

1

解答 (1) 2 (2) 2 (3) 3 (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{5}$

解説

- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$
 (3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \left(2 - \frac{10}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2x-10}{x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2(x-5)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{x} = \frac{2}{5}$

2

解答 (1) 12 (2) 12

解説

- (1) 求める平均変化率は
 $\frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{(3 \cdot 5^2 - 5) - (3 \cdot (-1)^2 - 5)}{6} = \frac{72}{6} = 12$
 (2) $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 5}{h} - (3 \cdot 2^2 - 5)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4h+h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h(4+h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} 3(4+h) = 12$

3

解答 (1) -3 (2) $2x-3$ (3) $3x^2-3$

解説

- (1) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-3(x+h)+4\} - \{-3x+4\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3) = -3$
 (2) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - 3(x+h)+5\} - \{x^2 - 3x+5\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x-3)h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x-3+h) = 2x-3$
 (3) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 - 3(x+h)\} - \{x^3 - 3x\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2-3)h+3xh^2+h^3}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2-3+3xh+h^2) = 3x^2-3$

4

解答 (1) $f'(x) = 6x-5$ (2) $f'(x) = 3x^2-8x$ (3) $f'(x) = 4x^3-4x+7$
 (4) $f'(x) = 9x^2+6x-2$ (5) $f'(x) = 72x^2+72x+18$

解説

- (1) $f'(x) = 3(x^2)' - 5(x)' + (6)' = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5$
 (2) $f'(x) = (x^3)' - 4(x^2)' - (1)' = 3x^2 - 4 \cdot 2x - 0 = 3x^2 - 8x$
 (3) $f'(x) = (x^4)' - 2(x^2)' + 7(x)' - (3)' = 4x^3 - 2 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 4x^3 - 4x + 7$
 (4) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ であるから
 $f'(x) = 3(x^3)' + 3(x^2)' - 2(x)' - (2)' = 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 9x^2 + 6x - 2$
 (5) $f(x) = 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 24x^3 + 36x^2 + 18x + 3$ であるから
 $f'(x) = 24(x^3)' + 36(x^2)' + 18(x)' + (3)' = 24 \cdot 3x^2 + 36 \cdot 2x + 18 \cdot 1 + 0 = 72x^2 + 72x + 18$
別解 積や累乗の形の関数の微分の公式を利用すると
 (4) $f'(x) = (x+1)'(3x^2-2) + (x+1)(3x^2-2)'$
 $= 1 \cdot (3x^2-2) + (x+1) \cdot 6x = 9x^2 + 6x - 2$
 (5) $f'(x) = 3 \cdot 3(2x+1)^{3-1} \cdot (2x+1)'$
 $= 9(2x+1)^2 \cdot 2 = 18(2x+1)^2$

5

解答 $f(x) = -3x^2 + 2x + 15$

解説

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 2ax + b$
 $f'(1) = -4$ より $2a + b = -4$ ……①
 $f'(-1) = 8$ より $-2a + b = 8$ ……②
 $f(3) = -6$ より $9a + 3b + c = -6$ ……③
 ①, ② を解くと $a = -3, b = 2$
 $a = -3, b = 2$ を ③ に代入して $-27 + 6 + c = -6$ よって $c = 15$
 したがって $f(x) = -3x^2 + 2x + 15$

6

解答 $f(x) = -2x^2 + 2x - 5$

解説

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると $f'(x) = 2ax + b$
 与えられた等式に代入すると
 $2(ax^2 + bx + c) + x(2ax + b) = -8x^2 + 6x - 10$
 整理して $4ax^2 + 3bx + 2c = -8x^2 + 6x - 10$
 これが x についての恒等式であるから、両辺の係数を比較して
 $4a = -8, 3b = 6, 2c = -10$
 よって $a = -2, b = 2, c = -5$
 したがって $f(x) = -2x^2 + 2x - 5$

1

解答 (1) 3 (2) 4 (3) 3 (4) $\frac{7}{5}$ (5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{3}$

解説

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$
 (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x}{x + 2} = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)}{-1 + 2} = 4$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x+2} = \frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$
 (5) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$
 (6) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \left(\frac{12}{x-3} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \cdot \frac{2(x+3)}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{-3-3} = -\frac{1}{3}$

2

解答 (1) 4 (2) ① 2 ② 10

解説

- (1) $\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{\{4(1+h) - 1\} - (4 \cdot 1 - 1)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$
 (2) ① $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2$
 ② $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2(2+h) - (2^3 - 2 \cdot 2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 10h}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 10) = 10$

3

解答 (1) $y' = 0$ (2) $y' = 3x^2 + 2$ (3) $y' = -\frac{1}{x^2}$ (4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

解説

- (1) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5-5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$
 (2) $y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^3 + 2(x+h)\} - \{x^3 + 2x\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2) = 3x^2 + 2$
 (3) $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \frac{-h}{(x+h)x}$ であるから

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4

解答 (1) $y' = x^2 - x$ (2) $y' = -5x^4 + 3x^2$ (3) $y' = 4x + 8$

(4) $y' = 6x^2 + 2x$ (5) $y' = 3x^2 + 12x + 12$

解説

(1) $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x = x^2 - x$

(2) $y' = -5x^4 + 3x^2$

(3) $y = 2x^2 + 8x - 10$ であるから $y' = 2 \cdot 2x + 8 = 4x + 8$

(4) $y = 2x^3 + x^2 + 1$ であるから $y' = 2 \cdot 3x^2 + 2x = 6x^2 + 2x$

(5) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ であるから $y' = 3x^2 + 6 \cdot 2x + 12 = 3x^2 + 12x + 12$

5

解答 (1) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ (2) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

解説

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 2$ より $b = 2$

$f'(1) = 4$ より $2a + b = 4$

$f(2) = 6$ より $4a + 2b + c = 6$

よって $a = 1, b = 2, c = -2$ (これは $a \neq 0$ を満たす)

したがって $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

$f'(2) = -5$ より $4a + b = -5$

$f'(-1) = 7$ より $-2a + b = 7$

$f(1) = 3$ より $a + b + c = 3$

よって $a = -2, b = 3, c = 2$ (これは $a \neq 0$ を満たす)

したがって $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

6

解答 $f(x) = x^2 + x$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 2ax + b$

これらを与えられた等式に代入して

$$x(2ax + b) + x^2 + 2x = 3(ax^2 + bx + c)$$

整理すると $(a-1)x^2 + 2(b-1)x + 3c = 0$

これが x についての恒等式であるから $a-1=0, 2(b-1)=0, 3c=0$

よって $a=1, b=1, c=0$ したがって $f(x) = x^2 + x$

1

解答 (ア) 14 (イ) $\frac{2}{3}$

解説

$f(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 7 = 47,$

$f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 7 = 5$

よって, $x = -1$ から $x = 2$ までの平均変化率は

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{47 - 5}{3} = 14 \dots\dots \textcircled{1}$$

また $f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$

ゆえに, $x = a$ ($-1 < a < 2$) における微分係数 $f'(a)$ が $\textcircled{1}$ の値に等しいとすると

$$3a^2 + 10a + 6 = 14$$

整理して $3a^2 + 10a - 8 = 0$ よって $(a+4)(3a-2) = 0$

$-1 < a < 2$ であるから $a = \frac{2}{3}$

2

解答 (1) $\frac{dy}{dt} = 4t$ (2) $\frac{dS}{dr} = 2\pi r$ (3) $\frac{dV}{dt} = 0.02V_0$ (4) $\frac{dt}{dx} = k(1-12x)$

解説

(1) $\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 2t = 4t$

(2) $\frac{dS}{dr} = \pi \cdot 2r = 2\pi r$

(3) $\frac{dV}{dt} = 0.02V_0$

(4) $t = k(2+x-6x^2)$

よって $\frac{dt}{dx} = k(1-6 \cdot 2x) = k(1-12x)$

3

解答 (1) $y' = 9x^2 - 2x$ (2) $y' = 3x^2 - 5$ (3) $y' = 3x^2 + 12x + 12$

(4) $y' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ (5) $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$

(6) $y' = 27x^2 + 42x + 16$

解説

(1) $y = 3x^3 - x^2$ よって $y' = 9x^2 - 2x$

(2) $y = x^3 - 5x + 4$ よって $y' = 3x^2 - 5$

(3) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ よって $y' = 3x^2 + 12x + 12$

(4) $y = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 + 2x^2 \cdot (-x) + 2(-x) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x^2$
 $= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

よって $y' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

(5) $y = (x^3)^2 - 2x^3 \cdot 2x + (2x)^2 = x^6 - 4x^4 + 4x^2$

よって $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$

(6) $y = (9x^2 + 12x + 4)(x+1) = 9x^3 + 21x^2 + 16x + 4$

よって $y' = 27x^2 + 42x + 16$

別解 (1) $y' = (x^2)'(3x-1) + x^2(3x-1)'$
 $= 2x(3x-1) + x^2 \cdot 3 = 9x^2 - 2x$

(2) $y' = (x-1)'(x^2+x-4) + (x-1)'(x^2+x-4)'$
 $= x^2 + x - 4 + (x-1)(2x+1) = x^2 + x - 4 + 2x^2 - x - 1 = 3x^2 - 5$

(3) $y' = \{(x+2)^3\}' = 3(x+2)^2 \cdot 1 = 3(x+2)^2$

(4) $y' = \{(x^2-x+1)^2\}' = 2(x^2-x+1)(x^2-x+1)'$
 $= 2(x^2-x+1)(2x-1)$

(5) $y' = \{(x^3-2x)^2\}' = 2(x^3-2x)(x^3-2x)' = 2(x^3-2x)(3x^2-2) = 2x(x^2-2)(3x^2-2)$

(6) $y' = \{(3x+2)^2\}'(x+1) + (3x+2)^2(x+1)'$
 $= \{2(3x+2) \cdot 3\}'(x+1) + (3x+2)^2$
 $= (3x+2)\{6(x+1) + (3x+2)\} = (3x+2)(9x+8)$

4

解答 (1) $n = 2$ (2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$

解説

(1) $k \neq 0$ から, 右辺の次数は 3
 $n = 0$ のとき, 左辺の次数は 0 となり, 右辺の次数 3 と一致しないから不適。
 $n \geq 1$ のとき, $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であるから, $x^2 f'(x)$ は $(n+1)$ 次式である。

よって, 左辺の次数は $n+1$

ゆえに, $n+1 = 3$ から $n = 2$

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とすると $f'(x) = 2ax + b$

与えられた等式に代入すると

$$(ax^2 + bx + c) + x^2(2ax + b) = kx^3 + k^2x + 1$$

整理して $2ax^3 + (a+b)x^2 + bx + c = kx^3 + k^2x + 1$

この等式が常に成り立つとき

$$2a = k \dots\dots \textcircled{1}, a + b = 0 \dots\dots \textcircled{2}, b = k^2 \dots\dots \textcircled{3}, c = 1$$

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ から $b = 4a^2 \dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}, \textcircled{4}$ から $a + 4a^2 = 0$ すなわち $a(4a+1) = 0$

$a \neq 0$ であるから $a = -\frac{1}{4}$ $\textcircled{2}$ から $b = \frac{1}{4}$

よって $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$

1

解答 $a=2, b=-7$

解説

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 3} (ax^2 + bx + 3) = 0$$

ゆえに $3a + b + 1 = 0$ よって $b = -3a - 1$ ……①

ゆえに $ax^2 + bx + 3 = ax^2 - (3a + 1)x + 3 = (x - 3)(ax - 1)$

このとき $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 + bx + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(ax - 1)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax - 1}{x + 1} = \frac{3a - 1}{4}$

$\frac{3a - 1}{4} = \frac{5}{4}$ から $a = 2$ ① から $b = -7$

2

解答 (1) $2f'(a)$ (2) $5f'(a)$

解説

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{f(a + 2h) - f(a)}{2h} = 2f'(a)$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a - 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 3h) - f(a) - [f(a - 2h) - f(a)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[3 \cdot \frac{f(a + 3h) - f(a)}{3h} + 2 \cdot \frac{f(a - 2h) - f(a)}{-2h} \right] = 3f'(a) + 2f'(a) = 5f'(a)$

3

解答 $nx - n$

解説

$x^n - 1$ を $(x - 1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $px + q$ とすると、次の恒等式が成り立つ。

$$x^n - 1 = (x - 1)^2 Q(x) + px + q \text{ ……①}$$

両辺を x で微分すると

$$nx^{n-1} = 2(x - 1)Q(x) + (x - 1)^2 Q'(x) + p \text{ ……②}$$

①, ② に $x = 1$ を代入すると $0 = p + q, n = p$

よって $p = n, q = -n$

したがって、求める余りは $nx - n$

別解 $x - 1 = X$ とおくと $x = X + 1$

二項定理により $x^n - 1 = (X + 1)^n - 1$

$$= X^n + {}_n C_1 X^{n-1} + \dots + {}_n C_{n-2} X^2 + {}_n C_{n-1} X + 1 - 1$$

これを $(x - 1)^2$ すなわち X^2 で割ると、余りは ${}_n C_{n-1} X = n(x - 1)$

1

解答 (1) $y = 2x + 2$ (2) $y = -4x + 6\sqrt{3}, y = -4x - 6\sqrt{3}$

解説

$f(x) = -x^3 + 5x$ とすると $f'(x) = -3x^2 + 5$

(1) $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 5 = 2$ であるから、求める接線の方程式は $y - 4 = 2(x - 1)$ すなわち $y = 2x + 2$

(2) 接点の座標を $(a, -a^3 + 5a)$ とすると、傾きが -4 であるから $f'(a) = -4$ すなわち $-3a^2 + 5 = -4$ これを解くと $a = \pm\sqrt{3}$

よって、接点の座標は $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - 2\sqrt{3} = -4(x - \sqrt{3}), y + 2\sqrt{3} = -4(x + \sqrt{3})$$

すなわち $y = -4x + 6\sqrt{3}, y = -4x - 6\sqrt{3}$

2

解答 (1) $y = 2x - 2, y = -6x + 22$ (2) $y = 4, y = 9x - 14$

解説

(1) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ とすると $f'(x) = -2x + 4$

放物線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (-a^2 + 4a - 3) = (-2a + 4)(x - a)$$

すなわち $y = -2(a - 2)x + a^2 - 3$ ……①

この直線が点 $(3, 4)$ を通るから $4 = -2(a - 2) \cdot 3 + a^2 - 3$

整理すると $a^2 - 6a + 5 = 0$

ゆえに $(a - 1)(a - 5) = 0$ よって $a = 1, 5$

求める接線の方程式は、 a の値を ① に代入して

$$a = 1 \text{ のとき } y = 2x - 2, a = 5 \text{ のとき } y = -6x + 22$$

(2) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 3$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (a^3 - 3a + 2) = (3a^2 - 3)(x - a)$$

すなわち $y = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 2$ ……①

この直線が点 $(2, 4)$ を通るから $4 = (3a^2 - 3) \cdot 2 - 2a^3 + 2$

整理すると $a^3 - 3a^2 + 4 = 0$ ゆえに $(a + 1)(a - 2)^2 = 0$

よって $a = -1, 2$

求める接線の方程式は、 a の値を ① に代入して

$$a = -1 \text{ のとき } y = 4, a = 2 \text{ のとき } y = 9x - 14$$

3

解答 $y = 2x + 1, y = -4x + 4$

解説

$y = -x^2$ に対して $y' = -2x$

よって、放物線 $y = -x^2$ 上の点 $(a, -a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (-a^2) = -2a(x - a)$$

すなわち $y = -2ax + a^2$ ……①

この直線が放物線 $y = x^2 - 2x + 5$ にも接するための条件は、2次方程式

$$x^2 - 2x + 5 = -2ax + a^2 \text{ すなわち}$$

$$x^2 + 2(a - 1)x - a^2 + 5 = 0 \text{ ……②が重解をもつこと}$$

である。

ゆえに、②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (a - 1)^2 - 1 \cdot (-a^2 + 5) = 2a^2 - 2a - 4 = 2(a + 1)(a - 2)$$

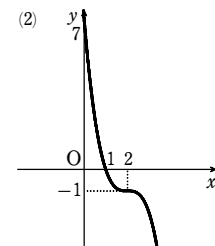
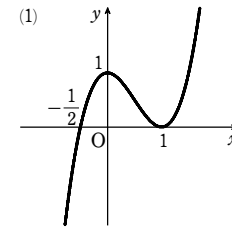
$D = 0$ から $(a + 1)(a - 2) = 0$ よって $a = -1, 2$

この値を ① に代入して、求める共通接線の方程式は $y = 2x + 1, y = -4x + 4$

4

解答 (1) $x = 0$ で極大値 1, $x = 1$ で極小値 0, [図]

(2) 極値をもたない, [図]



解説

(1) $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, 1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	0	……	1	……
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗
		1		0	

よって、 y は $x = 0$ で極大値 1, $x = 1$ で極小値 0 をとる。

また、グラフは図のようになる。

(2) $y' = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x^2 - 4x + 4)$

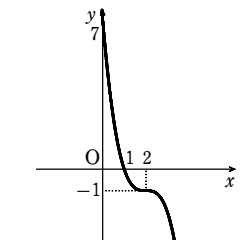
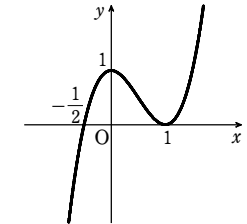
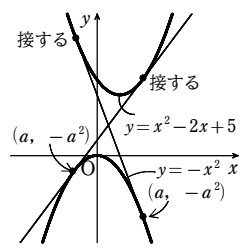
$$= -3(x - 2)^2$$

$y' = 0$ とすると $x = 2$

y の増減表は次のようになる。

x	……	2	……
y'	-	0	-
y	↘	-1	↘

よって、 y は常に減少し、極値をもたない。



第2講 例題

第2講 例題演習

また、グラフは図のようになる。

5

解答 (1) $a < 3, 6 < a$ (2) $0 \leq k \leq 6$

解説

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3a - 6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、 $f'(x)$ の符号が変化することである。

ゆえに、 $f'(x) = 0$ すなわち $3x^2 + 2ax + 3a - 6 = 0$ ……① が異なる2つの実数解をもつ。

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(3a - 6) > 0 \quad \text{整理して} \quad (a - 3)(a - 6) > 0$$

これを解いて $a < 3, 6 < a$

(2) $f'(x) = 6x^2 + 2kx + k$

$f(x)$ が極値をもたないための必要十分条件は、 $f'(x)$ の符号が変化しないことである。

ゆえに、 $f'(x) = 0$ すなわち $6x^2 + 2kx + k = 0$ ……② が重解をもつか実数解をもたない。

②の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = k^2 - 6k \leq 0$

ゆえに $k(k - 6) \leq 0$ これを解いて $0 \leq k \leq 6$

1

解答 (1) $y = 19x - 45$ (2) $y = 9x - 5, y = 9x + 27$

解説

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

ゆえに $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 19$

よって、点 (3, 12) における接線の方程式は

$$y - 12 = 19(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = 19x - 45$$

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2$ とすると $f'(x) = 3x^2 + 6x$

点 $(a, a^3 + 3a^2)$ における接線の方程式は

$$y - (a^3 + 3a^2) = (3a^2 + 6a)(x - a)$$

すなわち $y = (3a^2 + 6a)x - 2a^3 - 3a^2$ ……①

この直線の傾きが9であるとして $3a^2 + 6a = 9$

整理して $a^2 + 2a - 3 = 0$ ゆえに $(a - 1)(a + 3) = 0$

したがって $a = 1, -3$

①から $a = 1$ のとき $y = 9x - 5, a = -3$ のとき $y = 9x + 27$

よって、求める直線の方程式は $y = 9x - 5, y = 9x + 27$

2

解答 (1) $y = 7x, (2, 14); y = -x, (-2, 2)$

(2) $y = 5x - 6, (3, 9); y = -3x + 2, (-1, 5)$

(3) $y = 3x - 1, (1, 2); y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, (-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

(4) $y = 0, (-1, 0); y = 6x - 10, (3, 8)$

解説

(1) $y' = 2x + 3$

接点の座標を $(a, a^2 + 3a + 4)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^2 + 3a + 4) = (2a + 3)(x - a)$$

すなわち $y = (2a + 3)x - a^2 + 4$ ……①

これが点 (0, 0) を通るから

$$0 = (2a + 3) \cdot 0 - a^2 + 4$$

これを解いて $a = \pm 2$

$a = 2$ のとき、接点の座標は (2, 14) また、①から、接線の方程式は $y = 7x$

$a = -2$ のとき、接点の座標は (-2, 2) また、①から、接線の方程式は $y = -x$

(2) $y' = 2x - 1$

接点の座標を $(a, a^2 - a + 3)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^2 - a + 3) = (2a - 1)(x - a)$$

すなわち $y = (2a - 1)x - a^2 + 3$ ……①

これが点 (1, -1) を通るから

$$-1 = (2a - 1) \cdot 1 - a^2 + 3$$

よって $a^2 - 2a - 3 = 0$ これを解いて $a = 3, -1$

$a = 3$ のとき、接点の座標は (3, 9) また、①から、接線の方程式は $y = 5x - 6$

$a = -1$ のとき、接点の座標は (-1, 5) また、①から、接線の方程式は $y = -3x + 27$

(3) $y' = 3x^2$

接点の座標を $(a, a^3 + 1)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (a^3 + 1) = 3a^2(x - a)$$

すなわち $y = 3a^2x - 2a^3 + 1$ ……①

これが点 (1, 2) を通るから

$$2 = 3a^2 \cdot 1 - 2a^3 + 1$$

よって $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$

左辺を因数分解すると $(a - 1)^2(2a + 1) = 0$

したがって $a = 1, -\frac{1}{2}$

$a = 1$ のとき、接点の座標は (1, 2) また、①から、接線の方程式は $y = 3x - 1$

$a = -\frac{1}{2}$ のとき、接点の座標は $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

また、①から、接線の方程式は $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

(4) $y' = \frac{3}{8}(x + 1)^2$

接点の座標を $(a, \frac{1}{8}(a + 1)^3)$ とすると、接線の方程式は

$$y - \frac{1}{8}(a + 1)^3 = \frac{3}{8}(a + 1)^2(x - a)$$

すなわち $y = \frac{3}{8}(a + 1)^2x + \frac{1}{8}(a + 1)^2(-2a + 1)$ ……①

これが点 $(\frac{5}{3}, 0)$ を通るから

$$0 = \frac{3}{8}(a + 1)^2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{8}(a + 1)^2(-2a + 1)$$

よって $5(a + 1)^2 + (a + 1)^2(-2a + 1) = 0$

ゆえに $(a + 1)^2(a - 3) = 0$ したがって $a = -1, 3$

$a = -1$ のとき、接点の座標は (-1, 0) また、①から、接線の方程式は $y = 0$

$a = 3$ のとき、接点の座標は (3, 8) また、①から、接線の方程式は $y = 6x - 10$

3

解答 $y = 2x - 1, y = 4x - 4$

解説

$y = x^2$ から $y' = 2x$

$y = -x^2 + 6x - 5$ から $y' = -2x + 6$

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots\dots \text{①}$$

また、放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ 上の点 $(b, -b^2 + 6b - 5)$ における接線の方程式は

$$y - (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)(x - b)$$

すなわち $y = (-2b + 6)x + b^2 - 5 \quad \dots\dots \text{②}$

①, ②が一致するとき $2a = -2b + 6 \quad \dots\dots \text{③}, -a^2 = b^2 - 5 \quad \dots\dots \text{④}$

③から $a = -b + 3 \quad \dots\dots \text{⑤}$

これを④に代入して $-(-b + 3)^2 = b^2 - 5$

整理すると $b^2 - 3b + 2 = 0$ これを解いて $b = 1, 2$

⑤から $b = 1$ のとき $a = 2, b = 2$ のとき $a = 1$

求める共通接線の方程式は、①から、 $a = 1$ のとき $y = 2x - 1$

$$a = 2 \text{ のとき } y = 4x - 4$$

別解 $y = x^2$ から $y' = 2x$

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

これが放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ にも接するとき、方程式

$$2ax - a^2 = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-3)x - a^2 + 5 = 0$$

の判別式 D について、 $D=0$ が成り立つ。

$$\text{すなわち} \quad \frac{D}{4} = (a-3)^2 - (-a^2 + 5) = 0$$

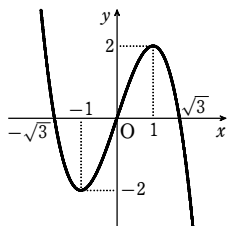
よって $a^2 - 3a + 2 = 0$ これを解いて $a = 1, 2$

求める共通接線の方程式は、 $\textcircled{6}$ から、 $a=1$ のとき $y = 2x - 1$

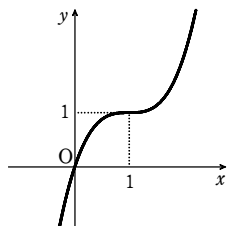
$a=2$ のとき $y = 4x - 4$

$\textcircled{4}$

解答 (1)



(2)



解説

(1) $y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = \pm 1$

y の増減表は次のようになる。

x	\dots	-1	\dots	1	\dots
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\searrow	-2	\nearrow	2	\searrow

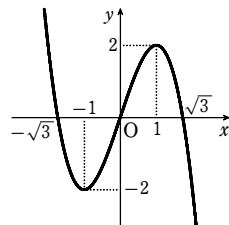
よって、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で単調に増加し、

区間 $x \leq -1, 1 \leq x$ で単調に減少する。

また、 $x=1$ で極大値 2 をとり、

$x=-1$ で極小値 -2 をとる。

ゆえに、グラフは[図]のようになる。



(2) $y' = 3x^2 - 6x + 3$

$y' = 0$ とすると $x = 1$

y の増減表は次のようになる。

x	\dots	1	\dots
y'	$+$	0	$+$
y	\nearrow	1	\nearrow

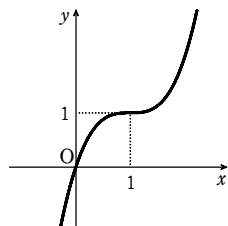
よって、すべての実数の範囲で

$y' \geq 0$ であるから、

y は単調に減少する。

よって、極値はない。

ゆえに、グラフは[図]のようになる。



$\textcircled{5}$

解答 (1) $a < -1, 2 < a$ (2) $-9 \leq a \leq 0$

解説

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a+2)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は、2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことである。すなわち、 $f'(x) = 0$ の判別式 D について $D > 0$

よって $\frac{D}{4} = (3a)^2 - 3 \cdot 3(a+2) > 0$ ゆえに $a^2 - a - 2 > 0$

これを解いて $a < -1, 2 < a$

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3a$

$f(x)$ が単調に増加するための条件は、 $f'(x) \geq 0$

すなわち、2次方程式 $f'(x) = 0$ が実数解をもたないか、重解をもつことである。

よって、 $f'(x) = 0$ の判別式 D について $D \leq 0$

ゆえに $\frac{D}{4} = a^2 - 3 \cdot (-3a) \leq 0$ よって $a^2 + 9a \leq 0$

これを解いて $-9 \leq a \leq 0$

$\textcircled{1}$

解答 (1) $y = x$ (2) $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$

解説

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

よって、点 $(1, 1)$ における接線の傾きは

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1$$

ゆえに、法線の傾きは 1 である。

したがって、求める法線の方程式は

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x$$

(2) 求める共有点の x 座標は、次の方程式の $x=1$ 以外の実数解である。

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = x$$

整理して $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

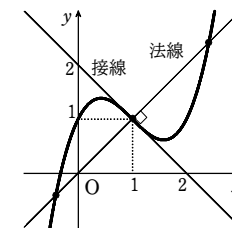
よって $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

したがって、求める点の x 座標は、

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ を解いて } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

ゆえに、求める共有点の座標は

$$(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$



$\textcircled{2}$

解答 $a = \pm 2$

解説

$f(x) = x^2 + 2, g(x) = x^2 + ax + 3$ とおくと

$$f'(x) = 2x, g'(x) = 2x + a$$

P の x 座標を p とすると、条件から

$$f(p) = g(p), f'(p)g'(p) = -1$$

$f(p) = g(p)$ から

$$p^2 + 2 = p^2 + ap + 3 \quad \text{すなわち} \quad ap = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(p)g'(p) = -1$ から

$$2p(2p+a) = -1 \quad \text{すなわち} \quad 4p^2 + 2ap = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して $4p^2 + 2 \cdot (-1) = -1$

よって $p^2 = \frac{1}{4}$ ゆえに $p = \pm \frac{1}{2}$

$\textcircled{1}$ から $p = \frac{1}{2}$ のとき $a = -2, p = -\frac{1}{2}$ のとき $a = 2$

したがって $a = \pm 2$

$\textcircled{3}$

解答 $a = 2, b = 3, c = -8, d = -1$

解説

$f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = x^3 + dx$ とおくと $f'(x) = 2ax + b, g'(x) = 3x^2 + d$

放物線 $y = f(x)$ が点 $(1, -3)$ を通るから $f(1) = -3$

放物線 $y = f(x)$ が点 $(2, 6)$ で曲線 $y = g(x)$ と共通の接線をもつから

$$f(2) = 6, g(2) = 6, f'(2) = g'(2)$$

$f(1) = -3$ から $a + b + c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f(2) = 6$ から $4a + 2b + c = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

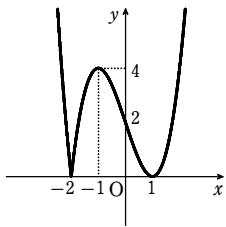
$g(2) = 6$ から $8 + 2d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

第2講 レベルA

- $f'(2) = g'(2)$ から $4a + b = 12 + d$ ……④
 ③から $d = -1$ これを④に代入すると $4a + b = 11$ ……⑤
 ②-①から $3a + b = 9$ ……⑥
 ⑤, ⑥を連立して解くと $a = 2, b = 3$
 $a = 2, b = 3$ を①に代入して c の値を求めると $c = -8$
 以上から $a = 2, b = 3, c = -8, d = -1$

4

【解答】

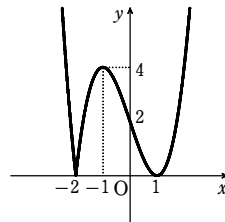


【解説】

- [1] $x < -2$ のとき $y = -(x+2)(x-1)^2 = -x^3 + 3x - 2$
 ゆえに $y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
 $x < -2$ では、常に $y' < 0$ であるから、 y は単調に減少する。
 [2] $x \geq -2$ のとき $y = (x+2)(x-1)^2 = x^3 - 3x + 2$
 ゆえに $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
 $y' = 0$ とすると $x = \pm 1$
 $x \geq -2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	…	-1	…	1	…
y'		+	0	-	0	+
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

以上から、グラフは右の図のようになる。



第2講 レベルB

1

【解答】 $y = -x + 2$

【解説】

$y = \frac{1}{4}x^2$ から $y' = \frac{1}{2}x$

放物線上の点 $(t, \frac{1}{4}t^2)$ における接線の方程式は

$y - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}t(x - t)$ すなわち $y = \frac{1}{2}tx - \frac{1}{4}t^2$

これが点 $(-2, -2)$ を通るとき $-2 = \frac{1}{2}t \cdot (-2) - \frac{1}{4}t^2$

よって $t^2 + 4t - 8 = 0$ ……①

2次方程式①の2つの解を α, β とすると、 α, β は2本の接線の接点の x 座標である。
 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -8$ ……②

ゆえに、2接点 $(\alpha, \frac{1}{4}\alpha^2), (\beta, \frac{1}{4}\beta^2)$ を結ぶ直線の方程式は

$y - \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{\frac{1}{4}\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$

すなわち $y = \frac{1}{4}(\alpha + \beta)x - \frac{1}{4}\alpha\beta$

②を代入して $y = -x + 2$

2

【解答】 $y = -4x - 4$

【解説】

曲線 C と直線 $y = mx + n$ が $x = a, x = b$ ($a \neq b$) の点で接するとすると、次の x の恒等式が成り立つ。

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (mx + n) = (x - a)^2(x - b)^2$

(左辺) $= x^4 - 2x^3 - 3x^2 - mx - n$

(右辺) $= [(x - a)(x - b)]^2 = [x^2 - (a + b)x + ab]^2$

$= x^4 + (a + b)^2x^2 + a^2b^2 - 2(a + b)x^3$

$- 2(a + b)abx + 2abx^2$

$= x^4 - 2(a + b)x^3 + [(a + b)^2 + 2ab]x^2$

$- 2(a + b)abx + a^2b^2$

両辺の係数を比較して

$-2 = -2(a + b)$ ……①, $-3 = (a + b)^2 + 2ab$ ……②,

$-m = -2(a + b)ab$ ……③, $-n = a^2b^2$ ……④

①から $a + b = 1$ これと②から $ab = -2$

③から $m = -4$ ④から $n = -4$

a, b は $t^2 - t - 2 = 0$ の解で、これを解くと $t = -1, 2$

よって、曲線 C と $x = -1, x = 2$ の点で接する直線があり、その方程式は

$y = -4x - 4$

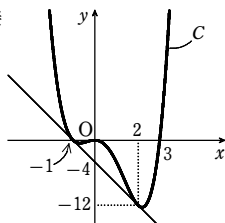
【別解】 $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2$ から $y' = 4x^3 - 6x^2 - 6x$

点 $(a, a^4 - 2a^3 - 3a^2)$ における接線の方程式は

$y - (a^4 - 2a^3 - 3a^2) = (4a^3 - 6a^2 - 6a)(x - a)$

すなわち $y = (4a^3 - 6a^2 - 6a)x - 3a^4 + 4a^3 + 3a^2$ ……①

この直線が $x = b$ ($b \neq a$) の点で曲線 C と接するための条件は、方程式



$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = (4a^3 - 6a^2 - 6a)x - 3a^4 + 4a^3 + 3a^2$ ……②

が a と異なる重解 b をもつことである。②を変形すると

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - (4a^3 - 6a^2 - 6a)x + 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 = 0$

$(x - a)^2[x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 4a - 3] = 0$

ゆえに、2次方程式 $x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 4a - 3 = 0$ ……③

が a と異なる重解 b をもてばよい。

よって、③の判別式を D とすると

$\frac{D}{4} = (a - 1)^2 - (3a^2 - 4a - 3) = -2(a^2 - a - 2)$

$D = 0$ のとき、 $a^2 - a - 2 = 0$ を解いて $a = -1, 2$

$a = -1$ のとき、③の重解は $b = 2$

$a = 2$ のとき、③の重解は $b = -1$

したがって、 $b \neq a$ である。

①から、接線の方程式は $y = -4x - 4$

3

【解答】 (1) $x > 1$ (2) $0 < a < 1$

【解説】

$y = x^3 - 3x^2 + 3ax$ ……① とする。

(1) $y' = 3(x^2 - 2x + a)$

①が極値をもつから、方程式 $y' = 0$ すなわち

$x^2 - 2x + a = 0$ ……②

が異なる2つの実数解をもつ。

よって、②の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 1 - a > 0$

ゆえに $a < 1$ ……③

このとき、②の異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$)

とすると、①の増減表は右のようになる。

よって、①は $x = \alpha$ で極大値、 $x = \beta$ で極小値をと

る。

$f(x) = x^2 - 2x + a$ とすると、放物線 $y = f(x)$ の軸は直線 $x = 1$ であり、点 $(\alpha, 0)$ と点 $(\beta, 0)$ は軸に関して対称で $\alpha < 1 < \beta$

したがって、極小値を与える x の値の範囲は $x > 1$

(2) 方程式②の解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a$

求める条件は $D > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$

すなわち $a < 1$ かつ $a > 0$

したがって $0 < a < 1$

【別解】 $f(x)$ の x^2 の係数は正であるから、求める条件は

$D > 0$ かつ $f(0) > 0$ すなわち $a < 1$ かつ $a > 0$

したがって $0 < a < 1$

4

【解答】 (1) $a > -1$ (2) $a = -\frac{1}{2}$

【解説】

(1) $f'(x) = x^2 - 2(a + 1)x + a(a + 1)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は、2次方程式 $f'(x) = 0$ すなわち

$$x^2 - 2(a+1)x + a(a+1) = 0 \dots\dots ①$$

が異なる2つの実数解をもつことである。

ゆえに、2次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-(a+1)\}^2 - a(a+1) = a+1 > 0$$

したがって $a > -1$

(2) $a > -1$ のとき、①の異なる2つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小となるから

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{3} \dots\dots ②$$

ここで、 $f(\alpha) - f(\beta)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - (a+1)(\alpha^2 - \beta^2) + a(a+1)(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{3}(\alpha - \beta)\{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3(a+1)(\alpha + \beta) + 3a(a+1)\} \dots\dots ③ \end{aligned}$$

①において、解と係数の関係により $\alpha + \beta = 2(a+1)$ 、 $\alpha\beta = a(a+1)$

$$\text{ゆえに } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4(a+1)^2 - 4a(a+1) = 4(a+1)$$

$\alpha < \beta$ であるから $\alpha - \beta = -2\sqrt{a+1}$

$$\text{また } \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 4(a+1)^2 - a(a+1) = (a+1)(3a+4)$$

したがって、③から

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \frac{1}{3}(-2\sqrt{a+1})\{(a+1)(3a+4) - 3(a+1) \cdot 2(a+1) + 3a(a+1)\} \\ &= \frac{4}{3}(a+1)\sqrt{a+1} \end{aligned}$$

$$\text{これと②から } 4(a+1)\sqrt{a+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{両辺は正であるから、平方して整理すると } (a+1)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{ゆえに } a+1 = \frac{1}{2} \quad \text{よって } a = -\frac{1}{2}$$

これは $a > -1$ を満たす。

1

解答 $b = -1, c = -1$

解説

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$x=1 \text{ で極値 } 0 \text{ をとるから } f'(1) = 0, f(1) = 0$$

$$\text{よって } 3+2b+c=0, 1+b+c+1=0$$

$$\text{ゆえに } 2b+c=-3, b+c=-2 \quad \text{これを解いて } b=-1, c=-1$$

$$\text{このとき } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -\frac{1}{3}, 1$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

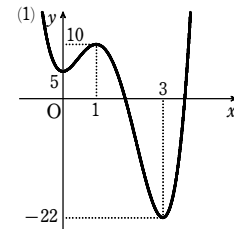
よって、 $f(x)$ は $x=1$ で極値0をとり、条件を満たす。

$$\text{したがって } b = -1, c = -1$$

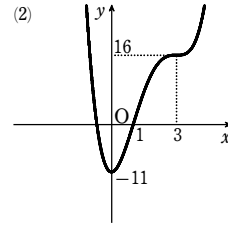
x	...	$-\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{32}{27}$	↘	極小 0	↗

2

解答 (1) $x=0$ で極小値5、 $x=1$ で極大値10、 $x=3$ で極小値-22；[図]



(2) $x=0$ で極小値-11；[図]



解説

$$(1) y' = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 1, 3$$

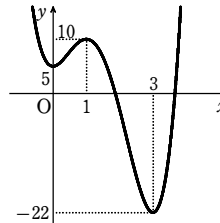
y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...	3	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	極小 5	↗	極大 10	↘	極小 -22	↗

よって $x=0$ で極小値5、 $x=1$ で極大値10、 $x=3$ で極小値-22をとる。

また、グラフは右の図のようになる。

$$(2) y' = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x-3)^2$$



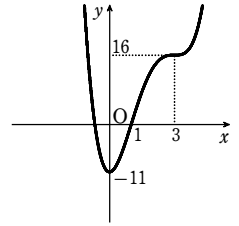
$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 3$$

y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	3	...
y'	-	0	+	0	+
y	↘	極小 -11	↗	16	↗

よって $x=0$ で極小値-11をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



3

解答 $x=0, 1$ のとき最大値0、 $x=-1$ のとき最小値-2

解説

$$y' = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{2}{3}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における y の増減表は、右のようになる。

よって、 $x=0, 1$ のとき最大値0、 $x=-1$ のとき最小値-2をとる。

x	-1	...	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
y'		+	0	-	0	+	
y	-2	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	0

4

解答 $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ で最大値3； $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ で最小値1

解説

$$\begin{aligned} y &= 2\sin x \cdot 2\sin x \cos x - \cos x + 2 \\ &= 4\sin^2 x \cos x - \cos x + 2 = 4(1 - \cos^2 x)\cos x - \cos x + 2 \\ &= -4\cos^3 x + 3\cos x + 2 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

y を t の式で表すと、 $y = -4t^3 + 3t + 2$ であり

$$\begin{aligned} y' &= -12t^2 + 3 = -3(4t^2 - 1) \\ &= -3(2t+1)(2t-1) \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ とすると } t = \pm \frac{1}{2}$$

$-1 \leq t \leq 1$ における y の増減表は右のようになる。

よって

$$t = -1, \frac{1}{2} \text{ のとき最大値 } 3$$

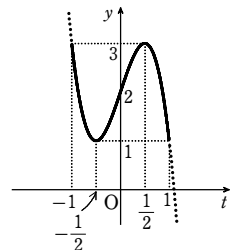
$$t = -\frac{1}{2}, 1 \text{ のとき最小値 } 1$$

$$t = -1 \text{ のとき } x = \pi; \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi;$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi; \quad t = 1 \text{ のとき } x = 0$$

$$\text{したがって } x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi \text{ で最大値 } 3$$

$$x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \text{ で最小値 } 1$$



5

- 【解答】 (1) $0 < a < 1$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^3$,
 $1 \leq a$ のとき $x=1$ で最小値 $1-3a^2$
 (2) $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x=1$ で最大値 $1-3a^2$,
 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $x=0, 1$ で最大値 0 ,
 $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき $x=0$ で最大値 0

【解説】

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$
 $f'(x) = 0$ とすると $x = \pm a$
 また $f(0) = 0, f(1) = 1-3a^2, f(a) = -2a^3$

(1) [1] $0 < a < 1$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は、右
 のようになる。

よって、 $f(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^3$
 をとる。

[2] $1 \leq a$ のとき

$0 \leq x \leq 1$ において、 $f'(x) = 3(x+a)(x-a) \leq 0$ であるから、 $f(x)$ は単調に減少する。

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で最小値 $1-3a^2$ をとる。

(2) $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は、右のようになる。
 よって、 $0 \leq x \leq 1$ において、最大値は $f(0)$ または
 $f(1)$ である。

$$f(0) - f(1) = 0 - (1 - 3a^2) = 3a^2 - 1 = 3\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[1] $0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(0) < f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $1-3a^2$ をとる。

[2] $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(0) = f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=0, 1$ で最大値 0 をとる。

[3] $\frac{1}{\sqrt{3}} < a$ のとき $f(0) > f(1)$

よって、 $f(x)$ は $x=0$ で最大値 0 をとる。

x	0	...	a	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$1-3a^2$

x	0	...	a	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗

1

【解答】 $a = -6, b = 9, c = -5$

【解説】

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値をとるとき $f'(1) = 0$

よって $3 + 2a + b = 0$ ①

また、 $f(x)$ が $x=3$ で極小値 -5 をとるとき $f'(3) = 0, f(3) = -5$

よって $27 + 6a + b = 0$ ②, $27 + 9a + 3b + c = -5$ ③

①, ②, ③ を解くと $a = -6, b = 9, c = -5$

このとき $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

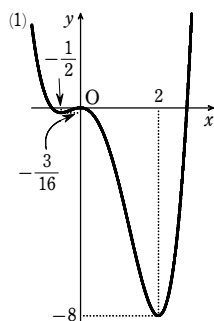
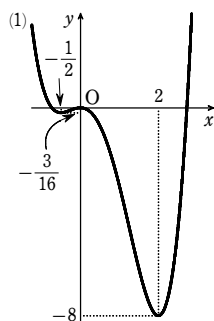
したがって、右の増減表が得られ、条件を満たす。

よって $a = -6, b = 9, c = -5$

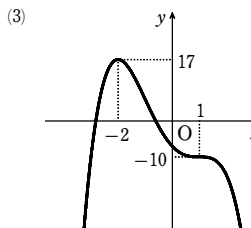
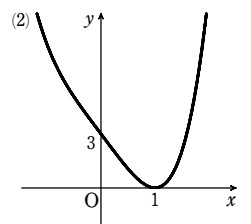
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	極小 -5	↗

2

【解答】 (1) $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{3}{16}$, $x=0$ で極大値 0 , $x=2$ で極小値 -8 , [図]



(3) $x = -2$ で極大値 17 ; [図]



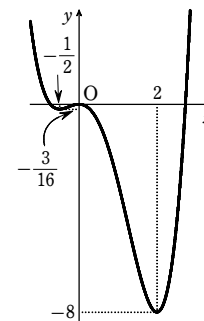
【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= 4x^3 - 6x^2 - 4x \\ &= 2x(2x^2 - 3x - 2) \\ &= 2x(2x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると $x = -\frac{1}{2}, 0, 2$

y の増減表は次のようになる。

x	...	$-\frac{1}{2}$...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	極小 $-\frac{3}{16}$	↗	極大 0	↘	極小 -8	↗



よって、 y は $x = -\frac{1}{2}$ で極小値 $-\frac{3}{16}$, $x=0$ で極大値 0 ,
 $x=2$ で極小値 -8 をとる。

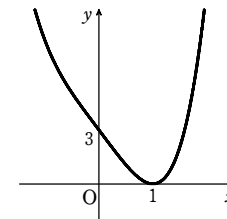
また、グラフは図のようになる。

$$(2) \quad y' = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$y' = 0$ とすると $x = 1$

y の増減表は次のようになる。

x	...	1	...
y'	-	0	+
y	↘	極小 0	↗



よって、 y は $x=1$ で極小値 0 をとる。

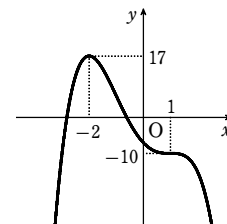
また、グラフは図のようになる。

$$(3) \quad y' = -4x^3 + 12x - 8 = -4(x^3 - 3x + 2) = -4(x-1)^2(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 1, -2$

y の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	1	...
y'	+	0	-	0	-
y	↗	極大 17	↘	-10	↘



よって、 $x = -2$ で極大値 17 をとる。

したがって、グラフは [図]

【注意】 $x=1$ のとき極値をとらないことに注意。

グラフ上の点 $(1, -10)$ における接線の傾きは 0 である。

3

【解答】 (1) $x = -4$ で最大値 21 , $x = 2$ で最小値 -15

(2) $x = 0$ で最大値 4 , $x = -2$ で最小値 -16

【解説】

$$(1) \quad y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -2$

$-4 \leq x \leq 2$ において、 y の増減表は、次のようになる。

x	-4	...	-2	...	0	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	21	↘	1	↗	5	↘	-15

よって、 $x=-4$ で最大値21、 $x=2$ で最小値-15をとる。

(2) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると $x=0, 2$

$-2 \leq x \leq 2$ における y の増減表は、右ようになる。

よって、 $x=0$ で最大値4、

$x=-2$ で最小値-16をとる。

[4]

[解答] $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最大値14; $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{1}{2}$

[解説]

$$f(\theta) = 8\sin^3\theta - 3\cos 2\theta - 12\sin\theta + 7$$

$$= 8\sin^3\theta - 3(1 - 2\sin^2\theta) - 12\sin\theta + 7$$

$$= 8\sin^3\theta + 6\sin^2\theta - 12\sin\theta + 4$$

$\sin\theta = t$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

$g(t) = 8t^3 + 6t^2 - 12t + 4$ とすると

$$g'(t) = 24t^2 + 12t - 12$$

$$= 12(t+1)(2t-1)$$

$g'(t) = 0$ とすると $t = -1, \frac{1}{2}$

$-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表は右ようになる。

よって、 $g(t)$ は $t = -1$ で最大値14、

$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから

$t = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$; $t = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

したがって、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最大値14;

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。

[5]

[解答] $0 < a < \frac{3}{4}, 3 < a$ のとき $M(a) = a^2 - 2a + 1$

$\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき $M(a) = \frac{4}{27}a^3$

[解説]

x	-2	...	0	...	2
y'		+	0	-	0
y	-16	↗	4	↘	0

t	-1	...	$\frac{1}{2}$...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	14	↘	$\frac{1}{2}$	↗	6

$$f'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$= (3x - a)(x - a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{a}{3}, a$

$a > 0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は右ようになる。

ここで、 $x = \frac{a}{3}$ 以外に $f(x) = \frac{4}{27}a^3$ を満たす

x の値を求めると、 $f(x) = \frac{4}{27}a^3$ から $x^3 - 2ax^2 + a^2x - \frac{4}{27}a^3 = 0$

ゆえに $(x - \frac{a}{3})^2(x - \frac{4}{3}a) = 0$ $x \neq \frac{a}{3}$ であるから $x = \frac{4}{3}a$

したがって、 $f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値 $M(a)$ は

[1] $1 < \frac{a}{3}$ すなわち $a > 3$ のとき

$M(a) = f(1)$

[2] $\frac{a}{3} \leq 1 \leq \frac{4}{3}a$ すなわち $\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき

$M(a) = f(\frac{a}{3})$

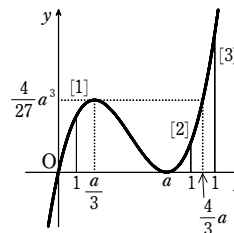
[3] $0 < \frac{4}{3}a < 1$ すなわち $0 < a < \frac{3}{4}$ のとき

$M(a) = f(1)$

以上から $0 < a < \frac{3}{4}, 3 < a$ のとき $M(a) = a^2 - 2a + 1$

$\frac{3}{4} \leq a \leq 3$ のとき $M(a) = \frac{4}{27}a^3$

x	...	$\frac{a}{3}$...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗



[1]

[解答] $a=1, x=-1$ で極小値0

[解説]

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + a(a+4)$

$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとるから $f'(-1) = 0$

よって $-3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + a(a+4) = 0$

ゆえに $a^2 + 2a - 3 = 0$ よって $(a+3)(a-1) = 0$

したがって $a = -3, 1$

[1] $a = -3$ のとき

$f'(x) = -3x^2 - 6x - 3$

$$= -3(x+1)^2$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -1$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = -1$ で極小とはならない。

[2] $a = 1$ のとき

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 5$

$$= -(x+1)(3x-5)$$

$f'(x) = 0$ とすると

$x = -1, \frac{5}{3}$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = -1$ で極小値0をとる。

以上から $a = 1, x = -1$ で極小値0

[2]

[解答] $(a, b) = (3, 5), (-3, -7)$

[解説]

$f(x) = ax^2(x-3) + b = ax^3 - 3ax^2 + b$ であるから

$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 2$

また $f(-1) = -4a + b, f(0) = b, f(1) = -2a + b$

[1] $a > 0$ のとき

$-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-4a + b$	↗	極大 b	↘	$-2a + b$

最小値の候補として、 $f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると、 $a > 0$ であるから

$-4a + b < -2a + b$

よって、最小値は $f(-1) = -4a + b$

また、最大値は $f(0) = b$

ゆえに $b = 5$ ①, $-4a + b = -7$ ②

①を②に代入して $-4a + 5 = -7$

したがって $a = 3$ これは $a > 0$ を満たす。

[2] $a < 0$ のとき

第3講 レベルA

$-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	0	……	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-4a+b$	↘	極小 b	↗	$-2a+b$

最大値の候補として、 $f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると、 $a < 0$ であるから

$$-4a+b > -2a+b$$

よって、最大値は $f(-1) = -4a+b$

また、最小値は $f(0) = b$

ゆえに $-4a+b=5$ ……③、 $b=-7$ ……④

④を③に代入して $-4a-7=5$

したがって $a=-3$ これは $a < 0$ を満たす。

以上から $(a, b) = (3, 5), (-3, -7)$

3

【解答】 底面の半径 4, 高さ 6

【解説】

直円錐を、頂点と底面の直径を通る平面で切断すると、右の図のようになる。

直円柱の底面の半径を r , 高さを h とすると、図より

$$6:r=18:(18-h) \quad \text{よって} \quad 18r=6(18-h)$$

ゆえに $h=18-3r$ ……①

また $0 < r < 6$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 (18-3r) = 3\pi(-r^3+6r^2)$$

$$\text{よって} \quad V' = 3\pi(-3r^2+12r) = -9\pi r(r-4)$$

$$V' = 0 \text{ とすると } r = 0, 4$$

$0 < r < 6$ における V の増減表は、次のようになる。

r	0	…	4	…	6
V'		+	0	-	
V		↗	極大	↘	

よって、 V は $r=4$ のとき極大かつ最大となる。

①から、 $r=4$ のとき $h=6$

したがって、 V が最大となるとき直円柱の底面の半径は 4, 高さは 6 である。

4

【解答】 (1) $1 < a < 2$ のとき $x=a$ で最小値 $2a^3-9a^2+12a$,

$2 \leq a$ のとき $x=2$ で最小値 4

(2) $1 < a < \frac{5}{2}$ のとき $x=1$ で最大値 5; $a = \frac{5}{2}$ のとき $x=1, \frac{5}{2}$ で最大値 5;

$\frac{5}{2} < a$ のとき $x=a$ で最大値 $2a^3-9a^2+12a$

【解説】

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 1, 2$$

y の増減表は右のようになる。

x	…	1	…	2	…
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 5	↘	極小 4	↗

(1) [1] $1 < a < 2$ のとき グラフは図①のようになる。

よって $x=a$ で最小値 $2a^3-9a^2+12a$

[2] $2 \leq a$ のとき グラフは図②, ③, ④のようになる。

よって $x=2$ で最小値 4

(2) $2x^3-9x^2+12x=5$ とすると

$$2x^3-9x^2+12x-5=0$$

$$\text{ゆえに } (x-1)^2(2x-5)=0$$

$$\text{これを解いて } x=1, \frac{5}{2}$$

[1] $1 < a < \frac{5}{2}$ のとき

グラフは図①, ②のようになる。

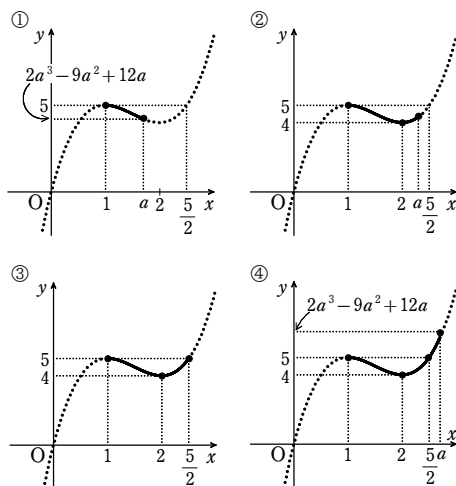
よって $x=1$ で最大値 5

[2] $a = \frac{5}{2}$ のとき グラフは図③のようになる。

よって $x=1, \frac{5}{2}$ で最大値 5

[3] $\frac{5}{2} < a$ のとき グラフは図④のようになる。

よって $x=a$ で最大値 $2a^3-9a^2+12a$



5

【解答】 (ア) 0 (イ) 2 (ウ) $-1 + \log_2(3 \pm \sqrt{5})$ (エ) -10

【解説】

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって、 $f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 2 ととる。

ゆえに、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと $t \geq 2$

$$\text{また } g(x) = 8^x + 8^{-x} - 4(4^x + 4^{-x}) = (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) - 4((2^x + 2^{-x})^2 - 2)$$

$g(x)$ を t で表した式を $h(t)$ とおくと

$$h(t) = t^3 - 3t - 4(t^2 - 2) = t^3 - 4t^2 - 3t + 8$$

よって $h'(t) = 3t^2 - 8t - 3 = (3t+1)(t-3)$

$$h'(t) = 0 \text{ とすると } t = -\frac{1}{3}, 3$$

$t \geq 2$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

したがって、 $h(t)$ すなわち $g(x)$ は $t=3$ のとき

最小値 -10 ととる。

このとき、 $2^x + 2^{-x} = 3$ であるから

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\text{よって } 2^x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ゆえに $x = -1 + \log_2(3 \pm \sqrt{5})$

t	2	…	3	…
$h'(t)$	↘	-	0	+
$h(t)$	-6	↘	-10	↗

第3講 レベルB

1

解答 $0 \leq a < 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = 0$ で極小値 0

$a = 1$ のとき $x = -2$ で極小値 -16

$a > 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = a-1$ で極小値 $-(a-1)^3(a+3)$

解説

$$f'(x) = 12x^3 + 12(3-a)x^2 + 24(1-a)x = 12x\{x^2 + (3-a)x + 2(1-a)\}$$

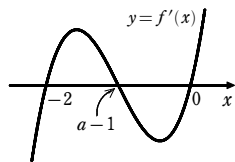
$$= 12x(x+2)(x+1-a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -2, 0, a-1$

[1] $0 \leq a < 1$ のとき $-1 \leq a-1 < 0$

増減表は次のようになる。

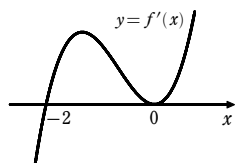
x	...	-2	...	a-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小



[2] $a = 1$ のとき $a-1 = 0$

増減表は次のようになる。

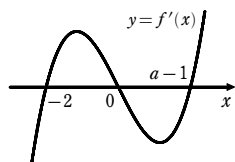
x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	0



[3] $1 < a$ のとき $0 < a-1$

増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	0	...	a-1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小



$$f(x) = x^2\{3x^2 + 4(3-a)x + 12(1-a)\}$$

$$= x^2\{3(x+2)^2 - 4a(x+3)\} \text{ であるから}$$

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot (-4a \cdot 1) = -16a, \quad f(0) = 0$$

$$f(a-1) = (a-1)^2\{3(a+1)^2 - 4a(a+2)\} = -(a-1)^2(a^2 + 2a - 3)$$

$$= -(a-1)^3(a+3)$$

以上から

$0 \leq a < 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = 0$ で極小値 0

$a = 1$ のとき $x = -2$ で極小値 -16

$a > 1$ のとき $x = -2$ で極小値 $-16a$, $x = a-1$ で極小値 $-(a-1)^3(a+3)$

2

解答 $a = -6, b = 9, c = -1$

解説

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f(1) = 1 + a + b + c$ である。

点(2, 1)に関して点(1, a+b+c+1)と対称な点の座標を(X, Y)とすると

$$\frac{1+X}{2} = 2, \quad \frac{a+b+c+1+Y}{2} = 1$$

よって $X = 3, Y = -a - b - c + 1$ ①

点(X, Y)は $y = f(x)$ のグラフ上にあるから

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c$$

①を代入して $-a - b - c + 1 = 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

整理して $5a + 2b + c + 13 = 0$ ②

また、点(2, 1)は $y = f(x)$ のグラフ上にあり、 $x = 1$ で極大値をとるから

$$f(2) = 1, \quad f'(1) = 0$$

ゆえに $8 + 4a + 2b + c = 1$ ③

$$3 + 2a + b = 0 \quad \text{..... ④}$$

②, ③, ④を解いて $a = -6, b = 9, c = -1$

逆に、このとき

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ の増減表は右のようになり、 $x = 1$ で

極大値をとるから、条件に適する。

したがって $a = -6, b = 9, c = -1$

3

解答 (1) $-3 \leq x \leq 3$ (2) $x = 3, y = -6, z = -6$ のとき最小値 18

解説

(1) 条件から $y + z = -4x, yz = 6x^2 - 18$

よって、 y, z は t についての2次方程式 $t^2 + 4xt + 6x^2 - 18 = 0$ ①の2つの解である。①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - (6x^2 - 18) = -2(x+3)(x-3)$$

y, z は実数であるから、 $D \geq 0$ より $-3 \leq x \leq 3$

(2) $-2x^3 + y^2 + z^2 = -2x^3 + (y+z)^2 - 2yz$

$$= -2x^3 + (-4x)^2 - 2(6x^2 - 18) = -2x^3 + 4x^2 + 36$$

この式を $f(x)$ とすると $f'(x) = -6x^2 + 8x = -2x(3x-4)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, \frac{4}{3}$

$-3 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減

表は右のようになる。

x	-3	...	0	...	$\frac{4}{3}$...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$			↘	36	↗	極大	↘

したがって、 $x = 3$ のとき最小値 18 をとる。

このとき、①は $t^2 + 12t + 36 = 0$ すなわち $(t+6)^2 = 0$

y, z はこの方程式の解であるから $y = -6, z = -6$

以上から、 $x = 3, y = -6, z = -6$ のとき最小値 18 をとる。

4

解答 $a < -2$ のとき $g(a) = a^3 - a^2 - 16a + 32, -2 \leq a < 1$ のとき $g(a) = 52$

$1 \leq a < 4$ のとき $g(a) = a^3 - 10a^2 + 17a + 44,$

$4 \leq a$ のとき $g(a) = a^3 - a^2 - 16a + 32$

解説

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 17$$

$$= (x-1)(3x-17)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1, \frac{17}{3}$

増減表から、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

x	...	1	...	$\frac{17}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘	極小

[1] $a + 3 < 1$ すなわち $a < -2$ のとき

$$g(a) = f(a+3) = (a+3)^3 - 10(a+3)^2 + 17(a+3) + 44$$

$$= a^3 - a^2 - 16a + 32$$

[2] $a + 3 \geq 1$ かつ $a < 1$ すなわち $-2 \leq a < 1$ のとき

$$g(a) = f(1) = 52$$

$a \geq 1$ のとき、 $f(a) = f(a+3)$ とすると

$$a^3 - 10a^2 + 17a + 44 = a^3 - a^2 - 16a + 32 \text{ から}$$

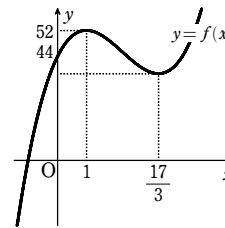
$$9a^2 - 33a - 12 = 0$$

よって $(3a+1)(a-4) = 0$ ゆえに $a = -\frac{1}{3}, 4$

$a \geq 1$ から $a = 4$

[3] $1 \leq a < 4$ のとき $g(a) = f(a) = a^3 - 10a^2 + 17a + 44$

[4] $4 \leq a$ のとき $g(a) = f(a+3) = a^3 - a^2 - 16a + 32$



1

解答 (1) 3個 (2) 1個

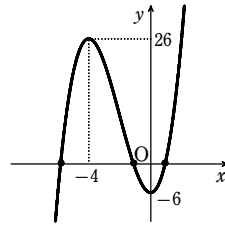
解説

(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$ とおくと $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, -4$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	-4	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり、

このグラフと x 軸の共有点の個数は 3 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 3 個

(2) $f(x) = 2x^3 + 6x + 1$ とおくと $f'(x) = 6x^2 + 6 = 6(x^2 + 1)$

$f'(x) > 0$ であるから、 $f(x)$ は単調に増加する。

また $f(-1) = -7, f(0) = 1$

よって、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 1 個

2

解答 $a < -3, 24 < a$ のとき 1; $a = -3, 24$ のとき 2; $-3 < a < 24$ のとき 3

解説

方程式を変形すると $2x^3 + 9x^2 - 3 = a$

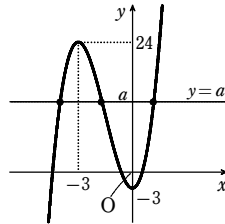
よって、 $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 3$ とおくと、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が、方程式の異なる実数の解の個数に一致する。

$$f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, -3$

$f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	24	↘	-3	↗



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになり、

したがって、右のグラフから、求める解の個数は

$a < -3, 24 < a$ のとき 1(個)

$a = -3, 24$ のとき 2(個)

$-3 < a < 24$ のとき 3(個)

3

解答 略

解説

$f(x) = (x^3 + 12) - 9x$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{3}$

$x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は、右のようになる。

よって、 $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値は

x	0	...	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	12	↘	$12 - 6\sqrt{3}$	↗

$$f(\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3} = 6(2 - \sqrt{3}) > 0$$

ゆえに、 $x \geq 0$ のとき $f(x) > 0$ したがって $x^3 + 12 > 9x$

4

解答 $-3 < a < 5$

解説

$y' = 3x^2 + 6x + 1$ であるから、曲線 C 上の点 $(t, t^3 + 3t^2 + t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + 3t^2 + t) = (3t^2 + 6t + 1)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 + 6t + 1)x - 2t^3 - 3t^2$

この接線が点 $(1, a)$ を通るとすると

$$-2t^3 + 6t + 1 = a \quad \text{..... ①}$$

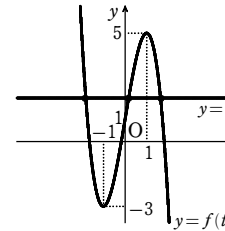
$f(t) = -2t^3 + 6t + 1$ とすると

$$f'(t) = -6t^2 + 6 = -6(t+1)(t-1)$$

$f'(t) = 0$ とすると $t = \pm 1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	-1	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	極小	↗	極大	↘
		-3		5	



3次関数のグラフでは、接点の異なる接線が異なるから、 t の3次方程式①が異なる3個の実数解をもつとき、点 A から曲線 C に3本の接線が引ける。

したがって、曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ が異なる3点で交わる条件を求めて

$$-3 < a < 5$$

5

解答 $a < 0, 2 < a$

解説

$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 2a$ とおく。

方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつための必要十分条件は、 $f(x)$ が極値をもち、更に極大値と極小値が異符号であること、すなわち

$$(\text{極大値}) \times (\text{極小値}) < 0$$

となることである。

$$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6\{x^2 - (a+1)x + a\} = 6(x-1)(x-a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1, a$

よって、 $f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつのは

$$a \neq 1 \quad \text{..... ①} \quad \text{かつ} \quad f(1)f(a) < 0$$

のときである。

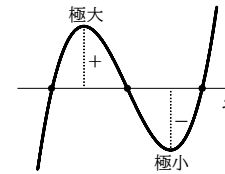
$$f(1)f(a) < 0 \quad \text{から} \quad (a-1)(-a^3 + 3a^2 - 2a) < 0$$

$$\text{よって} \quad a(a-1)(a^2 - 3a + 2) > 0 \quad \text{すなわち} \quad a(a-1)^2(a-2) > 0$$

$$\text{①より} \quad (a-1)^2 > 0 \quad \text{であるから} \quad a(a-2) > 0$$

ゆえに $a < 0, 2 < a$ (これは①を満たす)

したがって、求める a の値の範囲は $a < 0, 2 < a$



1

解答 (1) 2個 (2) 1個

解説

(1) $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ ① とすると

$$y' = -3x^2 - 6x = -3x(x+2)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -2$

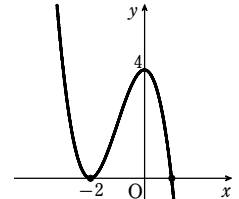
y の増減表は右のようになる。

よって、関数①のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点は2個である。

したがって、方程式 $-x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ の実数解は2個である。

x	...	-2	...	0	...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小	↗	極大	↘
		0		4	



(2) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ ① とすると

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$y' = 0$ とすると $x = 0, -1$

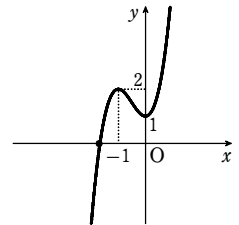
y の増減表は右のようになる。

よって、関数①のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点は1個である。

したがって、方程式 $2x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ の実数解は1個である。

x	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗
		2		1	



2

解答 $a < -2, 2 < a$ のとき 1個; $a = \pm 2$ のとき 2個; $-2 < a < 2$ のとき 3個

解説

方程式を変形すると $-x^3 + 3x = a$

$f(x) = -x^3 + 3x$ とおくと $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

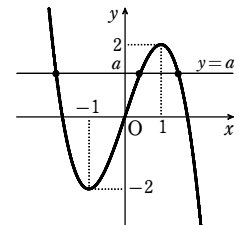
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が、

方程式の異なる実数解の個数に一致する。

よって、右の図より $a < -2, 2 < a$ のとき 1個;

$a = \pm 2$ のとき 2個; $-2 < a < 2$ のとき 3個



3

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $f(x) = (2x^3 + \frac{1}{27}) - x^2$ とすると $f'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x - 1)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0, \frac{1}{3}$

$x \geq 0$ において、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{3}$...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	↘	0	↗

よって、 $x \geq 0$ において、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{3}$ で最小値 0 をとる。

したがって、 $x \geq 0$ のとき、 $f(x) \geq 0$ であるから

$(2x^3 + \frac{1}{27}) - x^2 \geq 0$ すなわち $2x^3 + \frac{1}{27} \geq x^2$

【参考】 等号が成り立つのは、 $x = \frac{1}{3}$ のときである。

(2) $f(x) = (x^3 + 16) - 12x$ とすると

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm 2$

$x \geq 2$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $x > 2$ のとき $f(x) > 0$

したがって $x^3 + 16 > 12x$

【別解】 $x > 2$ のとき $f'(x) > 0$

ゆえに、 $x > 2$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

よって、 $x > 2$ のとき $f(x) > f(2) = 0$ すなわち $f(x) > 0$

$x = 2$ で最小値 0

をとる。

よって、 $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$

したがって $x^4 - 16 \geq 32(x-2)$

4

【解答】 $k < -1, 0 < k$ のとき 1 本; $k = -1, 0$ のとき 2 本; $-1 < k < 0$ のとき 3 本

【解説】

$y' = -3x^2 + 6x$ であるから、曲線 C 上の点 $(t, -t^3 + 3t^2)$ における接線の方程式は

$y - (-t^3 + 3t^2) = (-3t^2 + 6t)(x - t)$

この直線が点 $(0, k)$ を通るとき $k + t^3 - 3t^2 = 3t^3 - 6t^2$

よって $2t^3 - 3t^2 = k$ …… ①

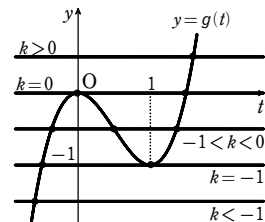
3 次関数のグラフでは、接点と異なる点で接線が異なるから、 t の 3 次方程式 ① の実数解の個数が、求める接線の本数に等しい。

つまり、 $g(t) = 2t^3 - 3t^2$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の個数が接線の本数に等しい。

$g'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

$g(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	...	0	...	1	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	極大	↘	極小	↗
		0		-1	



よって、 $y = g(t)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数を調べると、求める接線の本数は

$k < -1, 0 < k$ のとき 1 本

$k = -1, 0$ のとき 2 本

$-1 < k < 0$ のとき 3 本

5

【解答】 $p > \frac{1}{4}$

【解説】

$f(x) = x^3 - 3px + p$ とおく。

方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は、

$f(x)$ が極値をもち、さらに、極大値と極小値が異符号であること

すなわち (極大値) × (極小値) < 0

となることである。

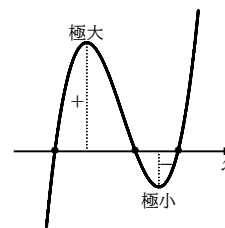
$f'(x) = 3x^2 - 3p = 3(x^2 - p)$

$f(x)$ が極値をもつ条件は $p > 0$

このとき、 $f'(x) = 0$ から $x = \pm\sqrt{p}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{p}$...	\sqrt{p}	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



よって $f(-\sqrt{p}) \cdot f(\sqrt{p}) < 0$

すなわち $p(2\sqrt{p} + 1) \cdot p(-2\sqrt{p} + 1) < 0$

ゆえに $p^2(1 - 4p) < 0$

$p > 0$ より $p^2 > 0$ であるから $1 - 4p < 0$

したがって $p > \frac{1}{4}$

1

【解答】 1 個

【解説】

$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ とおくと $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = 0, 1$

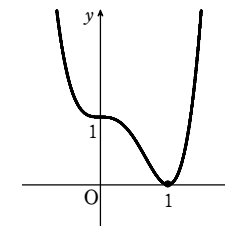
y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	1	...
y'	-	0	-	0	+
y	↘	1	↘	0	↗

よって、この関数のグラフは右の図のようになり、

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

ゆえに、方程式の異なる実数解の個数は 1 個



2

【解答】 略

【解説】

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 1$ とおくと $f(0) = 1, f(1) = -1$

よって $f(0)f(1) < 0$

ゆえに、方程式 $f(x) = 0$ は区間 $0 < x < 1$ に実数解をもつ。

3

【解答】 (1) $-1 < k < 3$ (2) $0 < c < 4\sqrt{2}$

【解説】

(1) $x^3 - 2x + 1 = x + k$ とすると $x^3 - 3x + 1 = k$

曲線 $y = x^3 - 2x + 1$ と直線 $y = x + k$ が異なる 3 点を共有するための条件は、曲線

$y = x^3 - 3x + 1$ …… ① と直線 $y = k$ が異なる 3 点を共有することである。

① から $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = \pm 1$

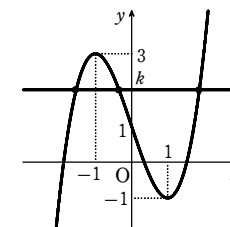
$y = x^3 - 3x + 1$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗
		3		-1	

よって、曲線 ① の概形は図のようになる。

曲線 ① と直線 $y = k$ が異なる 3 つの共有点をもつよ

うな k の値の範囲は、図から $-1 < k < 3$



(2) 方程式を変形して $-x^3 + 6x = c$ …… ①

$y = -x^3 + 6x$ とすると

$y' = -3x^2 + 6 = -3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

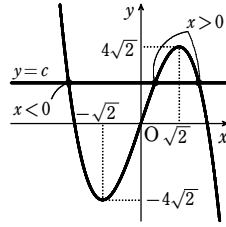
$y' = 0$ とすると $x = \pm\sqrt{2}$

y の増減表は右のようになり、更に $x = 0$ の

x	...	$-\sqrt{2}$...	$\sqrt{2}$...
y'	-	0	+	0	-
y	↘	極小	↗	極大	↘
		$-4\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$	

とき $y=0$ であるから、 $y=-x^3+6x$ のグラフは右図のようになる。

方程式①が、2つの異なる正の解と1つの負の解をもつための条件は、このグラフと直線 $y=c$ が、 $x>0$ の範囲で2個、 $x<0$ の範囲で1個の共有点をもつことである。よって、図から $0<c<4\sqrt{2}$

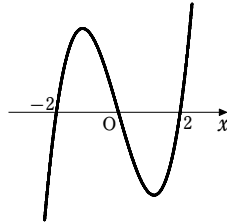


4

【解答】 (1) $-2<x<0, 2<x$ (2) $x=-1, 2\leq x$

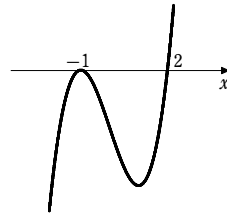
【解説】

(1) $y=x^3-4x$ ……①とおくと $y=x(x+2)(x-2)$
 $y=0$ の解から、 x 軸との共有点の x 座標は $x=-2, 0, 2$ で、 x^3 の係数が正。
 よって、①のグラフは右図のようになる。
 求める不等式の解は、①のグラフの $y>0$ となる x の値の範囲であるから $-2<x<0, 2<x$



(2) $y=x^3-3x-2$ ……①とおくと

$y=(x+1)^2(x-2)$
 $y=0$ の解から、 x 軸との共有点の x 座標は $x=-1, 2$ で、 x^3 の係数が正。
 よって、①のグラフは右図のようになる。
 求める不等式の解は、①のグラフの $y\geq 0$ となる x の値の範囲であるから $x=-1, 2\leq x$



5

【解答】 (ア) 2 (イ) $\frac{1}{2}$ (ウ) 4

【解説】

$\log_2 x = t$ とおくと、 t の値1つに対して、 x の値が必ず1つ対応する。

ゆえに、方程式 $t^3-3t=k$ がちょうど2つの異なる解をもつときを考える。

$f(t) = t^3-3t$ とすると $f'(t) = 3t^2-3 = 3(t+1)(t-1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	2	↘	-2	↗

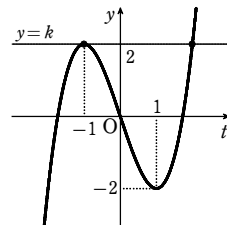
よって、 $y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=k$ ($k>0$) がちょうど2つの共有点をもつような k の値は $k=7^2$

このとき、 t の方程式は $t^3-3t=2$

ゆえに $(t+1)^2(t-2)=0$ よって $t=-1, 2$

すなわち $\log_2 x = -1, 2$ したがって $x = \frac{1}{2}, 4$



1

【解答】 6

【解説】

$f(x) = x^3 + 32 - px^2$ とおく。

$x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つような定数 p の条件を求める。

$f(x) = x^3 - px^2 + 32$ から $f'(x) = 3x^2 - 2px = x(3x - 2p)$

$f'(x)=0$ となる x の値は $x=0, \frac{2}{3}p$

[1] $p\leq 0$ のとき

$x\geq 0$ において $f'(x)\geq 0$ であるから、 $f(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加する。

$f(0)=32$ より、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つ。

[2] $p>0$ のとき

$x\geq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つ

条件は $-\frac{4}{27}p^3 + 32\geq 0$

整理すると $p^3\leq 8\cdot 27$

$p>0$ であるから $0<p\leq 6$

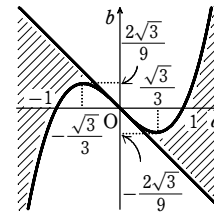
[1], [2] から、 $x\geq 0$ のとき $f(x)\geq 0$ が成り立つような p の条件は $p\leq 6$

ゆえに、求める p の最大値は 6

2

【解答】 (図) 境界線を含まない。

x	0	…	$\frac{2}{3}p$	…
$f'(x)$	↗	-	0	+
$f(x)$	32	↘	$-\frac{4}{27}p^3 + 32$	↗



【解説】

$y=x^3-x$ から $y'=3x^2-1$

よって、曲線上の点 (t, t^3-t) における接線の方程式は

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

すなわち $y=(3t^2-1)x-2t^3$

この直線が点 (a, b) を通るとき $b=(3t^2-1)a-2t^3$

整理して $2t^3-3at^2+a+b=0$ ……①

3次関数のグラフでは、接点と異なる接線も異なるから、点 (a, b) から3本の相異なる接線が引けるための必要十分条件は、 t の3次方程式①が異なる3つの実数解をもつことである。

よって、 $f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とすると、 $f(t)$ は極値をもち、極大値と極小値の積が負となる。

$f'(t) = 6t(t-a)$ であるから、求める条件は

$a\neq 0$ かつ $f(0)f(a) < 0$

すなわち $(a+b)(b-a^3+a) < 0$ ……②

②で $a=0$ とすると $b^2 < 0$ となり、これを満たす実数 b は存在しない。ゆえに、条件

$a\neq 0$ は②に含まれるから、求める条件は②である。

②から

$$\begin{cases} a+b > 0 \\ b-a^3+a < 0 \end{cases}$$

または $\begin{cases} a+b < 0 \\ b-a^3+a > 0 \end{cases}$

すなわち

$$\begin{cases} b > -a \\ b < a^3 - a \end{cases}$$

または $\begin{cases} b < -a \\ b > a^3 - a \end{cases}$

よって、求める範囲は図の斜線部分。

ただし、境界線を含まない。

3

【解答】 (1) $-4 < c < \frac{17}{27}$

(2) $-4 < c < -1, \frac{-5-\sqrt{33}}{4} < \alpha < -2, \frac{-5+\sqrt{33}}{4} < \gamma < \frac{1}{2}$

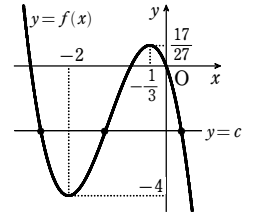
【解説】

(1) $2x^3+7x^2+4x+c=0$ から $-2x^3-7x^2-4x=c$

$f(x) = -2x^3-7x^2-4x$ とおくと $f'(x) = -6x^2-14x-4 = -2(3x+1)(x+2)$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-2	…	$-\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-4	↗	$\frac{17}{27}$	↘



ゆえに、 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

求める条件は、 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=c$

が異なる3個の共有点をもつことであるから $-4 < c < \frac{17}{27}$

(2) $f(-1) = -1$ であるから、 $\alpha < \beta < \gamma$ に注意すると、右の図より、 $\beta < -1$ となる c の

値の範囲は $-4 < c < -1$

また、 $c = -1$ とすると

$$2x^3+7x^2+4x-1=0$$

すなわち $(x+1)(2x^2+5x-1)=0$

よって $x = -1, \frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

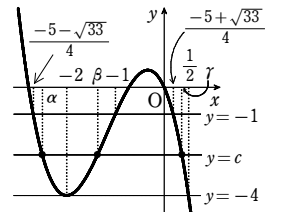
さらに、 $c = -4$ とすると

$$2x^3+7x^2+4x-4=0$$

すなわち $(x+2)^2(2x-1)=0$ よって $x = -2, \frac{1}{2}$

したがって、図より、 α, γ の値の範囲は

$$\frac{-5-\sqrt{33}}{4} < \alpha < -2, \frac{-5+\sqrt{33}}{4} < \gamma < \frac{1}{2}$$



章末問題A

1

【解答】(1) 略 (2) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

【解説】

(1) $f(x) = (x+2)f'(x) - \{f'(x)\}^2$ から $\{f'(x)\}^2 = (x+2)f'(x) - f(x)$ ……①
 $f(x)$ が n 次式 ($n \geq 3$) であるとする、 $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であるから、①の左辺は $2(n-1)$ 次式となる。

一方、 $(x+2)f'(x)$ 、 $f(x)$ がともに n 次式であることから、①の右辺は n 次以下の多項式または 0 である。

よって、①の両辺の次数が等しくなるための条件は $2(n-1) \leq n$

これを解くと $n \leq 2$ これは、 $n \geq 3$ と矛盾する。

したがって、 $f(x)$ は 3 次以上にならない。

(2) (1) より、 $f(x)$ は 2 次以下の多項式で表されるから、 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数) とおける。

このとき $f'(x) = 2ax + b$

よって、①から $(2ax + b)^2 = (x+2)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)$

展開して整理すると $(4a^2 - a)x^2 + (4ab - 4a)x + b^2 - 2b + c = 0$

これが x についての恒等式であるから

$$4a^2 - a = 0 \dots\dots ②, \quad 4ab - 4a = 0 \dots\dots ③, \quad b^2 - 2b + c = 0 \dots\dots ④$$

$$\text{また、} f'(1) = \frac{3}{2} \text{ から } 2a \cdot 1 + b = \frac{3}{2} \quad \text{すなわち } b = -2a + \frac{3}{2} \dots\dots ⑤$$

$$② \text{ から } a(4a - 1) = 0 \quad \text{ゆえに } a = 0, \frac{1}{4}$$

[1] $a = 0$ のとき

$$⑤ \text{ から、} b = \frac{3}{2} \text{ であり、これは } ③ \text{ を満たす。}$$

$$\text{また、} ④ \text{ から } c = -b^2 + 2b = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{よって } f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

[2] $a = \frac{1}{4}$ のとき

$$⑤ \text{ から、} b = 1 \text{ であり、これは } ③ \text{ を満たす。}$$

$$\text{また、} ④ \text{ から } c = -b^2 + 2b = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$$

$$\text{よって } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

2

【解答】(1) $b = 4 - a$, (2), (1) (2) $a = 3$ (3) $\frac{2\sqrt{26}}{13}$

【解説】

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 9$ から $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$

接線 l と接線 m が平行になるとき、 $f'(a) = f'(b)$ であるから

$$3a^2 - 12a + 4 = 3b^2 - 12b + 4$$

$$\text{ゆえに } 3(a^2 - b^2) - 12(a - b) = 0$$

$$\text{よって } 3(a - b)(a + b - 4) = 0$$

$$a \neq b \text{ であるから } a + b - 4 = 0 \quad \text{すなわち } b = 4 - a$$

次に、線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$

ここで、 $a + b - 4 = 0$ から $a + b = 4$

$$\begin{aligned} \text{また } f(a) + f(b) &= (a^3 + b^3) - 6(a^2 + b^2) + 4(a + b) + 9 \cdot 2 \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 6[(a + b)^2 - 2ab] + 4(a + b) + 18 \\ &= 4^3 - 3ab \cdot 4 - 6(4^2 - 2ab) + 4 \cdot 4 + 18 = 2 \end{aligned}$$

したがって、線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right)$ すなわち (2, 1)

(2) 接線 l の方程式は $y - (a^3 - 6a^2 + 4a + 9) = (3a^2 - 12a + 4)(x - a)$

$$\text{すなわち } y = (3a^2 - 12a + 4)x - 2a^3 + 6a^2 + 9 \dots\dots ①$$

この直線が点 (2, -1) を通るとき

$$-1 = 2(3a^2 - 12a + 4) - 2a^3 + 6a^2 + 9$$

$$\text{よって } 2a^3 - 12a^2 + 24a - 18 = 0$$

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 9 = 0$$

$$(a - 3)(a^2 - 3a + 3) = 0$$

a は実数であるから $a = 3$

(3) ①に $a = 3$ を代入して $y = -5x + 9$

$$\text{また、(1) から、} a = 3 \text{ のとき } b = 4 - a = 1$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 9 = 8 \text{ であるから } B(1, 8)$$

$l // m$ であるから、2 接線 l, m 間の距離は、直線 m 上の点 B と直線 l すなわち $5x + y - 9 = 0$ の距離を求めればよい。

$$\text{よって } \frac{|5 \cdot 1 + 8 - 9|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$$

3

【解答】(1) $a = -1, b = -1, c = 1; y = 2x + 2$

$$(2) a = 6 \text{ のとき } y = -7x + 2, a = -21 \text{ のとき } y = -4x - 13$$

【解説】

(1) $f(x) = x^3 + ax, g(x) = bx^2 + c$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx$$

2 曲線が点 (-1, 0) を通り、この点で共通な接線をもつから

$$f(-1) = g(-1) = 0, f'(-1) = g'(-1)$$

$$\text{よって } -1 - a = 0, b + c = 0, 3 + a = -2b$$

$$\text{これを解くと } a = -1, b = -1, c = 1$$

$$\text{このとき、} f'(x) = 3x^2 - 1 \text{ から } f'(-1) = 2$$

ゆえに、点 (-1, 0) における共通の接線の方程式は

$$y = 2(x + 1) \quad \text{すなわち } y = 2x + 2$$

(2) $f(x) = x^3 - x^2 - 12x - 1, g(x) = -x^3 + 2x^2 + a$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 12, g'(x) = -3x^2 + 4x$$

2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = p$ の点で接するための条件は

$$f(p) = g(p), f'(p) = g'(p)$$

$$\text{よって } p^3 - p^2 - 12p - 1 = -p^3 + 2p^2 + a, 3p^2 - 2p - 12 = -3p^2 + 4p$$

$$\text{それぞれ整理して } a = 2p^3 - 3p^2 - 12p - 1 \dots\dots ①,$$

$$p^2 - p - 2 = 0 \dots\dots ②$$

$$② \text{ から } (p + 1)(p - 2) = 0 \quad \text{ゆえに } p = -1, 2$$

$$① \text{ から } p = -1 \text{ のとき } a = 6, p = 2 \text{ のとき } a = -21$$

曲線 $y = x^3 - x^2 - 12x - 1$ 上の点 $x = p$ における接線の方程式は

$$y - (p^3 - p^2 - 12p - 1) = (3p^2 - 2p - 12)(x - p)$$

$$\text{すなわち } y = (3p^2 - 2p - 12)x - 2p^3 + p^2 - 1$$

求める接線の方程式は

$$a = 6 \quad (p = -1) \text{ のとき } \quad y = -7x + 2,$$

$$a = -21 \quad (p = 2) \text{ のとき } \quad y = -4x - 13$$

4

【解答】曲線 $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ の $x < -1, 0 < x$ の部分

【解説】

$f(x) = x^3 + 3px^2 + 3px + 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 6px + 3p = 3(x^2 + 2px + p)$$

曲線 $y = f(x)$ が極大、極小となる点をもつための条件は、

$$\text{方程式 } f'(x) = 0 \quad \text{すなわち } x^2 + 2px + p = 0 \dots\dots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって、①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = p^2 - p > 0 \quad \text{これを解いて } p < 0, 1 < p \dots\dots ②$$

①の 2 つの解を α, β とすると、 α, β は 2 点 A, B の x 座標を表す。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -2p, \alpha\beta = p$

線分 AB の中点 M の座標を (X, Y) とおくと

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = -p \dots\dots ③$$

$$Y = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

ここで $f(\alpha) + f(\beta) = (\alpha^3 + \beta^3) + 3p(\alpha^2 + \beta^2) + 3p(\alpha + \beta) + 2$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3p[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + 3p(\alpha + \beta) + 2$$

$$= (-2p)^3 - 3p(-2p) + 3p[(-2p)^2 - 2p] + 3p(-2p) + 2$$

$$= 4p^3 - 6p^2 + 2$$

$$\text{よって } Y = 2p^3 - 3p^2 + 1 \dots\dots ④$$

$$③ \text{ から } p = -X \dots\dots ⑤$$

これを④に代入して

$$Y = 2(-X)^3 - 3(-X)^2 + 1 \quad \text{ゆえに } Y = -2X^3 - 3X^2 + 1$$

また、⑤を②に代入して

$$-X < 0, 1 < -X \quad \text{よって } X < -1, 0 < X$$

よって、点 M は、曲線 $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ の $x < -1, 0 < x$ の部分にある。

逆に、この図形上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点 M の軌跡は 曲線 $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ の $x < -1, 0 < x$ の部分

5

【解答】(a, b) = (3, 5), (-3, 1)

【解説】

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{2}{3}a$$

$$[1] a = 0 \text{ のとき } f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

よって、 $f(x)$ は単調に増加するから、極値をもたない。

章末問題A

したがって、この場合は不適。

[2] $a > 0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右ようになる。

よって、求める条件は

$$f(0) = 5, f\left(\frac{2}{3}a\right) = 1$$

$$f(0) = 5 \text{ から } b = 5 \quad \dots\dots ①$$

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) = 1 \text{ から } -\frac{4}{27}a^3 + b = 1 \quad \dots\dots ②$$

$$① \text{ を } ② \text{ に代入して整理すると } a^3 = 27$$

a は実数であるから $a = 3$

これは $a > 0$ を満たす。

[3] $a < 0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右ようになる。

よって、求める条件は

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) = 5, f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) = 5 \text{ から } -\frac{4}{27}a^3 + b = 5 \quad \dots\dots ③$$

$$f(0) = 1 \text{ から } b = 1 \quad \dots\dots ④$$

$$④ \text{ を } ③ \text{ に代入して整理すると } a^3 = -27$$

a は実数であるから $a = -3$

これは $a < 0$ を満たす。

以上から $a = 3, b = 5$ または $a = -3, b = 1$

[6]

[解答] (1) $a < 2, 2 < a$

(2) $a < 2$ のとき $x = a$ で極大値 $-a^3 + 6a^2$, $x = 2$ で極小値 $12a - 8$
 $a > 2$ のとき $x = 2$ で極大値 $12a - 8$, $x = a$ で極小値 $-a^3 + 6a^2$

(3) $a = \frac{2}{3}, 6$

[解説]

$$(1) f'(x) = 6x^2 - 6(a+2)x + 12a = 6\{x^2 - (a+2)x + 2a\}$$

$$= 6(x-2)(x-a)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 2, a$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、2次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことである。

よって $a \neq 2$ すなわち $a < 2, 2 < a$

(2) [1] $a < 2$ のとき、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	a	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $-a^3 + 6a^2$	↘	極小 $12a - 8$	↗

よって、 $f(x)$ は $x = a$ で極大値 $-a^3 + 6a^2$, $x = 2$ で極小値 $12a - 8$ をとる。

[2] $a > 2$ のとき、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}a$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

x	...	$\frac{2}{3}a$...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

x	...	2	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $12a - 8$	↘	極小 $-a^3 + 6a^2$	↗

よって、 $f(x)$ は $x = 2$ で極大値 $12a - 8$, $x = a$ で極小値 $-a^3 + 6a^2$ をとる。

(3) (2) の結果を利用する。

[1] $a < 2$ のとき

極小値が0であるとき $12a - 8 = 0$

これを解いて $a = \frac{2}{3}$ ($a < 2$ を満たす)

[2] $a > 2$ のとき

極小値が0であるとき $-a^3 + 6a^2 = 0$

よって $a^2(a - 6) = 0$ $a > 2$ であるから $a = 6$

したがって $a = \frac{2}{3}, 6$

[7]

[解答] (1) $y = -\frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t$ (2) $x = \frac{\pi}{2}, \pi$ で最大値1; $x = 0$ で最小値-1

[解説]

$$(1) y = \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

ここで、 $t = \sin x - \cos x$ の両辺を2乗すると $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

$$\text{よって } \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

$$\text{したがって } y = t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) = -\frac{t^3}{2} + \frac{3}{2}t$$

$$(2) t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ であるから } -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{よって、} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ であるから } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$(1) \text{ から } \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ とすると } t = \pm 1$$

$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における y の増減表は右のようになる。

t	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	-1	↗	極大 1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに、 y は $t = 1$ で極大かつ最大、 $t = -1$ で最小となる。

$0 \leq x \leq \pi$ であるから

$$t = 1 \text{ となるのは、} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ から } x = \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$t = -1 \text{ となるのは、} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ から } x = 0$$

よって、 y は $x = \frac{\pi}{2}, \pi$ で最大値1; $x = 0$ で最小値-1をとる。

[8]

[解答] (1) $t^3 - 3t + a = 0$

(2) $a \leq 0, a = 2$ のとき 1個, $0 < a < 2$ のとき 2個, $a > 2$ のとき なし

[解説]

$$(1) t = 2^x \text{ から } f(x) = 8^x - 3 \cdot 2^x + a = (2^x)^3 - 3 \cdot 2^x + a = t^3 - 3t + a$$

よって $t^3 - 3t + a = 0$

$$(2) t = 2^x \text{ から } t > 0$$

また、 $t^3 - 3t + a = 0$ から $-t^3 + 3t = a$

よって、 $t^3 - 3t + a = 0$ の異なる実数解の個数は

曲線 $y = -t^3 + 3t$ ① と直線 $y = a$

の共有点の個数と等しい。

$$① \text{ において } y' = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$$

ゆえに、 $t > 0$ における $y = -t^3 + 3t$ の増減表は右のようになる。

よって、曲線 ① は右の図のようになる。

ゆえに、 $t^3 - 3t + a = 0$ の異なる実数解の個数は

$a \leq 0, a = 2$ のとき 1個

$0 < a < 2$ のとき 2個

$a > 2$ のとき なし

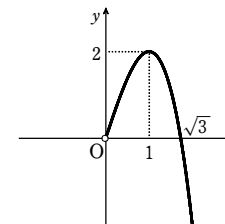
$t > 0$ を満たす1つの t に対して、 x が1つ決まるから、 $f(x) = 0$ の解の個数は

$a \leq 0, a = 2$ のとき 1個

$0 < a < 2$ のとき 2個

$a > 2$ のとき なし

t	0	...	1	...
y'		+	0	-
y		↗	2	↘



章末問題B

1

【解答】(1) $xf'(a)+f(a)-af'(a)$ (2) $a=n, b=-n-1$

【解説】

(1) $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $px+q$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q \quad (p, q \text{ は定数}) \quad \dots\dots ①$$

この $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p \quad \dots\dots ②$$

①, ②に $x=a$ を代入すると

$$f(a)=pa+q, \quad f'(a)=p$$

よって $p=f'(a), q=f(a)-af'(a)$

したがって, 求める余りは $xf'(a)+f(a)-af'(a)$

(2) $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ から $f'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}$

(1) から, $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは

$$xf'(1)+f(1)-f'(1)$$

と表される。 $f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるための条件は

$$f'(1)=0 \quad \text{かつ} \quad f(1)-f'(1)=0$$

すなわち $f(1)=0$ かつ $f'(1)=0$

$$f(1)=a+b+1=0 \quad \dots\dots ③$$

$$f'(1)=(n+1)a+nb=0 \quad \dots\dots ④$$

④-③ $\times n$ から $a-n=0$ すなわち $a=n$

これを①に代入して $b=-n-1$

2

【解答】(1) $Q(-2a, -8a^3+2ka)$ (2) $k \geq \frac{4}{3}$

【解説】

(1) $y'=3x^2-k$ から, 接線 l の方程式は

$$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$$

すなわち $y=(3a^2-k)x-2a^3$

接線 l と曲線 C の交点 Q の x 座標については, y を消去して

$$x^3-kx=(3a^2-k)x-2a^3 \quad \text{よって} \quad (x-a)^2(x+2a)=0$$

$x \neq a$ であるから $Q(-2a, -8a^3+2ka)$

(2) 点 Q における接線の傾きは $3 \cdot (-2a)^2-k=12a^2-k$

接線が直交するための条件は $(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

ゆえに $36(a^2)^2-15ka^2+k^2+1=0 \quad \dots\dots ①$

$a^2=t$ ($t>0$) とおくと $36t^2-15kt+k^2+1=0 \quad \dots\dots ①'$

①' を満たす実数 a ($\neq 0$) が存在するから, ①' は少なくとも1つの正の解をもつ。

①' の判別式を D とすると

$$D=(-15k)^2-4 \cdot 36(k^2+1)=9(9k^2-16)=9(3k+4)(3k-4) \geq 0$$

①' の解を α, β とすると $\alpha\beta = -\frac{k^2+1}{36} > 0$

よって, α と β はともに正で $\alpha+\beta = \frac{15k}{36} > 0$

ゆえに $(k \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq k)$ かつ $k > 0$ したがって $k \geq \frac{4}{3}$

3

【解答】(1) $y = -\frac{1}{2a}(x-\sqrt{a})$ (2) $a = \sqrt{2}$

【解説】

$$(1) y = x^3 - ax = x(x^2 - a) \\ = x(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$y=0$ とすると $x=0, \pm\sqrt{a}$

よって $A(\sqrt{a}, 0)$

また $y'=3x^2-a$

ゆえに, 点 A における接線の傾きは

$$3(\sqrt{a})^2 - a = 2a$$

ゆえに, 点 A における法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2a}(x - \sqrt{a})$$

(2) $y = x^3 - ax$ と $y = -\frac{1}{2a}(x - \sqrt{a})$ から, y を消去すると

$$x^3 - ax = -\frac{1}{2a}(x - \sqrt{a})$$

ゆえに $x(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) + \frac{1}{2a}(x - \sqrt{a}) = 0$

よって $(x - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a}x + \frac{1}{2a}) = 0$

ゆえに, 題意を満たすための条件は, 2次方程式 $x^2 + \sqrt{a}x + \frac{1}{2a} = 0 \quad \dots\dots ①$ が

$x \neq \sqrt{a}$ である重解をもつことである。

ここで, $a > 0$ であるから

$$(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{2a} = 2a + \frac{1}{2a} > 0$$

よって, ①は $x = \sqrt{a}$ を解にもたないから, ①の判別式 D について

$$D = (\sqrt{a})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2a} = 0$$

ゆえに $a = \frac{2}{a}$ よって $a^2 = 2$

$a > 0$ であるから $a = \sqrt{2}$

4

【解答】(1) 略 (2) $a=1, m=3$

【解説】

(1) $f(x) = x^3 - 3ax^2$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 6ax$

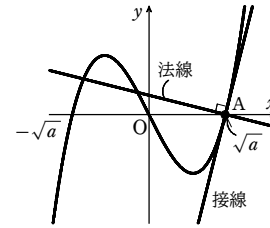
傾きが m である2本の接線が存在するから, 方程式 $3x^2 - 6ax = m$ は異なる2つの実数解をもつ。

接点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると, これらは方程式 $3x^2 - 6ax - m = 0$ の実数解である。

解と係数の関係により $\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = -\frac{m}{3} \quad \dots\dots ①$

線分 AB の中点 C の座標を (X, Y) とすると

$$X = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a$$



$$Y = \frac{1}{2} \{ (\alpha^3 - 3a\alpha^2) + (\beta^3 - 3a\beta^2) \} = \frac{1}{2} \{ \alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2) \}$$

ここで $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4a^2 + \frac{2}{3}m$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 8a^3 + 2am$$

よって $Y = \frac{1}{2} \{ 8a^3 + 2am - 3a(4a^2 + \frac{2}{3}m) \} = -2a^3$

ここで, $-2a^3 = a^3 - 3a \cdot a^2$ であるから, $C(a, -2a^3)$ は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にある。

(2) 2次方程式 $3x^2 - 6ax - m = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-3a)^2 - 3 \cdot (-m) > 0$$

よって $3a^2 + m > 0 \quad \dots\dots ②$

$C(a, -2a^3)$ は線分 AB の中点であるから, $y = -x - 1$ 上にある。

$-2a^3 = -a - 1$ から $(a-1)(2a^2 + 2a + 1) = 0$

a は実数であるから $a = 1$

直線 AB の傾きは $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta^3 - 3a\beta^2) - (\alpha^3 - 3a\alpha^2)}{\beta - \alpha}$

$$= \frac{(\beta^3 - \alpha^3) - 3a(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta - \alpha}$$

$$= (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3a(\beta + \alpha)$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 3a(\alpha + \beta)$$

$$= (2a)^2 - \left(-\frac{m}{3}\right) - 3a \cdot 2a = \frac{m}{3} - 2a^2$$

この傾きが -1 であるとき $\frac{m}{3} - 2a^2 = -1, a = 1$

ゆえに $m = 3$ これは②を満たす。

【別解】 $[m$ の求め方]

A, B, C はすべて曲線 $y = f(x)$ 上にも直線 $y = -x - 1$ 上にもあるから, $\alpha, \beta, 1$ は方程式 $f(x) = -x - 1$ の3つの実数解である。

$x^3 - 3x^2 = -x - 1$ から $(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

よって, α, β は $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解であるから $\alpha\beta = -1$

したがって, ①から $m = -3\alpha\beta = 3$

5

【解答】 $a < 0, 0 < a < \frac{9}{4}$

【解説】

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4ax = 4x(x^2 + 3x + a)$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつ条件は, $f'(x)$ の符号が正から負に変わる x の値と, 負から正に変わる x の値が存在することである。

$f'(x)$ は3次関数であるから, このことは, $y = f'(x)$ のグラフが x 軸と異なる3点を共有すること, すなわち, 3次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつことと同値である。

よって, 2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が, $x=0$ 以外の異なる2個の実数解をもてばよい。

ゆえに $D > 0$ かつ $0^2 + 3 \cdot 0 + a \neq 0$

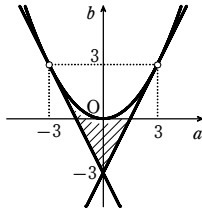
すなわち $9 - 4a > 0$ かつ $a \neq 0$

章末問題B

したがって $a < 0, 0 < a < \frac{9}{4}$

6

【解答】 図 境界線は放物線を含まず、他は含む



【解説】

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ が極大値と極小値をもち、それらが $-1 \leq x \leq 1$ 内にあるための条件は、 $f'(x)$ の符号が正から負に、また負から正に変わる x の値がともに $-1 \leq x \leq 1$ 内にあること、すなわち、2次方程式 $f'(x) = 0$ が $-1 \leq x \leq 1$ に異なる2つの実数解をもつことである。

よって、 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0 \\ f'(-1) = 3 - 2a + b \geq 0 \\ f'(1) = 3 + 2a + b \geq 0 \\ -1 \leq -\frac{a}{3} \leq 1 \end{cases}$$

ゆえに $b < \frac{a^2}{3}, b \geq 2a - 3,$

$$b \geq -2a - 3, -3 \leq a \leq 3$$

これらを満たす点 (a, b) の存在範囲は、図の斜線部分。

ただし、境界線は放物線を含まず、他は含む。

7

【解答】 (1) $t \leq -40$ (2) $t \leq -\frac{189}{4}$

【解説】

(1) $F(x) = f(x) - g(x)$ とすると $F(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - t$

$x \geq 0$ を満たす任意の x に対して $F(x) \geq 0$ となる t の値の範囲を求めればよい。

$$F'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x^2 + 4x - 12) = 3(x-2)(x+6)$$

$F'(x) = 0$ とすると $x = 2, -6$

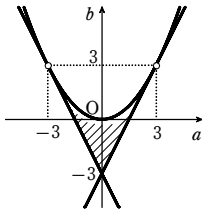
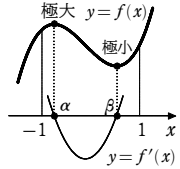
$x \geq 0$ における $F(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	0	...	2	...
$F'(x)$		-	0	+
$F(x)$	$-t$	↘	$-40-t$	↗

よって、 $F(x)$ は $x \geq 0$ において、 $x = 2$ のとき最小値 $-40 - t$ ととる。

ゆえに、求める t の値の範囲は、 $-40 - t \geq 0$ を解いて $t \leq -40$

(2) 条件を満たすのは、 $x \geq 0$ において、



$$[f(x) \text{ の最小値}] \geq [g(x) \text{ の最大値}]$$

となるときである。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -1, 3$

$x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	↘	-27	↗

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ において、 $x = 3$ のとき最小値 -27 ととる。

また $g(x) = -9x^2 + 27x + t = -9\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + t + \frac{81}{4}$

よって、 $g(x)$ は $x \geq 0$ において、 $x = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $t + \frac{81}{4}$ ととる。

ゆえに、求める t の値の範囲は、 $-27 \geq t + \frac{81}{4}$ を解いて $t \leq -\frac{189}{4}$

8

【解答】 (1) $u^2 - v = 1$, u の最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 最小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) 最大値 2, 最小値 $\frac{2}{3}$ (3) 最大値 $\sqrt{2}$, 最小値 $-\sqrt{2}$

【解説】

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$ から $(x+y)^2 - xy = 1$

よって、 u, v の満たす関係式は $u^2 - v = 1$ ①

また、 x, y を2解にもつ2次方程式は $t^2 - ut + v = 0$ であり、 x, y は実数であるから、

判別式を D とすると $D \geq 0$ すなわち $u^2 - 4v \geq 0$ ②

① から $v = u^2 - 1$

これを②に代入すると $u^2 - 4(u^2 - 1) \geq 0$

整理して $3u^2 - 4 \leq 0$ ゆえに $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq u \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③

よって、 u の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 最小値は $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v = u^2 - 2(u^2 - 1) = -u^2 + 2$

u の値の範囲は③であるから、 $x^2 + y^2$ は

$u = 0$ のとき最大値 2, $u = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$ ととる。

(3) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = u^3 - 3vu = u^3 - 3u(u^2 - 1) = -2u^3 + 3u$

$f(u) = -2u^3 + 3u$ とすると $f'(u) = -6u^2 + 3 = -6\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)$

$f'(u) = 0$ とすると $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ における $f(u)$ の増減表は次のようになる。

u	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$f'(u)$		-	0	+	0	-	
$f(u)$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

よって、 $x^3 + y^3$ は $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$, $u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ ととる。

9

【解答】 $x + y \leq 5 - 3\log_2 3$

【解説】

$x + y = k$ とおく。

条件式から $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 2^{k-x} \leq 0$

$2^x > 0$ であるから $(2^x)^2 - 2(2^x) + 2^k \leq 0$

$t = 2^x$ とおくと $2^k \leq -t^2 + 2t^2$ ①

$t > 0$ で①を満たす t が存在するような k の値の範囲を求める。

$f(t) = -t^3 + 2t^2$ とおくと $f'(t) = -3t^2 + 4t = -t(3t - 4)$

$f'(t) = 0$ とすると $t = 0, \frac{4}{3}$

$t > 0$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $t > 0$ における $y = f(t)$ のグラフは右下の図の実線部分である。

$y = f(t)$ のグラフと直線 $y = 2^k$ が共有点をもつとき、

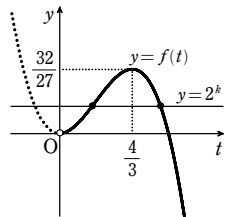
①を満たす t が存在する。

ゆえに、 $t > 0$ において $y = f(t)$ と $y = 2^k$ が共有点をもつ

条件は $2^k \leq \frac{32}{27}$

よって $k = x + y \leq \log_2 \frac{32}{27} = 5 - 3\log_2 3$

t	0	...	$\frac{4}{3}$...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘



10

【解答】 (1) (ア) 1 (イ) $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ (2) $x = -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) 4個

【解説】

(1) ① から $|x^3 - x| - x = k$

$f(x) = |x^3 - x| - x$ とする。

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$ であるから

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & (-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x) \\ -x^3 + x & (x < -1, 0 < x < 1) \end{cases}$$

[1] $-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x$ のとき

$f(x) = x^3 - x - x = x^3 - 2x, f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

章末問題B

$-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x$ から $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

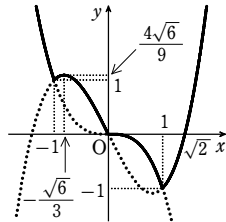
[2] $x < -1, 0 < x < 1$ のとき

$f(x) = -x^3 + x - x = -x^3, \quad f'(x) = -3x^2 < 0$

[1], [2] から, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	/	+	0	-	/	-	/	+
$f(x)$	↘	1	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0	↘	-1	↗

よって, $y = f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる。
方程式①が異なる3個の実数解をもつのは, このグラフと直線 $y = k$ が共有点を3個もつときである。



したがって, 求める k の値は

$k_1 = 1$ または $k_2 = \frac{4\sqrt{6}}{9}$

[2] $k = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき, ①は

$|x^3 - x| - x - \frac{4\sqrt{6}}{9} = 0 \dots\dots ②$

[1] $-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x$ のとき

②から $x^3 - 2x - \frac{4\sqrt{6}}{9} = 0$

ゆえに $(x + \frac{\sqrt{6}}{3})^2(x - \frac{2\sqrt{6}}{3}) = 0$

よって $x = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}$

[2] $x < -1, 0 < x < 1$ のとき

②から $-x^3 - \frac{4\sqrt{6}}{9} = 0$

ゆえに $x^3 = -2(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^3$

よって $x = \sqrt[3]{-2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{3}$

[1], [2] から, 求める3個の実数解は

$x = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}$

[3] $1 < k < \frac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき, ①の実数解の個数は, (1)のグラフから4個である。

□

【解答】 2個

【解説】

$\sin x + \cos x = t$ とおく。

両辺を2乗すると $1 + 2\sin x \cos x = t^2$ よって $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

また $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad 0 \leq x < 2\pi$ のとき $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

与えられた方程式から $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) + 3\sin x \cos x = 0$

よって $2\sqrt{2}t(1 - \frac{t^2 - 1}{2}) + 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} = 0$

整理すると $2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3 = 0$

$f(t) = 2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3$ とおくと

$f'(t) = 6\sqrt{2}t^2 - 6t - 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2})$

$f'(t) = 0$ とすると $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$

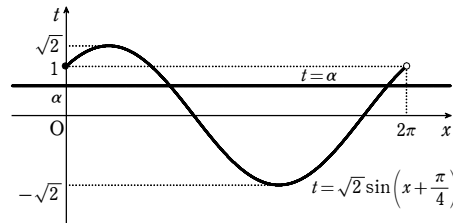
$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$...	$\sqrt{2}$
$f'(t)$			+	0	-
$f(t)$	1	↗	極大	↘	-7

$f(0) = 3 > 0, f(1) = -4\sqrt{2} < 0$ であるから, $f(t) = 0$ となる t の値は $0 < t < 1$ の範囲に1つだけ存在する。

その値を α とすると, 方程式を満たす x の個数は $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad (0 \leq x < 2\pi)$ のグラフと直線 $t = \alpha$ の共有点の個数に等しい。

したがって, 求める x の個数は2である。



章末問題C

□

【解答】 (1) $f'(0) = -3f(0) + 4f(\frac{1}{2}) - f(1)$ (2) 略

(3) $f(x) = 8x^2 - 8x + 1, -8x^2 + 8x - 1$

【解説】

(1) $f'(x) = 2ax + b$ であるから $f'(0) = b$

また $f(0) = c \dots\dots ①, f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \dots\dots ②, f(1) = a + b + c \dots\dots ③$

② $\times 4 - ③$ から $b + 3c = 4f(\frac{1}{2}) - f(1)$

これに①を代入すると $b + 3f(0) = 4f(\frac{1}{2}) - f(1)$

したがって $f'(0) = b = -3f(0) + 4f(\frac{1}{2}) - f(1)$

(2) $|f(0)| \leq 1, |f(\frac{1}{2})| \leq 1, |f(1)| \leq 1$ であるから

$-1 \leq f(0) \leq 1, -1 \leq f(\frac{1}{2}) \leq 1, -1 \leq f(1) \leq 1$

よって $-3 \leq -3f(0) \leq 3, -4 \leq 4f(\frac{1}{2}) \leq 4, -1 \leq -f(1) \leq 1$

ゆえに $-8 \leq -3f(0) + 4f(\frac{1}{2}) - f(1) \leq 8$

すなわち $-8 \leq f'(0) \leq 8$

したがって $|f'(0)| \leq 8$

(3) $|f'(0)| = 8$ から $f'(0) = \pm 8$

$f'(0) = -8$ のとき $f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = -1, f(1) = 1$

すなわち $c = 1, \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = -1, a + b + c = 1$

これを解くと $a = 8, b = -8, c = 1$

$f'(0) = 8$ のとき $f(0) = -1, f(\frac{1}{2}) = 1, f(1) = -1$

すなわち $c = -1, \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1, a + b + c = -1$

これを解くと $a = -8, b = 8, c = -1$

したがって $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ または $f(x) = -8x^2 + 8x - 1$

□

【解答】 $a = 105, -3$

【解説】

$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a) \quad f'(x) = 0$ とすると $x = 0, 2a$

[1] $2a = 0$ すなわち $a = 0$ のとき $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ であるから, $f(x)$ は単調に増加する。

よって, $x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値は $f(2) = 8$ となり, 条件を満たさない。

[2] $0 < 2a < 2$ すなわち $0 < a < 1$ のとき

$x \leq 2$ における $f(x)$ の増減表は, 次のようになる。

x	...	0	...	$2a$...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	$f(2)$

よって、 $f(x)$ の最大値は $f(0)=a$ または $f(2)=8-11a$
 $0 < a < 1$ のとき $0 < f(0) < 1, -3 < f(2) < 8$
 したがって、最大値が105になることはない。

[3] $2 \leq 2a$ すなわち $a \geq 1$ のとき

$x \leq 2$ における $f(x)$ の増減表は、右ようになる。

よって、 $f(x)$ の最大値は $f(0)=a$
 最大値が105となるとき $a=105$

これは $a \geq 1$ を満たす。

[4] $2a < 0$ すなわち $a < 0$ のとき

$x \leq 2$ における $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	...	$2a$...	0	...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗	極大 $f(2a)$	↘	極小 $f(0)$	↗	$f(2)$

よって、 $f(x)$ の最大値は $f(2a)=-4a^3+a$ または $f(2)=8-11a$
 ここで $f(2a)-f(2)=(-4a^3+a)-(8-11a)=-4(a^3-3a+2)$
 $=-4(a-1)^2(a+2)$

したがって、 $a \leq -2$ のとき $f(2a) \geq f(2)$

$-2 < a < 0$ のとき $f(2a) < f(2)$

(i) $a \leq -2$ のとき

最大値 $f(2a)$ が105となるとき $-4a^3+a=105$

よって $4a^3-a+105=0$ ゆえに $(a+3)(4a^2-12a+35)=0$

$4a^2-12a+35=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+26 > 0$ であるから $a+3=0$

これを解いて $a=-3$ これは $a \leq -2$ を満たす。

(ii) $-2 < a < 0$ のとき

最大値 $f(2)$ が105となると $8-11a=105$

これを解いて $a=-\frac{97}{11}$ これは $-2 < a < 0$ を満たさない。

以上から、求める a の値は $a=105, -3$

[3]

【解答】 (1) $a=2(s^2+st+t^2)$ (2) (ア) $a=2s^2$ (イ) $y=bx-\frac{a^2}{4}$

(3) $b^2 < \frac{8}{27}a^3$

【解説】

(1) $f'(x)=4x^3-2ax+b$

条件から $f'(s)=f'(t)$

よって $4s^3-2as+b=4t^3-2at+b$

整理すると $2(s^3-t^3)-a(s-t)=0$

左辺を因数分解すると $(s-t)[2(s^2+st+t^2)-a]=0$

$s \neq t$ であるから $a=2(s^2+st+t^2)$

(2) (ア) $x=s$ における接線 l の方程式は

$y-(s^4-as^2+bs)=(4s^3-2as+b)(x-s)$

よって $y=(4s^3-2as+b)x-3s^4+as^2$ ……①

接点の x 座標のもう1つを t とする。

$x=t$ における接線 l の方程式は $y=(4t^3-2at+b)x-3t^4+at^2$

ゆえに、この2つの接線が一致するから

$4s^3-2as+b=4t^3-2at+b$ ……②

$-3s^4+as^2=-3t^4+at^2$ ……③

(1) から、②は $a=2(s^2+st+t^2)$

③を整理すると $(s+t)(s-t)[3(s^2+t^2)-a]=0$

$a=2(s^2+st+t^2)$ を代入し、整理すると $(s+t)(s-t)^3=0$

$s \neq t$ であるから $t=-s$

$a=2(s^2+st+t^2)$ であるから $a=2s^2$

(イ) ①に $a=2s^2$ を代入し、整理すると $y=bx-s^4$

$s^2=\frac{a}{2}$ であるから $y=bx-\frac{a^2}{4}$

(3) $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は、 x を増加させていくとき、 $f'(x)$ の値が正から負に変わるような x が存在することである。

$g(x)=f'(x)=4x^3-2ax+b$ とおくと $g'(x)=12x^2-2a=2(6x^2-a)$

[1] $a \leq 0$ のとき

このとき、常に $g'(x) \geq 0$ となるから、 $g(x)$ は単調に増加する。よって、 $f'(x)$ の値が正から負に変わるような x は存在しない。

[2] $a > 0$ のとき

$g'(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{\frac{a}{6}}$

x	...	$-\sqrt{\frac{a}{6}}$...	$\sqrt{\frac{a}{6}}$...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$g(x)$ の増減表は右ようになる。

$f'(x)$ すなわち $g(x)$ の値が正から負に

変わるような x が存在するためには、

極大値と極小値が異符号であればよい。

すなわち $g\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right) \cdot g\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) < 0$

よって $\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b\right)\left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b\right) < 0$

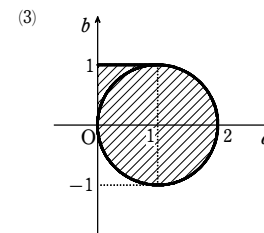
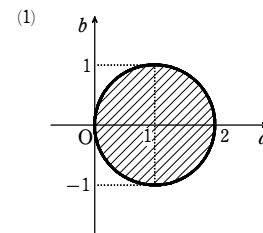
ゆえに $b^2 < \frac{8}{27}a^3$

[1], [2] から、求める条件は $a > 0$ かつ $b^2 < \frac{8}{27}a^3$ よって $b^2 < \frac{8}{27}a^3$

[4]

【解答】 (1) $(a-1)^2+b^2 \leq 1$; [図] 境界線を含む (2) $0 \leq b \leq 1$

(3) $0 \leq a \leq b \leq 1$ または $(a-1)^2+b^2 \leq 1$; [図] 境界線を含む



【解説】

(1) $f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ が常に増加するための必要十分条件は、

すべての x に対して $f'(x) \geq 0$ …… [A]

が成り立つことである。

[1] $a=0$ の場合

$f'(x)=2bx+b+1$

[A] を満たすのは、 $b=0$ のとき。

[2] $a \neq 0$ の場合

$a > 0$ ならば $y=f'(x)$ は下に凸な放物線を表す。

$a < 0$ ならば $y=f'(x)$ は上に凸な放物線を表す。

よって、[A] を満たす条件は、 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$a > 0$ かつ $D \leq 0$

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-2a(b+1) \leq 0$ から

$a^2+b^2-2a \leq 0$

ゆえに $(a-1)^2+b^2 \leq 1$

ただし、 $a > 0$ であるから $(a, b) \neq (0, 0)$

[1], [2] から、求める条件は $(a-1)^2+b^2 \leq 1$

よって、右の図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。

(2) $f(x)$ が $x > -1$ において常に増加する条件は、

$x > -1$ において常に $f'(x) \geq 0$ …… [B]

が成り立つことである。

$a=0$ であるから $f'(x)=2bx+b+1$

[1] $b=0$ のとき

常に $f'(x)=1$

よって、[B] を満たす。

[2] $b \neq 0$ のとき

$y=f'(x)$ は、傾きが $2b$ の直線を表す。

よって、[B] を満たす条件は $b > 0$ かつ $f'(-1) \geq 0$

$f'(-1)=-2b+b+1 \geq 0$ から $b \leq 1$

ゆえに $0 < b \leq 1$

[1], [2] から $0 \leq b \leq 1$

(3) [1] $a=0$ の場合

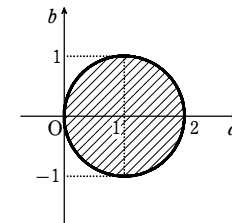
(2) から $0 \leq b \leq 1$

[2] $a \neq 0$ の場合

(i) $f(x)$ が常に増加するとき

(1) から $(a-1)^2+b^2 \leq 1$ ただし、 $(a, b) \neq (0, 0)$

(ii) $f(x)$ が常に増加しないとき



章末問題C

$$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 1 = 2a\left(x + \frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{2a} + b + 1$$

よって、 $x \leq -1$ において常に $f'(x) \geq 0$ でないとき、[B]を満たす条件は

$$\begin{cases} a > 0 & \dots\dots ① \\ \frac{D}{4} = (a+b)^2 - 2a(b+1) > 0 & \dots\dots ② \\ -\frac{a+b}{2a} \leq -1 & \dots\dots ③ \\ f'(-1) \geq 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

②から $(a-1)^2 + b^2 > 1$ ……⑤

③の両辺に $-2a$ (< 0) を掛けて $a+b \geq 2a$ ゆえに $b \geq a$ ……⑥

④から $f'(-1) = 2a - 2(a+b) + b + 1 \geq 0$

すなわち $b \leq 1$ ……⑦

よって、①、⑤、⑥、⑦から

$$(a-1)^2 + b^2 > 1 \text{ かつ } 0 < a \leq b \leq 1$$

したがって、(i)、(ii)より、

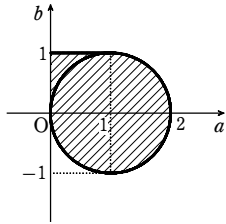
$$0 < a \leq b \leq 1 \text{ または } (a-1)^2 + b^2 \leq 1$$

[1]、[2]から、求める条件は

$$0 \leq a \leq b \leq 1 \text{ または } (a-1)^2 + b^2 \leq 1$$

よって、右の図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。



[5]

解答 $a \leq 1$ のとき、 $x=0$ で最小値 $-6a+8$ ；

$a > 1$ のとき、 $x = \log_2(a \pm \sqrt{a^2-1})$ で最小値 $-4a^3+6a$

解説

$$\begin{aligned} f(x) &= 8^x + 8^{-x} - 3a(4^x + 4^{-x}) + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 - 3a[(2^x)^2 + (2^{-x})^2] + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= [(2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}(2^x + 2^{-x})] - 3a[(2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}] + 3(2^x + 2^{-x}) \end{aligned}$$

ここで、 $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと、(相加平均) \geq (相乗平均)により

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \text{ すなわち } t \geq 2$$

$f(x)$ を t の式で表すと

$$f(x) = (t^3 - 3t) - 3a(t^2 - 2) + 3t = t^3 - 3at^2 + 6a$$

$g(t) = t^3 - 3at^2 + 6a$ ($t \geq 2$) とすると $g'(t) = 3t^2 - 6at = 3t(t-2a)$

$g'(t) = 0$ とすると $t = 0, 2a$

[1] $2a \leq 2$ すなわち $a \leq 1$ のとき

$t \geq 2$ における $g(t)$ の増減表は、右のようになる。

よって、 $g(t)$ は $t=2$ すなわち $x=0$ で最小値 $-6a+8$ をとる。

t	2	...
$g'(t)$		+
$g(t)$	$-6a+8$	↗

[2] $2 < 2a$ すなわち $1 < a$ のとき

$t \geq 2$ における $g(t)$ の増減表は、右のようになる。

よって、 $g(t)$ は $t=2a$ で最小値

$-4a^3+6a$ をとる。

$t=2a$ のとき $2^x + 2^{-x} = 2a$

$2^x = X$ ($X > 0$) とおくと $X + \frac{1}{X} = 2a$

t	2	...	$2a$...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	$-6a+8$	↘	$-4a^3+6a$	↗

ゆえに $X^2 - 2aX + 1 = 0$

$a > 1$ であるから $X = a \pm \sqrt{a^2-1}$ このとき $a + \sqrt{a^2-1} > 0$

また、 $a^2 > a^2-1$ であるから $a - \sqrt{a^2-1} > 0$

したがって、ともに $X > 0$ を満たす。

よって、 $2^x = a \pm \sqrt{a^2-1}$ から $x = \log_2(a \pm \sqrt{a^2-1})$

[1]、[2]から、 $f(x)$ は

$a \leq 1$ のとき、 $x=0$ で最小値 $-6a+8$ ；

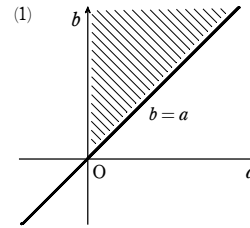
$a > 1$ のとき、 $x = \log_2(a \pm \sqrt{a^2-1})$ で最小値 $-4a^3+6a$

をとる。

[6]

解答 (1) [図] 境界線を含まない

$$(2) b = a, a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$$



解説

(1) C 上の点 $(t, t^3 - a^2t + a^3)$ における接線の方程式は、 $y' = 3t^2 - a^2$ であるから

$$y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 + a^3$

この直線が点 $P(b, 0)$ を通るから $0 = (3t^2 - a^2)b - 2t^3 + a^3$

よって $2t^3 - 3bt^2 = a^2(a-b)$ ……①

①を t の方程式とみると、点 P を通る接線の本数は、①の異なる実数解の個数と等しい。

$f(t) = 2t^3 - 3bt^2$ とすると $f'(t) = 6t^2 - 6bt = 6t(t-b)$

$f'(t) = 0$ とすると $t = 0, b$

$b > 0$ であるから、 $f(t)$ の増減表は右のようになる。

点 P から曲線 C に接線が3本引けるための条件は、

方程式 $f(t) = a^2(a-b)$ が異なる3個の実数解をもつことである。

すなわち $-b^3 < a^2(a-b) < 0$

$a^2(a-b) < 0$ と $a > 0$ から $0 < a < b$

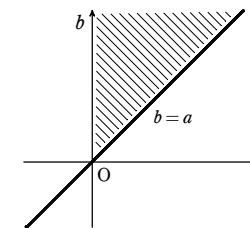
このとき $a^2(a-b) + b^3 = a^3 + b(b^2 - a^2) > 0$

は常に成り立つ。

したがって、求める条件は、 $0 < a < b$ であり、点

(a, b) の存在する領域は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線は含まない。

t	...	0	...	b	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	0	↘	$-b^3$	↗



(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど2本引けるための条件は、方程式 $f(t) = a^2(a-b)$ が異なる2つの実数解をもつことである。

よって $a^2(a-b) = 0$ または $a^2(a-b) = -b^3$

[1] $a^2(a-b) = 0$ のとき

$a > 0$ であるから $a-b=0$ すなわち $b=a$

このとき、①から $2t^3 - 3at^2 = 0$ すなわち $t^2(2t-3a) = 0$

ゆえに $t=0, \frac{3}{2}a$ これが接点の x 座標となる。

よって、 $A(0, a^3)$ 、 $B(\frac{3}{2}a, \frac{23}{8}a^3)$ とすると、 $P(a, 0)$ から

$$AB^2 = \frac{9}{4}a^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 a^6, \quad AP^2 = a^2 + a^6, \quad BP^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{23}{8}\right)^2 a^6$$

$\angle APB < 90^\circ$ であるための条件は $AB^2 < AP^2 + BP^2$

ゆえに $a^6 \left\{ 1 + \left(\frac{23}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{8}\right)^2 \right\} - a^2 > 0$

$a^2 > 0$ であるから $\frac{23}{4}a^4 - 1 > 0$ すなわち $a^4 > \frac{4}{23}$

$a > 0$ であるから $a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

したがって $b=a, a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

[2] $a^2(a-b) = -b^3$ のとき $a^3 - a^2b + b^3 = 0$

ところが、 $0 < b < a$ のとき $a^2(a-b) + b^3 > 0$

$0 < a \leq b$ のとき $b(b-a)(b+a) + a^3 > 0$

ゆえに、 $a > 0, b > 0$ に対して常に $a^3 - a^2b + b^3 > 0$ となり、 $-b^3 = a^2(a-b)$ を満たす a, b は存在しない。

[1]、[2]から $b=a, a > \sqrt[4]{\frac{4}{23}}$

[7]

解答 V の体積を V_0 で表すとき (1) $V_0 = \frac{1}{4}(\pi a^2 + 4ac + \pi c^2)b$

$$(2) 0 < V_0 < \frac{\pi}{27}$$

解説

(1) V は、底面が右の図の斜線部分の図形で高さ a の立体である。

V の体積を V_0 とすると

$$V_0 = \left[2 \cdot \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+c^2}) \cdot \frac{\pi}{2} \right] b$$

$$= \frac{1}{4}(\pi a^2 + 4ac + \pi c^2)b$$

(2) $c = 1 - (a+b)$ であるから、(1)より

$$V_0 = \frac{1}{4}[\pi a^2 + 4a[1 - (a+b)] + \pi[1 - (a+b)]^2]b$$

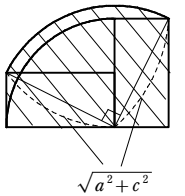
$$= \frac{1}{4}[\pi a^2 + 4a[(1-b) - a] + \pi[(1-b) - a]^2]b$$

$$= \frac{\pi-2}{2}b[a^2 - (1-b)a] + \frac{\pi}{4}b(1-b)^2$$

$$= \frac{\pi-2}{2}b \left[\left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 - \frac{(1-b)^2}{4} \right] + \frac{\pi}{4}b(1-b)^2$$

$c = 1 - (a+b) > 0$ より、 $0 < a < 1-b$ であるから

$$-\frac{(1-b)^2}{4} \leq \left(a - \frac{1-b}{2}\right)^2 - \frac{(1-b)^2}{4} < 0$$



章末問題C

$\frac{\pi-2}{2}b > 0$ であるから

$$-\frac{\pi-2}{8}b(1-b)^2 + \frac{\pi}{4}b(1-b)^2 \leq V_0 < \frac{\pi}{4}b(1-b)^2$$

すなわち $\frac{\pi+2}{8}b(1-b)^2 \leq V_0 < \frac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$f(b) = b(1-b)^2 = b^3 - 2b^2 + b$ ($0 < b < 1$) とすると

$$f'(b) = 3b^2 - 4b + 1 = (3b-1)(b-1)$$

$f'(b) = 0$ とすると

$$b = \frac{1}{3}, 1$$

$0 < b < 1$ における $f(b)$ の増減表は、右のようになる。

b	0	...	$\frac{1}{3}$...	1
$f'(b)$		+	0	-	
$f(b)$		↗	極大	↘	

また、 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{27}$ であるから

$$0 < f(b) \leq \frac{4}{27}$$

ゆえに $0 < \frac{\pi+2}{8}f(b) \leq V_0 < \frac{\pi}{4}f(b) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{27}$

したがって $0 < V_0 < \frac{\pi}{27}$

[8]

【解答】 (1) $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$

(2) $k=0$ のとき $x=-1, 0, 4$; $k=12$ のとき $x=-2, 2, 3$

【解説】

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ から $f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $f(x)$ が極値をとるときの x

の値は $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$

x	...	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$...	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(2) $x^3 - 3x^2 - 4x + k = 0$ ……① から $-x^3 + 3x^2 + 4x = k$

$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x$ とすると $g'(x) = -3x^2 + 6x + 4$

$g'(x) = 0$ とすると $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3}$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $y = g(x)$ のグラフは、右の

図のようになる。

方程式 $f(x) = 0$ の実数解は、 $y = g(x)$ のグラフと直線

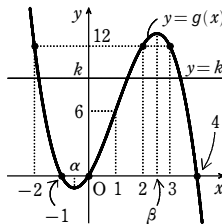
$y = k$ の共有点の x 座標と一致する。

ゆえに、 $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が3つの共有点をもち、かつその共有点の x 座標がすべて整数であるような k の値を求めればよい。

ここで、 $\alpha = \frac{3-\sqrt{21}}{3}$, $\beta = \frac{3+\sqrt{21}}{3}$ とおくと、

$y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ が3つの共有点をもつ

ための条件は $g(\alpha) < k < g(\beta)$



また、 $4 < \sqrt{21} < 5$ であるから $-1 < \alpha < 0$, $2 < \beta < 3$

よって、 $\alpha < x < \beta$ を満たす整数 x は $x = 0, 1, 2$

$g(x) = k$ であり、 $g(0) = 0$, $g(1) = 6$, $g(2) = 12$ であるから、求める k の値の候補は $k = 0, 6, 12$

[1] $k=0$ のとき

①は $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ よって $x(x^2 - 3x - 4) = 0$

すなわち $x(x+1)(x-4) = 0$ ゆえに $x = 0, -1, 4$

したがって、 $f(x) = 0$ は3つの整数解をもつ。

[2] $k=6$ のとき

①は $x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$ すなわち $(x-1)(x^2 - 2x - 6) = 0$

よって $x = 1, 1 \pm \sqrt{7}$

ゆえに、 $f(x) = 0$ の整数解は1つだけであり、不適。

[3] $k=12$ のとき

①は $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ よって $(x-3)(x^2 - 4) = 0$

すなわち $(x+2)(x-2)(x-3) = 0$ ゆえに $x = -2, 2, 3$

したがって、 $f(x) = 0$ は3つの整数解をもつ。

[1] ~ [3] より、求める k の値は $k = 0, 12$

また、3つの整数解は、 $k=0$ のとき $x = -1, 0, 4$

$k=12$ のとき $x = -2, 2, 3$