=(k\cos\theta)\cos\theta=k\cos^2\theta$

よって　　$BD=AB-AD=k-k\cos^2\theta=k(1-\cos^2\theta)$

注意　$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$ は，それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$ と書く。

参考　次の項目で学ぶ三角比の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いると，(3) で求めた 3 つの解

$k\sin^2\theta$，　$k\sin\theta\cos\theta\tan\theta$，　$k(1-\cos^2\theta)$

はどれも同じ形になる。

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\cos17^\circ$　　(2)　$\sin36^\circ$　　(3)　$\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

解説

(1)　$\sin73^\circ=\sin(90^\circ-17^\circ)=\cos17^\circ$

(2)　$\cos54^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\sin36^\circ$

(3)　$\tan50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\dfrac{1}{\tan40^\circ}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$A+B+C=180^\circ$ であるから　　$A+B=180^\circ-C$

よって　　$\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{180^\circ-C}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$　　(2)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2=1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}$$

$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\div\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{3}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　から

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　2　　(2)　0

解説

(1)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=1+2\sin\theta\cos\theta+(1-2\sin\theta\cos\theta)$

$=2$

(2)　$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)-\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

$=1-\sin^2\theta-\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

$=\cos^2\theta-\cos^2\theta$

$=0$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{4}$　　(2)　$\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$　　(3)　$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{6}{4}$$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3-3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

(3)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

よって，$\sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1

解答 (1) $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，$\tan\theta=2\sqrt{2}$

(3) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

解説

(1) $\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，　$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，　$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

(2) $AC=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

よって　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，　$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

(3) $AB=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3$

よって　$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，　$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{3}$，　$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

2

解答 (1) $BC=k\sin\theta$　(2) $AC=k\cos\theta$　(3) $AD=k\cos^2\theta$

(4) $CD=k\sin\theta\cos\theta$　(5) $BD=k\sin^2\theta$

解説

(1) $BC=AB\sin\theta=k\sin\theta$

(2) $AC=AB\cos\theta=k\cos\theta$

(3) $AD=AC\cos\theta=(k\cos\theta)\cos\theta=k\cos^2\theta$

(4) $CD=AC\sin\theta=(k\cos\theta)\sin\theta=k\sin\theta\cos\theta$

(5) $\angle BCD=\theta$ であるから　$BD=BC\sin\theta=(k\sin\theta)\sin\theta=k\sin^2\theta$

注意 $(\cos\theta)^2$，$(\sin\theta)^2$ は，それぞれ $\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$ と書く。

3

解答 (1) $\cos 38^\circ$　(2) $\sin 43^\circ$　(3) $\dfrac{1}{\tan 19^\circ}$

解説

(1) $\sin 52^\circ=\sin(90^\circ-38^\circ)=\cos 38^\circ$

(2) $\cos 47^\circ=\cos(90^\circ-43^\circ)=\sin 43^\circ$

(3) $\tan 71^\circ=\tan(90^\circ-19^\circ)=\dfrac{1}{\tan 19^\circ}$

4

解答 (1) 略　(2) 略

解説

$A+B+C=180^\circ$ であるから　$B+C=180^\circ-A$

よって　$\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$

(1) $\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}$

(2) $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}=1$

5

解答 (1) $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=\dfrac{5}{12}$　(2) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$

$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{144}{169}}=\sqrt{\dfrac{12^2}{13^2}}=\dfrac{12}{13}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{12}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\sin\theta>0$ であるから

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(2\sqrt{2})^2=1+8=9$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

6

解答 (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略　(5) 略　(6) 略

解説

(1) (左辺)$=\cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=$(右辺)

(2) (左辺)$=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta=$(右辺)

(3) (左辺)$=\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta=\sin^2\theta=$(右辺)

(4) (左辺)$=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1-\sin^2\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$

$=1-\sin\theta=$(右辺)

(5) (左辺)$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta=$(右辺)

(6) (左辺)$=(\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta)+(4\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=5=$(右辺)

7

解答 (1) $\dfrac{1}{8}$　(2) $-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$　(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

解説

(1) $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を２乗すると　$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+3\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

別解 $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{8}\right)=-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{4}$

θ は鋭角なので　$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

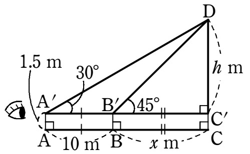
よって，$\sin\theta+\cos\theta>0$ であるから　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

1

解答　$5\sqrt{3}+6.5$（m）

解説

右の図のように，木の頂点を D，木の根元を C とし，目の高さの直線上の点を A′，B′，C′ とする。



このとき，$BC=x$ m，$C'D=h$ m とすると

$h=(10+x)\tan 30°$　……①

$h=x\tan 45°$　……②

② から　$x=h$

これを ① に代入して　$h=\dfrac{10+h}{\sqrt{3}}$

ゆえに　$(\sqrt{3}-1)h=10$

よって　$h=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=5(\sqrt{3}+1)$

したがって，求める木の高さは，目の高さを加えて

$5(\sqrt{3}+1)+1.5=5\sqrt{3}+6.5$（m）

2

解答　$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan 15°=2-\sqrt{3}$，

$\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\tan 75°=2+\sqrt{3}$

解説

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ であるから

$BD=BC-CD=\sqrt{3}-1$

△BED は ∠E＝90° の直角二等辺三角形であるから

$DE=BE=\dfrac{BD}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

また，$AD=\sqrt{2}\,AC=\sqrt{2}$ であるから

$AE=AD+DE=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

よって，直角三角形 ABE において

$\sin 15°=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\div 2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15°=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\div 2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan 15°=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\div\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{8-2\sqrt{12}}{6-2}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$

また　$\sin 75°=\sin(90°-15°)=\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 75°=\cos(90°-15°)=\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan 75°=\tan(90°-15°)=\dfrac{1}{\tan 15°}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

3

解答　(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　(3) $\dfrac{2\sqrt{15}}{9}$　(4) $6\sqrt{15}$

解説

(1)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=3$ であるから　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

$0°<\theta<90°$ より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であるから

$\sin\theta+\cos\theta>0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}$

(4)　$\dfrac{1}{\sin^3\theta}+\dfrac{1}{\cos^3\theta}=\dfrac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}\div\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{2\sqrt{15}}{9}\cdot 27=6\sqrt{15}$

1

解答　(1) $\dfrac{4+\sqrt{7}}{4}$　(2) 1　(3) $\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(\sqrt{7})^2=8$

したがって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{8}$

θ は鋭角であるから，$\cos\theta>0$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\sqrt{7}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

ゆえに　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{\sqrt{14}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{(\sqrt{2})^2(\sqrt{7}+1)^2}{4^2}$

$=\dfrac{2(8+2\sqrt{7})}{16}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{4}$

別解　同様にして　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{8}$

$\tan\theta=\sqrt{7}$ から　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{7}$　ゆえに　$\sin\theta=\sqrt{7}\cos\theta$

よって　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\{(\sqrt{7}+1)\cos\theta\}^2=(\sqrt{7}+1)^2\cos^2\theta$

$=(8+2\sqrt{7})\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{4}$

(2)　$\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)(1-\sin^2\theta)$

$=\tan^2\theta+(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta$

$=\tan^2\theta+\dfrac{1-\tan^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$

$=\tan^2\theta+1-\tan^2\theta=1$

(3)　(分子)$=\sin^4\theta+4\cos^2\theta-\cos^4\theta+1$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+4\cos^2\theta+1$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta+4\cos^2\theta+1$

$=(1-\cos^2\theta)+3\cos^2\theta+1=2(1+\cos^2\theta)$

よって　(与式)$=\dfrac{2(1+\cos^2\theta)}{3(1+\cos^2\theta)}=\dfrac{2}{3}$

1

解答 (1) $\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$，$\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$

(2) $\sin 180^\circ=0$，$\cos 180^\circ=-1$，$\tan 180^\circ=0$

解説

(1) 右の図で，$\angle \mathrm{AOP}=120^\circ$ とすると

$\angle \mathrm{POQ}=60^\circ$

半円の半径を $r=2$ にとると，点Pの座標は

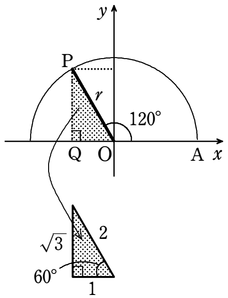
$(-1,\ \sqrt{3})$

そこで $x=-1$，$y=\sqrt{3}$ として

$$\sin 120^\circ=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$$



(2) 右の図で，$\angle \mathrm{AOP}=180^\circ$ とする。

半円の半径を $r=1$ にとると，点Pの座標は

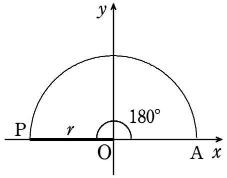
$(-1,\ 0)$

そこで $x=-1$，$y=0$ として

$$\sin 180^\circ=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0$$

$$\cos 180^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\tan 180^\circ=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0$$



2

解答 (1) 0　　(2) 2

解説

(1) (与式)$=\cos(180^\circ-10^\circ)+\cos(90^\circ-20^\circ)+\sin(90^\circ-10^\circ)-\sin(180^\circ-20^\circ)$

$=-\cos 10^\circ+\sin 20^\circ+\cos 10^\circ-\sin 20^\circ=0$

(2) (与式)$=\tan(180^\circ-35^\circ)\tan(90^\circ-35^\circ)-3\tan(180^\circ-25^\circ)\tan(90^\circ-25^\circ)$

$=(-\tan 35^\circ)\cdot\dfrac{1}{\tan 35^\circ}-3(-\tan 25^\circ)\cdot\dfrac{1}{\tan 25^\circ}$

$=-1+3=2$

別解 (与式)$=\tan(90^\circ+55^\circ)\tan 55^\circ-3\tan(90^\circ+65^\circ)\tan 65^\circ$

$=-\dfrac{1}{\tan 55^\circ}\cdot\tan 55^\circ-3\left(-\dfrac{1}{\tan 65^\circ}\right)\tan 65^\circ$

$=-1+3=2$

3

解答 (1) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{7},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right)$，$\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

(3) $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

解説

(1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\sin\theta\geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{2}{7}$ から，$0^\circ<\theta<90^\circ$ または $90^\circ<\theta<180^\circ$ である。

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{7}\right)^2=\dfrac{45}{49}$

[1] $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{45}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{7}\div\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

$=\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

[2] $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{45}{49}}=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{7}\div\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)$

$=-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

[1]，[2] から

$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{7},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right)$，$\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{7},\ -\dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

(3) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{25}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}<0$ であるから　$90^\circ<\theta<180^\circ$

ゆえに　$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$

別解 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{4}{3}$ から　$\sin\theta=-\dfrac{4}{3}\cos\theta$　……①

① を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　$\left(-\dfrac{4}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1$

よって　$\dfrac{25}{9}\cos^2\theta=1$　　ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{25}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$，$\tan\theta<0$ であるから　$90^\circ<\theta<180^\circ$

よって　$\cos\theta<0$　　ゆえに　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

① に代入して　$\sin\theta=-\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$

4

解答 (1) $\theta=45^\circ$，135°　(2) $\theta=150^\circ$　(3) $\theta=135^\circ$　(4) $\theta=30^\circ$，150°

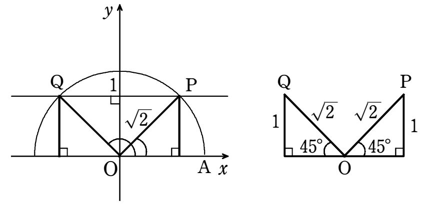
(5) $\theta=30^\circ$

解説

(1) $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は，

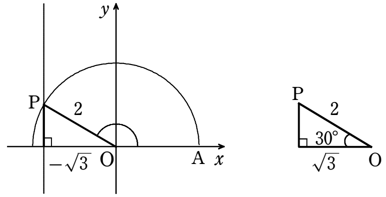
右の図で $\angle \mathrm{AOP}$ と $\angle \mathrm{AOQ}$ である。

よって　$\theta=45^\circ$，135°



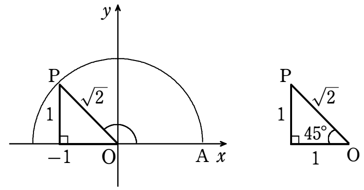
(2) $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は，右の図で $\angle \mathrm{AOP}$ である。

よって　$\theta=150^\circ$



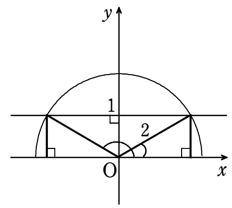
(3) $\tan\theta=-1$ を満たす θ は，右の図で $\angle \mathrm{AOP}$ である。

よって　$\theta=135^\circ$



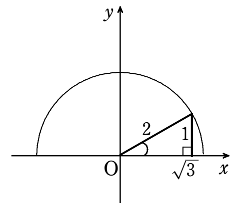
(4) $2\sin\theta-1=0$ から　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　$\theta=30^\circ$，150°



(5) $3\tan\theta=\sqrt{3}$ から　$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\theta=30^\circ$



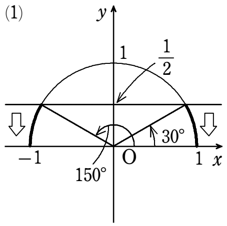
5

解答 (1) $0^\circ\leqq\theta\leqq 30^\circ$，$150^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$　(2) $0^\circ\leqq\theta<135^\circ$　(3) $30^\circ\leqq\theta<90^\circ$

解説

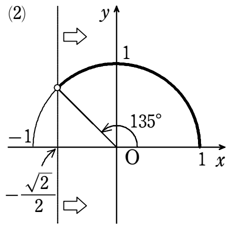
(1)　$\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=30°$，$(180°-30°=)\ 150°$

よって　$0°\leqq\theta\leqq30°$，$150°\leqq\theta\leqq180°$

(1)


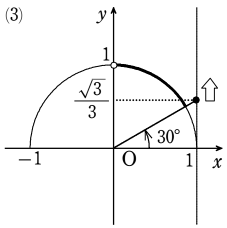
(2)　$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　$\theta=180°-45°=135°$

よって　$0°\leqq\theta<135°$

(2)


(3)　$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$\theta=30°$

よって　$30°\leqq\theta<90°$

(3)


6

解答　$\theta=60°$，$180°$

解説

$\sin^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}=0$ から　$(1-\cos^2\theta)-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}=0$

よって　$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$\cos\theta=\frac{1}{2}$，-1

よって　$\theta=60°$，$180°$

7

解答　(1)　$60°<\theta\leqq180°$　(2)　$30°<\theta<45°$，$135°<\theta<150°$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta>0$

整理すると　$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき

$-1\leqq t\leqq1$　……①

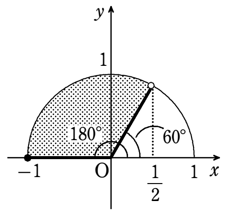
不等式は　$2t^2+3t-2<0$

ゆえに　$(t+2)(2t-1)<0$

よって　$-2<t<\frac{1}{2}$

① との共通範囲を求めて　$-1\leqq t<\frac{1}{2}$

ゆえに，$-1\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$ を解いて　$60°<\theta\leqq180°$



(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$4(1-\sin^2\theta)+(2+2\sqrt{2})\sin\theta>4+\sqrt{2}$

整理すると　$4\sin^2\theta-(2+2\sqrt{2})\sin\theta+\sqrt{2}<0$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　$0\leqq t\leqq1$　……①

不等式は　$4t^2-(2+2\sqrt{2})t+\sqrt{2}<0$

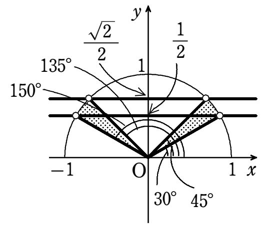
ゆえに　$(2t-1)(2t-\sqrt{2})<0$

よって　$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

① との共通範囲は　$\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，$\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$ を解いて

$30°<\theta<45°$，$135°<\theta<150°$



8

解答　$\theta=60°$ で最大値 8，$\theta=180°$ で最小値 -1

解説

$y=4(1-\cos^2\theta)+4\cos\theta+3=-4\cos^2\theta+4\cos\theta+7$

$\cos\theta=x$ とおくと

$y=-4x^2+4x+7=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+8$

また，$0°\leqq\theta\leqq180°$ から　$-1\leqq x\leqq1$

よって，y は

$x=\frac{1}{2}$ で最大値 8，

$x=-1$ で最小値 -1

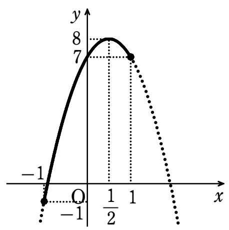
をとる。

$x=\frac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

$x=-1$ すなわち $\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$

したがって　$\theta=60°$ で最大値 8

$\theta=180°$ で最小値 -1



1

解答

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

解説

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2

解答　(1)　0　(2)　0　(3)　1　(4)　4

解説

(1)　$\cos160°-\cos110°+\sin70°-\sin20°$

$=\cos(180°-20°)-\cos(90°+20°)+\sin(90°-20°)-\sin20°$

$=-\cos20°+\sin20°+\cos20°-\sin20°=0$

(2)　$\sin140°=\sin(180°-40°)=\sin40°$

$\sin50°=\sin(90°-40°)=\cos40°$

$\cos130°=\cos(180°-50°)=-\cos50°$

$=-\cos(90°-40°)=-\sin40°$

よって　$\sin140°\sin50°+\cos40°\cos130°$

$=\sin40°\cos40°+\cos40°\cdot(-\sin40°)=0$

(3)　$\cos80°=\cos(90°-10°)=\sin10°$

$\sin100°=\sin(90°+10°)=\cos10°$

$\cos170°=\cos(180°-10°)=-\cos10°$

よって　与式$=\sin10°\sin10°-\cos10°(-\cos10°)=\sin^2 10°+\cos^2 10°=1$

(4)　$\tan155°=\tan(180°-25°)=-\tan25°$

$\tan115°=\tan(180°-65°)=-\tan65°$

よって　$(\tan25°+\tan65°)^2-(\tan155°-\tan115°)^2$

$=(\tan25°+\tan65°)^2-(-\tan25°+\tan65°)^2$

$=(\tan25°+\tan65°)^2-(\tan25°-\tan65°)^2$

$=4\tan25°\tan65°=4\tan25°\tan(90°-25°)$

$=4\tan25°\cdot\frac{1}{\tan25°}=4$

3

解答　(1)　$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan\theta=\frac{3}{\sqrt{7}}$ または $\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan\theta=-\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\theta=-\sqrt{3}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(4)　$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，$\tan\theta=2\sqrt{6}$

解説

(1)　$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$ から，$0^\circ<\theta<90^\circ$ または $90^\circ<\theta<180^\circ$ である。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}\div\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}\div\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{7}}$$

(2)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta\geqq 0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-2)=-\sqrt{3}$

参考　$\theta=120^\circ$ である。

(3)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-3)^2=10$　　　よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$

$\tan\theta<0$ であるから，θ は鈍角で　　$\cos\theta<0$

ゆえに　　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-3\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(4)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{24}{25}$

$\sin\theta\geqq 0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\div\dfrac{1}{5}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\times 5=2\sqrt{6}$

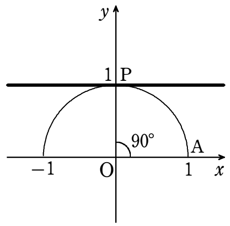
4

解答　(1)　$\theta=90^\circ$　　(2)　$\theta=60^\circ$　　(3)　$\theta=60^\circ$　　(4)　$\theta=45^\circ$，135°
(5)　$\theta=135^\circ$　　(6)　$\theta=150^\circ$

解説

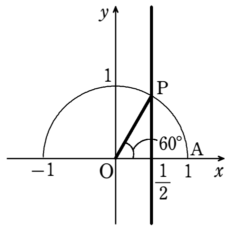
(1)　半径１の半円周上で，y 座標が１となる点は，図の点Ｐである。求める θ は，$\angle$AOP であるから

$\theta=90^\circ$



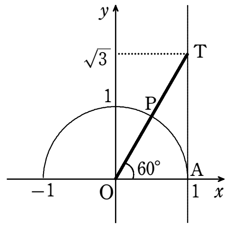
(2)　半径１の半円周上で，x 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点は，図の点Ｐである。求める θ は，$\angle$AOP であるから

$\theta=60^\circ$



(3)　直線 $x=1$ 上で，y 座標が $\sqrt{3}$ となる点を T とすると，直線 OT と半径１の半円の交点は，図の点Ｐである。求める θ は，$\angle$AOP であるから

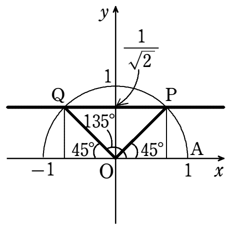
$\theta=60^\circ$



(4)　$2\sin\theta=\sqrt{2}$ から　　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

半径１の半円周上で，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，図の２点Ｐ，Ｑである。求める θ は，$\angle$AOP と $\angle$AOQ であるから

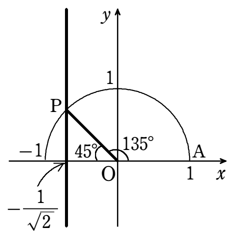
$\theta=45^\circ$，135°



(5)　$\sqrt{2}\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

半径１の半円周上で，x 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，図の点Ｐである。求める θ は，$\angle$AOP であるから

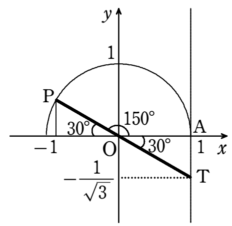
$\theta=135^\circ$



(6)　$\sqrt{3}\tan\theta+1=0$ から　　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

直線 $x=1$ 上で，y 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる点を T とすると，直線 OT と半径１の半円の交点は，図の点Ｐである。求める θ は，$\angle$AOP であるから

$\theta=150^\circ$



5

解答　(1)　$45^\circ<\theta<135^\circ$　　(2)　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq 180^\circ$　　(3)　$150^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$
(4)　$135^\circ<\theta\leqq 180^\circ$　　(5)　$0^\circ<\theta\leqq 45^\circ$　　(6)　$60^\circ\leqq\theta<90^\circ$
(7)　$30^\circ<\theta\leqq 60^\circ$，$120^\circ\leqq\theta<150^\circ$　　(8)　$120^\circ\leqq\theta<150^\circ$
(9)　$0^\circ\leqq\theta<60^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

解説

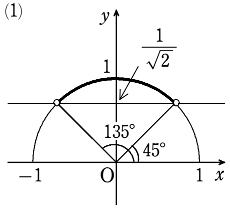
(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　　$\theta=45^\circ$，135°

図から，不等式の解は　　$45^\circ<\theta<135^\circ$

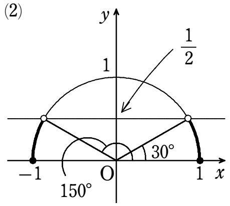
(2)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　　$\theta=30^\circ$，150°

図から，不等式の解は　　$0^\circ\leqq\theta\leqq 30^\circ$，$150^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$

(1)



(2)



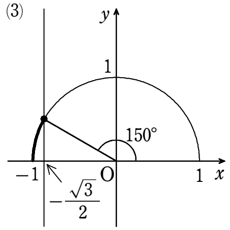
(3)　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　　$\theta=150^\circ$

図から，不等式の解は　　$150^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$

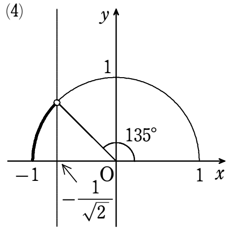
(4)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　　$\theta=135^\circ$

図から，不等式の解は　　$135^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

(3)



(4)



(5)　$\tan\theta=0$ を満たす θ は　　$\theta=0^\circ$，180°

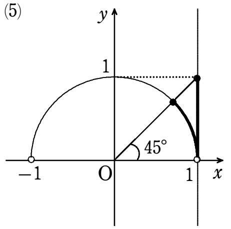
$\tan\theta=1$ を満たす θ は　　$\theta=45^\circ$

図から，不等式の解は　　$0^\circ<\theta\leqq 45^\circ$

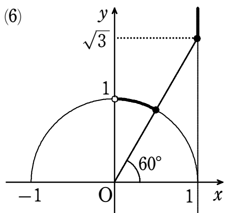
(6)　$\tan\theta=\sqrt{3}$ を満たす θ は　　$\theta=60^\circ$

図から，不等式の解は　$60^\circ \leqq \theta < 90^\circ$

(5)



(6)



(7)　$1 < 2\sin\theta \leqq \sqrt{3}$ から　　$\dfrac{1}{2} < \sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 60^\circ,\ 120^\circ$

図から，不等式の解は　$30^\circ < \theta \leqq 60^\circ,\ 120^\circ \leqq \theta < 150^\circ$

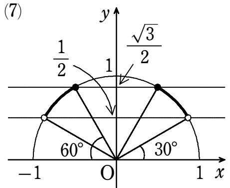
(8)　$1 \leqq -2\cos\theta < \sqrt{3}$ から　　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 150^\circ$

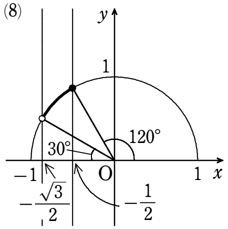
$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 120^\circ$

図から，不等式の解は　$120^\circ \leqq \theta < 150^\circ$

(7)



(8)



(9)　$-1 < \sqrt{3}\tan\theta < 3$ から

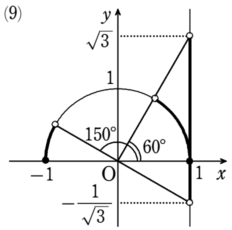
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \sqrt{3}$$

$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は　$\theta = 150^\circ$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ は　$\theta = 60^\circ$

図から，不等式の解は　$0^\circ \leqq \theta < 60^\circ,\ 150^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

(9)



$\boxed{6}$

解答　(1)　$\theta = 60^\circ$　　(2)　$\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ$

解説

(1)　$4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$ から　　$4(1-\cos^2\theta) - 4\cos\theta - 1 = 0$

よって　$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

ゆえに　$(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) = 0$　……①

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$2\cos\theta + 3 \neq 0$

よって，①から　$2\cos\theta - 1 = 0$　　すなわち　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\theta = 60^\circ$

(2)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より　$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

整理して　$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

よって　$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに　$\sin\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから

$\sin\theta = 1$　より　$\theta = 90^\circ$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ より　$\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$

したがって，求める θ は　$\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ,\ \theta = 180^\circ$　　(2)　$0^\circ \leqq \theta < 30^\circ,\ 150^\circ < \theta \leqq 180^\circ$

解説

(1)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 \leqq 0$

整理すると　$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geqq 0$

$\cos\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$-1 \leqq t \leqq 1$　……①

不等式は　$2t^2 + t - 1 \geqq 0$　　ゆえに　$(t+1)(2t-1) \geqq 0$

よって　$t \leqq -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq t$

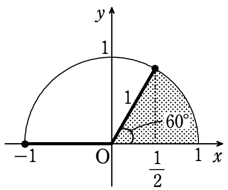
① との共通範囲を求めて　$t = -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$

$t = -1$　すなわち　$\cos\theta = -1$ を解いて

$\theta = 180^\circ$

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$　すなわち　$\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$ を解いて

$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ$



以上から　$0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ,\ \theta = 180^\circ$

(2)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta < 3$

整理すると　$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 > 0$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$0 \leqq t \leqq 1$　……①

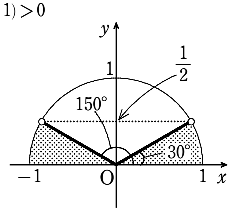
不等式は　$2t^2 - 3t + 1 > 0$　　ゆえに　$(2t-1)(t-1) > 0$

よって　$t < \dfrac{1}{2},\ 1 < t$

① との共通範囲を求めて　$0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$

求める解は，$0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$　すなわち　$0 \leqq \sin\theta < \dfrac{1}{2}$

を解いて　$0^\circ \leqq \theta < 30^\circ,\ 150^\circ < \theta \leqq 180^\circ$



$\boxed{8}$

解答　(1)　$\theta = 0^\circ,\ 180^\circ$ のとき最大値 0；$\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -3

(2)　$\theta = 0^\circ$ のとき最大値 5，$\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -1

(3)　$\theta = 120^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，$\theta = 0^\circ$ のとき最小値 -1

解説

(1)　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから

$y = (1-\sin^2\theta) - 2\sin\theta - 1 = -\sin^2\theta - 2\sin\theta$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$0 \leqq t \leqq 1$　……①

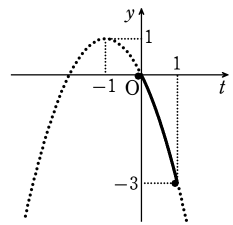
y を t の式で表すと

$y = -t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 1$

① の範囲において，y は

$t = 0$ で最大値 0,

$t = 1$ で最小値 -3



をとる。$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから

$t = 0$ となるのは，$\sin\theta = 0$ から　$\theta = 0^\circ,\ 180^\circ$

$t = 1$ となるのは，$\sin\theta = 1$ から　$\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ,\ 180^\circ$ のとき最大値 0；　$\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -3

(2)　$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき

$0 \leqq t \leqq 1$　……①

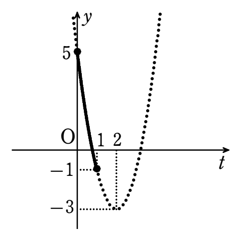
y を t の式で表すと

$y = 2t^2 - 8t + 5 = 2(t-2)^2 - 3$

① の範囲において，y は

$t = 0$ で最大値 5,

$t = 1$ で最小値 -1



をとる。$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ であるから

$t = 0$ となるのは，$\sin\theta = 0$ から　$\theta = 0^\circ$

$t = 1$ となるのは，$\sin\theta = 1$ から　$\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ$ のとき最大値 5，　$\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -1

(3)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから

$y = \sin^2\theta - \cos\theta = (1-\cos^2\theta) - \cos\theta = -\cos^2\theta - \cos\theta + 1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき

$-1\leqq t\leqq 1$ ……①

y を t の式で表すと

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

① の範囲において，y は

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$t=1$ で最小値 -1

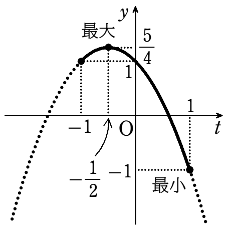
をとる。$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから

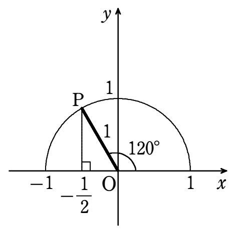
$t=-\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ から　　$\theta=120°$

$t=1$ となるのは，$\cos\theta=1$ から　　$\theta=0°$

よって　　$\theta=120°$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，

$\theta=0°$ のとき最小値 -1





$\boxed{1}$

解答　(1) $2\leqq\sin\theta+2\leqq 3$　　(2) $-2\leqq 2\cos\theta\leqq 2$　　(3) $-1\leqq 2\sin\theta-1\leqq 1$

(4) $-2\leqq -3\cos\theta+1\leqq 4$　　(5) $1\leqq 2\tan\theta+1\leqq 2\sqrt{3}+1$

(6) $\tan^2\theta+1\geqq 1$

解説

(1) $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　　$0\leqq\sin\theta\leqq 1$

各辺に 2 を加えて　　$2\leqq\sin\theta+2\leqq 3$

(2) $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　　$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

各辺に 2 を掛けて　　$-2\leqq 2\cos\theta\leqq 2$

(3) $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　　$0\leqq\sin\theta\leqq 1$

各辺に 2 を掛けて　　$0\leqq 2\sin\theta\leqq 2$

各辺から 1 を引いて　　$-1\leqq 2\sin\theta-1\leqq 1$

(4) $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　　$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

各辺に -3 を掛けて　　$-3\leqq -3\cos\theta\leqq 3$

各辺に 1 を加えて　　$-2\leqq -3\cos\theta+1\leqq 4$

(5) $0°\leqq\theta\leqq 60°$ のとき　　$0\leqq\tan\theta\leqq\sqrt{3}$

各辺に 2 を掛けて　　$0\leqq 2\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

各辺に 1 を加えて　　$1\leqq 2\tan\theta+1\leqq 2\sqrt{3}+1$

(6) $0°\leqq\theta<90°$ のとき　　$\tan\theta\geqq 0$

両辺を 2 乗して　　$\tan^2\theta\geqq 0$

両辺に 1 を加えて　　$\tan^2\theta+1\geqq 1$

$\boxed{2}$

解答　(1) 1　　(2) 2　　(3) -1　　(4) 1

解説

(1) $(与式)=\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(-\cos\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(2) $(与式)=\cos^2\theta+\sin^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(3) $\cos 124°=\cos(180°-56°)=-\cos 56°$

$\cos 146°=\cos(90°+56°)=-\sin 56°$

よって　$(与式)=\cos 56°(-\cos 56°)+\sin 56°(-\sin 56°)$

$=-\cos^2 56°-\sin^2 56°$

$=-(\sin^2 56°+\cos^2 56°)=-1$

(4) $\tan 130°=\tan(90°+40°)=-\dfrac{1}{\tan 40°}$

よって　$(与式)=\dfrac{1}{\sin^2 40°}-\left(-\dfrac{1}{\tan 40°}\right)^2=\dfrac{1}{\sin^2 40°}-\left(-\dfrac{\cos 40°}{\sin 40°}\right)^2$

$=\dfrac{1}{\sin^2 40°}-\dfrac{\cos^2 40°}{\sin^2 40°}=\dfrac{1-\cos^2 40°}{\sin^2 40°}=\dfrac{\sin^2 40°}{\sin^2 40°}=1$

$\boxed{3}$

解答　(1) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$　　(2) $\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$　　(3) $-\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

解説

(1) $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から　　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\sin\theta$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると　　$\sin^2\theta+\left(\dfrac{1}{2}-\sin\theta\right)^2=1$

整理して　　$2\sin^2\theta-\sin\theta-\dfrac{3}{4}=0$

よって　　$8\sin^2\theta-4\sin\theta-3=0$　　　これを解くと　$\sin\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より $0\leqq\sin\theta\leqq 1$ であるから　　$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

(2) (1) より　　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

(3) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{1+\sqrt{7}}{4}}{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}}=\dfrac{(1+\sqrt{7})^2}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}=\dfrac{8+2\sqrt{7}}{-6}=-\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{4}$

解答　(ア) 2　　(イ) 2　　(ウ) 1　　(エ) 0°，90°，180°　　(オ) 1

(カ) 45°，135°　　(キ) $\dfrac{1}{2}$

解説

$\cos^4\theta=(\cos^2\theta)^2=(1-\sin^2\theta)^2$ であるから

$y=\sin^4\theta+(1-\sin^2\theta)^2=(\sin^2\theta)^2+(1-\sin^2\theta)^2$

$\sin^2\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき　　$0\leqq t\leqq 1$ ……①

y を t の式で表すと

$y=t^2+(1-t)^2={}^{ア}2t^2-{}^{イ}2t+{}^{ウ}1$

$=2(t^2-t)+1=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

① の範囲において，y は

$t=0$，1 のとき最大値 1；$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$

をとる。$0°\leqq\theta\leqq 180°$ では，$\sin\theta\geqq 0$ であるから

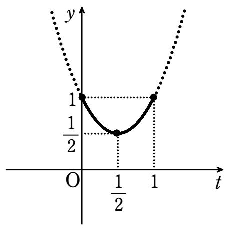
$t=0$ となるのは，$\sin^2\theta=0$ から　　$\theta=0°$，180°

$t=1$ となるのは，$\sin^2\theta=1$ から　　$\theta=90°$

$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$ から　　$\theta=45°$，135°

よって　　$\theta={}^{エ}0°$，90°，180° のとき最大値 ${}^{オ}1$

$\theta={}^{カ}45°$，135°　　のとき最小値 ${}^{キ}\dfrac{1}{2}$



1

解答　$x=60^\circ$，$y=30^\circ$ または $x=120^\circ$，$y=30^\circ$

解説

第１式から　$(1-\sin^2 x)+(1-\cos^2 y)=\dfrac{1}{2}$

よって　$\sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{2}$　……①

第２式から　$\sin x(-\cos y)=-\dfrac{3}{4}$

よって　$\sin x\cos y=\dfrac{3}{4}$　……②

② の両辺を２乗して，① を代入すると　$\sin^2 x\left(\dfrac{3}{2}-\sin^2 x\right)=\dfrac{9}{16}$

整理して　$16\sin^4 x-24\sin^2 x+9=0$　ゆえに　$(4\sin^2 x-3)^2=0$

よって　$\sin^2 x=\dfrac{3}{4}$　$0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ より $\sin x\geqq 0$ であるから　$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$x=60^\circ$，120°

② から　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y=\dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$y=30^\circ$

以上から　$x=60^\circ$，$y=30^\circ$　または　$x=120^\circ$，$y=30^\circ$

2

解答　(1)　$a=\sqrt{2}$，$\theta=45^\circ$

(2)　$\theta=0^\circ$ のとき最大値 $a+1$，$\theta=180^\circ$ のとき最小値 $-a+1$

解説

(1)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

$f(\theta)=\sin^2\theta+a\cos\theta+1=-\cos^2\theta+a\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき　$-1\leqq t\leqq 1$　……①

$f(\theta)$ を t の式で表すと　$f(\theta)=-t^2+at+2=-\left(t-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+2$

$0<\dfrac{a}{2}<1$ であるから，① の範囲において，$f(\theta)$ は $t=\dfrac{a}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$ をとる。最大値が $\dfrac{5}{2}$ となるための条件は　$\dfrac{a^2}{4}+2=\dfrac{5}{2}$

ゆえに　$a^2=2$　$0<a<2$ であるから　$a=\sqrt{2}$

このとき，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　$\theta=45^\circ$

(2)　$a\geqq 2$ のとき，$y=f(\theta)$ のグラフの軸について

$t=\dfrac{a}{2}\geqq 1$

したがって，① の範囲において，$f(\theta)$ は

$t=1$ で最大値 $a+1$，$t=-1$ で最小値 $-a+1$

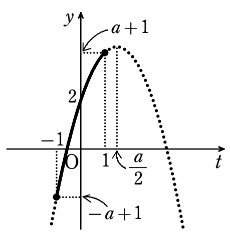
をとる。$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから

$t=1$　となるのは，$\cos\theta=1$　から　$\theta=0^\circ$

$t=-1$ となるのは，$\cos\theta=-1$ から　$\theta=180^\circ$

よって　$\theta=0^\circ$　のとき最大値 $a+1$，

$\theta=180^\circ$ のとき最小値 $-a+1$



3

解答　(1)　$30^\circ<\theta<60^\circ$，$120^\circ<\theta<150^\circ$　(2)　略　(3)　$120^\circ<\theta<150^\circ$

解説

(1)　この２次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2\cos\theta)^2-\{-2(1+\sqrt{3})\sin\theta+4+\sqrt{3}\}$

$=4\cos^2\theta+(2+2\sqrt{3})\sin\theta-4-\sqrt{3}$

$=4(1-\sin^2\theta)+(2+2\sqrt{3})\sin\theta-4-\sqrt{3}$

$=-\{4\sin^2\theta-(2+2\sqrt{3})\sin\theta+\sqrt{3}\}$

$=-(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})$

異なる２つの実数解をもつとき，$D>0$ であるから

$-(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})>0$

ゆえに　$(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$

よって　$\dfrac{1}{2}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$30^\circ<\theta<60^\circ$，$120^\circ<\theta<150^\circ$

(2)　$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$0<\sin\theta\leqq 1$

$\sin\theta=t$ とおくと　$0<t\leqq 1$

$f(t)=-2(1+\sqrt{3})t+4+\sqrt{3}$ とすると，$y=f(t)$ のグラフは傾きが負の直線である。

ゆえに，１次関数 $f(t)$ は単調に減少する。

また　$f(1)=2-\sqrt{3}>0$

よって，$0<t\leqq 1$ の範囲で常に　$f(t)>0$

したがって，与えられた不等式が常に成り立つ。

(3)　$g(x)=x^2-4(\cos\theta)x-2(1+\sqrt{3})\sin\theta+4+\sqrt{3}$

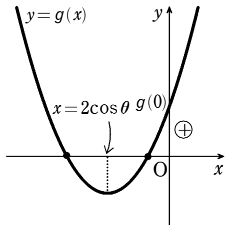
とする。このとき，放物線 $y=g(x)$ の軸は直線

$x=2\cos\theta$ である。

与えられた２次方程式が異なる２つの実数解をもち，

それらがともに負となるような条件は

$$\begin{cases} D>0 & \cdots\cdots ① \\ g(0)>0 & \cdots\cdots ② \\ 2\cos\theta<0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$



① は，(1) から

$30^\circ<\theta<60^\circ$，$120^\circ<\theta<150^\circ$　……④

② は，$g(0)=-2(1+\sqrt{3})\sin\theta+4+\sqrt{3}>0$ であり，(2) から，この不等式は $0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき常に成り立つ。

③から　$\cos\theta<0$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$90^\circ<\theta<180^\circ$　……⑤

ゆえに，④，⑤ の共通範囲を求めて　$120^\circ<\theta<150^\circ$

1

解答　(1)　$b=\sqrt{3}$　(2)　$C=60^\circ$，120°　(3)　$R=5\sqrt{3}$　(4)　$B=30^\circ$，150°

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 120^\circ}$

よって　$b=\sqrt{2}\cdot\sin 120^\circ\cdot\dfrac{1}{\sin 45^\circ}$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}$

(2)　正弦定理により　$\dfrac{15}{\sin 30^\circ}=\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=\dfrac{15\sqrt{3}}{15}\cdot\sin 30^\circ$

$=\dfrac{15\sqrt{3}}{15}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ<C<150^\circ$ であるから　$C=60^\circ$，120°

(3)　正弦定理により　$\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 150^\circ}=2R$

よって　$R=\dfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{1}=5\sqrt{3}$

(4)　正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin B}=2\cdot 5$

よって　$\sin B=\dfrac{5}{2\cdot 5}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$B=30^\circ$，150°

2

解答　(1)　$a=\sqrt{5}$　(2)　$B=60^\circ$

解説

(1)　余弦定理から　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$=9+2-6\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{5}$

(2)　余弦定理から　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{40}{2\cdot 8\cdot 5}=\dfrac{1}{2}$

よって　$B=60^\circ$

3

解答　$c=1+\sqrt{3}$

解説

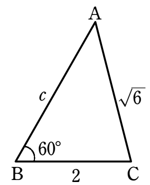
余弦定理により

$(\sqrt{6})^2=c^2+2^2-2\cdot c\cdot 2\cos 60^\circ$

整理すると　$c^2-2c-2=0$

これを解いて　$c=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}=1\pm\sqrt{3}$

$c>0$ であるから　$c=1+\sqrt{3}$



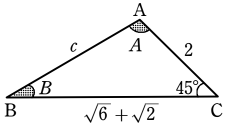
4

解答　$c=2\sqrt{2}$，$A=105°$，$B=30°$

解説

余弦定理により

$$c^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\cos 45°$$
$$=(6+2\sqrt{12}+2)+4-4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=12+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4$$
$$=8$$



$c>0$ であるから　$c=2\sqrt{2}$

正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}$

よって　$\sin B=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\cdot\sin 45°=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$A+B=180°-C=135°$ であるから　$B<135°$

ゆえに　$B=30°$

したがって　$A=180°-(30°+45°)=105°$

5

解答　(1)　5：8：7　　(2)　60°

解説

(1)　正弦定理により

$$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C=5：8：7$$

(2)　(1) から，$a=5k$，$b=8k$，$c=7k$ $(k>0)$ とおける。

$a<c<b$ であるから　$A<C<B$

よって，C が２番目に大きい角である。

余弦定理により

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(5k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 8k}=\frac{40k^2}{2\cdot 5\cdot 8k^2}=\frac{1}{2}$$

よって　$C=60°$

したがって，求める角の大きさは　60°

6

解答　(1)　$b=c$ の二等辺三角形　　(2)　$A=90°$ または $B=90°$ の直角三角形

解説

(1)　△ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これらを等式に代入すると　$b\cdot\dfrac{b}{2R}=c\cdot\dfrac{c}{2R}$

両辺に $2R$ を掛けて　$b^2=c^2$　　$b>0$，$c>0$ であるから　$b=c$

よって，△ABC は $b=c$ の二等辺三角形である。

(2)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを等式に代入すると　$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

両辺に $2abc$ を掛けて　$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

整理して　$a^4-2a^2b^2+b^4-c^4=0$

よって　$(a^2-b^2)^2-(c^2)^2=0$

ゆえに　$(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$

したがって　$a^2-b^2-c^2=0$　または　$a^2-b^2+c^2=0$

すなわち　$a^2=b^2+c^2$　または　$a^2+c^2=b^2$

よって，△ABC は $A=90°$ または $B=90°$ の直角三角形である。

1

解答　(1)　$a=10\sqrt{3}$　　(2)　$b=6\sqrt{6}$　　(3)　$A=30°$　　(4)　$B=30°$，150°

(5)　$R=5$

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 120°}=2\cdot 10$

よって　$a=2\cdot 10\sin 120°=2\cdot 10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

(2)　$A=180°-(60°+75°)=45°$

正弦定理により　$\dfrac{12}{\sin 45°}=\dfrac{b}{\sin 60°}$

よって　$b=12\cdot\sin 60°\cdot\dfrac{1}{\sin 45°}=12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{6}$

(3)　正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120°}$

よって　$\sin A=\dfrac{\sin 120°}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$C=120°$ より $0°<A<60°$ であるから　$A=30°$

(4)　正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin B}=2\cdot 5$

よって　$\sin B=\dfrac{5}{2\cdot 5}=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$B=30°$，150°

(5)　$C=180°-(50°+100°)=30°$

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin 30°}=2R$　　よって　$R=\dfrac{5}{2\sin 30°}=5$

2

解答　(1)　$b=2\sqrt{7}$　　(2)　$a=5$　　(3)　$A=60°$　　(4)　$C=45°$

解説

(1)　余弦定理により

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 60°=28$$

$b>0$ であるから　$b=2\sqrt{7}$

(2)　余弦定理により

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=(2\sqrt{2}-1)^2+(2\sqrt{2}+1)^2-2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot(2\sqrt{2}+1)\cos 120°$$
$$=(9-4\sqrt{2})+(9+4\sqrt{2})+7=25$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{25}=5$

(3)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 15}$$
$$=\frac{105}{2\cdot 7\cdot 15}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60°$

(4)　余弦定理により

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$C=45°$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a=\sqrt{3}\pm1$　　(2)　$c=2+2\sqrt{3}$

解説

(1)　余弦定理により $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ であるから

$$(\sqrt{2})^2=2^2+a^2-2\cdot2\cdot a\cos30°$$

よって　$a^2-2\sqrt{3}\,a+2=0$

これを解いて　$a=\sqrt{3}\pm1$

(2)　余弦定理により $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ であるから

$$(2\sqrt{6})^2=4^2+c^2-2\cdot4\cdot c\cos60°$$

よって　$c^2-4c-8=0$

これを解いて　$c=2\pm2\sqrt{3}$

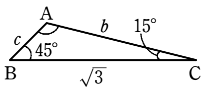
$c>0$ であるから　$c=2+2\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$A=120°$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　(2)　$a=\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=105°$

解説

(1)　$A=180°-(B+C)=120°$



正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin120°}=\dfrac{b}{\sin45°}$

よって　$b=\dfrac{\sqrt{3}\sin45°}{\sin120°}=\sqrt{2}$

余弦定理により　$(\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+c^2-2\sqrt{2}\,c\cos120°$

$c^2+\sqrt{2}\,c-1=0$ を解いて　$c=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

$c>0$ であるから　$c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

別解　(後半)　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ を用いると，$c^2-\sqrt{6}\,c+1=0$ から

$c=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$　　$B>C$ であるから　$b>c$

よって　$c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(2)　余弦定理により　$a^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot2(\sqrt{3}+1)\cos30°$

$$=4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=2$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{2}$

余弦定理により

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=45°$

よって　$C=180°-(A+B)=105°$

別解　(後半)　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ を用いると　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$B=45°，135°$

$a<b<c$ であるから，$\angle$C が最大角。

よって　$B=45°$

$\boxed{5}$

解答　$C=135°$

解説

正弦定理により　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって　$a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$

ゆえに，$a=k$，$b=\sqrt{2}\,k$，$c=\sqrt{5}\,k$ $(k>0)$ とおける。

よって，辺 AB が最大辺で，$\angle$C が最大の角である。

余弦定理により　$\cos C=\dfrac{k^2+(\sqrt{2}\,k)^2-(\sqrt{5}\,k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{2}\,k}=\dfrac{-2k^2}{2\sqrt{2}\,k^2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，最大の角の大きさは　$C=135°$

$\boxed{6}$

解答　(1)　BC＝CA の二等辺三角形　(2)　$A=90°$ の直角三角形　(3)　正三角形

(4)　$\angle$B＝90° または $\angle$C＝90° の直角三角形

解説

△ABC の外接円の半径を R とする。

(1)　正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

これらを等式 $a\sin A=b\sin B$ に代入して　$a\cdot\dfrac{a}{2R}=b\cdot\dfrac{b}{2R}$

両辺に $2R$ を掛けて　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

よって，△ABC は　BC＝CA の二等辺三角形

(2)　△ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これらを等式に代入すると　$\left(\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}\right)(b+c-a)=2c\cdot\dfrac{b}{2R}$

よって　$(a+b+c)(b+c-a)=2bc$

ゆえに　$b^2+2bc+c^2-a^2=2bc$　　したがって　$b^2+c^2=a^2$

よって，△ABC は $A=90°$ の直角三角形である。

(3)　等式から　$\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}$ …… ①，$\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$ …… ②

余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを ①，② に代入すると

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{b}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\quad\cdots\cdots ①'$$

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\quad\cdots\cdots ②'$$

①′ から　$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2$　　整理すると　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$ …… ③

②′ から　$c^2+a^2-b^2=a^2+b^2-c^2$　　整理すると　$b^2=c^2$

$b>0$，$c>0$ であるから　$b=c$ …… ④

③，④ から　$a=b=c$　　　よって，△ABC は　正三角形

(4)　正弦定理，余弦定理により

$$\frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{c}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $4Rabc$ を掛けて

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)$$

ゆえに　$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+b^2a^2-b^4+c^2a^2+c^2b^2-c^4$

整理すると　$a^4-b^4+2b^2c^2-c^4=0$

したがって　$a^4-(b^2-c^2)^2=0$

よって　$\{a^2+(b^2-c^2)\}\{a^2-(b^2-c^2)\}=0$

ゆえに　$a^2+b^2=c^2$　または　$a^2+c^2=b^2$

したがって，△ABC は　$\angle$B＝90°　または　$\angle$C＝90° の直角三角形

1

解答　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$，$C=105°$ または $c=\sqrt{3}-1$，$B=135°$，$C=15°$

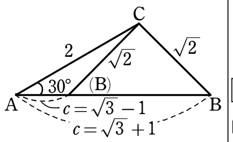
解説

余弦定理により　$(\sqrt{2})^2=2^2+c^2-2\cdot 2c\cos 30°$

よって　$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$　　したがって　$c=\sqrt{3}\pm 1$

[1]　$c=\sqrt{3}+1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



ゆえに　$B=45°$

よって　$C=180°-(30°+45°)=105°$

[2]　$c=\sqrt{3}-1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=135°$　　よって　$C=180°-(30°+135°)=15°$

以上から　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45°$，$C=105°$

または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=135°$，$C=15°$

別解　正弦定理から　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}$　　ゆえに　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=30°$ より，$0°<B<150°$ であるから　$B=45°$，$135°$

[1]　$B=45°$ のとき

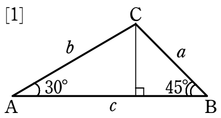
$C=180°-(30°+45°)=105°$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 45°$

$=\sqrt{3}+1$

[1]



[2]　$B=135°$ のとき

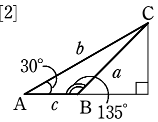
$C=180°-(30°+135°)=15°$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 135°$

$=\sqrt{3}-1$

[2]



2

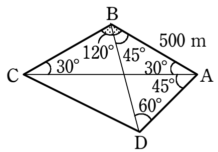
解答　$AC=500\sqrt{3}$ (m)，$AD=\dfrac{500\sqrt{6}}{3}$ (m)，$DC=\dfrac{500\sqrt{15}}{3}$ (m)

解説

$\angle ABC=180°-2\times 30°=120°$

△ABC において，正弦定理により

$$\frac{AC}{\sin 120°}=\frac{500}{\sin 30°}$$



よって　$AC=\dfrac{500}{\sin 30°}\cdot\sin 120°$

$$=500\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=500\sqrt{3}\ \text{(m)}$$

次に，△ABD において，正弦定理により　$\dfrac{AD}{\sin 45°}=\dfrac{500}{\sin 60°}$

よって　$AD=\dfrac{500}{\sin 60°}\cdot\sin 45°=500\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{500\sqrt{6}}{3}$ (m)

また　$\angle CAD=180°-(60°+45°+30°)=45°$

よって，△ACD において，余弦定理により

$$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos 45°$$

$$=(500\sqrt{3})^2+\left(\frac{500\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\cdot 500\sqrt{3}\cdot\frac{500\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=500^2\left(3+\frac{2}{3}-2\right)=500^2\cdot\frac{5}{3}$$

$DC>0$ であるから　$DC=\sqrt{500^2\cdot\dfrac{5}{3}}=\dfrac{500\sqrt{15}}{3}$ (m)

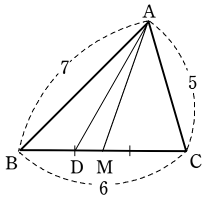
3

解答　$AM=2\sqrt{7}$，$AD=\sqrt{33}$

解説

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{5}{7}$$



また　$BM=3$，$BD=2$

△ABM において，余弦定理により

$$AM^2=7^2+3^2-2\cdot 7\cdot 3\cdot\frac{5}{7}=28$$

$AM>0$ であるから　$AM=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

△ABD において，余弦定理により

$$AD^2=7^2+2^2-2\cdot 7\cdot 2\cdot\frac{5}{7}=33$$

$AD>0$ であるから　$AD=\sqrt{33}$

4

解答　(1)　$2\sqrt{7}$　　(2)　4

解説

(1)　△ABC において，余弦定理により

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 60°$$

$$=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=36+16-24=28$$

$AC>0$ であるから　$AC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ABC+\angle ADC=180°$

よって　$\angle ADC=180°-\angle ABC=180°-60°=120°$

(1) から　$AC=2\sqrt{7}$

△ADC において，余弦定理により

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos 120°$

よって　$(2\sqrt{7})^2=AD^2+2^2-2\cdot AD\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

整理すると　$AD^2+2AD-24=0$

$(AD+6)(AD-4)=0$

$AD>0$ であるから　$AD=4$

5

解答　(1)　150°　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

解説

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ から　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

条件から　$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{7}:\sqrt{3}:1$

よって　$a:b:c=\sqrt{7}:\sqrt{3}:1$

ゆえに，$a=\sqrt{7}k$，$b=\sqrt{3}k$，$c=k$ $(k>0)$ とおける。

よって，a が最大の辺であるから，∠A が最大の角である。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}k)^2+k^2-(\sqrt{7}k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot k}=\dfrac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，最大の角の大きさは　$A=150°$

(2)　(1) から，2 番目に大きい角は　∠B

余弦定理により　$\cos B=\dfrac{k^2+(\sqrt{7}k)^2-(\sqrt{3}k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{7}k}=\dfrac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

$1+\tan^2 B=\dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B=\frac{1}{\cos^2 B}-1=\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-1=\frac{28}{25}-1=\frac{3}{25}$$

$A>90°$ より $B<90°$ であるから　$\tan B>0$

したがって　$\tan B=\sqrt{\dfrac{3}{25}}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　△ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって　　左辺$=c\left\{\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2\right\}=\dfrac{c(a^2+b^2)}{4R^2}$

右辺$=\left(a\cdot\dfrac{a}{2R}+b\cdot\dfrac{b}{2R}\right)\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{c(a^2+b^2)}{4R^2}$

したがって　左辺＝右辺

(2)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

よって　左辺$=2\left(bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$=(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)=a^2+b^2+c^2$

したがって　左辺＝右辺

1

解答　120°

解説

$x>1$ のとき　$x^2+x+1-(x^2-1)=x+2>0$

$x^2+x+1-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$

よって，3 辺の長さを x^2-1，$2x+1$，x^2+x+1 とする三角形が存在するための条件は

$x^2+x+1<(x^2-1)+(2x+1)$

整理すると　$x>1$

したがって，$x>1$ のとき三角形が存在する。

また，長さが x^2+x+1 である辺が最大の辺であるから，この辺に対する角が最大の内角である。

この角を θ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{x^4-2x^2+1+4x^2+4x+1-(x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2)}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(x^2-1)(2x+1)}=-\frac{2x^3+x^2-2x-1}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=-\frac{(x^2-1)(2x+1)}{2(x^2-1)(2x+1)}=-\frac{1}{2}$$

したがって　$\theta=120°$

2

解答　(ア) $\frac{6}{7}<a<2$　(イ) $\frac{3}{2}$

解説

(ア)　三角形の成立条件から

BC＋CA＞AB，CA＋AB＞BC，AB＋BC＞CA

よって

$a+(3a-2)>5a-4$，$(3a-2)+(5a-4)>a$，$(5a-4)+a>3a-2$

それぞれを解くと　$a<2$，$a>\frac{6}{7}$，$a>\frac{2}{3}$

これらの共通範囲を求めて　${}^{ア}\frac{6}{7}<a<2$　……①

(イ)　正弦定理から　$\frac{5a-4}{\sin C}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(5a-4)$

よって　$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$C=60°$ または $120°$

[1]　$C=60°$ のとき，余弦定理から

$(5a-4)^2=a^2+(3a-2)^2-2a(3a-2)\cos 60°$

整理すると　$18a^2-30a+12=0$

$6(a-1)(3a-2)=0$

① を満たすのは　$a=1$

このとき，AB＝BC＝CA＝1 であるから，△ABC は正三角形となり不適。

[2]　$C=120°$ のとき，余弦定理から

$(5a-4)^2=a^2+(3a-2)^2-2a(3a-2)\cos 120°$

整理すると　$12a^2-26a+12=0$

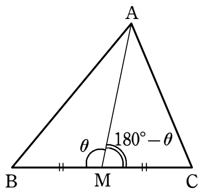
$2(2a-3)(3a-2)=0$

① を満たすのは　$a={}^{イ}\frac{3}{2}$

3

解答　(1) 略　(2) AM＝7

解説



(1)　∠AMB＝θ とすると　∠AMC＝$180°-\theta$

△AMB において，余弦定理により

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\theta$　……①

△AMC において，余弦定理により

$AC^2=AM^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos(180°-\theta)$

CM＝BM，$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ であるから

$AC^2=AM^2+BM^2+2AM\cdot BM\cos\theta$　……②

①＋② から　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(2)　AB＝9，AC＝7，BM＝4 を (1) で証明した等式に代入すると

$9^2+7^2=2(AM^2+4^2)$　　よって　$AM^2=49$

AM＞0 であるから　AM＝7

1

解答　(1) $S=\frac{35}{2}$　(2) $S=6\sqrt{11}$

解説

(1)　$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot10\cdot7\sin 150°=\frac{1}{2}\cdot10\cdot7\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{2}$

(2)　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot9\cdot8}=\frac{120}{2\cdot9\cdot8}=\frac{5}{6}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{6}$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot9\cdot8\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$

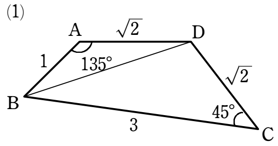
別解　ヘロンの公式を用いると，$s=\frac{5+9+8}{2}=11$ であるから

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{11\cdot6\cdot2\cdot3}=6\sqrt{11}$

2

解答　(1) 2　(2) $\frac{15\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{6}$

解説

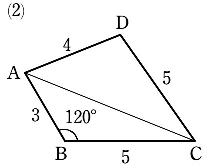


(1)　四角形 ABCD の面積を S とすると

$S=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{2}\sin 135°+\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\sin 45°$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$



(2)　△ABC に余弦定理を適用して

$AC^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos 120°=49$

△ACD に余弦定理を適用して

$\cos D=\frac{5^2+4^2-49}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5}$

$\sin D>0$ であるから　$\sin D=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって，四角形 ABCD の面積 S は

$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin 120°+\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{15\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{6}$

3

解答　(ア) $\frac{5}{7}$　(イ) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$　(ウ) $4\sqrt{6}$　(エ) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$　(オ) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説

余弦定理により　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+4^2-5^2}{2\cdot7\cdot4}=\frac{40}{2\cdot7\cdot4}={}^{ア}\frac{5}{7}$

$0°<A<180°$ であるから　$\sin A>0$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{49}}={}^{イ}\frac{2\sqrt{6}}{7}$

ゆえに　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot7\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}={}^{ウ}4\sqrt{6}$

さらに，正弦定理により　$\frac{a}{\sin A}=2R$

したがって　$R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}}=\dfrac{35}{4\sqrt{6}}\overset{\text{エ}}{=}\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

また，$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ と表されるから　$4\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}r(5+7+4)$

よって　$r=\dfrac{4\sqrt{6}}{8}\overset{\text{オ}}{=}\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

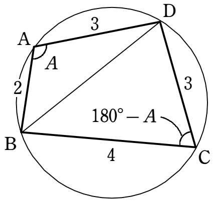
$\boxed{4}$

解答　(1)　$\sqrt{17}$　　(2)　$6\sqrt{2}$

解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$C=180^\circ-A$$



△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos A$$
$$=13-12\cos A\quad\cdots\cdots①$$

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos(180^\circ-A)$$
$$=25+24\cos A\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　　$13-12\cos A=25+24\cos A$

整理して　　$36\cos A=-12$　　　　よって　　$\cos A=-\dfrac{1}{3}$　$\cdots\cdots③$

これを ① に代入して　　$\mathrm{BD}^2=13-12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=17$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　　$\mathrm{BD}=\sqrt{17}$

(2)　$\sin A>0$ であるから，③ より

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　　$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin A+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sin C$$
$$=3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{3}{10}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{91}}{10}$　　(3)　$\dfrac{3\sqrt{91}}{2}$

解説

(1)　三平方の定理により　　$\mathrm{AF}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$

$\mathrm{CF}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$\mathrm{AC}=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{43}$

よって，△AFC において，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}=\frac{36+25-43}{2\cdot6\cdot5}=\frac{18}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{10}$$

(2)　$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{91}{100}}=\frac{\sqrt{91}}{10}$$

(3)　$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{91}}{10}=\dfrac{3\sqrt{91}}{2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$V=1$　　(2)　$S=\dfrac{7}{2}$　　(3)　$\dfrac{6}{7}$

解説

(1)　$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1=1$，$\mathrm{OA}=3$ であるから

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{3}\cdot1\cdot3=1$$

(2)　△OAB において，三平方の定理により　　$\mathrm{AB}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

同様に，△OBC において　　$\mathrm{BC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

△OCA において　　$\mathrm{CA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{13+10-5}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{130}}=\frac{7}{\sqrt{130}}$$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{130}}=\dfrac{7}{2}$

(3)　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}$ であるから　　$1=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{7}{2}\mathrm{OH}$　　　よって　$\mathrm{OH}=\dfrac{6}{7}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$14\sqrt{2}$　　(2)　$\sqrt{3}$　　(3)　$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$6\sqrt{10}$　　(5)　$\sqrt{5}$

解説

△ABC の面積を S とする。

(1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\sin45^\circ=14\sqrt{2}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{2}\sin150^\circ=\sqrt{3}$

(3)　$C=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}\sin45^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(4)　余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{6^2+7^2-11^2}{2\cdot6\cdot7}=\dfrac{-36}{2\cdot6\cdot7}=-\dfrac{3}{7}$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{40}{49}}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$

(5)　余弦定理により　　$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{8}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{2}{3}$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　7　　(2)　$-\dfrac{1}{5}$　　(3)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{6}$

解説

(1)　△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos120^\circ=49$$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　　$\mathrm{BD}=\sqrt{49}=7$

(2)　△BCD において，余弦定理により

$$\cos C=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot5\cdot4}=\frac{-8}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5}$$

(3)　$\sin C>0$ であるから

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{15\sqrt{3}}{4}+4\sqrt{6}$$

$\boxed{3}$

解答　(ア)　$\dfrac{3}{4}$　　(イ)　$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　(ウ)　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$　　(エ)　$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　(オ)　$\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

解説

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}={}^{ア}\dfrac{3}{4}$

$0°<A<180°$ であるから　$\sin A>0$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac34\right)^2}={}^{イ}\dfrac{\sqrt7}{4}$

ゆえに　$S=\dfrac12 bc\sin A=\dfrac12\cdot5\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt7}{4}={}^{ウ}\dfrac{15\sqrt7}{4}$

また，$S=\dfrac12 r(a+b+c)$ と表されるから　$\dfrac{15\sqrt7}{4}=\dfrac12 r(4+5+6)$

よって　$r={}^{エ}\dfrac{\sqrt7}{2}$

さらに，正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$

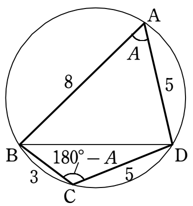
したがって　$R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\cdot\frac{\sqrt7}{4}}={}^{オ}\dfrac{8\sqrt7}{7}$

4

解答　$A=60°$，$BD=7$，$S=\dfrac{55\sqrt3}{4}$

解説

四角形 ABCD は円に内接するから　$C=180°-A$



△ABD において，余弦定理により

$BD^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos A$

$=89-80\cos A$　……①

△CDB において，余弦定理により

$BD^2=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cos(180°-A)$

$=34+30\cos A$　……②

①，②から　$89-80\cos A=34+30\cos A$

よって　$\cos A=\dfrac12$　……③

したがって　$A=60°$

①，③から　$BD^2=89-40=49$

$BD>0$ であるから　$BD=7$

また　$\sin A=\sin 60°=\dfrac{\sqrt3}{2}$

ゆえに　$\sin C=\sin(180°-A)=\sin A=\dfrac{\sqrt3}{2}$

したがって　$S=\triangle ABD+\triangle CDB$

$=\dfrac12\cdot8\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac12\cdot5\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}=\dfrac{55\sqrt3}{4}$

5

解答　(1) $\dfrac{8\sqrt5}{25}$　(2) $\dfrac{\sqrt{305}}{25}$　(3) $\sqrt{61}$

解説

(1) $AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt5$

$FC=\sqrt{FG^2+GC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$CA=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{AF^2+FC^2-CA^2}{2AF\cdot FC}=\dfrac{(2\sqrt5)^2+5^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot2\sqrt5\cdot5}=\dfrac{8\sqrt5}{25}$

(2) $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{8\sqrt5}{25}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{305}}{25}$

(3) $\triangle AFC=\dfrac12 AF\cdot FC\sin\theta=\dfrac12\cdot2\sqrt5\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{305}}{25}=\sqrt{61}$

6

解答　(1) $2\sqrt3$　(2) $\dfrac43$　(3) $2\sqrt5$　(4) $\dfrac{2\sqrt5}{5}$

解説

(1) △ADB において，三平方の定理により

$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt8=2\sqrt2$

△ADC において，三平方の定理により

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt5)^2-(2\sqrt2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt3$

(2) $\angle ADB=\angle ADC=90°$ から　$AD\perp\triangle BCD$

△BCD において，余弦定理により

$\cos\angle DBC=\dfrac{BD^2+BC^2-CD^2}{2BD\cdot BC}=\dfrac{1^2+3^2-(2\sqrt3)^2}{2\cdot1\cdot3}=\dfrac{-2}{2\cdot1\cdot3}=-\dfrac13$

$\sin\angle DBC>0$ であるから

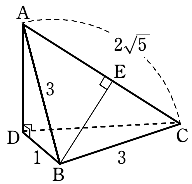
$\sin\angle DBC=\sqrt{1-\left(-\dfrac13\right)^2}=\sqrt{\dfrac89}=\dfrac{2\sqrt2}{3}$

よって　$\triangle BCD=\dfrac12 BD\cdot BC\sin\angle DBC=\dfrac12\cdot1\cdot3\cdot\dfrac{2\sqrt2}{3}=\sqrt2$

したがって，四面体 ABCD の体積を V とすると

$V=\dfrac13\triangle BCD\cdot AD=\dfrac13\cdot\sqrt2\cdot2\sqrt2=\dfrac43$

(3) △ABC は AB＝BC の二等辺三角形であるから，



B から辺 AC に下ろした垂線を BE とすると

$AE=CE=\sqrt5$

よって，三平方の定理により

$BE=\sqrt{3^2-(\sqrt5)^2}=\sqrt4=2$

ゆえに　$\triangle ABC=\dfrac12 AC\cdot BE=\dfrac12\cdot2\sqrt5\cdot2=2\sqrt5$

別解　$\angle ABC=\theta$ とおく。

△ABC において，余弦定理により

$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt5)^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{-2}{2\cdot3\cdot3}=-\dfrac19$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac19\right)^2}=\sqrt{\dfrac{80}{81}}=\dfrac{4\sqrt5}{9}$

よって　$\triangle ABC=\dfrac12\cdot3\cdot3\cdot\dfrac{4\sqrt5}{9}=2\sqrt5$

(4) $V=\dfrac13\triangle ABC\cdot DH$ であるから

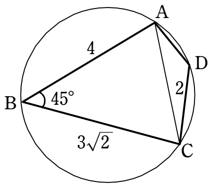
$\dfrac43=\dfrac13\cdot2\sqrt5\cdot DH$　　よって　$DH=\dfrac{2\sqrt5}{5}$

1

解答　(1) $\sqrt{10}$　(2) $\sqrt2$　(3) 7

解説

(1) △ABC に余弦定理を適用して



$AC^2=4^2+(3\sqrt2)^2-2\cdot4\cdot3\sqrt2\cos45°=10$

$AC>0$ であるから　$AC=\sqrt{10}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle D=180°-\angle B=135°$

したがって　△ACD に余弦定理を適用して

$(\sqrt{10})^2=AD^2+2^2-2\cdot AD\cdot2\cos135°$

よって　$AD^2+2\sqrt2AD-6=(AD-\sqrt2)(AD+3\sqrt2)=0$

$AD>0$ であるから　$AD=\sqrt2$

(3) 四角形 ABCD の面積を S とする。

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

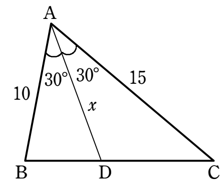
$=\dfrac12\cdot4\cdot3\sqrt2\sin45°+\dfrac12\cdot2\cdot\sqrt2\sin135°=7$

2

解答　$6\sqrt3$

解説

$AD=x$ とおく。



$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$ であるから

$\dfrac12\cdot10\cdot15\sin60°=\dfrac12\cdot10\cdot x\sin30°+\dfrac12\cdot15\cdot x\sin30°$

よって　$\dfrac{75\sqrt3}{2}=\dfrac52x+\dfrac{15}{4}x$

これを解くと　$x=6\sqrt3$

したがって　$AD=6\sqrt3$

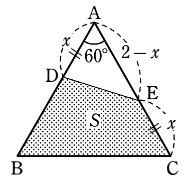
3

解答　(1) AD＝1 のとき最小値 1　(2) AD＝1 のとき最小値 $\dfrac{3\sqrt3}{4}$

解説

$AD=CE=x$ とすると　$0<x<2$　……①

(1) △ADE において，余弦定理により



$DE^2=x^2+(2-x)^2-2x(2-x)\cos60°$

$=x^2+4-4x+x^2-2x+x^2$

$=3x^2-6x+4$

$=3(x-1)^2+1$

①の範囲において，DE^2 は $x=1$ のとき最小値 1 をとる。

$DE>0$ であるから，DE は AD＝1 のとき最小値 1 をとる。

(2) $S=\triangle ABC-\triangle ADE$

$=\dfrac{\sqrt3}{4}\cdot2^2-\dfrac12x(2-x)\sin60°=\dfrac{\sqrt3}{4}\{4-x(2-x)\}$

$=\dfrac{\sqrt3}{4}(x^2-2x+4)=\dfrac{\sqrt3}{4}\{(x-1)^2+3\}$

①の範囲において，S は AD＝1 のとき最小値 $\dfrac{3\sqrt3}{4}$ をとる。

4

解答　(ア)　$-\dfrac{1}{2}$　　(イ)　28　　(ウ)　12π

解説

(1)　外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{2R},\quad \sin B=\frac{\mathrm{CA}}{2R},\quad \sin C=\frac{\mathrm{AB}}{2R}$$

$\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$ より　$\dfrac{\mathrm{BC}}{2R}:\dfrac{\mathrm{CA}}{2R}:\dfrac{\mathrm{AB}}{2R}=7:5:3$

ゆえに　BC：CA：AB＝7：5：3

したがって，最大の辺は BC であるから，最大の角 θ は A である。

BC＝$7k$，CA＝$5k$，AB＝$3k$　($k>0$) とおくと，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=\frac{-15k^2}{30k^2}=\ ^{ア}-\frac{1}{2}$$

(2)　(1) より　$\theta=A=120^\circ$

よって，三角形 ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5k\cdot 3k\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}k^2$

ゆえに　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}k^2=60\sqrt{3}$　　　よって　$k^2=16$

$k>0$ であるから　$k=4$　　　したがって　BC＝$7k=\ ^{イ}28$

三角形 ABC の内接円の半径を r とすると　$\dfrac{1}{2}r(7\cdot 4+5\cdot 4+3\cdot 4)=60\sqrt{3}$

よって　$r=2\sqrt{3}$

ゆえに，内接円の面積は　$\pi\cdot(2\sqrt{3})^2=\ ^{ウ}12\pi$

5

解答　(ア)　$\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{3}$　　(イ)　$\dfrac{5\sqrt{3}}{36}$

解説

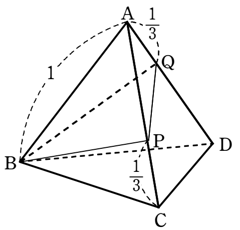
△BCP において，余弦定理により

$$\mathrm{BP}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CP}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CP}\cos\angle\mathrm{BCP}$$

すなわち

$$\mathrm{BP}^2=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cos 60^\circ$$
$$=1+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}$$

BP＞0 であるから　$\mathrm{BP}=\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$



△BCP と △BAQ は合同な三角形であるから　$\mathrm{BQ}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

△APQ において，余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{PAQ}$$

すなわち　$\mathrm{PQ}^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cos 60^\circ$

$$=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{9}$$

PQ＞0 であるから　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\dfrac{3}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，△BPQ の周の長さは

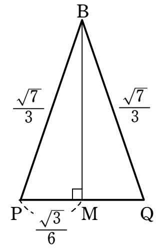
$$\mathrm{BP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QB}=\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}=\ ^{ア}\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{3}$$

また，線分 PQ の中点を M とすると

$$\mathrm{PM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

△BPQ は BP＝BQ の二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{BMP}=90^\circ$$



ゆえに　$\mathrm{BM}=\sqrt{\mathrm{BP}^2-\mathrm{PM}^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

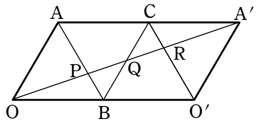
したがって，△BPQ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{5}{6}=\ ^{イ}\dfrac{5\sqrt{3}}{36}$

6

解答　$\sqrt{7}\,a$

解説

右図のような展開図を考えると，四角形 AOO′A′ は平行四辺形であり，求める最短経路の長さは図の線分 OA′ の長さである。



△OAA′ で　OA＝a，AA′＝$2a$，

∠OAA′＝2・60°＝120° であるから，余弦定理により

$$\mathrm{OA}'^2=\mathrm{AA}'^2+\mathrm{OA}^2-2\mathrm{AA}'\cdot\mathrm{OA}\cos 120^\circ$$
$$=(2a)^2+a^2-2\cdot 2a\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7a^2$$

$a>0$，OA′＞0 であるから　　$\mathrm{OA}'=\sqrt{7}\,a$

よって，求める最短経路の長さは　　$\sqrt{7}\,a$

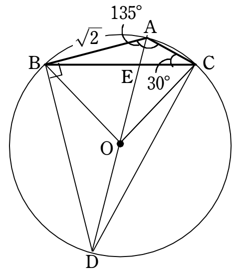
1

解答　(ア)　$2\sqrt{2}$　　(イ)　2　　(ウ)　$\sqrt{6}$　　(エ)　$-1+\sqrt{3}$

(オ)　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　(カ)　2

解説

AD は円の直径であるから，外接円 O の半径を R とすると　　AD＝$2R$



△ABC において，正弦定理により

$$2R=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\sqrt{2}\div\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$$

ゆえに　　AD＝$^{ア}2\sqrt{2}$

また，△ABC において，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 135^\circ}=2R$$

よって　　$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\ ^{イ}2$

∠ABD＝90° であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\ ^{ウ}\sqrt{6}$$

△ABC において，余弦定理により

$$2^2=\mathrm{AC}^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\mathrm{AC}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ$$

すなわち　　$4=\mathrm{AC}^2+2-2\sqrt{2}\,\mathrm{AC}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって　　$\mathrm{AC}^2+2\mathrm{AC}-2=0$

これを解くと　　AC＝$-1\pm\sqrt{3}$

AC＞0 であるから　　AC＝$^{エ}-1+\sqrt{3}$

ゆえに，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(-1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ここで，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-135^\circ\times 2=90^\circ$$

よって，△OBC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$$

ゆえに，四角形 ABOC の面積 S_1 は

$$S_1=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{OBC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1=\ ^{オ}\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

辺 BC と線分 AD の交点を E とする。

△ABC，△OBC，△DBC の底辺を BC と考えると

△ABC：△OBC：△DBC＝AE：OE：DE

よって　　$S_1:S_2=(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{OBC}):(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{DBC})$

$=(\mathrm{AE}+\mathrm{OE}):(\mathrm{AE}+\mathrm{DE})=\mathrm{AO}:\mathrm{AD}=\sqrt{2}:2\sqrt{2}$

$=1:2$

したがって　　$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{2}{1}=\ ^{カ}2$

別解　$\left(\dfrac{S_2}{S_1}\text{ の値}\right)$

$\angle \mathrm{ACD}=90^\circ$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{CD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(-1+\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{8-(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

よって　$S_2=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+\frac{1}{2}\cdot(-1+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})=\sqrt{3}+1$$

したがって　$\frac{S_2}{S_1}=(\sqrt{3}+1)\div\frac{\sqrt{3}+1}{2}={}^{\text{カ}}2$

2

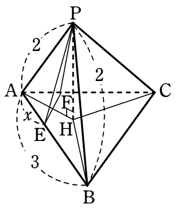
解答　(1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　(2) $\mathrm{AE}=\frac{\sqrt{33}-3}{3}$

解説

(1) 点 P から正三角形 ABC に垂線 PH を引く．

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$ から　$\mathrm{HA}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}$

よって，点 H は △ABC の外心である．



ゆえに　$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin 60^\circ}=\frac{3}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

したがって　$\mathrm{PH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

ゆえに，求める体積は　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3^2\times\sin 60^\circ\times 1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$，$\angle\mathrm{EAF}=60^\circ$ から　$\mathrm{EF}=\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$

また　$\mathrm{PE}=\mathrm{PF}$

$\mathrm{AE}=x\ (0<x<3)$ とおく．

余弦定理から　$\cos\angle\mathrm{PAB}=\frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{2^2+3^2-2^2}{2\times 2\times 3}=\frac{3}{4}$

よって　$\mathrm{PE}^2=\mathrm{PF}^2=4+x^2-2\times 2\times x\times\cos\angle\mathrm{PAB}$

$$=4+x^2-4x\times\frac{3}{4}=x^2-3x+4$$

このとき　$\cos\angle\mathrm{EPF}=\frac{\mathrm{PE}^2+\mathrm{PF}^2-\mathrm{EF}^2}{2\cdot\mathrm{PE}\cdot\mathrm{PF}}=\frac{2(x^2-3x+4)-x^2}{2(x^2-3x+4)}$

ゆえに　$\frac{2(x^2-3x+4)-x^2}{2(x^2-3x+4)}=\frac{4}{5}$

よって　$8(x^2-3x+4)=10(x^2-3x+4)-5x^2$

したがって　$3x^2+6x-8=0$

$0<x<3$ から　$x=\frac{-3+\sqrt{33}}{3}$

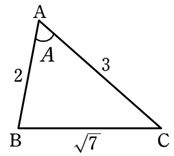
ゆえに　$\mathrm{AE}=\frac{\sqrt{33}-3}{3}$

3

解答　$\frac{\sqrt{41}}{2}$

解説

△ABC において，余弦定理により



$$\cos A=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ<A<180^\circ$ であるから　$A=60^\circ$

よって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

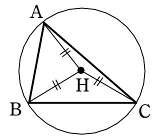
D から △ABC を含む平面に下ろした垂線を DH とし，$\mathrm{DH}=h$ とする。

直角三角形 DAH，DBH，DCH は，斜辺が等しく，DH が共通であるから

$$\triangle\mathrm{DAH}\equiv\triangle\mathrm{DBH}\equiv\triangle\mathrm{DCH}$$

ゆえに　$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}$

したがって，H は △ABC の外接円の中心である。



△ABC において，正弦定理により　$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2\mathrm{AH}$

よって　$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

$h^2+\mathrm{AH}^2=4^2$ であるから

$$h=\sqrt{4^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{16-\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{41}{3}}$$

したがって　$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{41}{3}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

1

解答 $\dfrac{5}{2}$

解説

$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ から (与式)$=\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

別解 $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$, $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$ から

(与式)$=(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

2

解答 (1) $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$，$\cos\theta = -\dfrac{2}{5}$，$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

解説

(1) 等式 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

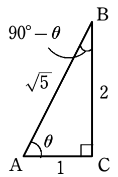
ここで，θ は鋭角であるから　$\cos\theta > 0$

よって　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに　$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また　$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{2}$

別解　右の図のような，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CA}=1$，$\angle\mathrm{B} = 90^\circ - \theta$，$\angle\mathrm{C} = 90^\circ$ の直角三角形ABCを考えると



$\mathrm{AB} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

よって　$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}$

(2) 等式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ から

$$\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{2}{5}$$

等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\sin\theta \geqq 0$

よって　$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \div \left(-\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

3

解答 (1) $\dfrac{52}{9}$　(2) $4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{4}$

解説

(1) $4\cos x + 5\sin^2 x = a$ から

$$4\cos x + 5(1 - \cos^2 x) = a$$

よって　$-5\cos^2 x + 4\cos x + 5 = a$

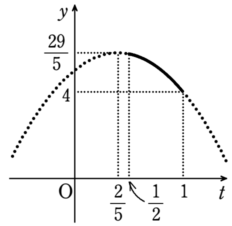
したがって，$\cos x = \dfrac{1}{3}$ となるとき　$a = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{1}{3} + 5 = \dfrac{52}{9}$

(2) $\cos x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 60^\circ$ のとき $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ であり，x の値と t の値は1対1に対応する。

このとき，方程式は　$-5t^2 + 4t + 5 = a$

よって，$y = -5t^2 + 4t + 5$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ ……① のグラフと直線 $y = a$ が共有点をただ1つもつような a の範囲が求めるものである。

$-5t^2 + 4t + 5 = -5\left(t - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{29}{5}$ より，①のグラフは右の図の実線部分である。



また，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$y = \dfrac{23}{4}$

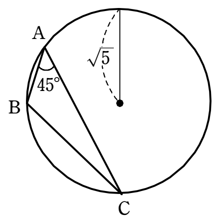
よって，求める a の範囲は　$4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{4}$

4

解答 $\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = \sqrt{10}$，$\mathrm{CA} = 4$

解説

△ABCの外接円の半径が $\sqrt{5}$ であるから，△ABCにおいて正弦定理により



$$2\sqrt{5} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{BCA}} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}}$$

よって　$\mathrm{AB} = 2\sqrt{5}\sin\angle\mathrm{BCA} = 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$，

$\mathrm{BC} = 2\sqrt{5}\sin\angle\mathrm{CAB} = 2\sqrt{5}\sin 45^\circ$

$= 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$

また，△ABCにおいて余弦定理により　$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos 45^\circ$

すなわち　$(\sqrt{10})^2 = \mathrm{CA}^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

整理すると　$\mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{CA} - 8 = 0$　　よって　$(\mathrm{CA}+2)(\mathrm{CA}-4) = 0$

$\mathrm{CA} > 0$ であるから　$\mathrm{CA} = 4$

5

解答 (1) $b=2$，$A=30^\circ$，$C=105^\circ$　(2) $a=3\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=15^\circ$

(3) $b = \dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$，$c = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，$A = 45^\circ$

(4) $b = 4(\sqrt{3}+1)$，$c = 4\sqrt{2}$，$B = 105^\circ$

(5) $A=30^\circ$，$B=60^\circ$，$C=90^\circ$　(6) $A=30^\circ$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$

解説

(1) 余弦定理により　$b^2 = (1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ = 4$

$b > 0$ であるから　$b = \sqrt{4} = 2$

余弦定理により　$\cos A = \dfrac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$A = 30^\circ$

よって　$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

参考　b を求めた後で A を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A} = \dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin A = \dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2} = \dfrac{1}{2}$

ここで，$\sqrt{2} < 2$ より $a < b$ であるから，$A < B$ である。ゆえに，A は鋭角であるから

$A = 30^\circ$

以下同様。

(2) 余弦定理により　$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cos 120^\circ = 18$

$a > 0$ であるから　$a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{(3-\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$B = 45^\circ$

よって　$C = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

参考　a を求めた後で B を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$

よって　$\sin B = \dfrac{2\sqrt{3}\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 120^\circ$ より B は鋭角であるから　$B = 45^\circ$

以下同様。

(3) $A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin 45^\circ} = \dfrac{b}{\sin 75^\circ} = \dfrac{c}{\sin 60^\circ}$

よって　$b = \dfrac{5\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$

$c = \dfrac{5\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(4) $B = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{8}{\sin 45^\circ} = \dfrac{b}{\sin 105^\circ} = \dfrac{c}{\sin 30^\circ}$

よって　$b = \dfrac{8\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{8\sin(180^\circ - 75^\circ)}{\sin 45^\circ} = \dfrac{8\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 8\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}$

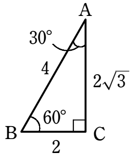
$= 4(\sqrt{3}+1)$

$c = \dfrac{8\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(5) 余弦定理により　$\cos A = \dfrac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$A = 30^\circ$

$\cos B=\dfrac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot4\cdot2}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$B=60°$

ゆえに　$C=180°-(30°+60°)=90°$



別解　$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ から　$A=30°$，$B=60°$，$C=90°$

(6)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\cdot2(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot2(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$A=30°$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=135°$　　ゆえに　$C=180°-(30°+135°)=15°$

6

解答　(1) 15°　(2) $\sqrt{2}$　(3) $\sqrt{5}$

解説

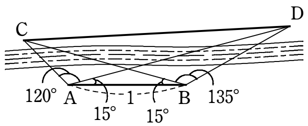
(1)　$\angle BDA=180°-(\angle BAD+\angle ABD)$

$=180°-\angle BAD$

$\quad-(\angle ABC+\angle CBD)$

$=180°-15°-(15°+135°)$

$=15°$



(2)　$\angle ACB=180°-(\angle BAC+\angle ABC)$

$=180°-(\angle BAD+\angle DAC)-\angle ABC=180°-(15°+120°)-15°=30°$

よって，△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin30°}=\dfrac{BC}{\sin135°}$

したがって　$BC=\dfrac{\sin135°}{\sin30°}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$

(3)　(1) より，△ABD は二等辺三角形であるから　$BD=AB=1$

△BCD において，余弦定理により

$$CD^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cos135°=2+1-2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5$$

$CD>0$ であるから　$CD=\sqrt{5}$

7

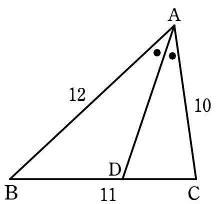
解答　$3\sqrt{10}$

解説

AD は ∠A の二等分線であるから

$BD:DC=AB:AC=12:10=6:5$

よって　$BD=\dfrac{6}{6+5}BC=\dfrac{6}{11}\cdot11=6$



△ABD において，余弦定理により

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$　……①

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot12\cdot11}=\frac{165}{2\cdot12\cdot11}=\frac{5}{8}$$

① に代入して　$AD^2=12^2+6^2-2\cdot12\cdot6\cdot\dfrac{5}{8}=90$

$AD>0$ であるから　$AD=3\sqrt{10}$

8

解答　(ア) $3\sqrt{5}$　(イ) $\dfrac{9\sqrt{55}}{11}$　(ウ) $\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$　(エ) $5\sqrt{5}$　(オ) $\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

解説

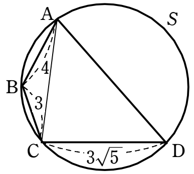
△ABC において，余弦定理から

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$

$=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)=45$

$AC>0$ であるから　$AC=\sqrt{45}={}^{ア}3\sqrt{5}$

円 S の半径を R とする。



△ABC において，正弦定理から　$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$

よって　$R=\dfrac{AC}{2\sin\angle ABC}$　……①

ここで，$\sin\angle ABC>0$ であるから

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

ゆえに，① から　$R=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{\sqrt{11}}={}^{イ}\dfrac{9\sqrt{55}}{11}$

四角形 ABCD は円 S に内接するから

$$\cos\angle ADC=\cos(180°-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=\frac{5}{6}$$

$AD=x$ とおくと，△ACD において，余弦定理から

$AC^2=x^2+CD^2-2\cdot x\cdot CD\cos\angle ADC$

すなわち　$45=x^2+(3\sqrt{5})^2-2x\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{5}{6}$

したがって　$x^2-5\sqrt{5}\,x=0$

$x(x-5\sqrt{5})=0$

$x>0$ であるから　$x=5\sqrt{5}$

すなわち　$AD={}^{エ}5\sqrt{5}$

また，△ACD において，正弦定理から　$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=2R$

よって　$\sin\angle ACD=\dfrac{AD}{2R}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot\dfrac{9\sqrt{55}}{11}}=\dfrac{55}{18\sqrt{11}}={}^{ウ}\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$

ゆえに　$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$

$={}^{オ}\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

9

解答　正三角形

解説

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これを $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-\sin B\sin C$ に代入して

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2-\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$$

両辺に $4R^2$ を掛けて　$a^2=b^2+c^2-bc$　……①

余弦定理から　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

これを $a\cos B=b\cos A$ に代入して

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

すなわち　$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

両辺に $2c$ を掛けて　$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

よって　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

$a=b$ を ① に代入して　$b^2=b^2+c^2-bc$

よって　$c(b-c)=0$　　$c>0$ であるから　$b=c$

したがって，$a=b=c$ であるから，△ABC は正三角形である。

10

解答　(1) $a>2$　(2) $2<a<4$　(3) 順に $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　$a-1<a<a+1$ であるから，三角形が存在するための条件は

$a-1+a>a+1$

これを解いて　$a>2$　……①

(2)　鈍角三角形となるための条件は　$(a+1)^2>(a-1)^2+a^2$

ゆえに　$a^2-4a<0$　　すなわち　$a(a-4)<0$

よって　$0<a<4$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$2<a<4$　……③

(3)　1 つの内角が 120° である三角形は鈍角三角形であり，最大の長さ $a+1$ の辺に対する角が鈍角である。

したがって，余弦定理により

$(a+1)^2=(a-1)^2+a^2-2a(a-1)\cos120°$

ゆえに　$(a+1)^2=(a-1)^2+a^2+a(a-1)$

よって　$2a^2-5a=0$　　すなわち　$a=0,\ \dfrac{5}{2}$

③ を満たすものは　$a=\dfrac{5}{2}$

このとき，三角形の 3 辺の長さは　$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{7}{2}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{\frac{7}{2}}{\sin120°}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

また，内接円の半径を r とすると，三角形の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sin120°=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)r$$

ゆえに　$\dfrac{15\sqrt{3}}{16}=\dfrac{15}{4}r$　　よって　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[11]

解答　(1)　$\dfrac{9\sqrt{13}}{65}$　　(2)　$\sqrt{61}$　　(3)　$\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

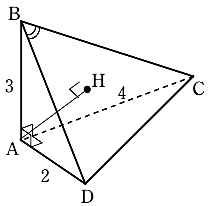
解説

(1)　直角三角形 ABC，ACD，ADB において，
三平方の定理により

$$BC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$$CD=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$DB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$



よって，△BCD において，余弦定理により

$$\cos\angle DBC=\frac{25+13-20}{2\cdot5\cdot\sqrt{13}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{65}$$

(2)　$0°<\angle DBC<180°$ であるから

$$\sin\angle DBC=\sqrt{1-\left(\frac{9}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\sqrt{\frac{244}{25\cdot13}}=\frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$$

よって　　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}=\sqrt{61}$

(3)　四面体 ABCD の底面を △BCD と考えると，四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot AH=\frac{\sqrt{61}}{3}AH$$

一方，△ACD を底面と考えると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ACD\cdot AB=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\right)\cdot3=4$$

よって，$\dfrac{\sqrt{61}}{3}AH=4$ から　　$AH=4\cdot\dfrac{3}{\sqrt{61}}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

[1]

解答　$90°<\theta<120°$

解説

判別式を D とし，$f(x)=x^2-(\cos\theta)x+\cos\theta$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-1<x<2$ の部分と，異なる 2 点で交わることである。

したがって，次の [1]～[4] が同時に成り立つ。

また，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$　……①

[1]　$D=(-\cos\theta)^2-4\cos\theta=\cos\theta(\cos\theta-4)>0$

常に $\cos\theta-4<0$ であるから　　$\cos\theta<0$　……②

[2]　放物線の軸は直線 $x=\dfrac{\cos\theta}{2}$ で，この軸について

$-1<\dfrac{\cos\theta}{2}<2$　すなわち　$-2<\cos\theta<4$

これは常に成り立つ。

[3]　$f(-1)>0$ から　　$1+2\cos\theta>0$

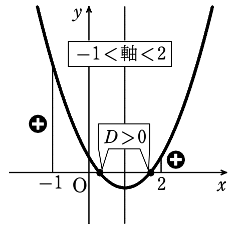
したがって　　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$　……③

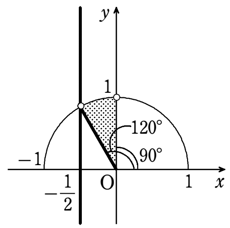
[4]　$f(2)>0$ から　　$4-\cos\theta>0$

これは常に成り立つ。

①，②，③の共通範囲を求めて　　$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　　$90°<\theta<120°$





[2]

解答　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，証明略

解説

$\begin{cases}\sin\alpha=2\cos\beta & \cdots\cdots① \\ \sin\beta=2\cos\alpha & \cdots\cdots②\end{cases}$ とする.

$0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$ から　$\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$

①，②から　$\cos\beta>0$，$\cos\alpha>0$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ であるから　$4\cos^2\alpha+\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha=1$

よって　$16\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=4$

ゆえに　$16(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=4$　　したがって　$\sin^2\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\alpha>0$ から　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また，$\cos\alpha>0$ から　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

したがって　$\cos\beta=\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=2\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに，$\sin\alpha=\sin\beta$，$\cos\alpha=\cos\beta$，$0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$ から　$\alpha=\beta$

[3]

解答　(1)　$\cos C=\dfrac{3t}{t+12}$　　(2)　$S=\sqrt{-2t^2+6t+36}$

(3)　$t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

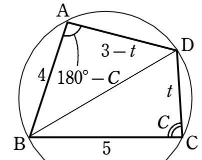
解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$A=180°-C$$

△ABD，△BCD において，それぞれ余弦定理により

$$BD^2=4^2+(3-t)^2-2\cdot4\cdot(3-t)\cos(180°-C)$$
$$=t^2-6t+25+8(3-t)\cos C$$
$$BD^2=5^2+t^2-2\cdot5\cdot t\cos C=t^2+25-10t\cos C$$



よって　　$t^2-6t+25+8(3-t)\cos C=t^2+25-10t\cos C$

整理して　　$2(t+12)\cos C=6t$

$0<t<3$ であるから　　$\cos C=\dfrac{3t}{t+12}$

(2)　$0°<C<180°$ より，$\sin C>0$ であるから

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{3t}{t+12}\right)^2}=\sqrt{\frac{(t+12)^2-9t^2}{(t+12)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{4(-2t^2+6t+36)}}{\sqrt{(t+12)^2}}=\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}$$

また　　$\sin A=\sin(180°-C)=\sin C$

したがって　　$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot4(3-t)\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot t\sin C$

$$=\frac{1}{2}(12+t)\sin C=\frac{1}{2}(12+t)\cdot\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}$$
$$=\sqrt{-2t^2+6t+36}$$

(3)　$S=\sqrt{-2t^2+6t+36}=\sqrt{-2(t^2-3t)+36}=\sqrt{-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{81}{2}}$ と変形できる。

$0<t<3$ の範囲において，$-2t^2+6t+36$ が最大となるとき S は最大となる。

よって，$0<t<3$ の範囲において，S は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{81}{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ をとる。

[4]

解答　(1)　$120°$　　(2)　$\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　円の中心を O とすると

△OAB≡△OCD≡△OEF
△OBC≡△ODE≡△OFA

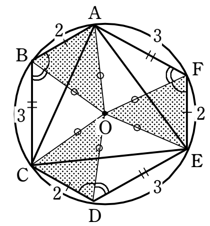
よって　　∠ABC＝∠CDE＝∠EFA

ゆえに　　△ABC≡△CDE≡△EFA　……①

よって，AC＝CE＝EA であり，△ACE は正三角形である。

四角形 ABCE は円に内接しているから

∠ABC＝180°－∠AEC＝180°－60°＝120°

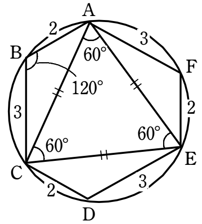


(2)　六角形 ABCDEF の面積を S とすると

$S=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{CDE}+\triangle \mathrm{EFA}+\triangle \mathrm{ACE}$

(1) から　$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\cdot\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$



ここで，① から

$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{CDE}=\triangle \mathrm{EFA}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

また，△ABC において余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ=13-12\left(-\frac{1}{2}\right)=19$

よって　$\mathrm{AC}=\sqrt{19}$

△ACE は 1 辺の長さが $\sqrt{19}$ の正三角形であるから

$\triangle \mathrm{ACE}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot \mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{19})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{19\sqrt{3}}{4}$

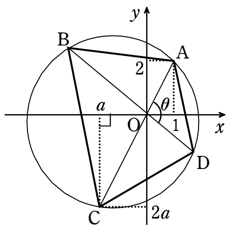
よって　$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3+\frac{19\sqrt{3}}{4}=\frac{37\sqrt{3}}{4}$

5

解答　(1) $\mathrm{OC}=-\sqrt{5}\,a$，証明略　(2) $S=\frac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta$　(3) -3

解説

(1) 直線 OA の方程式は $y=2x$ であるから，点 C の y 座標は　$y=2a$



よって　$\mathrm{OC}^2=(-a)^2+(-2a)^2=5a^2$

ゆえに　$\mathrm{OC}=\sqrt{5}|a|=-\sqrt{5}\,a$

また，円周角の定理から

$\angle \mathrm{OBC}=\angle \mathrm{OAD}$，$\angle \mathrm{OCB}=\angle \mathrm{ODA}$

ゆえに　$\triangle \mathrm{OBC}\backsim\triangle \mathrm{OAD}$

条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ であるから　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=-\sqrt{5}\,a$ であるから

$S=\triangle \mathrm{OAB}+\triangle \mathrm{OBC}+\triangle \mathrm{OCD}+\triangle \mathrm{ODA}$

$=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot \mathrm{OC}\sin\theta$

$+\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot \mathrm{OD}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot \mathrm{OA}\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\{\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5}\,a)\cdot 2+(-\sqrt{5}\,a)^2+(\sqrt{5})^2\}\sin\theta$

$=\frac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta$

(3) $\theta=30^\circ$ から　$S=\frac{5}{2}(a-1)^2\sin 30^\circ=\frac{5}{4}(a-1)^2$

$20\leqq S\leqq 40$ から　$20\leqq\frac{5}{4}(a-1)^2\leqq 40$

ゆえに　$16\leqq(a-1)^2\leqq 32$

よって　$4\leqq|a-1|\leqq 4\sqrt{2}$　……①

$a<0$ より $|a-1|=-(a-1)$ であるから，① は

$4\leqq-(a-1)\leqq 4\sqrt{2}$

ゆえに　$1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$

よって，a のとりうる値の最大値は　-3

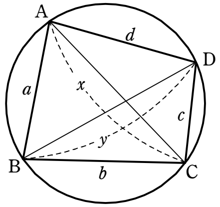
6

解答　(1) $x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$，$y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$　(2) 略

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$D=180^\circ-B$



△ABC において，余弦定理により

$x^2=a^2+b^2-2ab\cos B$　……①

△CDA において，余弦定理により

$x^2=c^2+d^2-2cd\cos D$

$=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-B)$

$=c^2+d^2+2cd\cos B$　……②

①，② から　$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$

よって　$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

これを ① に代入して

$x^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

$=a^2+b^2-\frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$

$=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$

ここで

(分子)$=(a^2+b^2)ab+(a^2+b^2)cd-ab(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)=cda^2+b(c^2+d^2)a+b^2cd$

$=(ac+bd)(ad+bc)$

よって　$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$　……③

y についても同様で，③ において，a を b，b を c，c を d，d を a におき換えればよいから

$y=\sqrt{\frac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}}=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$

(2) (1) の結果から

$xy=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$

$=\sqrt{(ac+bd)^2}$

a，b，c，d はすべて正であるから　$xy=ac+bd$

7

解答　(1) 12　(2) $\sqrt{10}$　(3) $20\sqrt{2}$　(4) 順に $3\sqrt{2}$，72π

解説

(1) △ABC において，余弦定理から

$\cos\angle \mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot \mathrm{CA}}=\frac{6^2+(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$\angle \mathrm{BAC}=45^\circ$ であり，求める面積は

$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot \mathrm{CA}\sin\angle \mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=12$

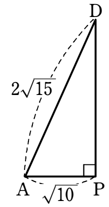
(2) 線分 AP の長さは △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$\mathrm{AP}=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle \mathrm{BAC}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{10}$

(3) △DPA は $\angle \mathrm{DPA}=90^\circ$ の直角三角形であるから

$\mathrm{DP}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{15})^2-(\sqrt{10})^2}$

$=5\sqrt{2}$



よって，四面体 ABCD の体積は

$\frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}\cdot \mathrm{DP}=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 5\sqrt{2}$

$=20\sqrt{2}$

(4) 球 S の中心を O とする。

点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，点 H は △ABC の外接円の中心 P と一致する。よって，3 点 D，O，P はこの順で一直線上にある。

△OPA は直角三角形であるから，球 S の半径を x とおくと

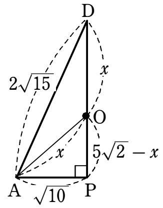
$x^2=(\sqrt{10})^2+(5\sqrt{2}-x)^2$

展開して整理すると　$10\sqrt{2}\,x=60$

よって　$x=3\sqrt{2}$

さらに，球 S の表面積は

$4\pi x^2=4\pi\cdot(3\sqrt{2})^2=72\pi$



8

解答　(1) $15\sqrt{7}$　(2) $2\sqrt{6}$

解説

(1) 三平方の定理により

$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{AF}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

$\mathrm{FH}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}=12$

△AFH において，余弦定理により

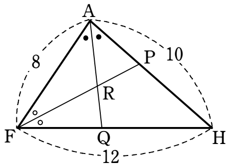
$\cos\angle \mathrm{FAH}=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AH}^2-\mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot \mathrm{AH}}=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}=\frac{1}{8}$

$\sin\angle \mathrm{FAH}>0$ であるから

$\sin\angle \mathrm{FAH}=\sqrt{1-\cos^2\angle \mathrm{FAH}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

よって　$\triangle \mathrm{AFH}=\frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot \mathrm{AH}\sin\angle \mathrm{FAH}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$

(2) △AFH において，FP は ∠AFH の二等分線であるから　$\mathrm{AP}:\mathrm{PH}=\mathrm{FA}:\mathrm{FH}=8:12=2:3$



よって　$\triangle \mathrm{AEP}=\frac{2}{2+3}\triangle \mathrm{AEH}$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}=6$

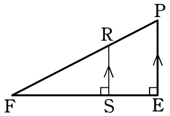
また，△AFP において，AR は ∠FAP の二等分線であるから　$\mathrm{FR}:\mathrm{RP}=\mathrm{AF}:\mathrm{AP}=8:\frac{2}{2+3}\cdot 10=2:1$

章末問題B

△FPE で，辺 EF 上に RS∥PE となる点 S をとると

$FS:SE=FR:RP=2:1$

ゆえに　$SE=\dfrac{1}{2+1}\cdot FE=\dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{6}=\sqrt{6}$



したがって，求める四面体 EAPR の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle AEP\cdot ES=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

章末問題C

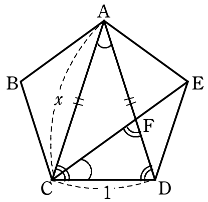
1

解答　(ア) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(イ) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　(ウ) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　(エ) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(オ) $\dfrac{1}{12}$

解説

1 辺の長さが 1 の正三角形の高さは

$$1\cdot\sin 60^\circ = {}^{ア}\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$AC=x$ とすると　$AD=x$

また，2 つの二等辺三角形 CDF と AEF は合同であるから　$CD=CF=AE=AF=1$

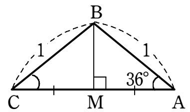
ここで，△ACD∽△CDF であるから

$AC:CD=CD:DF$

ゆえに　$x:1=1:(x-1)$　　よって　$x(x-1)=1$

整理すると　$x^2-x-1=0$

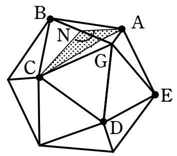
$x>1$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　すなわち　$AC={}^{イ}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



正五角形の 1 つの内角は 108° であるから，二等辺三角形 ABCにおいて　$\angle BAC=(180^\circ-108^\circ)\div 2=36^\circ$

線分 AC の中点を M とすると

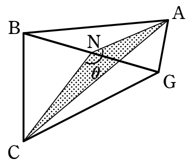
$$\cos 36^\circ=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{1}{2}AC}{1}={}^{ウ}\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$



ここで，右の図の正二十面体において，ABCDE は正五角形である。

線分 BG の中点を N とすると，正三角形 ABG，CBG について　$AN\perp BG$，$CN\perp BG$

$AN=CN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから，△ACN において余弦定理により



$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}}={}^{エ}-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

4 つの平面 ABG，BCG，ABC，ACG で囲まれた部分の体積を求める。

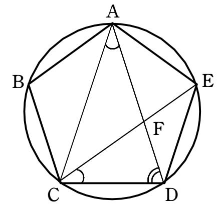
線分 BG は平面 ACN に垂直であるから，求める体積は 2 つの四面体 ACNG，ACNB の体積の和である。

よって，求める体積 V は　$\dfrac{1}{3}\triangle ACN\cdot(BN+NG)$

ここで，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot 1=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}={}^{オ}\dfrac{1}{12}$

参考　(△ACD∽△CDF の証明)



正五角形 ABCDE の外接円について，等しい長さの弧に対する円周角は等しいから

$\angle CAD=\angle DCE$

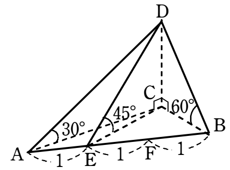
さらに，$\angle ADC=\angle CDF$ であるから，2 組の角が等しいことより　△ACD∽△CDF

2

解答　(1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解説

(1)　$CD=x$ とおくと

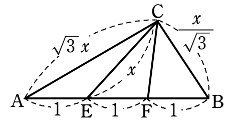


$AC=\sqrt{3}\,x$，$CE=x$，$BC=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

△ACE に余弦定理を適用すると

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}\,x)^2+1^2-x^2}{2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot 1}=\frac{2x^2+1}{2\sqrt{3}\,x}\quad\cdots\cdots①$$

△ABC に余弦定理を適用すると



$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}\,x)^2+3^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot 3}=\frac{8x^2+27}{18\sqrt{3}\,x}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から　$9(2x^2+1)=8x^2+27$

ゆえに　$x^2=\dfrac{9}{5}$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　すなわち　$CD=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)　$AC=\sqrt{3}\,x=\sqrt{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$

また，① から　$\cos A=\dfrac{2\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2+1}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{23}{6\sqrt{15}}$

よって，△ACF に余弦定理を適用すると

$$CF^2=\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{5}\cdot 2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}=\frac{27}{5}+4-\frac{46}{5}=\frac{1}{5}$$

$CF>0$ であるから　$CF=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

三平方の定理から　$DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{\dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{5}}=\sqrt{2}$

よって　$\cos\angle DFC=\dfrac{CF}{DF}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

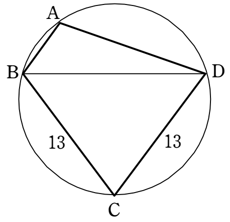
3

解答　$AB=4$，$DA=14$ または $AB=14$，$DA=4$

解説

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cos C$$
$$=338(1-\cos C)\quad\cdots\cdots ①$$



△BCD において，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C}=2\times\frac{65}{8}$$

よって　$\mathrm{BD}=\dfrac{65}{4}\sin C\quad\cdots\cdots ②$

①，② から　$\left(\dfrac{65}{4}\sin C\right)^2=338(1-\cos C)$

ゆえに　$25(1-\cos^2 C)=32(1-\cos C)$

よって　$25(1+\cos C)(1-\cos C)=32(1-\cos C)$

$\cos C\fallingdotseq 1$ であるから　$25(1+\cos C)=32$

よって　$\cos C=\dfrac{7}{25}$　　① から　$\mathrm{BD}=\sqrt{338\left(1-\dfrac{7}{25}\right)}=\dfrac{78}{5}$

AB $=x$ とおくと，四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

$x+13+13+\mathrm{DA}=44$　　ゆえに　$\mathrm{DA}=18-x$

△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DA}\cos A\quad\cdots\cdots ③$$

$A+C=180^\circ$ であるから　$\cos A=\cos(180^\circ-C)=-\cos C=-\dfrac{7}{25}$

よって，③ から　$\left(\dfrac{78}{5}\right)^2=x^2+(18-x)^2-2x(18-x)\left(-\dfrac{7}{25}\right)$

分母を払って整理すると　$36(x^2-18x+56)=0$

これを解くと　$x=4,\ 14$

$\mathrm{DA}=18-x$ から　AB $=4$，DA $=14$ または AB $=14$，DA $=4$

$\boxed{4}$

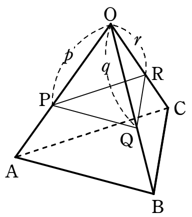
解答　略

解説

OP $=p$，OQ $=q$，OR $=r$ とする。

△OPQ において，余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=p^2+q^2-2pq\cos60^\circ=p^2+q^2-pq$$



同様に　$\mathrm{QR}^2=q^2+r^2-qr$，$\mathrm{RP}^2=r^2+p^2-rp$

△PQR が正三角形であるとき，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QR}^2$，$\mathrm{QR}^2=\mathrm{RP}^2$ が

成り立つから　$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr\quad\cdots\cdots ①$

$q^2+r^2-qr=r^2+p^2-rp\quad\cdots\cdots ②$

① から　$r^2-p^2-qr+pq=0$

すなわち　$(r+p)(r-p)-q(r-p)=0$

よって　$(r-p)(r+p-q)=0\quad\cdots\cdots ①'$

同様に，② から　$(p-q)(p+q-r)=0\quad\cdots\cdots ②'$

①′ から　$r=p$ または $q=r+p$

ここで，$q=r+p$ とすると，②′ から　$-r\cdot2p=0$

条件より，$rp\fallingdotseq0$ であるから，不適。

よって　$r=p$

同様に，②′ から，$p=q$ または $r=p+q$ であるが，$r=p+q$ は不適であり　$p=q$

したがって　$p=q=r$

よって，正三角形 OAB において，OP : PA $=$ OQ : QB となるから　PQ∥AB

同様にして，QR∥BC，RP∥CA も示される。

$\boxed{5}$

解答　略

解説

半径 1 の円に内接する正十二角形 S の 1 辺の長さを x とすると，余弦定理から

$$x^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos30^\circ=2-\sqrt{3}$$

$x>0$ から　$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

よって，S の周の長さは　$12\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

内接することから，明らかに (円周の長さ) > (S の周の長さ) である。

$$(\text{円周率})=\frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})}>\frac{(S\text{ の周の長さ})}{(\text{直径})}=\frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$
$$=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})>3(2.44-1.42)=3\times1.02=3.06>3.05$$

よって，円周率は 3.05 より大きい。