

# 数学 I 【数と式】

1

解答 (1)  $81a^4 - 18a^2 + 1$  (2)  $16x^4 - y^4$

解説

$$\begin{aligned} (1) (3a+1)^2(3a-1)^2 &= ((3a+1)(3a-1))^2 \\ &= ((3a)^2 - 1^2)^2 \\ &= (9a^2 - 1)^2 \\ &= (9a^2)^2 - 2 \cdot 9a^2 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 81a^4 - 18a^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y) &= (4x^2 + y^2)((2x)^2 - y^2) \\ &= (4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2) \\ &= (4x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= 16x^4 - y^4 \end{aligned}$$

2

解答 (1)  $x^4 - 16$  (2)  $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$

解説

$$\begin{aligned} (1) (\text{与式}) &= (x+2)(x-2) \times (x^2+4) = (x^2-4)(x^2+4) = (x^2)^2 - 4^2 = x^4 - 16 \\ (2) (\text{与式}) &= (x-2)(x+4) \times (x-1)(x+3) = (x^2+2x-8)(x^2+2x-3) \\ &= ((x^2+2x)-8)((x^2+2x)-3) = (x^2+2x)^2 - 11(x^2+2x) + 24 \\ &= (x^4+4x^3+4x^2) - 11x^2 - 22x + 24 = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 \end{aligned}$$

3

解答 (1)  $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$  (2)  $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$  (3)  $x^3 + 27$   
(4)  $8a^3 - 1$

解説

$$\begin{aligned} (1) (2x+3)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 \\ (2) (3x-2y)^3 &= (3x)^3 - 3(3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x(2y)^2 - (2y)^3 \\ &= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \\ (3) (x+3)(x^2-3x+9) &= (x+3)(x^2 - x \cdot 3 + 3^2) \\ &= x^3 + 3^3 = x^3 + 27 \\ (4) (2a-1)(4a^2+2a+1) &= (2a-1)((2a)^2 + 2a \cdot 1 + 1^2) \\ &= (2a)^3 - 1^3 = 8a^3 - 1 \end{aligned}$$

4

解答 (1)  $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$  (2)  $(4x-1)(16x^2+4x+1)$   
(3)  $2(3x+2)(9x^2-6x+4)$

解説

$$\begin{aligned} (1) 8x^3 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x+3y)((2x)^2 - 2x \cdot 3y + (3y)^2) \\ &= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) \\ (2) 64x^3 - 1 &= (4x)^3 - 1^3 \\ &= (4x-1)((4x)^2 + 4x \cdot 1 + 1^2) \\ &= (4x-1)(16x^2 + 4x + 1) \\ (3) 54x^3 + 16 &= 2(27x^3 + 8) \\ &= 2\{(3x)^3 + 2^3\} \\ &= 2\{3x+2\}((3x)^2 - 3x \cdot 2 + 2^2) \\ &= 2(3x+2)(9x^2 - 6x + 4) \end{aligned}$$

5

解答 (1)  $(x^2+3x-1)(x^2+3x-3)$  (2)  $x(x-5)(x^2-5x+10)$

解説

$$\begin{aligned} (1) x^2 + 3x &= A \text{ とおく。} \\ (\text{与式}) &= A^2 - 4A + 3 = (A-1)(A-3) \\ &= ((x^2+3x)-1)((x^2+3x)-3) = (x^2+3x-1)(x^2+3x-3) \\ (2) (\text{与式}) &= (x-1)(x-4) \times (x-2)(x-3) - 24 \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) - 24 \\ \text{ここで, } x^2 - 5x &= A \text{ とおくと} \\ (\text{与式}) &= (A+4)(A+6) - 24 = A^2 + 10A = A(A+10) \\ &= (x^2-5x)(x^2-5x+10) = x(x-5)(x^2-5x+10) \end{aligned}$$

6

解答 (1)  $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$  (2)  $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$   
(3)  $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

解説

$$(1) x^4 - 6x^2 + 1 = (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - (2x)^2$$

$$= ((x^2 - 1) + 2x)((x^2 - 1) - 2x) = (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$$

$$\begin{aligned} (2) x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= ((x^2 + 2) + 2x)((x^2 + 2) - 2x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) x^4 + 9x^2 + 81 &= (x^4 + 18x^2 + 81) - 9x^2 = (x^2 + 9)^2 - (3x)^2 \\ &= ((x^2 + 9) + 3x)((x^2 + 9) - 3x) = (x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

7

解答 (1)  $(x-y+3)(x+2y+1)$  (2)  $(x+2y+3)(2x+y-1)$

解説

$$\begin{aligned} (1) x^2 + xy + 4x - 2y^2 + 5y + 3 &= x^2 + (y+4)x - (2y^2 - 5y - 3) \\ &= x^2 + (y+4)x - (y-3)(2y+1) \quad \dots\dots \text{[A]} \\ &= (x - (y-3))(x + (2y+1)) \quad \dots\dots \text{[B]} \\ &= (x - y + 3)(x + 2y + 1) \end{aligned}$$

<p>[A]</p> $\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -3 \quad \longrightarrow \quad -6 \\ 2 \quad \quad \quad 1 \quad \longrightarrow \quad 1 \\ \hline 2 \quad -3 \quad -5 \end{array}$	<p>[B]</p> $\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad -(y-3) \quad \longrightarrow \quad -y+3 \\ 1 \quad \quad \quad 2y+1 \quad \longrightarrow \quad 2y+1 \\ \hline 1 \quad -(y-3)(2y+1) \quad y+4 \end{array}$
---	---

$$\begin{aligned} (2) 2x^2 + 5xy + 2y^2 + 5x + y - 3 &= 2x^2 + (5y+5)x + 2y^2 + y - 3 \\ &= 2x^2 + (5y+5)x + (y-1)(2y+3) \quad \dots\dots \text{[C]} \\ &= (x + (2y+3))(2x + (y-1)) \quad \dots\dots \text{[D]} \\ &= (x + 2y + 3)(2x + y - 1) \end{aligned}$$

<p>[C]</p> $\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -1 \quad \longrightarrow \quad -2 \\ 2 \quad \quad \quad 3 \quad \longrightarrow \quad 3 \\ \hline 2 \quad -3 \quad 1 \end{array}$	<p>[D]</p> $\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad 2y+3 \quad \longrightarrow \quad 4y+6 \\ 2 \quad \quad \quad y-1 \quad \longrightarrow \quad y-1 \\ \hline 2 \quad (2y+3)(y-1) \quad 5y+5 \end{array}$
--	---

8

解答 (1)  $x+y=14, xy=1$  (2) 194 (3) 14 (4) 2702

解説

$$\begin{aligned} (1) x + y &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{(4 + 4\sqrt{3} + 3) + (4 - 4\sqrt{3} + 3)}{4 - 3} = 14 \end{aligned}$$

$$xy = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 1$$

$$(2) x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 14^2 - 2 \cdot 1 = 194$$

$$(3) x^4y^3 + x^3y^4 = x^3y^3(x+y) = (xy)^3(x+y) = 1^3 \cdot 14 = 14$$

$$(4) x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 14^3 - 3 \cdot 1 \cdot 14 = 2702$$

別解  $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 14(194 - 1) = 2702$

9

解答 (1)  $\sqrt{3} + 1$  (2)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (3)  $2\sqrt{2} + 1$  (4)  $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$

解説

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{4+2\sqrt{3}} &= \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3} \cdot 1} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{5-\sqrt{24}} &= \sqrt{5-2\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3} \cdot 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{9+4\sqrt{2}} &= \sqrt{9+2\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{(8+1)+2\sqrt{8} \cdot 1} \\ &= \sqrt{8} + \sqrt{1} = 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{3-\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{(5+1)-2\sqrt{5} \cdot 1}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

# 数学 I 【数と式】

10

【解答】 (1)  $x=4, -3$  (2)  $-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$  (3)  $x < -1, 7 < x$

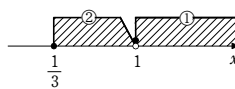
【解説】

- (1)  $|2x-1|=7$  から  $2x-1=\pm 7$   
 $2x-1=7$  から  $2x=8$  よって  $x=4$   
 $2x-1=-7$  から  $2x=-6$  よって  $x=-3$   
したがって  $x=4, -3$
- (2)  $|2x+5| \leq 2$  から  $-2 \leq 2x+5 \leq 2$   
各辺から 5 を引いて  $-7 \leq 2x \leq -3$   
各辺を 2 で割って  $-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{3}{2}$
- (3)  $|3-x| > 4$  から  $3-x < -4, 4 < 3-x$   
 $3-x < -4$  から  $x > 7$   $4 < 3-x$  から  $x < -1$   
したがって  $x < -1, 7 < x$

11

【解答】 (1)  $x=1$  (2)  $x \geq \frac{1}{3}$  (3)  $x=-3, 5$

【解説】

- (1) [1]  $x+4 \geq 0$  すなわち  $x \geq -4$  のとき  
 $|x+4|=x+4$  であるから、方程式は  $x+4=5x$   
これを解くと  $x=1$  これは  $x \geq -4$  を満たす。  
[2]  $x+4 < 0$  すなわち  $x < -4$  のとき  
 $|x+4|=-(x+4)$  であるから、方程式は  $-(x+4)=5x$   
これを解くと  $x=-\frac{2}{3}$  これは  $x < -4$  を満たさない。  
[1], [2] から、求める解は  $x=1$
- 【参考】  $|A|=B$  は「 $A=\pm B$  かつ  $B \geq 0$ 」と同じであるから、次のように解くこともできる。  
 $|x+4|=5x$  から  $x+4=\pm 5x$  かつ  $5x \geq 0$   
よって  $x=-\frac{2}{3}, 1$  かつ  $x \geq 0$  したがって  $x=1$
- (2) [1]  $x-1 \geq 0$  すなわち  $x \geq 1$  のとき  
 $|x-1|=x-1$  であるから、不等式は  $x-1 \leq 2x$   
これを解くと  $x \geq -1$  これと  $x \geq 1$  の共通範囲は  $x \geq 1$  ……①  
[2]  $x-1 < 0$  すなわち  $x < 1$  のとき  
 $|x-1|=-(x-1)$  であるから、不等式は  $-(x-1) \leq 2x$   
これを解くと  $x \geq \frac{1}{3}$  これと  $x < 1$  の共通範囲は  $\frac{1}{3} \leq x < 1$  ……②  
[1], [2] から、求める解は ①と②を合わ  
せた範囲で  $x \geq \frac{1}{3}$
- 
- (3) [1]  $x < -1$  のとき  
 $|x+1|=-(x+1), |x-3|=-(x-3)$  であるから、方程式は  $-(x+1)-(x-3)=8$   
これを解くと  $x=-3$  これは  $x < -1$  を満たす。  
[2]  $-1 \leq x < 3$  のとき  
 $|x+1|=x+1, |x-3|=-(x-3)$  であるから、方程式は  $x+1-(x-3)=8$   
すなわち  $0 \cdot x=4$  この方程式の解はない。  
[3]  $3 \leq x$  のとき  
 $|x+1|=x+1, |x-3|=x-3$  であるから、方程式は  $x+1+(x-3)=8$   
これを解くと  $x=5$  これは  $3 \leq x$  を満たす。  
以上から、求める解は  $x=-3, 5$

12

【解答】 (1) (b) (2) (d) (3) (c) (4) (a)

【解説】

- (1)  $(x-2)(x-3)=0$  を解くと  $x=2, 3$   
よって、「 $(x-2)(x-3)=0 \implies x \neq 1$ 」は真。  
また、「 $x \neq 1 \implies (x-2)(x-3)=0$ 」は偽。(反例:  $x=0$ )  
したがって (b)
- (2) 「 $a+b=0 \implies a=0$  または  $b=0$ 」は偽。(反例:  $a=-1, b=1$ )  
「 $a=0$  または  $b=0 \implies a+b=0$ 」は偽。(反例:  $a=0, b=1$ )  
したがって (d)
- (3)  $a=b=1$  のとき  $2a-b=2 \cdot 1-1=1, 2b-a=2 \cdot 1-1=1$   
よって、「 $a=b=1 \implies 2a-b=2b-a=1$ 」は真。  
 $2a-b=1, 2b-a=1$  を解くと  $a=b=1$   
よって、「 $2a-b=2b-a=1 \implies a=b=1$ 」は真。  
したがって (c)
- (4)  $\angle A=30^\circ, \angle B=120^\circ, \angle C=30^\circ$  のとき  $\angle A < 90^\circ$  であるが、 $\triangle ABC$  は鋭角三角

形ではない。

逆に、 $\triangle ABC$  が鋭角三角形ならば、すべての内角は  $90^\circ$  より小さいから  $\angle A < 90^\circ$  が成り立つ。

すなわち、「 $\angle A < 90^\circ \implies \triangle ABC$  は鋭角三角形」は偽であり、

「 $\triangle ABC$  は鋭角三角形  $\implies \angle A < 90^\circ$ 」は真である。

したがって (a)

13

【解答】 (1)  $p=1, q=-3$  (2)  $p=-4, q=6$

【解説】

- (1) 等式を整理すると  $(p-1)+(-q-3)\sqrt{2}=0$   
 $p, q$  は有理数であるから、 $p-1, -q-3$  も有理数である。  
よって  $p-1=0, -q-3=0$  これを解いて  $p=1, q=-3$
- (2) 等式を整理すると  $(3p+q+6)+(p+q-2)\sqrt{2}=0$   
 $p, q$  は有理数であるから、 $3p+q+6, p+q-2$  も有理数である。  
よって  $3p+q+6=0, p+q-2=0$  これを解いて  $p=-4, q=6$