

1

解答 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) 0 (5) 極限なし (振動)
(6) 極限なし (振動) (7) 極限なし (振動)

解説

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n}{3}\right) = -\infty$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2} - 1\right) = \infty$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n^2}\right) = 0$
 (5) $-1, 1, -1, 1, \dots$ となるから、振動し、極限はない。
 (6) $-1, 1, -1, 1, \dots$ となるから、振動し、極限はない。
 (7) $-2, 4, -8, 16, \dots$ となるから、振動し、極限はない。

2

解答 (1) ∞ (2) 0 (3) $-\frac{5}{2}$ (4) $\sqrt{3}$

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n^2}} = 0$

別解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n^2}} = 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+7n-6}{-2n^2-3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{7}{n} - \frac{6}{n^2}}{-2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = -\frac{5}{2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{3}$

3

解答 1

解説

(分母) $= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(分子) $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

よって (与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1$

4

解答 (1) -2 (2) 0

解説

1

解答 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) 極限なし (振動) (5) $-\infty$ (6) 0
(7) $-\infty$ (8) 0 (9) 極限なし (振動) (10) 極限なし
(11) 極限なし (振動)

解説

(1) $|2| > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ (2) $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

(3) $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$

(4) $-3 < -1$ であるから、数列 $\{(-3)^n\}$ は振動し、極限はない。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - n^2) = -\infty$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n} = 0$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt{n}) = -\infty$ (8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} = 0$

(9) $2, 4, 2, 4, \dots$ となるから、振動し、極限はない。

(10) $-1, 2, -3, 4, \dots$ となるから、極限はない。

(11) $-1, 1, -1, 1, \dots$ となるから、振動し、極限はない。

2

解答 (1) $-\infty$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) ∞ (4) 0 (5) 2

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - 3\right) = -\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+3}{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{1}{n}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = \infty$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-3n+1}{3+2n-n^2-4n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} - 4} = 0$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = \frac{4}{2} = 2$

3

解答 (1) 3 (2) 2

解説

(1) (分母) $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(分子) $= \sum_{k=1}^n k(3k+2) = 3\sum_{k=1}^n k^2 + 2\sum_{k=1}^n k = 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + 2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$

よって (与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n+3)}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{2 + \frac{1}{n}} = 3$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{(n - \sqrt{n^2+n})(n + \sqrt{n^2+n})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{n^2 - (n^2+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{-n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{-1} = -2$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-3} - \sqrt{n})(\sqrt{n-3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3) - n}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}} = 0$

5

解答 (1) 0 (2) 0

解説

(1) $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{4} \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} \leq \frac{1}{n}$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} = 0$

(2) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$

6

解答 (1) 略 (2) 0

解説

(1) $n \geq 3$ のとき
 $2^n = (1+1)^n = 1 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_{n-1} + 1$
 $\geq 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$
 $= \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1 > \frac{1}{6}n^3$

よって $2^n > \frac{1}{6}n^3$

(2) (1)の結果から $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{6}{n^3}$ よって $0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{6}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

第1講 例題演習

(2) (分母) $= \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = n(n+2)$
 (分子) $= \sum_{k=1}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n = n(2n+1)$

よって (与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2$

4

【解答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{1}{4}$

【解説】

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}}{(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}}{(n^2+2n) - (n^2-2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-2n}}{4n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}} \right) = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n})(\sqrt{n-3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \{(n-3) - n\}}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3\sqrt{n}}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{n}} + 1} = -\frac{3}{2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n-2)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{(n+1) - (n-1)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{2(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = 2$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2-n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2n+2) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2-n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{n^2-n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{3}{2}$$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2 \right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left\{ \left(4 + \frac{1}{n} \right) - 4 \right\}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \frac{1}{4}$

5

【解答】 (1) 0 (2) 0 (3) 0

【解説】

(1) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ であるから $-\frac{1}{2n+1} \leq \frac{(-1)^n}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n+1} \right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

(2) $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1$ であるから $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$

(3) $0 \leq \cos^2 n\theta \leq 1$ であるから $0 \leq \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} = 0$

6

【解答】 (1) 略 (2) 0

【解説】

(1) $(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき
 (左辺) $= 1+h$
 (右辺) $= 1+h + \frac{1(1-1)}{2} h^2 = 1+h$

$n=2$ のとき
 (左辺) $= (1+h)^2 = 1+2h+h^2$
 (右辺) $= 1+2h + \frac{2(2-1)}{2} h^2 = 1+2h+h^2$

よって、 $n=1, 2$ のとき (左辺)=(右辺) となり、① は成り立つ。

[2] $n \geq 3$ のとき
 二項定理により
 $(1+h)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 + {}_n C_3 h^3 + \dots + {}_n C_n h^n$ …… ②

${}_n C_r > 0, h > 0$ であるから ${}_n C_3 h^3 + \dots + {}_n C_n h^n > 0$

よって、② から $(1+h)^n > {}_n C_0 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2$

したがって $(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$

[1], [2] から、 $h > 0$ のとき、すべての自然数 n について、① は成り立つ。

(2) ① に $h=2$ を代入すると $(1+2)^n \geq 1 + n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^2$

よって $3^n \geq 2n^2 + 1$ ゆえに $0 < \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{2n^2 + 1}$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$

第1講 レベルA

1

解答 (1) 1 (2) 2

解説

(1) 分母は $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって (与式) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1$

(2) $\frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})}$
 $= \frac{((n+4) - (n+2))(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{((n+1) - n)(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})} = \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}}$ であるから

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 2$

2

解答 (1) $\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}$ (2) $\frac{1}{3}$

解説

(1) (与式) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left\{n^2 + an + b - \left(n + \frac{a}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{n^2 + an + b} + n + \frac{a}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - \frac{a^2}{4}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + 1 + \frac{a}{2n}}$
 $= \frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}$

(2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$
 $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{6}n(n+1)((2n+1) + 3)$
 $= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって (与式) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{3}$

3

解答 (1) 順に (ア) $0, \frac{1}{2}$ (イ) $-\frac{5}{3}, -\infty$ (2) $a=8$ (3) 1

解説

(1) (ア) $a_n = (2n-1)a_n \times \frac{1}{2n-1}$ であり

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 1 \times 0 = 0$

$na_n = (2n-1)a_n \times \frac{n}{2n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ であるから

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(イ) $\frac{a_n - 3}{2a_n + 1} = b_n$ とおき、両辺に $2a_n + 1$ を掛けると

$a_n - 3 = (2a_n + 1)b_n$

ゆえに $(2b_n - 1)a_n = -(b_n + 3)$

$b_n = \frac{1}{2}$ とすると $0 \cdot a_n = -\frac{7}{2}$ となり、これは不合理である。

よって、 $b_n \neq \frac{1}{2}$ であるから $a_n = -\frac{b_n + 3}{2b_n - 1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ であるから

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{b_n + 3}{2b_n - 1}\right) = -\frac{2 + 3}{2 \cdot 2 - 1} = -\frac{5}{3}$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = -\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + an + 2) - (n^2 + 2n + 3)}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2) - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}$
 $= \frac{a-2}{2}$

よって、条件から $\frac{a-2}{2} = 3$ ゆえに $a = 8$

(3) $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \infty$ であるから、 $a_n > 0$ としてよい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n^2 + a_n + 1} - \sqrt{a_n^2 - a_n + 1})$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n^2 + a_n + 1) - (a_n^2 - a_n + 1)}{\sqrt{a_n^2 + a_n + 1} + \sqrt{a_n^2 - a_n + 1}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{\sqrt{a_n^2 + a_n + 1} + \sqrt{a_n^2 - a_n + 1}}$

分母、分子を $a_n (> 0)$ で割って

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1$

4

解答 0

解説

$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1$ であるから $-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \sin \frac{n\pi}{2} \leq \frac{n}{n^2+1}$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right) = 0$ である

から、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$

5

解答 π

解説

$[10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi < [10^{2n}\pi] + 1$ が成り立つから、各辺を 10^{2n} で割ると

$\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \pi < \frac{[10^{2n}\pi] + 1}{10^{2n}}$ すなわち $\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \pi < \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}}$

よって $\pi - \frac{1}{10^{2n}} < \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \pi$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{1}{10^{2n}}\right) = \pi$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} = \pi$

第1講 レベルB

1

【解答】 $\frac{a^2}{3}$

【解説】

△ABM_kにおいて余弦定理を用いると

$$AM_k^2 = AB^2 + BM_k^2 - 2AB \cdot BM_k \cos B$$

一方、△ABCにおいて $AB = a \cos B$

また $BM_k = \frac{ka}{n}$ (Bに近い方から M₁, M₂, ……)

よって $AM_k^2 = a^2 \cos^2 B + \frac{k^2 a^2}{n^2} - \frac{2k}{n} a^2 \cos^2 B$

したがって $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} AM_k^2 = a^2 \cos^2 B \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2}{n} a^2 \cos^2 B \sum_{k=1}^{n-1} k$

$$= a^2 \cos^2 B \cdot (n-1) + \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - \frac{2}{n} a^2 \cos^2 B \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \frac{a^2}{6n} (n-1)(2n-1)$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2(2n-1)}{6n} = \frac{a^2}{3}$

2

【解答】 (1) $S(n) = \frac{mn(mn+1)}{2}$ (2) $T(n) = \frac{mn^2(m-1)}{2}$ (3) $\frac{m-1}{m}$

【解説】

(1) $S(n) = 1 + 2 + \dots + mn = \frac{mn(mn+1)}{2}$

(2) 1, 2, …… , mn の中で m の倍数の総和を U(n) とすると

$$U(n) = \sum_{k=1}^n mk = m \sum_{k=1}^n k = m \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{mn(n+1)}{2}$$

よって $T(n) = S(n) - U(n) = \frac{mn(mn+1)}{2} - \frac{mn(n+1)}{2} = \frac{mn^2(m-1)}{2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{S(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{mn^2(m-1)}{2}}{\frac{mn(mn+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m-1}{m + \frac{1}{n}} = \frac{m-1}{m}$

3

【解答】 (1) 略 (2) e

【解説】

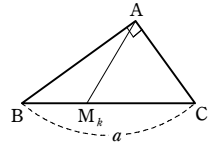
(1) $a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$

$$\leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

これと $a_n > 0$ から $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(2) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

4

【解答】 (1) 略 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+t)^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$

(3) $\frac{1 + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + (-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$ (4) $\frac{1}{(1+x)^2}$

【解説】

(1) $(1+t)^n \geq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 \dots \dots$ ①

[1] $n=1$ のとき

①の左辺) $= 1+t$

①の右辺) $= 1+1 \cdot t+0 = 1+t$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=2$ のとき

①の左辺) $= (1+t)^2 = 1+2t+t^2$

①の右辺) $= 1+2 \cdot t + \frac{2 \cdot 1}{2}t^2 = 1+2t+t^2$

よって、①は成り立つ。

[3] $n \geq 3$ のとき 二項定理により

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k t^k = {}_n C_0 + {}_n C_1 t + {}_n C_2 t^2 + \sum_{k=3}^n {}_n C_k t^k$$

$$= 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \sum_{k=3}^n {}_n C_k t^k$$

$t > 0$ であるから $\sum_{k=3}^n {}_n C_k t^k > 0$

よって $(1+t)^n > 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2$

[1], [2], [3] から、すべての自然数 n に対して、①が成り立つ。

(2) (前半) (1) から $0 < \frac{n}{(1+t)^n} \leq \frac{n}{1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2}$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + t + \frac{n-1}{2}t^2} = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+t)^n} = 0$

(後半) $0 < r < 1$ であるから、実数 $t > 0$ を用いて $r = \frac{1}{1+t}$ と表すことができる。

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+t)^n} = 0$

(3) $S_n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1}nx^{n-1}$

$-xS_n = -x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1} + (-1)^n nx^n$

辺々を引いて

$$(1+x)S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} - (-1)^n nx^n$$

$x \neq -1$ であるから

$$(1+x)S_n = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} + (-1)^{n+1}nx^n = \frac{1 + (-1)^{n+1}x^n + (-1)^{n+1}nx^n(1+x)}{1+x}$$

$$= \frac{1 + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + (-1)^{n+1}nx^{n+1}}{1+x}$$

よって $S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + (-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$

(4) $-(n+1)x^n \leq (-1)^{n+1}(n+1)x^n \leq (n+1)x^n$ が成り立つ。

$0 < x < 1$ のとき、(2) から $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (nx^n + x^n) = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \{-(n+1)x^n\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^n = 0$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n = 0$

また $-nx^{n+1} \leq (-1)^{n+1}nx^{n+1} \leq nx^{n+1}$

$0 < x < 1$ のとき、(2) から $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n \cdot x = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} (-nx^{n+1}) = -\lim_{n \rightarrow \infty} nx^{n+1} = 0$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}nx^{n+1} = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1+0+0}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$

第2講 例題

1

【解答】 (1) 3 (2) ∞ (3) $-\infty$

【解説】

$$(1) \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n} = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n} = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+2^{2n}}{3^n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-2\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \infty$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right] = -\infty$$

2

【解答】 $1 - \sqrt{2} \leq x < 1$, $1 < x \leq 1 + \sqrt{2}$

極限値は $x = 1 \pm \sqrt{2}$ のとき 1; $1 - \sqrt{2} < x < 1$, $1 < x < 1 + \sqrt{2}$ のとき 0

【解説】

与えられた数列が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x^2 - 2x \leq 1 \quad \dots [A]$$

$$-1 < x^2 - 2x \text{ から } x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$\text{ゆえに } (x-1)^2 > 0 \quad \text{よって } x \neq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2x \leq 1 \text{ から } x^2 - 2x - 1 \leq 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ の解は } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに、不等式の解は } 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって、求める x の値の範囲は、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲をとって

$$1 - \sqrt{2} \leq x < 1, 1 < x \leq 1 + \sqrt{2}$$

また、[A] で $x^2 - 2x = 1$ となるのは $x = 1 \pm \sqrt{2}$ のとき。

したがって、数列の極限値は

$$x^2 - 2x = 1 \text{ すなわち } x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ のとき } 1$$

$$-1 < x^2 - 2x < 1 \text{ すなわち } 1 - \sqrt{2} < x < 1, 1 < x < 1 + \sqrt{2} \text{ のとき } 0$$

3

【解答】 $|r| < 1$ のとき 0, $r = 1$ のとき $\frac{2}{3}$, $r = -1$ のとき極限はない、

$|r| > 1$ のとき 1

【解説】

[1] $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + r^n}{r^{2n} + 2} = \frac{0+0}{0+2} = 0$$

[2] $r = 1$ のとき $r^n = 1$, $r^{2n} = 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + r^n}{r^{2n} + 2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$[3] \quad r = -1 \text{ のとき } \frac{r^{2n} + r^n}{r^{2n} + 2} = \frac{1 + (-1)^n}{1 + 2} = \frac{1 + (-1)^n}{3}$$

よって、極限はない。(振動する)

$$[4] \quad |r| > 1 \text{ のとき } \left| \frac{1}{r} \right| < 1, \left| \frac{1}{r^2} \right| < 1 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + r^n}{r^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n} = \frac{1+0}{1+2 \cdot 0} = 1$$

4

【解答】 (1) $a_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 極限は 3 (2) $a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$, 極限は 0

$$(3) \quad a_n = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \text{ 極限は } \frac{11}{3}$$

【解説】

(1) 与えられた漸化式を変形して $a_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(a_n - 3)$

$$\text{また } a_1 - 3 = 1 - 3 = -2$$

よって、数列 $\{a_n - 3\}$ は、初項 -2 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

$$\text{ゆえに } a_n - 3 = -2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ すなわち } a_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] = 3$$

(2) $a_1 > 0$ であるから $a_2 = \frac{a_1}{2 + a_1} > 0$

$$\text{同様に } a_3 > 0, a_4 > 0, \dots, a_n > 0$$

$$\text{したがって } a_n \neq 0$$

$$\text{与えられた漸化式の両辺の逆数をとると } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 + a_n}{a_n}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{a_n} + 1$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおくと } b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$\text{よって } b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

$$\text{また } b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 2 + 1 = 3$$

ゆえに、数列 $\{b_n + 1\}$ は、初項 3、公比 2 の等比数列で $b_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\text{よって } b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$\text{ゆえに } a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(3) 与えられた漸化式を変形して

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n), \quad a_{n+2} - \frac{1}{4}a_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$$

$$\text{これと } a_2 - a_1 = 2, \quad a_2 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{11}{4} \text{ から}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \quad a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n = \frac{11}{4}$$

$$\text{辺々を引くと } -\frac{3}{4}a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{11}{4}$$

$$\text{ゆえに } a_n = \frac{11}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{11}{3}$$

5

【解答】 (1) $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{5}{18}$, $p_3 = \frac{19}{54}$ (2) $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$

(3) 略

【解説】

(1) p_1 は、さいころを 1 回投げるとき、1 の目が 1 回出る確率であるから $p_1 = \frac{1}{6}$

p_2 は、さいころを 2 回投げるとき、1 の目がちょうど 1 回出る確率であるから

$$p_2 = {}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

p_3 は、さいころを 3 回投げるとき、1 の目がちょうど 1 回出るか、または 1 の目が 3 回出る確率であるから

$$p_3 = {}_3C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{76}{6^3} = \frac{19}{54}$$

(2) さいころを $n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出るのは、次の [1], [2] の 2 つの場合があり、これらの事象は互いに排反である。

[1] n 回目までに 1 の目が奇数回出て、 $n+1$ 回目に 1 の目が出ない

[2] n 回目までに 1 の目が偶数回出て、 $n+1$ 回目に 1 の目が出る

n 回目までに 1 の目が奇数回出る確率は p_n 、偶数回出る確率は $1 - p_n$ であるから、

$n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出る確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$$

(3) (2) から $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$ 変形すると $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

よって、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{ゆえに } p_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$$

6

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 4

【解説】

(1) [1] $n = 2$ のとき $a_2 - 4 = \sqrt{a_1 + 12} - 4 > 0$ ($a_1 > 4$ から)

よって、 $a_2 > 4$ となり $n = 2$ のとき $a_n > 4$ は成り立つ。

[2] $n = k$ (≥ 2) のとき $a_k > 4$ が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1} - 4 = \sqrt{a_k + 12} - 4 > 0 \quad (\text{仮定から})$$

よって $a_{k+1} > 4$ となり $n = k+1$ のときも $a_n > 4$ は成り立つ。

したがって [1], [2] から $n = 2, 3, \dots$ に対して、 $a_n > 4$ が成り立つ。

(2) $a_{n+1}-4=\sqrt{a_n+12}-4=\frac{1}{\sqrt{a_n+12}+4}\cdot(a_n-4)$

(1)から $a_n > 4$ ($n=2, 3, \dots$), 条件から $a_1 > 4$ であるから
 $a_n > 4$ ($n=1, 2, \dots$)

よって $\sqrt{a_n+12}+4 > \sqrt{4+12}+4=8$ となり $0 < \frac{1}{\sqrt{a_n+12}+4} < \frac{1}{8}$, $a_n-4 > 0$

ゆえに $a_{n+1}-4 < \frac{1}{8}(a_n-4)$

(3) (2)の不等式をくり返し用いると,

$0 < a_n-4 < \frac{1}{8}(a_{n-1}-4) < \left(\frac{1}{8}\right)^2(a_{n-2}-4) < \dots < \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)$ となり

$0 < a_n-4 < \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\cdot(a_1-4)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)=0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n-4)=0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n=4$

1

解答 (1) $-\infty$ (2) -4 (3) 7

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-10^n}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-10^n}{9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{10}{9}\right)^n \right\} = -\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{3^n-4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1} = -4$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1} = 7$

2

解答 (1) $0 \leq x < 1$; 極限値は $x=0$ のとき 1 , $0 < x < 1$ のとき 0

(2) $1-\sqrt{3} \leq x < 0$, $2 < x \leq 1+\sqrt{3}$; 極限値は $x=1 \pm \sqrt{3}$ のとき 1 ,
 $1-\sqrt{3} < x < 0$, $2 < x < 1+\sqrt{3}$ のとき 0

解説

(1) 数列 $\{(1-2x)^n\}$ が収束するための条件は $-1 < 1-2x \leq 1$

$-1 < 1-2x$ から $x < 1$, $1-2x \leq 1$ から $x \geq 0$

x の値の範囲は, 共通範囲をとって $0 \leq x < 1$

また, 極限値は $1-2x=1$ すなわち $x=0$ のとき 1
 $-1 < 1-2x < 1$ すなわち $0 < x < 1$ のとき 0

(2) 数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するための条件は

$-1 < x^2-2x-1 \leq 1 \dots [A]$

$-1 < x^2-2x-1$ から $x(x-2) > 0$

ゆえに $x < 0$, $2 < x \dots \textcircled{1}$

$x^2-2x-1 \leq 1$ から $x^2-2x-2 \leq 0$

この不等式の解は $1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3} \dots \textcircled{2}$

求める x の値の範囲は, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲をとって

$1-\sqrt{3} \leq x < 0$, $2 < x \leq 1+\sqrt{3}$

また, [A] で $x^2-2x-1=1$ となるのは $x=1 \pm \sqrt{3}$ のとき。

よって, 極限値は

$x^2-2x-1=1$ すなわち $x=1 \pm \sqrt{3}$ のとき 1

$-1 < x^2-2x-1 < 1$ すなわち $1-\sqrt{3} < x < 0$, $2 < x < 1+\sqrt{3}$ のとき 0

3

解答 (1) $|r| < 1$ のとき $\frac{1-r}{1+r}$, $r=1$ のとき $-\frac{1}{3}$, $r=-1$ のとき 1 ,

$|r| > 1$ のとき -1

(2) $|r| < 1$ のとき $\frac{1}{1-r}$, $r=1$ のとき 1 , $r=-1$ のとき 極限はない,

$|r| > 1$ のとき $1-r$

解説

(1) [1] $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n}=0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}} = \frac{1-r-0}{1+r+0} = \frac{1-r}{1+r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}} = \frac{1-1-1}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$

[3] $r=-1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}} = \frac{1-(-1)-1}{1-1+1} = 1$

[4] $|r| > 1$ のとき $\left|\frac{1}{r^2}\right| < 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n-1}{(1+r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n+1} = -1$

(2) [1] $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1}=0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+2}=0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}} = \frac{1+0-0}{1-r+0} = \frac{1}{1-r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{n+1}=1$, $r^{n+2}=1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}} = \frac{1+1-1}{1-1+1} = 1$

[3] $r=-1$ のとき $\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}} = \frac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}} = \frac{1-2(-1)^n}{2-(-1)^n} = \frac{3}{(-1)^n-2} + 2$

よって, 極限はない。(振動する)

[4] $|r| > 1$ のとき $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1-r}{(1-r)\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1} = 1-r$

4

解答 (1) $a_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$, 極限は ∞ (2) $a_n=\frac{1}{3^n-1}$, 極限は 0

(3) $a_n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$, 極限は $\frac{4}{7}$

解説

(1) 与えられた漸化式を変形して $a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$

また $a_1+1=1+1=2$

よって, 数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2 , 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列である。

ゆえに $a_n+1=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ すなわち $a_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\} = \infty$

(2) $a_1=\frac{1}{2} > 0$ であるから, 漸化式より $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, \dots , $a_n > 0$

ゆえに, 漸化式の両辺の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{a_n} + 2$

よって $b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また $b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=3$

ゆえに、数列 $\{b_n+1\}$ は、初項3、公比3の等比数列であるから $b_n+1=3 \cdot 3^{n-1}$

したがって $b_n=3^n-1$

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^n-1}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(3) 与えられた漸化式を変形して

$$a_{n+2}-a_{n+1} = -\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n), \quad a_{n+2} + \frac{3}{4}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n$$

ゆえに $a_{n+1}-a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, $a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n = a_2 + \frac{3}{4}a_1 = 1$

$$\text{辺々引いて} \quad -\frac{7}{4}a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1$$

よって $a_n = \frac{4}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right\}$ ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{7}$

5

別解 (1) $a_n = \frac{11}{36} \left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{9}$ (2) $\frac{4}{9}$

解説

(1) $(n+1)$ 回繰り返した後に A の袋に赤球が入っているのは

[1] n 回後に A の袋に赤球があり、 $(n+1)$ 回目に A の袋から黒球が出る

[2] n 回後に B の袋に赤球があり、 $(n+1)$ 回目に B の袋から赤球が出る

のいずれかであり、[1], [2] は互いに排反であるから

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3}{4} + (1-a_n) \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{20}a_n + \frac{1}{5}$$

$$a_{n+1} = \frac{11}{20}a_n + \frac{1}{5} \text{ を変形すると } a_{n+1} - \frac{4}{9} = \frac{11}{20} \left(a_n - \frac{4}{9} \right)$$

数列 $\left\{ a_n - \frac{4}{9} \right\}$ は、初項 $a_1 - \frac{4}{9} = \frac{3}{4} - \frac{4}{9} = \frac{11}{36}$ 、公比 $\frac{11}{20}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{4}{9} = \frac{11}{36} \left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{11}{36} \left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{9}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{11}{36} \left(\frac{11}{20}\right)^{n-1} + \frac{4}{9} \right] = \frac{4}{9}$

6

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 3

解説

(1) $0 < a_n < 3$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき、与えられた条件から ① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、① が成り立つと仮定すると $0 < a_k < 3$

$n=k+1$ のときを考えると、 $0 < a_k < 3$ であるから

$$a_{k+1} = 1 + \sqrt{1+a_k} > 2 > 0, \quad a_{k+1} = 1 + \sqrt{1+a_k} < 1 + \sqrt{1+3} = 3$$

したがって $0 < a_{k+1} < 3$

よって、 $n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2) $3 - a_{n+1} = 2 - \sqrt{1+a_n} = \frac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}} < \frac{1}{3}(3-a_n)$

(3) (1), (2) から $0 < 3 - a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1) = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} (3-a_n) = 0$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

1

解答 (1) (ア) -1 (イ) $0 < r < 3$ のとき -9 , $r=3$ のとき -2 , $3 < r$ のとき $\frac{1}{r}$

(2) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$

解説

(1) (ア) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{\sin^n \theta - \cos^n \theta}{\sin^n \theta + \cos^n \theta} = \frac{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^n - 1}{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^n + 1} = \frac{\tan^n \theta - 1}{\tan^n \theta + 1}$

このとき、 $0 < \tan \theta < 1$ であるから (与式) $= \frac{0-1}{0+1} = -1$

(イ) [1] $0 < r < 3$ のとき $0 < \frac{r}{3} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{r}{3}\right)^{n-1} - 3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0 - 3}{0 + \frac{1}{3}} = -9$$

[2] $r=3$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8 \cdot 3^{n-1}}{4 \cdot 3^{n-1}} = -2$

[3] $3 < r$ のとき $0 < \frac{3}{r} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 9 \left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}{r + \left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}} = \frac{1 - 9 \cdot 0}{r + 0} = \frac{1}{r}$$

(2) 収束するための条件は $-1 < 4\sin^2 \theta + 2\cos \theta - 3 \leq 1$

$\cos \theta = x$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから $-1 \leq x \leq 1$ …… ①

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ であるから $-1 < 4(1-x^2) + 2x - 3 \leq 1$

整理して $-1 < -4x^2 + 2x + 1 \leq 1$

$-1 < -4x^2 + 2x + 1$ から $2x^2 - x - 1 < 0$

ゆえに $(2x+1)(x-1) < 0$ よって $-\frac{1}{2} < x < 1$ …… ②

$-4x^2 + 2x + 1 \leq 1$ から $2x^2 - x \geq 0$

ゆえに $x(2x-1) \geq 0$ よって $x \leq 0, \frac{1}{2} \leq x$ …… ③

①, ②, ③ の共通範囲をとって $-\frac{1}{2} < x \leq 0, \frac{1}{2} \leq x < 1$

すなわち $-\frac{1}{2} < \cos \theta \leq 0, \frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1$

$0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、 $-\frac{1}{2} < \cos \theta \leq 0$ より $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1 \text{ より } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

よって、求める θ の値の範囲は $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$

2

解答 (1) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

(2) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき 0 に収束, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 1 に収束,

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき 正の無限大に発散,

$-\frac{\pi}{2} < \theta \leq -\frac{\pi}{4}$ のとき 振動する (極限はない)

(3) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき -1 ; $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 0 ;

$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき 1

解説

(1) $|\tan \theta| < 1$ から $-1 < \tan \theta < 1$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で, これを解くと $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

(2) [1] $|\tan \theta| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = 0$

よって, $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき, 0 に収束する。

[2] $\tan \theta = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = 1$

よって, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 1 に収束する。

[3] $\tan \theta > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = \infty$

よって, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, 正の無限大に発散する。

[4] $\tan \theta \leq -1$ すなわち $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq -\frac{\pi}{4}$ のとき,

数列 $\{\tan^n \theta\}$ は振動する。(極限はない)

(3) [1] $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = 0$ であるから

$$\text{(与式)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin^n \theta}{\cos^n \theta} - 1}{\frac{\sin^n \theta}{\cos^n \theta} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^n \theta - 1}{\tan^n \theta + 1} = -1$$

[2] $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $\sin \theta = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから (与式) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

[3] $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $|\tan \theta| > 1$ であるから $\left| \frac{1}{\tan \theta} \right| < 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tan^n \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tan \theta} \right)^n = 0$

したがって (与式) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\cos^n \theta}{\sin^n \theta}}{1 + \frac{\cos^n \theta}{\sin^n \theta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\tan^n \theta}}{1 + \frac{1}{\tan^n \theta}} = 1$

3

解答 (1) 略 (2) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ (3) 2

解説

(1) $a_n > 2 \dots \dots$ ① が成り立つことを, 数学的帰納法で証明する。

[1] $n = 1$ のとき

$a_1 = 3$ であるから ① は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

① が成り立つ, すなわち $a_k > 2 \dots \dots$ ② と仮定する。

$$a_{k+1} - 2 = \frac{5a_k - 4}{2a_k - 1} - 2 = \frac{a_k - 2}{2a_k - 1}$$

② から $a_k - 2 > 0$, $2a_k - 1 > 3 > 0$

よって $a_{k+1} - 2 > 0$ すなわち $a_{k+1} > 2$

ゆえに, ① は $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n に対し, ① が成り立つ。

(2) $a_{n+1} = \frac{5a_n - 4}{2a_n - 1}$ から

$$a_{n+1} - 2 = \frac{5a_n - 4}{2a_n - 1} - 2 = \frac{a_n - 2}{2a_n - 1} \dots \dots \textcircled{3}$$

(1) より, すべての自然数 n に対して $a_n > 2$ であるから, ③ の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1} - 2} = \frac{2a_n - 1}{a_n - 2}$$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1} - 2} = 2 + \frac{3}{a_n - 2}$

$b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n + 2$

変形すると $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

また, $b_1 = \frac{1}{a_1 - 2} = \frac{1}{3 - 2} = 1$ であるから, 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2$, 公比 3 の等比数列である。

よって $b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ ゆえに $b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

(3) (2) から $a_n = \frac{1}{b_n} + 2 = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1} + 2$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1} + 2 \right) = 2$

4

解答 (1) $b_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$ (2) $\frac{5}{2}$

解説

(1) $b_n = \frac{1}{5} a_n + 1 \dots \dots$ ①, $a_{n+1} = 3b_n + 2 \dots \dots$ ② とする。

① から $b_1 = \frac{1}{5} a_1 + 1 = \frac{1}{5} \cdot 0 + 1 = 1$

また $a_n = 5b_n - 5$ ゆえに $a_{n+1} = 5b_{n+1} - 5$

これを②に代入して $5b_{n+1} - 5 = 3b_n + 2$

よって $b_{n+1} = \frac{3}{5} b_n + \frac{7}{5}$ 変形すると $b_{n+1} - \frac{7}{2} = \frac{3}{5} \left(b_n - \frac{7}{2} \right)$

ゆえに, 数列 $\left\{ b_n - \frac{7}{2} \right\}$ は初項 $b_1 - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$, 公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$$

(2) $b_{n+1} - b_n = \left[\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n \right] - \left[\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right] = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \left(-\frac{3}{5} + 1 \right) = \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}$

$$b_{2n} - b_n = \left[\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{2n-1} \right] - \left[\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \right] = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \left\{ -\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right\}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} \left\{ -\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right\} = \frac{5}{2}$

5

解答 略

解説

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} x_n + \frac{4}{5} y_n \dots \dots \textcircled{1}, \quad y_{n+1} = \frac{3}{4} x_n + \frac{1}{5} y_n \dots \dots \textcircled{2}$$

① + ② から $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$ $P_1(1, 1)$ から $x_1 + y_1 = 2$

よって $x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = \dots = x_1 + y_1 = 2$ ゆえに $y_n = 2 - x_n$

これを①に代入して整理すると $x_{n+1} = -\frac{11}{20} x_n + \frac{8}{5}$

変形すると $x_{n+1} - \frac{32}{31} = -\frac{11}{20} \left(x_n - \frac{32}{31} \right)$ また $x_1 - \frac{32}{31} = -\frac{1}{31}$

ゆえに $x_n - \frac{32}{31} = -\frac{1}{31} \left(-\frac{11}{20} \right)^{n-1}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{32}{31} - \frac{1}{31} \left(-\frac{11}{20} \right)^{n-1} \right] = \frac{32}{31}$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - x_n) = 2 - \frac{32}{31} = \frac{30}{31}$

したがって, 点列 P_1, P_2, \dots は定点 $\left(\frac{32}{31}, \frac{30}{31} \right)$ に限りなく近づく。

6

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 2

解説

(1) すべての自然数 n について $a_n > 2 \dots \dots$ ① が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n = 1$ のとき

条件より, $a_1 = 3$ であるから, ① が成り立つ。

[2] $n = k$ のとき, ① が成り立つ, すなわち $a_k > 2$ が成り立つと仮定すると,

$$n = k + 1 \text{ のとき} \quad a_{k+1} - 2 = \left(3 - \frac{2}{a_k} \right) - 2 = 1 - \frac{2}{a_k} = \frac{a_k - 2}{a_k} > 0$$

よって $a_{k+1} > 2$

ゆえに, $n = k + 1$ のときも ① が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2) (1) から $a_{n+1} - 2 > 0 \dots \dots$ ②

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \frac{1}{2}(a_n - 2) - (a_{n+1} - 2) &= \frac{1}{2}(a_n - 2) - \left(1 - \frac{2}{a_n} \right) = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} - 2 \\ &= \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{2a_n} = \frac{(a_n - 2)^2}{2a_n} > 0 \end{aligned}$$

すなわち $\frac{1}{2}(a_n - 2) > a_{n+1} - 2 \dots \dots$ ③

②, ③ から $0 < a_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(a_n - 2)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(3) (1), (2) から $0 < a_n - 2 < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (a_1 - 2) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

1

解答 (1) $x_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{x_n}{8}$ (2) $\frac{2}{3}$

解説

(1) $\triangle A_n B_n C_n$ において $BC_n = \frac{x_n}{2}$

$AC_n = 1 - BC_n$ であるから $AC_n = 1 - \frac{x_n}{2}$

$\triangle C_n A B_n$ において $AB_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_n}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{x_n}{4}$

$CB_n = 1 - AB_n = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x_n}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x_n}{4}$

$\triangle B_n C A_{n+1}$ において $CA_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_n}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{x_n}{8}$

ゆえに $x_{n+1} = BA_{n+1} = 1 - CA_{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{x_n}{8}\right)$

したがって $x_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{x_n}{8}$

(2) $x_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{x_n}{8}$ を変形すると $x_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{8} \left(x_n - \frac{2}{3}\right)$

よって、数列 $\left\{x_n - \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $x_1 - \frac{2}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であり

$$x_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \left(x_1 - \frac{2}{3}\right)$$

ゆえに $x_n = \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \left(x_1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}$ よって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$

2

解答 1

解説

(n+1)年目の都外の人口は

n年目に都外に住み、(n+1)年目に都内に移住しない人 と

n年目に都内に住み、(n+1)年目に都外に移住する人

の数の合計になるから $a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + b_n \cdot \frac{1}{3}$

すなわち $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$ ……①

同様にして $b_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3} + b_n \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

すなわち $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$ ……②

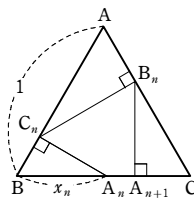
①+②から $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$

よって $a_n + b_n = a_1 + b_1$ ……③

①-②から $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$

よって $a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1)$ ……④

③+④÷2から $a_n = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_1) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) \right\}$



③-④÷2から $b_n = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_1) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) \right\}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_1) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) \right\}}{\frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_1) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) \right\}} = 1$

3

解答 (1) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$

(2) $b_n = \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\}$ (3) $p_n = \frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{7}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{7}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{7}$

解説

(1) 時刻 n+1 に点 P が頂点 A にいる場合は、次の2通りがある。

[1] 時刻 n に点 A にいて、確率 $\frac{1}{2}$ でとどまる。

[2] 時刻 n に点 B にいて、確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。

よって $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n$

時刻 n+1 に点 P が頂点 B にいる場合は、次の3通りがある。

[1] 時刻 n に点 A にいて、確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

[2] 時刻 n に点 B にいて、確率 $\frac{1}{3}$ でとどまる。

[3] 時刻 n に点 C にいて、確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

よって $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$

時刻 n+1 に点 P が頂点 C にいる場合は、次の2通りがある。

[1] 時刻 n に点 B にいて、確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。

[2] 時刻 n に点 C にいて、確率 $\frac{1}{2}$ でとどまる。

よって $c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n$

(2) $a_n + b_n + c_n = 1$ から $a_n + c_n = 1 - b_n$

よって、(1) から $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}(a_n + c_n) = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}(1 - b_n) = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2}$

この漸化式を変形すると $b_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6} \left(b_n - \frac{3}{7}\right)$

ここで、時刻 0 に点 P は頂点 A にいるから $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$

よって、数列 $\left\{b_n - \frac{3}{7}\right\}$ は、初項 $b_0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$ 、公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって $b_n = \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\}$

④ n=0 から考えているため、 b_n は n+1 番目の項となる。

(3) (2)から $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\}$
 よって $p_{n+1} = 2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + \frac{2}{7} \left\{ 2^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} = p_n + \frac{2}{7} \left\{ 2^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$
 $p_0 = 2^0 \cdot a_0 = 1$ より、 $n \geq 1$ のとき

$$p_n = p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{7} \left\{ 2^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right\} = 1 + \frac{2}{7} \left\{ \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \dots\dots \textcircled{1}$$

$n=0$ のとき $\frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{14} = 1$
 $p_0 = 1$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=0$ のときも成り立つ。

よって $p_n = \frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4) (3)から $a_n = \frac{p_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\} = \frac{2}{7}$

(2)から $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n \right\} = \frac{3}{7}$

$c_n = 1 - a_n - b_n$ から $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n - b_n) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$

4

【解答】 (1) $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$ (2) 略 (3) 証明略、 $\sqrt{3}$

【解説】

(1) $f(x) = x^2 - 3$ から $f'(x) = 2x$
 よって、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n, a_n^2 - 3)$ における接線の方程式は
 $y - (a_n^2 - 3) = 2a_n(x - a_n)$ すなわち $y = 2a_n x - a_n^2 - 3$
 この接線と x 軸とが交わる点の x 座標が a_{n+1} であるから
 $0 = 2a_n a_{n+1} - a_n^2 - 3$
 すなわち $2a_n a_{n+1} = a_n^2 + 3$ ($n=1, 2, 3, \dots$) $\dots\dots \textcircled{1}$
 ここで、 $a_1 = 2 > 0$ であり、 $\textcircled{1}$ より、 $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} > 0$ が成り立つ。
 ゆえに、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つから、 $\textcircled{1}$ の両辺を $2a_n$ ($\neq 0$) で割ると $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$

(2) すべての自然数 n に対して $a_n > \sqrt{3}$ $\dots\dots \textcircled{2}$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき $a_1 = 2 > \sqrt{3}$ であるから、 $n=1$ のとき $\textcircled{2}$ は成り立つ。
 [2] $n=k$ (k は自然数) のとき、 $\textcircled{2}$ が成り立つと仮定すると
 $a_k > \sqrt{3}$
 $n=k+1$ のとき $a_{k+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right) - \sqrt{3} = \frac{1}{2a_k} (a_k^2 - 2\sqrt{3}a_k + 3)$

$$= \frac{1}{2a_k} (a_k - \sqrt{3})^2 > 0$$

よって、 $n=k+1$ のときにも、 $\textcircled{2}$ が成り立つ。
 [1], [2] より、すべての自然数 n に対して、 $a_n > \sqrt{3}$ が成り立つ。
 (3) (2)より $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2a_n} (a_n - \sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3}) \cdot \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n}$
 $a_n - \sqrt{3} > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) であるから $0 < \frac{a_n - \sqrt{3}}{a_n} < 1$
 よって $0 < a_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3})$
 ゆえに $0 < a_n - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{3})$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (2 - \sqrt{3}) = 0$ であるから、はさみうちの原理により
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0$
 したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$

1

【解答】 (1) 収束し、その和は $\frac{3}{4}$ (2) 発散する

【解説】

第 n 項までの部分 and を S_n とする。

(1) $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$
 よって $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$
 $+ \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}$

したがって、この無限級数は収束し、その和は $\frac{3}{4}$ である。

(2) 第 n 項は $\frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2}$
 よって $S_n = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} = \infty$

したがって、この無限級数は発散する。

2

【解答】 (1) 発散 (2) 収束、 $\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$

【解説】

公比を r とする。

(1) 初項は $2 - \sqrt{3}$ であり、公比は
 $r = \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 1 + \sqrt{3}$

$|r| > 1$ であるから、この無限等比級数は発散する。

(2) 初項は $3 + \sqrt{2}$ であり、公比は
 $r = \frac{-(2\sqrt{2}-1)}{3+\sqrt{2}} = \frac{-(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = 1 - \sqrt{2}$

$|r| < 1$ であるから、この無限等比級数は収束し、その和 S は

$$S = \frac{3 + \sqrt{2}}{1 - (1 - \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}$$

3

【解答】 $\frac{9}{4}$

【解説】

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は、それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ で公比の絶対値が1より小さいから、これらはともに収束する。

第3講 例題

よって、求める和 S は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

4

解答 $\frac{53}{110}$

解説

$$\begin{aligned} 0.48\bar{1} &= 0.4 + 0.081 + 0.00081 + 0.0000081 + \dots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{81}{10^3} + \frac{81}{10^5} + \frac{81}{10^7} + \dots \\ &= \frac{4}{10} + \frac{81}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{4}{10} + \frac{9}{110} = \frac{53}{110} \end{aligned}$$

5

解答 (1) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, 和 $\frac{1}{1-3x}$ (2) $x=0, 2 < x < 4$; 和 $\frac{x}{x-2}$

解説

(1) 初項が1, 公比が $3x$ であるから, この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $-1 < 3x < 1$ すなわち $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

このときの和は $\frac{1}{1-3x}$

(2) 初項が x , 公比が $3-x$ であるから, この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $x=0$ または $-1 < 3-x < 1$
 $-1 < 3-x < 1$ より $2 < x < 4$

よって, 求める x の値の範囲は $x=0, 2 < x < 4$
 $x=0$ のとき, 和は 0

$2 < x < 4$ のとき, 和は $\frac{x}{1-(3-x)} = \frac{x}{x-2}$

これは, $x=0$ のときも成り立つ。

よって, 求める和は $\frac{x}{x-2}$

6

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 第 n 項 a_n は $a_n = \frac{2n+1}{2n}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \neq 0$

ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから, 与えられた無限級数は発散する。

別解 第 n 項までの部分 and を S_n とすると

$$S_n = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6} + \dots + \frac{2n+1}{2n} > 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

よって, 与えられた無限級数は発散する。

(2) 第 n 項 a_n は $a_n = \cos n\pi$

ここで n が奇数のとき $\cos n\pi = -1$

n が偶数のとき $\cos n\pi = 1$

であるから, 数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち, 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから, 与えられた無限級数は発散する。

7

解答 (1) $S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (2) 収束, 和 1

解説

$$(1) S_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$S_{2n} = S_{2n-1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

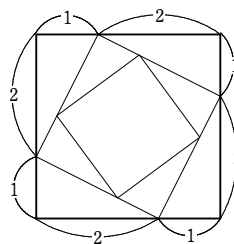
(2) (1) から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$

したがって, 無限級数 ① は収束して, その和は 1

8

図のように, 1 辺の長さ 1 の正方形の各辺を 2:1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_1 とする。同様に, 新しくできた正方形の 4 辺を 2:1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_2 とする。以下同様に, この操作を無限に続けて得られるすべての正方形の面積の総和 $S = S_1 + S_2 + \dots$ を求めよ。



解答 $S = \frac{5}{4}$

解説

面積 S_n の正方形の一辺の長さを l とすると

$$\begin{aligned} S_n : S_{n+1} &= l^2 : \left\{ \left(\frac{2}{3}l\right)^2 + \left(\frac{1}{3}l\right)^2 \right\} \\ &= l^2 : \frac{5}{9}l^2 = 1 : \frac{5}{9} \end{aligned}$$

よって $S_{n+1} = \frac{5}{9}S_n$

もとの正方形の面積は 1 であるから $S_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

したがって, 求める面積の総和 S は, 初項 $\frac{5}{9}$, 公比 $\frac{5}{9}$ ($\left|\frac{5}{9}\right| < 1$) の無限等比級数の和

で表され $S = \frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} = \frac{5}{4}$

9

解答 $\frac{27}{32}\pi$

解説

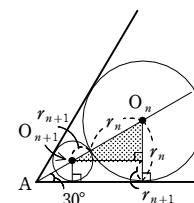
円 O_n の半径を r_n , 面積を S_n とすると右の図から

$$(r_n + r_{n+1})\sin 30^\circ = r_n - r_{n+1}$$

よって $r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$ したがって $S_{n+1} = \frac{1}{9}S_n$

また, $r_1 = \frac{3}{2}\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $S_1 = \frac{3}{4}\pi$

ゆえに, 円の面積の総和は, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{1}{9}} = \frac{27}{32}\pi$



第3講 例題演習

1

【解答】 (1) 収束, 和 $\frac{1}{3}$ (2) 発散する

【解説】

第 n 項までの部分和を S_n とする。

$$(1) \text{ 第 } n \text{ 項は } \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\text{よって } S_n = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

したがって, この無限級数は収束し, その和は $\frac{1}{3}$ である。

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1}} = \frac{\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1}}{(\sqrt{3n-2} + \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+1}}{(3n-2) - (3n+1)} = \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2}}{3}$$

$$\text{よって } S_n = \frac{2-1}{3} + \frac{\sqrt{7}-2}{3} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3n+1}-1}{3}$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+1}-1}{3} = \infty$$

したがって, この無限級数は発散する。

2

【解答】 (1) 収束, $\frac{4}{3}$ (2) 収束, $\frac{5}{8}$ (3) 発散 (4) 発散 (5) 収束, $6+4\sqrt{3}$

【解説】

公比を r とする。

(1) 初項は 1, 公比は $r = \frac{1}{4}$ で $|r| < 1$

よって, この無限等比級数は収束し, その和 S は

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(2) 初項は 1, 公比は $r = -\frac{3}{5}$ で $|r| < 1$

よって, この無限等比級数は収束し, その和 S は

$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{8}$$

(3) 初項は 1, 公比は $r = -\sqrt{5}$ で $|r| > 1$

よって, この無限等比級数は発散する。

(4) 初項は 3, 公比は $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ で $|r| > 1$

よって, この無限等比級数は発散する。

(5) 初項は $2\sqrt{3}$, 公比は $r = \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$ で $|r| < 1$

よって, この無限等比級数は収束し, その和 S は

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 6+4\sqrt{3}$$

3

【解答】 (1) 3 (2) $-\frac{2}{3}$

【解説】

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数で, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$ は初項 2, 公比 $\frac{1}{5}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから, この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

$$\text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{2}{5^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{2}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-5}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{5}{4^n} \right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n}$ は初項 $\frac{5}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから, この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

$$\text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-5}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

4

【解答】 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{29}{55}$ (3) $\frac{878}{1665}$

【解説】

(1) $0.\dot{5} = 0.5 + 0.05 + 0.005 + \dots = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \dots$

$$= \frac{5}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

(2) $0.5\dot{2}\dot{7} = 0.5 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \dots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{27}{10^3} + \frac{27}{10^5} + \frac{27}{10^7} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{27}{10^3} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{27}{990} = \frac{29}{55}$$

(3) $0.5\dot{2}7\dot{3} = 0.5 + 0.0273 + 0.0000273 + 0.000000273 + \dots$

$$= \frac{1}{2} + \frac{273}{10^4} + \frac{273}{10^7} + \frac{273}{10^{10}} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{273}{10^4} \left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{91}{3330} = \frac{878}{1665}$$

5

【解答】 (1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; 和は $\frac{3}{1-2x}$ (2) $-1 < x < 1$, $x=3$; 和は $\frac{3-x}{1-x}$

(3) $-1 < x \leq 0$, $1 < x < 2$; 和は $-\frac{x}{x^2-x-2}$

【解説】

(1) 初項が 3, 公比が $2x$ であるから, この無限等比級数が収束するための必要十分条件

$$\text{は } -1 < 2x < 1 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{このときの和は } \frac{3}{1-2x}$$

(2) この無限等比級数の初項は $3-x$, 公比 x である。

この無限等比級数が収束するための条件は

$$3-x=0 \quad \text{または} \quad |x| < 1 \quad \text{ゆえに} \quad -1 < x < 1, x=3$$

$x=3$ のとき, 和は 0

$-1 < x < 1$ のとき, 和は $\frac{3-x}{1-x}$ これは $x=3$ の場合も含む。

したがって, 求める和は $\frac{3-x}{1-x}$

(3) この無限等比級数の初項は x , 公比は x^2-x-1 である。

よって, この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$x=0 \quad \text{または} \quad -1 < x^2-x-1 < 1$$

$-1 < x^2-x-1$ から $x^2-x > 0$ ゆえに $x < 0, 1 < x$ ……①

$$x^2-x-1 < 1 \text{ から } x^2-x-2 < 0$$

$$\text{これを解くと } (x-2)(x+1) < 0 \text{ から } -1 < x < 2 \quad \dots\dots \text{②}$$

①, ② の共通範囲を求めて $-1 < x < 0, 1 < x < 2$

したがって, 求める x の値の範囲は $-1 < x \leq 0, 1 < x < 2$

$$\text{このとき, 和は } \frac{x}{1-(x^2-x-1)} = -\frac{x}{x^2-x-2}$$

6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 第 n 項 a_n は $a_n = \frac{n}{2n-1}$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから, 与えられた無限級数は発散する。

【別解】 第 n 項までの部分 and を S_n とすると

$$S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1}$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \infty \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

よって、与えられた無限級数は発散する。

(2) 第 n 項 a_n は $a_n = \sin \frac{2n-1}{2} \pi$

ここで n が奇数のとき $\sin \frac{2n-1}{2} \pi = 1$

n が偶数のとき $\sin \frac{2n-1}{2} \pi = -1$

であるから、数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち、数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから、与えられた無限級数は発散する。

7

解答 (1) 発散 (2) 収束, $\frac{5}{2}$

解説

(1) 第 n 項までの部分積を S_n とすると $S_{2n-1} = \frac{2}{3}$

また $S_{2n} = S_{2n-1} + \left(-\frac{2n+2}{2n+3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2n+2}{2n+3}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \right) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ であるから、無限級数は発散する。

別解 第 n 項を a_n とすると $a_{2n} = -\frac{2n+2}{2n+3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -1$ から、数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しない。

したがって、この無限級数は発散する。

(2) 第 n 項までの部分積を S_n とする。

この無限級数の第 $(2n-1)$ 項は $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 、第 $2n$ 項は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であるから

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - 0 = \frac{5}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \frac{5}{2}$ であるから、無限級数は収束し、和は $\frac{5}{2}$

8

解答 $\frac{32}{3}$

解説

$\triangle A_n B A_{n+1}$ の面積を S_n とする。

$\triangle A_n B A_{n+1} \sim \triangle A_{n+1} B A_{n+2}$ で、相似比は $A_n A_{n+1} : A_{n+1} A_{n+2} = 5 : 4$

ゆえに $S_n : S_{n+1} = 5^2 : 4^2$ すなわち $S_{n+1} = \frac{16}{25} S_n$

よって、求める面積の総和 S は、初項 $S_1 = \frac{16}{25} \cdot 6 = \frac{96}{25}$ 、公比 $\frac{16}{25}$ ($\left|\frac{16}{25}\right| < 1$) の無限

$$\text{等比級数の和で表され } S = \frac{\frac{96}{25}}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{32}{3}$$

9

解答 $\frac{3}{32} \pi$

解説

円 O_n の半径を r_n 、面積を S_n とし、点 O_{n+1} を通り辺 AB に平行な直線と点 O_n から AB に下ろした垂線との交点を H_n とする。

$\triangle O_n O_{n+1} H_n$ において、 $\angle O_n O_{n+1} H_n = 30^\circ$ であるから $O_n O_{n+1} \sin 30^\circ = O_n H_n$

すなわち $(r_n + r_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} = r_n - r_{n+1}$

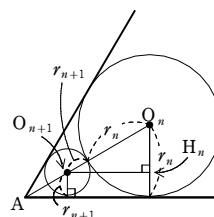
よって $r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$

したがって、円 O_n と円 O_{n+1} の面積比は $9 : 1$ であるから $S_{n+1} = \frac{1}{9} S_n$

また、 $r_1 = \frac{1}{2} \tan 30^\circ = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから $S_1 = \frac{\pi}{12}$

ゆえに、円の面積の総和は、初項 $\frac{\pi}{12}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ ($\left|\frac{1}{9}\right| < 1$) の無限等比級数の和で表され

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{12}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{32} \pi$$



1

解答 $\frac{3}{2}$

解説

初項を a 、公比を r とする。

$a=0$ のとき、条件を満たさないから $a \neq 0$

また、無限等比級数の和があるから $|r| < 1$

条件から $\frac{a}{1-r} = \frac{ar}{1-r^2} + 1$ ①, $\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{1-r}$ ②

①の両辺に $1-r^2$ を掛けると $a(1+r) = ar + 1 - r^2$

よって $a = 1 - r^2$ ③

②の両辺に $2(1-r^2)$ を掛けると $2a^2 = a(1+r)$

$a \neq 0$ であるから $2a = 1+r$ ③を代入して $2(1-r^2) = 1+r$

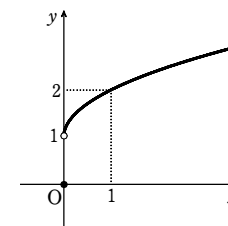
整理すると $2r^2 + r - 1 = 0$ すなわち $(r+1)(2r-1) = 0$

$|r| < 1$ から $r = \frac{1}{2}$ ③に代入して $a = \frac{3}{4}$ ($a \neq 0$ を満たす)

よって、もとの級数の和は $\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

2

解答 (図)



解説

関数 $f(x)$ の定義域は $x \geq 0$ で、この無限等比級数の初項は \sqrt{x} 、公比は $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ である。

[1] $x=0$ のとき、この無限等比級数は収束し、その和は 0 である。

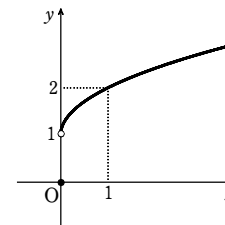
[2] $x > 0$ のとき、 $0 < \frac{1}{1+\sqrt{x}} < 1$ であるから、

この無限等比級数は収束し、その和は

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{x} + 1$$

よって $\begin{cases} x=0 \text{ のとき } f(x) = 0 \\ x>0 \text{ のとき } f(x) = \sqrt{x} + 1 \end{cases}$

したがって、関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



第3講 レベルA

3

【解答】 (1) 収束, $-\frac{1}{2}$ (2) 発散する (3) 発散する

【解説】

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $S_n = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2}$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right)$

$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

よって, 収束し, その和は $-\frac{1}{2}$

(2) $S_{2n-1} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(-\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \frac{1}{2}$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n-1} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ であるから, 発散する。

【別解】 $a_{2n-1} = \frac{n}{n+1}$ から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 1 \neq 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

(3) $S_{2n-1} = 2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n}\right) = 2$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 2$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n-1} - \frac{n+2}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{n+1} \right) = 2 - 1 = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ であるから, 発散する。

【別解】 $a_{2n-1} = \frac{n+1}{n}$ から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 1 \neq 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

4

【解答】 (1) $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$ (2) $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ (3) $\frac{1}{4}$

【解説】

(1) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$ の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると
 $1 = A(n+2) + Bn$ すなわち $1 = (A+B)n + 2A$

これがすべての自然数 n について成り立つための条件は $A+B=0, 2A=1$

これを解くと $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

(2) (1) から $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

よって $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}$

5

【解答】 $\frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11} a^2$

【解説】

S_n の 1 辺の長さを a_n とすると, 図から

$\tan 30^\circ = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}}$

よって $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right) a_{n+1} = a_n$

ゆえに $a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_n$

また $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a$

したがって $a_{n+1}^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^2 a_n^2, a_1^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} a \right)^2$

S_n の面積は a_n^2 であるから, すべての正方形の面積の和 S は, 初項 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} a \right)^2$,

公比 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^2$ の無限等比級数の和で表され, $\left| \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right| < 1$ であるから

$S = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} a \right)^2}{1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2} a^2}{1 - \frac{6-3\sqrt{3}}{2}} = \frac{6-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4} a^2 = \frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11} a^2$

6

【解答】 $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)$

【解説】

O から x 軸の正の向きに 1 だけ進んだ点を P_1 , 次に y

軸の正の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2 , 以下順に進んだ

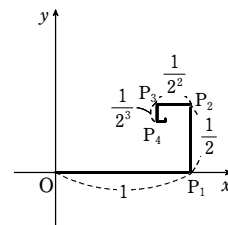
点を P_3, P_4, \dots とする。

求める点の座標を (x, y) とすると

$x = OP_1 - P_2P_3 + P_4P_5 - \dots$

$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \dots$

これは, 初項 1, 公比 $-\frac{1}{2^2}$ ($\left| -\frac{1}{2^2} \right| < 1$) の無限等比



級数であるから, 収束して, その和は $x = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2^2} \right)} = \frac{4}{5}$

また $y = P_1P_2 - P_3P_4 + P_5P_6 - \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \dots$

これは, 初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{2^2}$ ($\left| -\frac{1}{2^2} \right| < 1$) の無限等比級数であるから, 収束して, そ

の和は $y = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2^2} \right)} = \frac{2}{5}$

よって, 求める点の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)$

第3講 レベルB

1

【解答】 (1) $\frac{1}{\log_{10} 2}$ (2) $\frac{1}{8}$

【解説】

$$(1) \frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log_{10} n \log_{10}(n+1)} = \frac{\log_{10} \frac{n+1}{n}}{\log_{10} n \log_{10}(n+1)} = \frac{\log_{10}(n+1) - \log_{10} n}{\log_{10} n \log_{10}(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\log_{10} n} - \frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log_{10} k \log_{10}(k+1)} \text{ とすると}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{\log_{10} k} - \frac{1}{\log_{10}(k+1)} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\log_{10} 2} - \frac{1}{\log_{10} 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_{10} 3} - \frac{1}{\log_{10} 4} \right) + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{\log_{10} n} - \frac{1}{\log_{10}(n+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{\log_{10} 2} - \frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

よって、求める無限級数の和 S は

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log_{10} 2} - \frac{1}{\log_{10}(n+1)} \right\} = \frac{1}{\log_{10} 2}$$

$$(2) \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(4k^2-1)^2} \text{ とすると}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}$$

よって、求める無限級数の和 S は

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left\{ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} = \frac{1}{8}$$

2

【解答】 $A_2 B_2 = \frac{\sqrt{17}}{6}$, 和は $\frac{29}{15}$

【解説】

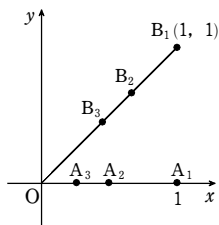
$A_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ となるから

$$A_2 B_2^2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{4}{9} = \frac{17}{36}$$

よって $A_2 B_2 = \frac{\sqrt{17}}{6}$

また、 $A_n(p_n, 0)$, $B_n(q_n, q_n)$ とおく。



$A_{n+1}(p_{n+1}, 0)$ は線分 OA_n の中点であり、 $B_{n+1}(q_{n+1}, q_{n+1})$ は線分 OB_n を $2:1$ に内分する点であるから $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n \dots \dots \textcircled{1}$, $q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \dots \dots \textcircled{2}$

よって、 $\textcircled{1}$ より $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\textcircled{2}$ より $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} q_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに $A_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 0\right)$, $B_n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

よって $(a_n)^2 = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\}^2$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$= 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right]$

$$= 2 \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{18}{5} - 3 + \frac{4}{3} = \frac{29}{15}$$

3

【解答】 (1) $3 \cdot 4^n$ (2) $\frac{8}{5}$

【解説】

(1) 図形 A_n の辺の数を a_n とする。

図形 A_{n-1} のそれぞれ1つの辺が4つの辺に分かれて図形 A_n ができるから

$$a_n = 4 \cdot a_{n-1}$$

$a_0 = 3$ であるから $a_n = 3 \cdot 4^n$

(2) 図形 A_{n-1} の外側に付け加える正三角形の1つの面積は、正三角形の1辺の長さが

A_{n-1} の1辺の長さの $\frac{1}{3}$ であるから $\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_0 = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^n$

また、図形 A_{n-1} の外側に付け加える正三角形の数は a_{n-1} であるから、 $n \geq 1$ のとき

$$S_n = S_{n-1} + \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot a_{n-1} = S_{n-1} + \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 3 \cdot 4^{n-1} = S_{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

したがって $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right\} = \frac{8}{5}$

4

【解答】 (1) $\Delta P_n R_{n+1} Q_{n+1} = t(1-t)a_n$, $a_{n+1} = (3t^2 - 3t + 1)a_n$

(2) $S = \frac{a_1}{-3t^2 + 3t}$ (3) $t = \frac{1}{2}$, $S = \frac{4}{3}$

【解説】

(1) $\Delta P_n R_{n+1} Q_{n+1} = \Delta P_n Q_n R_n \times \frac{P_n R_{n+1}}{P_n Q_n} \times \frac{P_n Q_{n+1}}{P_n R_n} = t(1-t)a_n$

同様に考えると $\Delta Q_n P_{n+1} R_{n+1} = t(1-t)a_n$

$$\Delta R_n Q_{n+1} P_{n+1} = t(1-t)a_n$$

したがって $a_{n+1} = a_n - (\Delta P_n R_{n+1} Q_{n+1} + \Delta Q_n P_{n+1} R_{n+1} + \Delta R_n Q_{n+1} P_{n+1})$

$$= a_n - 3t(1-t)a_n = (3t^2 - 3t + 1)a_n$$

(2) (1) から、数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 、公比 $3t^2 - 3t + 1$ の等比数列である。

公比について $3t^2 - 3t + 1 = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$0 < t < 1$ であるから $\frac{1}{4} \leq 3t^2 - 3t + 1 < 1$

よって、無限等比級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し、その和は

$$S = \frac{a_1}{1 - (3t^2 - 3t + 1)} = \frac{a_1}{-3t^2 + 3t}$$

(3) (2) から、 $a_1 = 1$ のとき $S = \frac{1}{-3t^2 + 3t}$

$$-3t^2 + 3t = -3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$0 < t < 1$ であるから $0 < -3t^2 + 3t \leq \frac{3}{4}$

したがって、 S は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{4}{3}$ と取る。

第4講 例題

1

【解答】 (1) -1 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1

【解説】

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 - x + 1} = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{x-2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{2+(x-2)}{x-2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

2

【解答】 $a=7, b=4$

【解説】

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{3x+a} - b) = 0$$

$$\text{よって } \sqrt{9+a} - b = 0 \quad \text{すなわち } b = \sqrt{9+a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+a} - b}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+a} - \sqrt{9+a}}{x-3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x+a) - (9+a)}{(x-3)(\sqrt{3x+a} + \sqrt{9+a})} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{\sqrt{3x+a} + \sqrt{9+a}} = \frac{3}{2\sqrt{9+a}}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{3}{2\sqrt{9+a}} = \frac{3}{8} \text{ から } a=7$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } b=4$$

3

【解答】 $a=1, b=-3$

【解説】

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} - ax - b \text{ において, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5 \text{ が成り立つとする.}$$

$$a \leq 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ となるから } a > 0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のときを考えるから, } x > 0 \text{ としてよい.}$$

$$\text{よって } f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - ax - b)(\sqrt{x^2 + 4x} + ax + b)}{\sqrt{x^2 + 4x} + ax + b} \\ = \frac{(x^2 + 4x) - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + ax + b} = \frac{(1-a^2)x^2 + (4-2ab)x - b^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + ax + b} \\ = \frac{(1-a^2)x + (4-2ab) - \frac{b^2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + a + \frac{b}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5 \text{ が成り立つには } 1 - a^2 = 0$$

$$a > 0 \text{ から } a = 1$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-2b) - \frac{b^2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{b}{x}} = 2 - b$$

$$\text{よって, } 2 - b = 5 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5 \text{ が成り立つから } b = -3$$

$$\text{したがって } a = 1, b = -3$$

4

【解答】 (1) 1 (2) -1 (3) 極限はない

【解説】

$$(1) x > 1 \text{ のとき } |x-1| = x-1 \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1$$

$$(2) x < 1 \text{ のとき } |x-1| = -(x-1) \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-1) = -1$$

$$(3) (1), (2) \text{ から, 右側極限と左側極限は一致しない.}$$

$$\text{よって, 極限はない.}$$

5

【解答】 (1) $-\infty$ (2) $-\frac{3}{2}$

【解説】

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty$$

$$(2) x = -t \text{ とおくと } t > 0 \\ x \rightarrow -\infty \text{ のとき } t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 3t} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - 3t) - t^2}{\sqrt{t^2 - 3t} + t} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{t}} + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{【別解】 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1} \\ = -\frac{3}{2}$$

6

【解答】 (1) 0 (2) 0 (3) 1

【解説】

$$(1) 0 \leq |\sin x| \leq 1 \text{ であるから, } x > 0 \text{ のとき } 0 \leq \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\sin x|}{x} = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$(2) 0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ であるから, } x \neq 0 \text{ より } 0 \leq \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{【別解】 } x \neq 0 \text{ のとき, } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ であるから } -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$(3) [x] \leq x < [x] + 1 \text{ から } x - 1 < [x] \leq x$$

$$\text{よって, } x > 0 \text{ のとき } \frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

7

【解答】 (1) e^2 (2) 1 (3) $\frac{1}{e^2}$ (4) $\frac{1}{e}$

【解説】

$$(1) 2x = h \text{ とおくと } x \rightarrow 0 \text{ のとき } h \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{2}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right\}^2 = e^2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1$$

$$(3) -\frac{2}{x} = h \text{ とおくと } x \rightarrow \infty \text{ のとき } h \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{-\frac{2}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(4) \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$-\frac{1}{x+1} = h \text{ とおくと } x \rightarrow \infty \text{ のとき } h \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{-1 - \frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\{ (1 + h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1}}{1 + h} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

第4講 例題演習

1

解答 (1) 1 (2) -1 (3) $\sqrt{3}$ (4) $-\frac{1}{2}$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + 2x - 2)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 2}{2x - 1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(\frac{4}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \cdot \frac{4-2x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x-2} \cdot \frac{-2(x-2)}{x} \right\}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{4-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x})}{(2+x)(4-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x})}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((x^2 - x + 1) - 1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{((1+x) - (1-x))(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

2

解答 (1) $a = -8, b = 4$ (2) $a = 8\sqrt{6}, b = 48$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 6) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + 12) = 0$$

$$\text{よって } 2^2 + 2a + 12 = 0 \text{ すなわち } a = -8$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + 12}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{x-3} = 4$$

$$\text{ゆえに } a = -8, b = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+5} - b) = 0$$

$$\text{よって } \sqrt{6}a - b = 0 \text{ すなわち } b = \sqrt{6}a \text{ …… ①}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+5} - b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{6}}{x-1}$$

$$= a \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5) - 6}{(x-1)(\sqrt{x+5} + \sqrt{6})}$$

$$= a \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{6}} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{a}{2\sqrt{6}} = 4 \text{ から } a = 8\sqrt{6}$$

$$\text{①に代入して } b = 48$$

3

解答 $a = 1, b = -\frac{5}{2}$

解説

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - ax - b$ において, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ が成り立つとする。

$a \leq 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ となるから $a > 0$

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるから, $x > 0$ としてよい。

$$\text{よって } f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - ax - b)(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + ax + b)}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + ax + b}$$

$$= \frac{(x^2 - 3x + 1) - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + ax + b} = \frac{(1-a^2)x^2 - (3+2ab)x + 1 - b^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + ax + b}$$

$$= \frac{(1-a^2)x - (3+2ab) + \frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + a + \frac{b}{x}}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ が成り立つには $1 - a^2 = 0$

$a > 0$ から $a = 1$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(3+2b) + \frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{b}{x}} = -\frac{3+2b}{2}$$

$$\text{よって, } -\frac{3+2b}{2} = 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \text{ が成り立つから } b = -\frac{5}{2}$$

$$\text{したがって } a = 1, b = -\frac{5}{2}$$

4

解答 (1) 順に $-\infty, \infty$, 極限はない (2) 順に ∞, ∞, ∞

(3) 順に $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, 極限はない

解説

(1) $x < 1$ のとき $x - 1 < 0$

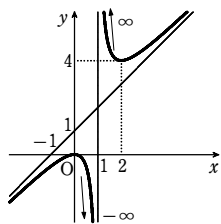
$x \rightarrow 1-0$ のとき $x^2 \rightarrow 1$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

$x > 1$ のとき $x - 1 > 0$

$x \rightarrow 1+0$ のとき $x^2 \rightarrow 1$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$



ゆえに, $x \rightarrow 1$ のときの $\frac{x^2}{x-1}$ の極限はない。

(2) $0 < x < 1$ のとき $(x-1)^2 > 0, x > 0$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

$x > 1$ のとき $(x-1)^2 > 0, x > 0$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty$$

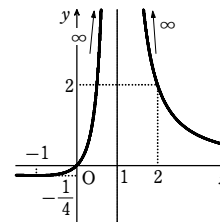
(3) $x < 1$ のとき $x - 1 < 0$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3}$$

$x > 1$ のとき $x - 1 > 0$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}$$

ゆえに, $x \rightarrow 1$ のときの $\frac{|x-1|}{x^3 - 1}$ の極限はない。



5

解答 (1) $-\infty$ (2) -1 (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x} \right) = -1$$

(3) $x = -t$ とおくと $t > 0$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 3t} - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - 3t) - t^2}{\sqrt{t^2 - 3t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{t}} + 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{別解 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)(\sqrt{x^2 + 3x} - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

(4) $x = -t$ とおくと $t > 0$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t + 1} - \sqrt{t^2 + 1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - t + 1) - (t^2 + 1)}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + 1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + 1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

別解 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

6

解答 (1) 0 (2) 0 (3) 2

解説

(1) $0 \leq |\cos x| \leq 1$ であるから, $x > 0$ のとき

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| = \frac{|\cos x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

別解 $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから, $x > 0$ のとき

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

(2) $0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ より

$$0 \leq |x^2| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq \left| x^2 \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x^2|$$

$$\text{ここで, } \lim_{x \rightarrow 0} |x^2| = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$$

(3) $[x] \leq x < [x] + 1$ であるから $x - 1 < [x] \leq x$

$$\text{ゆえに } 2x - 1 < x + [x] \leq 2x$$

$$x > 0 \text{ のとき } \frac{2x - 1}{x + 1} < \frac{x + [x]}{x + 1} \leq \frac{2x}{x + 1}$$

$$\text{ここで } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + [x]}{x + 1} = 2$$

7

解答 (1) \sqrt{e} (2) e^3 (3) $\frac{1}{e^4}$ (4) 5

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$(2) \frac{3}{x} = t \text{ とおくと } x \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow +0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +0} (1 + t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$$

$$(3) -x = t \text{ とおくと } x \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{4}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{-\frac{4}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-4} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(x + 5) - \log x \} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x$$

$$\frac{5}{x} = t \text{ とおくと } x \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow +0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +0} \log(1 + t)^{\frac{5}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \log \left\{ (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right\}^5 = \log e^5 = 5$$

1

解答 (1) -1 (2) 2 (3) 2 (4) -1

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 5^x}{3^x + 5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1} = -1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2(4x^2 - x + 1) - \log_2(x^2 + 2) \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \log_2 4 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x(x - \sqrt{x^2 - 4}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{x + \sqrt{x^2 - 4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 - (x^2 - 4))}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x + \sqrt{x^2 - 4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = 2
 \end{aligned}$$

(4) $x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$

したがって

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t + 1} - \sqrt{t^2 + t + 1}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 - t + 1) - (t^2 + t + 1)}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + t + 1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2 - t + 1} + \sqrt{t^2 + t + 1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

2

解答 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $a = -3$ (3) (ア) $\frac{3}{2}$ (イ) -1

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \frac{1}{x^3} \left\{ \sqrt{1 + 2x} - \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{x^3} \left\{ 1 + 2x - \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2x} + \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right)} \\
 &= \frac{1}{x^3} \left\{ 1 + 2x - \left(1 + 2x - x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2x} + \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right)} \\
 &= \left(-\frac{x}{4} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2x} + \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left\{ \sqrt{1 + 2x} - \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) \right\} = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - (ax+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1 - (ax+1)^2}{x(\sqrt{x^2+1} + ax+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a^2)x^2 - 2ax}{x(\sqrt{x^2+1} + ax+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a^2)x - 2a}{\sqrt{x^2+1} + ax+1}$$

$$= \frac{0-2a}{1+0+1} = -a$$

よって $-a=3$ ゆえに $a=-3$

$$(3) (\text{ア}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x a - 2^{-x}}{2^{x+1} - 2^{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{2^{2x}}}{2 - \frac{1}{2^{2x+1}}} = \frac{a}{2}$$

よって $\frac{a}{2} = \frac{3}{4}$ ゆえに $a = \frac{3}{2}$

$$(\text{イ}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log_{\frac{3}{2}}(2x) - \log_{\frac{3}{2}}(3x+2) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{3}{2}} \frac{2x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3 + \frac{2}{x}}$$

$$= \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = -1$$

[3]

【解答】 (1) 極限はない (2) 極限はない (3) 2

【解説】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{(x-2)^3} = \infty, \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{(x-2)^3} = -\infty$$

よって、極限はない。

$$(2) x > 1 \text{ のとき } \log_{0.5} x < 0$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } \log_{0.5} x > 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\log_{0.5} x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\log_{0.5} x} = \infty$$

よって、極限はない。

$$(3) \frac{3}{2} \leq x < 2 \text{ のとき } [2x] - [x] = 3 - 1 = 2$$

$$2 \leq x < \frac{5}{2} \text{ のとき } [2x] - [x] = 4 - 2 = 2$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 2} ([2x] - [x]) = 2$$

[4]

$$\text{【解答】 } f(x) = 2x^2 + 14x + 24$$

【解説】

[1]から、 $f(x)$ は2次式である。

[2]から、 $f(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

よって、 $f(x) = (x+3)(ax+b)$ ($a \neq 0$) とおける。

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)(ax+b)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right) \left(a + \frac{b}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = a$$

よって、[1]が成り立つのは、 $a=2$ のときである。

($a=2$ は $a \neq 0$ を満たす。)

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2+4x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+b}{x+1} = -\frac{b-6}{2}$$

よって、 $-\frac{b-6}{2} = -1$ のとき[2]が成り立つから $b=8$

したがって $f(x) = (x+3)(2x+8) = 2x^2 + 14x + 24$

[5]

$$\text{【解答】 } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}, c = 1$$

【解説】

$$\text{等式を変形すると } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin^2 x + (3b+2)\sin x - a + b + 1}{\sin^3 x - a \sin^2 x} = c \dots\dots \text{①}$$

この等式において、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^3 x - a \sin^2 x) = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{-a \sin^2 x + (3b+2)\sin x - a + b + 1\} = 0 \text{ すなわち } b = a - 1 \dots\dots \text{②}$$

$$\text{このとき、①は } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin x + 3a - 1}{\sin^2 x - a \sin x} = c \dots\dots \text{③}$$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin^2 x - a \sin x) = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-a \sin x + 3a - 1) = 0 \text{ すなわち } 3a - 1 = 0$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{3} \quad \text{②から } b = -\frac{2}{3} \quad \text{このとき、③から } c = 1$$

$$\text{以上から } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}, c = 1$$

[6]

$$\text{【解答】 (1) 3 (2) とともに 0}$$

【解説】

(1) 不等式 $[3x] \leq 3x < [3x] + 1$ が成り立つ。

よって、 $x > 0$ のとき

$$\frac{[3x]}{x} \leq 3 < \frac{[3x]}{x} + \frac{1}{x} \text{ となるから } 3 - \frac{1}{x} < \frac{[3x]}{x} \leq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[3x]}{x} = 3$$

(2) $x > 1$ のとき $0 < \log \sqrt{x} < \sqrt{x}$

$$\text{すなわち } 0 < \frac{1}{2} \log x < \sqrt{x}$$

$$\text{ゆえに } 0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

次に $x = \frac{1}{t}$ とおくと、 $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\log \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} (-t \log t) = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

[1]

$$\text{【解答】 } 1$$

【解説】

$$\text{記号 } [\] \text{ の性質から } \sqrt{x+x^2} - 1 < [\sqrt{x+x^2}] \leq \sqrt{x+x^2} \dots\dots \text{①}$$

$x \rightarrow \infty$ であるから $x > 0$ とする。①から

$$\frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} < \frac{[\sqrt{x+x^2}] - \sqrt{x}}{x} \leq \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x}$$

$$\text{ここで } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = 1$$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{したがって } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x+x^2}] - \sqrt{x}}{x} = 1$$

[2]

$$\text{【解答】 (ア) } \sqrt{e} \quad \text{(イ) } 3$$

【解説】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\text{また } \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)^2 \log \left\{ 1 + \frac{3}{4n(n-1)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ 1 + \frac{3}{4n(n-1)} \right\}^{\frac{4n(n-1)}{3} \cdot \frac{3n-1}{4n(n-1)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left[1 + \frac{3}{4n(n-1)} \right]^{\frac{4n(n-1)}{3}} \right\}^{\frac{12-\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{4}{n}}} = \log e^{\frac{12}{4}} = 1 \cdot 3$$

[3]

$$\text{【解答】 } a = -2p - \frac{1}{(p+1)^2}, b = p^2 + \frac{2p+1}{(p+1)^2}, \text{ 極限值は } 1 - \frac{1}{(p+1)^3}$$

【解説】

$\lim_{x \rightarrow p} (x-p)^2 = 0$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow p} \{f(x) - g(x)\} = 0$ であること、すなわち $f(p) = g(p)$ であることが必要である。

$$f(p) = g(p) \text{ から } p^2 + ap + b = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{よって } b = -p^2 - ap + \frac{1}{p+1} \dots\dots \text{①}$$

$$\text{また } f(x) - g(x) = x^2 + ax - p^2 - ap + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= (x+p)(x-p) + a(x-p) + \frac{x-p}{(p+1)(x+1)}$$

$$\text{から } \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^2} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{x+p+a + \frac{1}{(p+1)(x+1)}}{x-p} \dots\dots \text{②}$$

$\lim_{x \rightarrow p} (x-p) = 0$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow p} \left\{ x+p+a + \frac{1}{(p+1)(x+1)} \right\} = 0$ であることが必要条件。

$$\text{よって } 2p+a + \frac{1}{(p+1)^2} = 0 \quad \text{ゆえに } a = -2p - \frac{1}{(p+1)^2} \dots\dots \text{③}$$

$$\text{②, ③から } \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^2} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{x-p + \frac{1}{(p+1)(x+1)} - \frac{1}{(p+1)^2}}{x-p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{x-p - \frac{x-p}{(p+1)^2(x+1)}}{x-p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \left\{ 1 - \frac{1}{(p+1)^2(x+1)} \right\} = 1 - \frac{1}{(p+1)^3}$$

①, ③ から $b = -p^2 + 2p^2 + \frac{p}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} = p^2 + \frac{2p+1}{(p+1)^2}$

したがって $a = -2p - \frac{1}{(p+1)^2}$, $b = p^2 + \frac{2p+1}{(p+1)^2}$

このとき、極限値は $1 - \frac{1}{(p+1)^3}$

4

【解答】 (1) $k = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \cos \alpha)$ (2) $S(k) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \frac{1}{6}(\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)$

(3) $\frac{\pi}{2}$

【解説】

(1) $y = x^2 + 2kx$ …… ①

$x^2 + y^2 = 1$ …… ② とする。

Pは曲線②上にあるから、Pの座標は

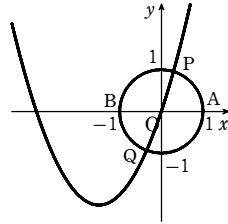
$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Pは曲線①上にあるから

$\sin \alpha = \cos^2 \alpha + 2k \cos \alpha$

$\cos \alpha \neq 0$ であるから

$k = \frac{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \cos \alpha)$



(2) \widehat{PBQ} の中心角は $\angle POQ = \pi - \alpha + \beta$

ゆえに、Bを含む扇形POQの面積は

$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (\pi - \alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta)$

直線OPと放物線①で囲まれる部分の面積は

$\int_0^{\cos \alpha} \{\tan \alpha \cdot x - (x^2 + 2kx)\} dx = \frac{1}{6} \cos^3 \alpha$

Qの座標は $(\cos(\pi + \beta), \sin(\pi + \beta))$ すなわち $Q(-\cos \beta, -\sin \beta)$

ゆえに、直線OQと放物線①で囲まれる部分の面積は

$\int_{-\cos \beta}^0 \{\tan \beta \cdot x - (x^2 + 2kx)\} dx = \frac{1}{6} \cos^3 \beta$

よって $S(k) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \frac{1}{6}(\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta)$

(3) (1)の結果から $k = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \cos \alpha)$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから $k \rightarrow \infty$ のとき $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$

また、Qは①上にあるから $-\sin \beta = \cos^2 \beta - 2k \cos \beta$

$\cos \beta \neq 0$ であるから $k = \frac{\sin \beta + \cos^2 \beta}{2 \cos \beta} = \frac{1}{2}(\tan \beta + \cos \beta)$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから $k \rightarrow \infty$ のとき $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

よって $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{6} \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} + \cos^3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$

第5講 例題

1

解答 (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 2

解説

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{2} \cdot \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{6}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos^2 x = 2$
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 (1 + \cos x) = 1^2 \cdot (1 + 1) = 2$

2

解答 (1) 1 (2) -1 (3) 2

解説

- (1) $\frac{1}{x} = t$ とおくと, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$
 よって $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
 (2) $x - \pi = t$ とおくと, $x \rightarrow \pi$ のとき $t \rightarrow 0$
 よって $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \pi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$
 (3) $x - \pi = t$ とおくと $x \rightarrow \pi$ のとき $t \rightarrow 0$
 また $1 + \cos x = 1 + \cos(t + \pi) = 1 - \cos t$
 よって $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 (1 + \cos t) = 1^2 \cdot 2 = 2$

3

解答 $\frac{1}{8}$

解説

OD は $\angle AOB$ の二等分線であるから $\angle AOD = \theta$
 $AB \perp OC$ より, $OD = OA \cos \theta = \cos \theta$ であるから $CD = OC - OD = 1 - \cos \theta$

また $\widehat{AB} = 2\theta$

したがって, 求める極限は

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{CD}{\widehat{AB}} \right)^2 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{(2\theta)^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{4\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \right] = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

4

解答 (1) 連続 (2) 連続 (3) 不連続

解説

- (1) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 また $f(0) = 0$ ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

よって, $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -1$ であるから $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$

また $f(-1) = -1$ ゆえに $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

よって, $f(x)$ は $x=-1$ で連続である。

(3) $0 < x < 1$ すなわち $-1 < -x < 0$ のとき $[-x] = -1$

$-1 < x < 0$ すなわち $0 < -x < 1$ のとき $[-x] = 0$

ゆえに $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$

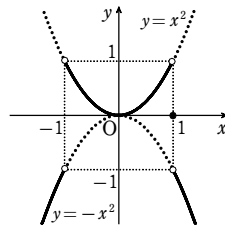
よって, $x \rightarrow 0$ のときの極限はない。

したがって, $f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

5

解答 [図]

連続な区間は $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$



解説

[1] $|x| < 1$ すなわち $-1 < x < 1$ のとき $y = \frac{x^2(1-0)}{1+0} = x^2$

[2] $x=1$ のとき $y = \frac{1^2(1-1)}{1+1} = 0$

[3] $x=-1$ のとき $\frac{x^2(1-x^n)}{1+x^n} = \frac{(-1)^2(1-(-1)^n)}{1+(-1)^n} = \frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n} = \frac{2}{1+(-1)^n} - 1$

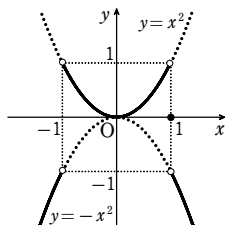
この極限は振動するから, y の値はない。

[4] $|x| > 1$ すなわち $x < -1, 1 < x$ のとき

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^n} - 1 \right)}{\frac{1}{x^n} + 1} = -x^2$$

したがって, 求めるグラフは右の図の実線部分のようになる。

また, 連続な区間は $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$



6

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $f(x) = x - 2\sin x - 3$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0, \pi]$ で連続である。

また $f(0) = -3 < 0, f(\pi) = \pi - 3 > 0$

よって, 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

(2) $f(x) = x - 3^{-x}$ とおく。

関数 $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続である。

また $f(0) = -1 < 0, f(1) = \frac{2}{3} > 0$

よって, 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

7

解答 略

解説

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。

$f(x), g(x)$ はともに $a \leq x \leq b$ で連続であるから, $h(x) = f(x) - g(x)$ も $a \leq x \leq b$ で連続である。

また $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$

よって, 方程式 $h(x) = 0$ すなわち $f(x) = g(x)$ は中間値の定理により, $a < x < b$ に実数解をもつ。

第5講 例題演習

1

【解答】 (1) 0 (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) 2 (5) 2 (6) $-\frac{1}{6}$

【解説】

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

【別解】 $4x = \theta$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\frac{3}{4}\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{4}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (1 + \cos x) = 1 \cdot 2 = 2$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{3x^2 \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2 \cos x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{\cos x + 1} = 1^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{6}$

2

【解答】 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\pi$ (3) -1 (4) 1 (5) $\frac{1}{2}$

【解説】

(1) $x - \frac{\pi}{2} = t$ とおくと $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $t \rightarrow 0$

また $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t, 2x - \pi = 2t$

よって, 求める極限値は $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sin t}{t} = -\frac{1}{2}$

(2) $x - 1 = t$ とおくと $x \rightarrow 1$ のとき $t \rightarrow 0$

また $\sin \pi x = \sin \pi(t+1) = -\sin \pi t$

よって $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \cdot \pi = -1 \cdot \pi = -\pi$

(3) $x - \frac{\pi}{2} = \theta$ とおくと $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta}{\tan \theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta\right) = -1 \cdot 1 = -1$$

(4) $\frac{1}{x} = \theta$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $\theta \rightarrow +0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \sin \theta\right)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

(5) $\frac{1}{x} = t$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$

よって $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^2} (1 - \cos t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin^2 t}{t^2(1 + \cos t)}$
 $= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos t} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3

【解答】 $\frac{1}{2r}$

【解説】

P が A に近づくことは $\theta \rightarrow 0$ で表され, θ が鋭角のときを考えると

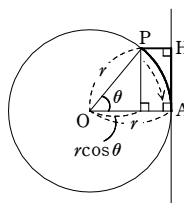
$$\widehat{AP} = r\theta$$

$$PH = OA - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

ゆえに $\frac{PH}{\widehat{AP}} = \frac{r(1 - \cos \theta)}{r^2 \theta^2}$
 $= \frac{1 - \cos \theta}{r \theta^2(1 + \cos \theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{r \theta^2(1 + \cos \theta)}$

よって, 求める極限は

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{PH}{\widehat{AP}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{r(1 + \cos \theta)} \right\} = 1^2 \cdot \frac{1}{r(1+1)} = \frac{1}{2r}$$



4

【解答】 (1) 連続 (2) 連続 (3) 不連続 (4) 不連続

【解説】

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 0$ より $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

したがって, $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -1} (-1) = -1$

また $f(-1) = -1$

よって $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

したがって, $f(x)$ は $x=-1$ で連続である。

(3) $-1 < x < 0$ のとき, $[x] = -1$ であるから $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$

$0 < x < 1$ のとき, $[x] = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

よって, $x \rightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない。

したがって, $f(x)$ は $x=0$ で不連続である。

(4) $0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき, $0 < \sin x < 1$ であるから $[\sin x] = 0$

したがって $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = 0$

すなわち $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

また $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

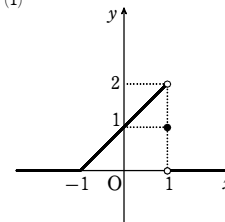
よって $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

したがって, $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で不連続である。

5

【解答】 (1) 図, $x=1$ で不連続 (2) 図, $x=m\pi$ (m は整数) で不連続

(1)



【解説】

(1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$

[1] $x^2 < 1$ すなわち $-1 < x < 1$ のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ であるから $f(x) = \frac{1+x}{1+0} = 1+x$

[2] $x^2 = 1$ すなわち $x = \pm 1$ のとき $x^{2n} = 1$

よって, $x=1$ のとき $f(x) = \frac{1+1}{1+1} = 1$

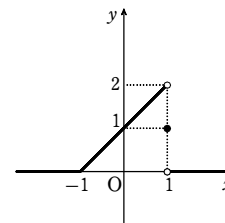
$x=-1$ のとき $f(x) = \frac{1-1}{1+1} = 0$

[3] $x^2 > 1$ すなわち $x < -1, 1 < x$ のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ であるから $f(x) = 0$

よって, $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

また, $f(x)$ が不連続である x の値は $x=1$



(2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x + \frac{1}{n}}{\sin x + \frac{1}{n}}$

[1] $\sin x \neq 0$ すなわち $x \neq m\pi$ (m は整数) のとき

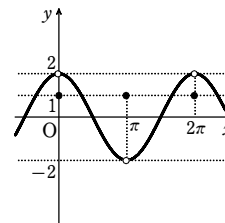
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x$$

[2] $\sin x = 0$ すなわち $x = m\pi$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

よって, $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

また, $f(x)$ が不連続である x の値は $x = m\pi$ (m は整数)



6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $f(x) = x^4 - 5x + 2$ とすると, $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続で

$$f(0) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0, f(1) = 1 - 5 + 2 = -2 < 0$$

よって, 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

(2) $f(x) = x - 6 \cos x$ とすると, $f(x)$ は区間 $\left[-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right], \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ で連続で

$$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{9-2\pi}{3} > 0, f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{\pi}{3}+3\right) < 0, f(\pi) = \pi+6 > 0$$

よって、方程式 $f(x) = 0$ は $-\frac{2}{3}\pi < x < -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} < x < \pi$ の範囲に、それぞれ実数解をもつ。

7

解答 略

解説

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。

関数 $f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるから、 $h(x)$ も区間 $[a, b]$ で連続である。

$f(x)$ が $x = x_1$ で最大、 $x = x_2$ で最小であるとする。

$g(x)$ が $x = x_3$ で最大、 $x = x_4$ で最小であるとする。

条件から $f(x_1) > g(x_3)$, $f(x_2) < g(x_4)$

一方、 $g(x_3)$ は最大値であるから $g(x_3) \geq g(x_1)$

$g(x_4)$ は最小値であるから $g(x_4) \leq g(x_2)$

以上より $f(x_1) > g(x_3) \geq g(x_1)$, $f(x_2) < g(x_4) \leq g(x_2)$

よって $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) > 0$, $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) < 0$

したがって、方程式 $h(x) = 0$ は x_1 と x_2 の間に解をもつ。

$a \leq x_1 \leq b$, $a \leq x_2 \leq b$ であるから、方程式 $h(x) = 0$ すなわち $f(x) = g(x)$ は $a \leq x \leq b$ の範囲に解をもつ。

1

解答 (1) $\frac{\pi}{180}$ (2) 1 (3) -1 (4) $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{9}{2}$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^\circ}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{\pi}{180}x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

$$(2) \sin x = t \text{ とおくと, } x \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$(3) x - \pi = \theta \text{ とおくと, } x \rightarrow \pi \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = -1$$

$$(4) \frac{1}{4x} = \theta \text{ とおくと, } x \rightarrow \infty \text{ のとき } \theta \rightarrow +0$$

$x = \frac{1}{4\theta}$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{4x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4\theta} \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{1}{4}$$

$$(5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3\theta)(1 + \cos 3\theta)}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3\theta}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3\theta}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 9 \cdot \left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 3\theta}$$

$$= 9 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{9}{2}$$

2

解答 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$

解説

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つとする。 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax \sin x + b) = 0 \quad \text{すなわち} \quad b = 0$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (-a) \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1) \right\} = -2a$$

$$\text{よって, } -2a = 1 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ が成り立つから } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } a = -\frac{1}{2}, b = 0$$

3

解答 線分 OB を 1:2 に内分する点に近づく

解説

図において $\angle OPQ = \angle APO = \angle PAO = \theta$
よって $\angle PQB = \angle PAQ + \angle APQ = 3\theta$
 $\triangle OPQ$ において、正弦定理により

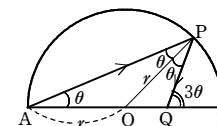
$$\frac{OQ}{\sin \theta} = \frac{OP}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$\text{よって } OQ = \frac{r \sin \theta}{\sin 3\theta}$$

P が限りなく B に近づくとき、 $\theta \rightarrow +0$ であり

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} OQ = \lim_{\theta \rightarrow +0} r \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \cdot \frac{1}{3} = r \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{r}{3}$$

したがって、Q は線分 OB を 1:2 に内分する点に近づく。



4

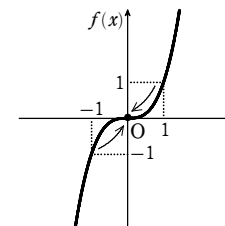
解答 (1) 連続 (2) 不連続 (3) 不連続

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 0 \text{ から}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

よって、関数 $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。

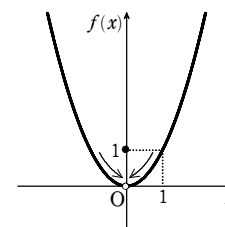


(2) この関数のグラフは右図のようになり、 $x = 0$ で切れている。

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, f(0) = 1$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

よって、関数 $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である。



(3) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ とすると

$$0 \leq \cos x < 1$$

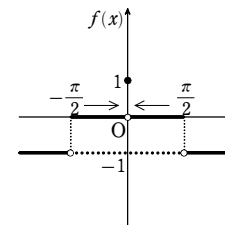
$$\text{よって } [\cos x] = 0$$

$$\text{ゆえに } \lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = 0$$

$$\text{また } f(0) = [1] = 1$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

したがって、関数 $f(x)$ は $x = 0$ で不連続である。



5

解答 $a = \frac{9}{2}$

解説

$$\frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} = \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} = \frac{\sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)}$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{3^2}{1 + \cos 3x} \right\} = 1^2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

また $f(0) = a$

$f(x)$ が $x=0$ において連続であるとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ であるから $a = \frac{9}{2}$

6

解答 $a=1, b=-1$

解説

[1] $-1 < x < 1$ のとき $f(x) = \frac{0-0+ax^2+bx}{0+1} = ax^2+bx$

[2] $x < -1, 1 < x$ のとき $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1 - \frac{1}{x}$

[3] $x=1$ のとき $f(1) = \frac{a+b}{2}$

[4] $x=-1$ のとき $f(-1) = \frac{2+a-b}{2}$

$f(x)$ は $x < -1, -1 < x < 1, 1 < x$ で、それぞれ連続であるから、 $f(x)$ がすべての実数 x で連続であるための条件は、 $f(x)$ が $x = \pm 1$ で連続であることである。

よって $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1)$ かつ $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$

ゆえに $2 = a - b = \frac{2+a-b}{2}$ かつ $a + b = 0 = \frac{a+b}{2}$

これを解いて $a=1, b=-1$

1

解答 $a=4, b=-1$, 極限值 $-\frac{15}{8}$

解説

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)}{x^2} = P$ とおく。

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ であるから、 P が有限の値となるためには

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (a+bx)] = 0$$

よって、 $\sqrt{9+7} - a = 0$ すなわち $a=4$ であることが必要である。

このとき $P = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} - (4+bx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-8x+7\cos 2x - (4+bx)^2}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b^2 - 8 \cdot \frac{b+1}{x} - 7 \cdot \frac{1-\cos 2x}{x^2}}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx} \dots \textcircled{1}$$

ここで $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{9-8x+7\cos 2x} + 4+bx] = \sqrt{9+7} + 4 = 8$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$ であることに注意すると、 P が有限の

値となるための条件は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b+1}{x}$ が有限の値に収束することで、 $b=-1$ である。

このとき、 $\textcircled{1}$ から $P = \frac{-(-1)^2 - 0 - 7 \cdot 2}{8} = -\frac{15}{8}$

以上から $a=4, b=-1$, 極限值 $-\frac{15}{8}$

2

解答 (1) $(t\sqrt{1+\sin^2 t}, 0)$ (2) $(0, \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}))$

(3) 点 $(0, 2)$

解説

(1) $t > 0$ であるから $OQ = OP = \sqrt{t^2 + (t\sin t)^2} = t\sqrt{1+\sin^2 t}$

よって $Q(t\sqrt{1+\sin^2 t}, 0)$

(2) 直線 PQ の方程式 $y = \frac{t\sin t}{t-t\sqrt{1+\sin^2 t}}(x-t\sqrt{1+\sin^2 t})$ において、 $x=0$ とすると

$$y = \frac{-t^2 \sin t \sqrt{1+\sin^2 t}}{t(1-\sqrt{1+\sin^2 t})} = \frac{-t^2 \sin t \sqrt{1+\sin^2 t}(1+\sqrt{1+\sin^2 t})}{t\{1-(1+\sin^2 t)\}} = \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t})$$

よって $R(0, \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}))$

(3) 点 P が原点 O に限りなく近づくとき、 $t \rightarrow +0$ であり

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\sin t}(1+\sin^2 t + \sqrt{1+\sin^2 t}) = 1 \cdot (1+0+1) = 2$$

したがって、点 R は点 $(0, 2)$ に近づく。

3

解答 (1) 略 (2) $\frac{2}{\pi}$

解説

(1) $\theta = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ とおくと $a_n = \tan \theta, a_{n+1} = \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \tan \frac{\theta}{2}$

$\tan \theta = \tan\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ であるから $a_n = \frac{2a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2}$

逆数をとって $\frac{1}{a_n} = \frac{1 - a_{n+1}^2}{2a_{n+1}}$ ゆえに $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{2}$

よって $\frac{a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ すなわち $a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}$ とおくと、(1) から

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} a_k = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} a_k + \frac{1}{2} a_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{2}{a_{k-1}} \right) + \frac{1}{2} a_1$$

$$= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2^k a_k} - \frac{1}{2^{k-1} a_{k-1}} \right) + \frac{1}{2} a_1 = \left(\frac{1}{2^n a_n} - \frac{1}{2 a_1} \right) + \frac{1}{2} a_1$$

$$= \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2 \tan \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{2^2}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

4

解答 (1) k は偶数である (2) 略

解説

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \{(\cos x)^{n-1} - (\cos x)^{n+k-1}\} = [1 - (\cos x)^k] \sum_{n=1}^{\infty} (\cos x)^{n-1}$

初項 $1 - (\cos x)^k$, 公比 $\cos x$ の無限等比級数だから、収束する条件は

$$1 - (\cos x)^k = 0 \text{ または } -1 < \cos x < 1$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、 $\cos x = \pm 1$ のとき $1 - (\cos x)^k = 0$ となる条件は、 k が偶数であることである。⊗

(2) $\cos x \neq 1$ のとき、

$$x \neq 0 \text{ で } f(x) = (1 - \cos^k x) \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{n-1} x = \frac{1 - \cos^k x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x + \dots + \cos^{k-1} x$$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k > 0$

一方 $f(0) = 0$ ゆえに $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

よって、 $x=0$ において $f(x)$ は連続でない。

5

解答 (1) [略] (2) [略] (3) $-\frac{1}{2}$

解説

- (1) $y = x^3 + ax^2 + (a-3)x - 1 = x^3 - 3x - 1 + x(x+1)a$ から任意の a に対して $y = x^3 - 3x - 1, x(x+1) = 0$ が成り立つ。したがって $(0, -1), (-1, 1)$ を通る。
 (2) $f(x) = x^3 + ax^2 + (a-3)x - 1$ より $f'(x) = 3x^2 + 2ax + a - 3$
 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = a^2 - 3a + 9 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ で
 $y = f(x)$ は極大値と極小値をもつ。ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, f(-1) > 0, f(0) < 0,$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ であるから $f(x) = 0$ は3つの異なる実数解をもつ。

(3) $3x^2 + 2ax + a - 3 = 0$ を解くと $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3}$
 $x(a) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3}$ から
 $\lim_{a \rightarrow \infty} x(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3a + 9}}{3} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-3a + 9}{3(\sqrt{a^2 - 3a + 9} + a)}$
 $= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a + 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 9} + a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{3}{a}}{\sqrt{1 - \frac{3}{a} + \frac{9}{a^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$

1

解答 3

解説

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left\{\left(n+1\right)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right\}} = \frac{\left(n+1\right)^{\frac{2}{3}} + \left(n+1\right)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left\{\left(n+1\right)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right\}\left[\left(n+1\right)^{\frac{2}{3}} + \left(n+1\right)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{\left(n+1\right)^{\frac{2}{3}} + \left(n+1\right)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left\{\left(n+1\right) - n\right\}} = \frac{\left(n+1\right)^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{\left(n+1\right)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} + 1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1$$

よって (与式) $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right\} = 1 + 1 + 1 = 3$

2

解答 (1) $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$ (2) $a_n = n(n+1)$ (3) 1

解説

- (1) $(a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$ から
 $a_{n+1}^2 - 2(a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - 2a_n = 0$
 ゆえに $a_{n+1} = a_n + 1 \pm \sqrt{4a_n + 1}$
 また, $a_1 = 2, a_{n+1} > a_n$ であるから
 $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1} \dots \dots \textcircled{1}$
 よって $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$
 (2) $a_1 = 2 = 1 \cdot 2, a_2 = 6 = 2 \cdot 3, a_3 = 12 = 3 \cdot 4, a_4 = 20 = 4 \cdot 5$ であるから, $a_n = n(n+1)$
 と推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

- [1] $n = 1$ のとき $a_1 = 2$ で成り立つ。
 [2] $n = k$ のとき $a_k = k(k+1)$ と仮定すると
 ① から $a_{k+1} = k(k+1) + 1 + \sqrt{4k(k+1) + 1}$
 $= k(k+1) + 1 + (2k+1)$
 $= (k+1)(k+2)$

となり, $n = k+1$ のときも成り立つ。
 [1], [2] から, すべての自然数 n に対して, $a_n = n(n+1)$ が成り立つ。

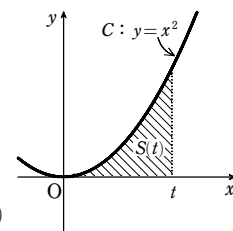
(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n+1)})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} \times \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 1$

3

解答 (1) $a_n = 2^n$ (2) $T_n = \frac{8^n}{3}$ (3) $\frac{1}{21}$

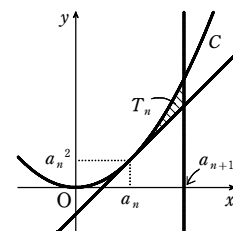
解説

(1) $S(t) = \int_0^t x^2 dx = \frac{1}{3}t^3$
 $S(a_{n+1}) = 8S(a_n)$ から $\frac{1}{3}a_{n+1}^3 = 8 \cdot \frac{1}{3}a_n^3$
 よって $a_{n+1}^3 = 8a_n^3$
 ゆえに $a_{n+1}^3 - 8a_n^3 = a_{n+1}^3 - (2a_n)^3$
 $= (a_{n+1} - 2a_n)(a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + 4a_n^2)$
 $= 0$



$a_{n+1} > a_n > 0$ であるから $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
 数列 $\{a_n\}$ は, 初項 $a_1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

(2) $C: y = x^2$ について, $y' = 2x$ から, C 上の点 (a_n, a_n^2) における接線の方程式は
 $y - a_n^2 = 2a_n(x - a_n)$ ゆえに $y = 2a_nx - a_n^2$



よって
 $T_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{x^2 - (2a_nx - a_n^2)\} dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} (x - a_n)^2 dx$
 $= \left[\frac{(x - a_n)^3}{3} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = \frac{(a_{n+1} - a_n)^3}{3} = \frac{(2a_n - a_n)^3}{3}$
 $= \frac{a_n^3}{3} = \frac{(2^n)^3}{3} = \frac{8^n}{3}$

(3) $U_n = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{8^k}{3} = \frac{8}{3} \cdot \frac{8^n - 1}{8 - 1} = \frac{8^{n+1} - 8}{21}$
 よって $\frac{U_{n-1}}{a_n^3} = \frac{8^n - 8}{21} \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{21} \cdot \frac{8^n - 8}{8^n} = \frac{1}{21} \left(1 - \frac{1}{8^{n-1}} \right)$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-1}}{a_n^3} = \frac{1}{21}$

4

解答 (1) 略 (2) 略 (3) $1 + \sqrt{2}$

解説

(1) $f(x) = x$ より $\sqrt{2x+1} = x$
 よって $x \geq 0$ かつ $2x+1 = x^2$
 $2x+1 = x^2$ を解くと $x = 1 \pm \sqrt{2}$ $x \geq 0$ より $x = 1 + \sqrt{2}$
 よって $\alpha = 1 + \sqrt{2}$
 すべての自然数 n に対して, $a_n > \alpha \dots \dots \textcircled{1}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n = 1$ のとき
 $a_1 = 3 = 1 + 2 > 1 + \sqrt{2} = \alpha$
 よって, ① は成り立つ。
 [2] $n = k$ のとき, ① が成り立つと仮定すると
 $a_k > \alpha$
 $f(x)$ は単調に増加する関数であるから, $a_k > \alpha$ より $f(a_k) > f(\alpha)$
 $f(\alpha) = \alpha$ であるから $a_{k+1} > \alpha$
 よって, $n = k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n に対して $a_n > \alpha$ が成り立つ。

(2) $a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - f(\alpha) = \sqrt{2a_n + 1} - \sqrt{2\alpha + 1}$

章末問題A

$$= \frac{(2a_n+1)-(2\alpha+1)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{2(a_n-\alpha)}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}}$$

(1) より, $a_n > \alpha$ であるから

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{2(a_n - \alpha)}{\sqrt{2a_n+1} + \sqrt{2\alpha+1}} = \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{2\alpha+1}}$$

ここで $\sqrt{2\alpha+1} = \alpha = 1 + \sqrt{2} > 1 + 1 = 2$

$$a_n - \alpha > 0 \text{ より } a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

(3) (2) より, $n \geq 2$ のとき

$$a_n - \alpha < \frac{1}{2}(a_{n-1} - \alpha) < \left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2} - \alpha) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha)$$

(1) と合わせると, $n \geq 2$ のとき $0 < a_n - \alpha < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1 - \alpha) = 0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \alpha) = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

したがって, 数列 $\{a_n\}$ は収束し, その極限值は $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ である。

5

【解答】 $\log 2$

【解説】

[1] $n = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{2m-1} + b_{2m}) \\ &= \sum_{i=1}^m (b_{2i-1} + b_{2i}) = \sum_{i=1}^m \left(\log \frac{2i+1}{2i-1} - \log \frac{2i+2}{2i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m [(\log(2i+1) - \log(2i-1)) + (\log 2i - \log(2i+2))] \\ &= \log(2m+1) - \log 1 + \log 2 - \log(2m+2) = \log \frac{2(2m+1)}{2m+2} = \log \frac{2m+1}{m+1} \end{aligned}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } m \rightarrow \infty \text{ であるから } \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{2 + \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} = \log 2$$

[2] $n = 2m - 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= S_{2m} - b_{2m} = S_{2m} + \log \frac{2m+2}{2m} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{2m+2}{2m} = \log 2 + \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \log 2 \end{aligned}$$

[1], [2] より, $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \log 2$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 2$

6

【解答】 $-\frac{1}{a^2+1}$

【解説】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{a} \cos \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cos \pi + \left(\frac{1}{a}\right)^3 \cos \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{1}{a}\right)^4 \cos 2\pi + \dots$$

k を自然数とすると, $n = 4k - 3$ のとき $\cos \frac{n\pi}{2} = 0,$

$n = 4k - 2$ のとき $\cos \frac{n\pi}{2} = -1,$

$n = 4k - 1$ のとき $\cos \frac{n\pi}{2} = 0,$

$n = 4k$ のとき $\cos \frac{n\pi}{2} = 1$

よって, $S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{a}\right)^{2j} (-1)^j = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{a^2}\right)^j \\ &= \frac{-\frac{1}{a^2} \left[1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)^N \right]}{1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)} = -\frac{1}{a^2+1} \left[1 - \left(-\frac{1}{a^2}\right)^N \right] \end{aligned}$$

$a > 1$ より, $-1 < -\frac{1}{a^2} < 0$ であるから $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = -\frac{1}{a^2+1}$

また $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N} + 0) = -\frac{1}{a^2+1}$

ゆえに, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ は収束し, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2}$ の和は $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = -\frac{1}{a^2+1}$

7

【解答】 (1) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$ (2) $p_n = \frac{30}{91} \left[1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right], \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{30}{91}$

【解説】

(1) k 回以内に勝者が決まらないのは, 1回目から k 回目まで毎回 1以外の目が出る時である。

よって, 求める確率は $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$

$$\begin{aligned} (2) p_n &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n-2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{3i-2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{25} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^3 \right\}^i = \frac{6}{25} \cdot \frac{125}{216} \left[1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right] = \frac{30}{91} \left[1 - \left(\frac{125}{216}\right)^n \right] \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{30}{91}$

8

【解答】 $\frac{\pi}{4} \leq \angle C < \frac{\pi}{2}$

【解説】

$\angle C = \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし, $\triangle ABC$ の面積を k とする。

$\triangle CBA \sim \triangle CAA_1$ で $CB : CA = 1 : \cos \theta$ から $\triangle CBA : \triangle CAA_1 = 1 : \cos^2 \theta$

ゆえに $\triangle CAA_1 = k \cos^2 \theta$

A を A_0 とすると, $n \geq 1$ のとき $\triangle CA_n A_{n+1} \sim \triangle CA_{n-1} A_n$ であり, その相似比は $1 : \cos \theta$

よって, $\triangle CA_n A_{n+1} = \triangle CA_{n-1} A_n \cos^2 \theta$ であるから $\triangle CA_{n-1} A_n = k \cos^{2n} \theta$

ゆえに, $\triangle CAA_1, \triangle CA_1 A_2, \triangle CA_2 A_3, \dots$ の面積の総和 S は, 初項 $k \cos^2 \theta$, 公比 $\cos^2 \theta$ の無限等比級数である。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $|\cos^2 \theta| < 1$ であるから, S は収束して

$$S = \frac{k \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{k \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{k}{\tan^2 \theta}$$

S が $\triangle ABC$ の面積 k を超えないことから $\frac{k}{\tan^2 \theta} \leq k$

すなわち $\tan^2 \theta \geq 1$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\tan \theta > 0$ であるから $\tan \theta \geq 1$

よって $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ すなわち $\frac{\pi}{4} \leq \angle C < \frac{\pi}{2}$

9

【解答】 (1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (2) 略 (3) 略 (4) $\frac{3}{4}$

【解説】

(1) $r = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(2) $a_n + b_n i = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n-1} \dots \dots$ ① とする。

[1] $n = 1$ のとき

(左辺) $= a_1 + b_1 i = 1,$ (右辺) $= \left(\frac{1+2i}{3}\right)^0 = 1$

よって, ① は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$a_k + b_k i = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1}$$

$n = k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} a_{k+1} + b_{k+1} i &= \left(\frac{1}{3} a_k - \frac{2}{3} b_k\right) + \left(\frac{2}{3} a_k + \frac{1}{3} b_k\right) i \\ &= \frac{1}{3} (a_k + b_k i) + \frac{2}{3} i (a_k + b_k i) = \frac{1+2i}{3} (a_k + b_k i) \\ &= \frac{1+2i}{3} \cdot \left(\frac{1+2i}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1+2i}{3}\right)^k \end{aligned}$$

よって, $n = k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n で ① が成り立つ。

(3) $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \dots \dots$ ② とする。

[1] $n = 1$ のとき

(左辺) $= 1,$ (右辺) $= \frac{1-z}{1-z} = 1$

よって, ② は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき ② が成り立つと仮定すると

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} = \frac{1-z^k}{1-z}$$

$n = k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1} + z^k \\ = \frac{1-z^k}{1-z} + z^k = \frac{1-z^k + (1-z)z^k}{1-z} = \frac{1-z^{k+1}}{1-z} \end{aligned}$$

章末問題A

よって、 $n=k+1$ のときも②が成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数 n で②が成り立つ。

(4) $\frac{1+2i}{3} = z$ とすると、 $z \neq 1$ であるから、(2), (3)より

$$\sum_{n=1}^N (a_n + b_n i) = \sum_{n=1}^N z^{n-1} = \frac{1-z^N}{1-z}$$

(1)より、 $|z| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ であるから $\lim_{N \rightarrow \infty} |z|^N = \lim_{N \rightarrow \infty} |z|^N = 0$

よって $\lim_{N \rightarrow \infty} z^N = 0$

ゆえに $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n + b_n i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-z^N}{1-z} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1+2i}{3}} = \frac{3}{2(1-i)}$
 $= \frac{3+3i}{4}$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \frac{3}{4}$

10

解答 4

解説

円 C_n に内接する正方形を A_n とし、 A_n をその1辺が x 軸に平行になるように作る。

円 C_n の半径を r_n とすると、正方形 A_n の1辺の長さは

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r_n = \sqrt{2} r_n$$

また、正方形 A_n の1辺の長さは $2r_{n+1}$ であるから

$$2r_{n+1} = \sqrt{2} r_n$$

すなわち $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$

$r_1 = 1$ であるから、数列 $\{r_n\}$ は初項1, 公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列である。

ゆえに $r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

正方形 A_n の1辺の長さは $2r_{n+1} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

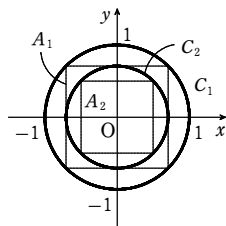
よって $a_n = \left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$

11

解答 $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解説



$\triangle OAB$ は1辺の長さが2の正三角形である。

よって、 $\triangle P_n B Q_n$, $\triangle Q_n O R_n$, $\triangle R_n A P_{n+1}$ は

相似な直角三角形であり、

$$P_n B : B Q_n = Q_n O : O R_n \\ = R_n A : A P_{n+1} = 2 : 1$$

が成り立つ。

$A P_n = a_n$ とすると $P_n B = AB - A P_n = 2 - a_n$

よって $B Q_n = \frac{1}{2} P_n B = 1 - \frac{1}{2} a_n$

同様に考えると

$$Q_n O = 2 - B Q_n = 1 + \frac{1}{2} a_n, \quad O R_n = \frac{1}{2} Q_n O = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a_n,$$

$$R_n A = 2 - O R_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} a_n, \quad A P_{n+1} = \frac{1}{2} R_n A = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} a_n$$

したがって $a_{n+1} = -\frac{1}{8} a_n + \frac{3}{4}$

この漸化式を変形して $a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{8} \left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{2}{3}\right\}$ は、初項 $a_1 - \frac{2}{3}$, 公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{2}{3} = \left(a_1 - \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって $a_n = \left(a_1 - \frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$

ここで、 P_1 は線分 AB 上にあり、 A, B とは異なる点であるから $0 < a_1 < 2$

$\left|-\frac{1}{8}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

よって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 P_n が限りなく近づく点を P とすると

$$AP = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}, \quad BP = 2 - AP = \frac{4}{3}$$

したがって、点 P は線分 AB を $1:2$ に内分する点であるから、求める点の座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{1+2}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot \sqrt{3}}{1+2}\right) \text{ から } \left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

12

解答 (1) $\theta_2 = \frac{\theta}{2}, \theta_3 = \frac{3}{4}\theta$ (2) 略 (3) $\frac{2}{3}\theta$

解説

(1) $\triangle P_1 P_2 P_3$ は $P_1 P_2 = P_1 P_3$ の二等辺三角形で、

$\angle P_1 P_2 P_3 = \angle P_1 P_3 P_2$ であるから

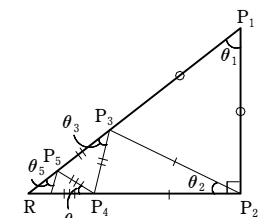
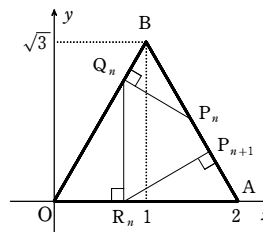
$$\angle P_1 P_2 P_3 = \frac{\pi - \theta}{2}$$

よって $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \angle P_1 P_2 P_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

同様に、 $\angle P_2 P_3 P_4 = \frac{\pi - \theta_2}{2}$ であるから

$$\theta_3 = \pi - \angle P_2 P_3 P_4 - \angle P_1 P_3 P_2$$

$$= \pi - \frac{\pi - \theta_2}{2} - \frac{\pi - \theta_1}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} + \theta\right) = \frac{3}{4}\theta$$

(2) (1)と同様に考えると

$$\angle P_n P_{n+1} P_{n+2} = \frac{\pi - \theta_n}{2}, \quad \angle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3} = \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2}$$

よって $\theta_{n+2} = \pi - \angle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3} - \angle P_n P_{n+1} P_{n+2}$
 $= \pi - \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2} - \frac{\pi - \theta_n}{2} = \frac{\theta_{n+1}}{2} + \frac{\theta_n}{2}$

変形すると $\theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$

ゆえに、 $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は n によらない定数 $\theta_2 + \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$ である。

(3) $\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta$ から $\theta_{n+1} - \frac{2}{3}\theta = -\frac{1}{2}(\theta_n - \frac{2}{3}\theta)$

したがって、数列 $\left\{\theta_n - \frac{2}{3}\theta\right\}$ は、初項 $\theta_1 - \frac{2}{3}\theta = \theta - \frac{2}{3}\theta = \frac{\theta}{3}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

であるから $\theta_n - \frac{2}{3}\theta = \frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $\theta_n = \frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\theta$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{\theta}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\theta\right\} = \frac{2}{3}\theta$

13

解答 略

解説

$x \rightarrow 0$ のときを考えるのであるから、 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ としてよい。

[1] $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき 点 O を中心とする半径1の円において、中心角 x の扇形 OAB

を考える。点 B から OA に下ろした垂線を BH , 点 A における円 O の接線が OB の延長と交わる点を T とすると、 AT は OA に垂直で、面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 } OAB < \triangle OAT$$

$BH = \sin x$, $AT = \tan x$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

よって $\sin x < x < \tan x$

各辺を $\sin x$ で割ると、 $\sin x > 0$ であるから

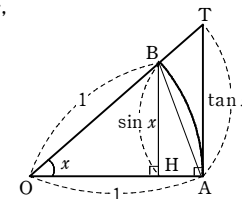
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ゆえに $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であるから $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[2] $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき $x = -\theta$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



[1], [2] から $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[14]

【解答】 (1) $AP = \sqrt{5-4\cos\theta}$, $BP = \sqrt{10-6\cos\theta}$
 (2) $\cos \angle BAP = \frac{\cos\theta - 2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$, $\sin \angle BAP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$
 (3) 1

【解説】

(1) $\triangle OAP$ において、余弦定理により
 $AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos\theta$

よって $AP^2 = 5 - 4\cos\theta$

$AP > 0$ であるから $AP = \sqrt{5-4\cos\theta}$

$\triangle OBP$ において、余弦定理により

$$BP^2 = OB^2 + OP^2 - 2OB \cdot OP \cos\theta$$

よって $BP^2 = 10 - 6\cos\theta$

$BP > 0$ であるから $BP = \sqrt{10-6\cos\theta}$

(2) $\triangle ABP$ において、余弦定理により

$$\cos \angle BAP = \frac{AB^2 + AP^2 - BP^2}{2AB \cdot AP}$$

よって $\cos \angle BAP = \frac{1+5-4\cos\theta - (10-6\cos\theta)}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5-4\cos\theta}} = \frac{\cos\theta - 2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

また $\sin^2 \angle BAP = 1 - \frac{(\cos\theta - 2)^2}{5-4\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}$

$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ であるから $\sin \angle BAP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

(3) $\triangle ABP$ において、正弦定理により $\frac{BP}{\sin \angle BAP} = 2R$

よって $\theta R = \frac{\theta \sqrt{10-6\cos\theta}}{2 \cdot \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}} = \frac{\theta \sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2\sin\theta}$

ゆえに $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta R = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(10-6\cos\theta)(5-4\cos\theta)}}{2 \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = 1$

[15]

【解答】 (1) $OQ = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$ (2) $\frac{3}{4}$

【解説】

(1) $OQ = x$ とおく。 $\triangle OPQ$ において、余弦定理により

$$2^2 = 1^2 + x^2 - 2x \cos\theta$$

よって $x^2 - 2(\cos\theta)x - 3 = 0$

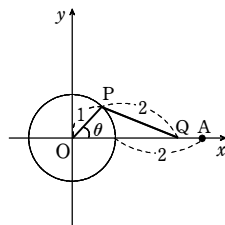
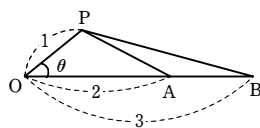
ゆえに $x = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + 3}$

$x > 0$ であるから $x = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$

したがって $OQ = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}$

(2) $A(3, 0)$ であるから

$$L = OA - OQ = 3 - (\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3}) = 3 - \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta + 3}$$



よって $\frac{L}{\theta^2} = \frac{3 - \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta + 3}}{\theta^2} = \frac{(3 - \cos\theta)^2 - (\cos^2\theta + 3)}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})}$
 $= 6 \cdot \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})}$
 $= 6 \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta^2(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})(1 + \cos\theta)}$
 $= 6 \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{(3 - \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 3})(1 + \cos\theta)}$

ゆえに $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L}{\theta^2} = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(2+2) \cdot 2} = \frac{3}{4}$

[16]

【解答】 (1) $(\sqrt{1-4\sin^2\theta}, 2\sin\theta)$ (2) $Q' \left(\frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}, 1 \right)$, $R' \left(\frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}, 1 \right)$

(3) 8

【解説】

(1) $\angle AOP = \theta$ であるから $P(\cos\theta, \sin\theta)$

すなわち $x_1 = \cos\theta$, $y_1 = \sin\theta$

$y_2 = 2y_1$ であるから $y_2 = 2\sin\theta$

点 Q は曲線 C 上にあるから $x_2^2 + y_2^2 = 1$

$x_2 > 0$ であるから $x_2 = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$

よって $Q(\sqrt{1-4\sin^2\theta}, 2\sin\theta)$

(2) 直線 OQ の式は $y = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}x$ であるから、

$y=1$ のとき $x = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$ よって $Q' \left(\frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}, 1 \right)$

また、 $\angle AOP = 4\angle AOR$ であるから $\angle AOR = \frac{\theta}{4}$

ゆえに、 $R \left(\cos \frac{\theta}{4}, \sin \frac{\theta}{4} \right)$ であるから、直線 OR の式は $y = x \tan \frac{\theta}{4}$

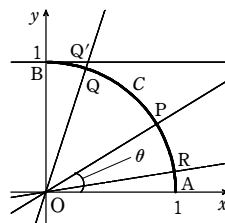
$y=1$ のとき $x = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}$ したがって $R' \left(\frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}, 1 \right)$

(3) (2) から $BR' = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{4}}$, $BQ' = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$

よって、点 P が点 A に限りなく近づくときの $\frac{BR'}{BQ'}$ の極限は

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{BR'}{BQ'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta}{\tan \frac{\theta}{4} \cdot \sqrt{1-4\sin^2\theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin\theta \cos \frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4} \cdot \sqrt{1-4\sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{\theta}{4}}{\sin \frac{\theta}{4}} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{4}}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}} \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 8$$



[1]

【解答】 (1) $s = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$ (2) $\sqrt{2}$

【解説】

(1) $AR : RQ = \alpha : (1-\alpha)$ とすると

$$\overrightarrow{CR} = (1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CQ}$$

$$= (1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha(1-t)\overrightarrow{CB}$$

$BR : RP = \beta : (1-\beta)$ とすると

$$\overrightarrow{CR} = \beta\overrightarrow{CB} + (1-\beta)\overrightarrow{CA}$$

$$= \beta(1-s)\overrightarrow{CA} + (1-\beta)\overrightarrow{CB}$$

よって

$$(1-\alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha(1-t)\overrightarrow{CB} = \beta(1-s)\overrightarrow{CA} + (1-\beta)\overrightarrow{CB}$$

ここで、 $\overrightarrow{CA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{CA} \not\parallel \overrightarrow{CB}$ であるから

$$1-\alpha = \beta(1-s), \alpha(1-t) = 1-\beta$$

これを解くと $\alpha = \frac{s}{s+t-st}$, $\beta = \frac{t}{s+t-st}$ ……①

ここで、 $\triangle APR : \triangle BQR = 2 : 1$ であるから

$$\frac{1}{2} \times AR \times RP \sin \angle ARP = 2 \times \frac{1}{2} \times BR \times RQ \sin \angle BRQ$$

$\angle ARP = \angle BRQ$ であるから $AR \times RP = 2BR \times RQ$

すなわち $\alpha A Q \times (1-\beta) B P = 2\beta B P \times (1-\alpha) A Q$

ゆえに $\alpha(1-\beta) = 2\beta(1-\alpha)$

①を代入すると $\frac{s}{s+t-st} \left(1 - \frac{t}{s+t-st}\right) = \frac{2t}{s+t-st} \left(1 - \frac{s}{s+t-st}\right)$

よって $(1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$

$0 < s < 1$, $0 < t < 1$ であるから

$$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + (1-t) \cdot 2t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

【別解】 $\triangle BCP$ と直線 AQ について、メネラウスの定理

により

$$\frac{BR}{RP} \times \frac{PA}{AC} \times \frac{CQ}{QB} = 1$$

$$\frac{BR}{RP} \times \frac{s}{1} \times \frac{1-t}{t} = 1$$

よって $\frac{BR}{RP} = \frac{t}{s(1-t)}$

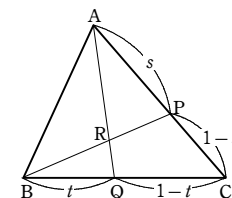
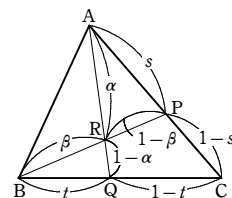
また、 $\triangle ACQ$ と直線 BP について、メネラウスの定理により

$$\frac{AR}{RQ} \times \frac{QB}{BC} \times \frac{CP}{PA} = 1$$

よって $\frac{AR}{RQ} = \frac{s}{t(1-s)}$

ゆえに $\frac{\triangle APR}{\triangle BQR} = \frac{\frac{1}{2} \times AR \times RP \sin \angle ARP}{\frac{1}{2} \times BR \times RQ \sin \angle BRQ} = \frac{AR}{RQ} \times \frac{RP}{BR}$

$$= \frac{s}{t(1-s)} \times \frac{s(1-t)}{t} = \frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)}$$



章末問題B

であり、これが2に等しいから $\frac{s^2(1-t)}{t^2(1-s)} = 2$

よって $(1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$

$0 < s < 1, 0 < t < 1$ であるから

$$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + (1-t) \cdot 2t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t}$$

(2) $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-t + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1-t} = \sqrt{2}$

2

【解答】 (1) $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ (2) $\left(\frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}, \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} \right)$

(3) 4

【解説】

(1) $\angle BOA$ の二等分線と辺 AB の交点を C とすると

$$AC : CB = OA : OB = t : \sqrt{3^2 + 4^2} = t : 5$$

よって

$$\vec{OC} = \frac{5\vec{OA} + t\vec{OB}}{t+5} = \frac{1}{t+5}(5(t, 0) + t(3, 4))$$

$$= \frac{4t}{t+5}(2, 1) \dots\dots ①$$

ゆえに、求めるベクトルは

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2, 1) \text{ すなわち } \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$$

(2) ① から $\vec{AC} = \left(\frac{8t}{t+5} - t, \frac{4t}{t+5} \right)$

$$\text{よって } AC^2 = \left(\frac{8t}{t+5} - t \right)^2 + \left(\frac{4t}{t+5} \right)^2 = \frac{(3t-t^2)^2 + 16t^2}{(t+5)^2} = \frac{t^2(t^2-6t+25)}{(t+5)^2}$$

ここで $t^2 - 6t + 25 = (t-3)^2 + 16 > 0$

また、 $t > 0$ から $t+5 > 0$

ゆえに $AC = \frac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}$

$OP : PC = AO : AC$ であるから、①より

$$\vec{OP} = \frac{AO}{AO+AC} \vec{OC} = \frac{t}{t + \frac{t\sqrt{t^2-6t+25}}{t+5}} \times \frac{4t}{t+5}(2, 1)$$

$$= \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}(2, 1)$$

よって、点 P の座標は $\left(\frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}}, \frac{4t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} \right)$

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t}{t+5+\sqrt{t^2-6t+25}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{1 + \frac{5}{t} + \sqrt{1 - \frac{6}{t} + \frac{25}{t^2}}} = \frac{8}{1+1} = 4$

3

【解答】 $a_1 = 1, a_2 = -1, n \geq 3$ のとき $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

【解説】

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$n(n-2)a_{n+1} = S_n \iff n(n-2)(S_{n+1} - S_n) = S_n \iff n(n-2)S_{n+1} = (n-1)^2 S_n$$

$n \geq 3$ のとき $\frac{n}{n-1} S_{n+1} = \frac{n-1}{n-2} S_n$

よって $\frac{n}{n-1} S_{n+1} = \frac{n-1}{n-2} S_n = \dots = \frac{3-1}{3-2} S_3$

ゆえに $S_n = \frac{2(n-2)}{n-1} S_3 = 2 \cdot \frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}} S_3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ であるから $S_3 = \frac{1}{2}$

したがって $S_n = \frac{n-2}{n-1}$

$n \geq 4$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} - \frac{n-3}{n-2} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

すなわち $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \dots\dots ①$

$a_1 = 1, 1 \times (-1)a_2 = a_1$ から $a_2 = -1$

$S_3 = \frac{1}{2}$ から $1 - 1 + a_3 = \frac{1}{2}$

ゆえに $a_3 = \frac{1}{2}$

よって、①は $n \geq 3$ のとき成り立つ。

以上から $a_1 = 1, a_2 = -1,$

$$n \geq 3 \text{ のとき } a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $(p + \sqrt{q})^n = a_n + b_n \sqrt{q} \dots\dots ①$ とする。

このとき、 $(p - \sqrt{q})^n = a_n - b_n \sqrt{q} \dots\dots ②$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

① から $p + \sqrt{q} = a_1 + b_1 \sqrt{q}$ ゆえに $a_1 = p, b_1 = 1$

よって、 $n=1$ のとき ② が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、② が成り立つ、すなわち $(p - \sqrt{q})^k = a_k - b_k \sqrt{q}$ と仮定する。

$n = k+1$ のときを考えると

$$(p - \sqrt{q})^{k+1} = (p - \sqrt{q})^k (p - \sqrt{q}) = (a_k - b_k \sqrt{q})(p - \sqrt{q})$$

$$= (pa_k + qb_k) - (a_k + pb_k)\sqrt{q} \dots\dots ③$$

ここで $(p + \sqrt{q})^{k+1} = (p + \sqrt{q})^k (p + \sqrt{q}) = (a_k + b_k \sqrt{q})(p + \sqrt{q})$

$$= (pa_k + qb_k) + (a_k + pb_k)\sqrt{q} \dots\dots ④$$

①, ④ から $a_{k+1} = pa_k + qb_k, b_{k+1} = a_k + pb_k$

これと ③ から $(p - \sqrt{q})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1} \sqrt{q}$

すなわち、 $n = k+1$ のときも ② が成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n に対して ② が成り立つ。

(2) ①, ② から $a_n = \frac{1}{2}[(p + \sqrt{q})^n + (p - \sqrt{q})^n]$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{q}}[(p + \sqrt{q})^n - (p - \sqrt{q})^n]$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p + \sqrt{q})^n + (p - \sqrt{q})^n}{(p + \sqrt{q})^n - (p - \sqrt{q})^n}$

$$= \sqrt{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{p - \sqrt{q}}{p + \sqrt{q}} \right)^n}{1 - \left(\frac{p - \sqrt{q}}{p + \sqrt{q}} \right)^n}$$

ここで、 p, q はともに正であるから

$$-(p + \sqrt{q}) < p - \sqrt{q} < p + \sqrt{q}$$

よって $-1 < \frac{p - \sqrt{q}}{p + \sqrt{q}} < 1$ したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$

【参考】 a, b, c, d が有理数、 \sqrt{q} が無理数のとき、

「 $a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q}$ ならば $a = c, b = d$ 」が成り立つ。

【証明】 $b \neq d$ と仮定すると、 $a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q}$ から $\sqrt{q} = \frac{c-a}{b-d}$

a, b, c, d は有理数であるから、この右辺は有理数である。

ところが、左辺は無理数であり、これは矛盾である。

したがって、 $b \neq d$ とした仮定は誤りで $b = d$

これと $a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q}$ から $a = c$

5

【解答】 (1) $L_m = m^2 + 2m$ (2) $T_m = \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m + 6)$ (3) 1

【解説】

(1) $y = (x-m)^2$

m は正の整数であるから、図形 D は右図の斜線部分となる。

ただし、境界線を含む。

D の周上の格子点のうち、 x 軸上にあるものは $(k, 0)$ ($k=0, 1, \dots, m$) で、 $(m+1)$ 個ある。

y 軸上にあるものは $(0, k)$ ($k=0, 1, \dots, m^2$) で、 (m^2+1) 個ある。

放物線上にあるものは $(k, (k-m)^2)$

($k=0, 1, \dots, m$) で、 $(m+1)$ 個ある。

よって、 D の周上の格子点の数 L_m は、重複に注意して

$$L_m = (m+1) + (m^2+1) + (m+1) - 3 = m^2 + 2m$$

(2) D の格子点のうち直線 $x = k$ ($k=0, 1, \dots, m$) 上にあるものは $\{(k-m)^2 + 1\}$ 個ある。

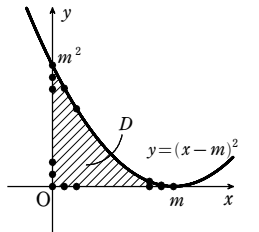
よって、 D の周上および内部の格子点の数 T_m は

$$T_m = \sum_{k=0}^m \{(k-m)^2 + 1\} = \sum_{l=0}^m (l^2 + 1)$$

$$= \sum_{l=1}^m l^2 + \sum_{l=0}^m 1 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + m + 6)$$

(3) D の面積 S_m は



$$S_m = \int_0^m (x-m)^2 dx = \left[\frac{(x-m)^3}{3} \right]_0^m = -\frac{(-m)^3}{3} = \frac{m^3}{3}$$

よって
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)}{\frac{m^3}{3}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)(2m^2+m+6)}{2m^3}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(2 + \frac{1}{m} + \frac{6}{m^2}\right)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

[6]

[解答] (1) n が奇数のとき $a_n = \frac{n-1}{2}$, n が偶数のとき $a_n = \frac{n-2}{2}$

(2) n が奇数のとき $b_n = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$, n が偶数のとき $b_n = \frac{1}{4}(n-2)^2$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

[解説]

k を自然数とする。

(1) n が奇数のとき $n = 2k-1$ とおくと

$(2k-3, 1), (2k-5, 2), \dots, (1, k-1)$

ゆえに $a_{2k-1} = k-1$ よって $a_n = \frac{n-1}{2}$

n が偶数のとき $n = 2k$ とおくと

$(2k-2, 1), (2k-4, 2), \dots, (2, k-1)$

ゆえに $a_{2k} = k-1$ よって $a_n = \frac{n-2}{2}$

(2) $n = 2k-1$ のとき

$$b_{2k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (a_{2i-1} + a_{2i}) = \sum_{i=1}^{k-1} 2(i-1)$$

$$= 2 \left\{ \frac{(k-1)k}{2} - (k-1) \right\} = (k-1)(k-2)$$

ゆえに $b_n = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$

$n = 2k$ のとき

$$b_{2k} = b_{2k-1} + a_{2k-1} = (k-1)(k-2) + (k-1) = (k-1)^2$$

ゆえに $b_n = \frac{1}{4}(n-2)^2$

(3) $n = 2k-1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{(2k-1)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)(k-2)}{(2k-1)^2}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)}{\left(2 - \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$n = 2k$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{(2k)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1)^2}{(2k)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

以上から $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

[7]

[解答] (1) $\frac{5}{9}$ (2) 略 (3) $a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$, $c_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$

(4) 順に $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

[解説]

(1) さいころを 2 回振った後に動点 P が A にいるのは、2 回とも 2 以下の目が出る、

または 2 回とも 3 以上の目が出るときであるから $a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

(2) さいころを 1 回振ると、点 A または C にいる点 P は点 B または D に移り、点 B または D にいる点 P は点 A または C に移る。よって、A または C にいる点 P は、さいころを 2 回振った後、A または C にいることが分かる。

同様に、B または D にいる点 P は、さいころを 2 回振った後、B または D にいることが分かる。

動点 P は A から出発するから、さいころを $2n$ 回すなわち偶数回振った後、A または C にいる。

(3) さいころを $2(n+1)$ 回振った後に、動点 P が A にいるのは次の場合である。

[1] さいころを $2n$ 回振った後に動点 P が点 A に移動し、その後 A \rightarrow B \rightarrow A と移動するか A \rightarrow D \rightarrow A と移動する

[2] さいころを $2n$ 回振った後に動点 P が点 C に移動し、その後 C \rightarrow B \rightarrow A と移動するか C \rightarrow D \rightarrow A と移動する

以上から $a_{n+1} = a_n \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} + c_n \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right)$

すなわち $a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{4}{9} c_n \dots\dots \textcircled{1}$

(2) より $c_n = 1 - a_n \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入して $a_{n+1} = \frac{5}{9} a_n + \frac{4}{9} (1 - a_n)$

変形すると $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$

よって、数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\}$$

これを $\textcircled{2}$ に代入して $c_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right\}$

(4) (3) から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}$

[8]

[解答] (1) $\theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$, 証明は略 (2) 略 (3) 略 (4) 1

[解説]

(1) $\theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2}$ から $\theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(\theta_n - \frac{\pi}{3} \right)$

よって、数列 $\left\{ \theta_n - \frac{\pi}{3} \right\}$ は初項 $\theta_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\theta_n - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \theta_n = \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

また、 $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ より、すべての自然数 n に対して $-\frac{1}{8} \leq \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{4}$ が成り立つ

から $\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \leq \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} \leq \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{8} \right) \right\}$

すなわち $\frac{\pi}{4} \leq \theta_n \leq \frac{3}{8}\pi$

したがって、 $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。

(2) $\theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2}$ から $\cos \theta_{n+1} = \cos \left(\frac{\pi - \theta_n}{2} \right) = \sin \frac{\theta_n}{2}$

ここで、(1) の結果より、 $0 < \frac{\theta_n}{2} < \frac{\pi}{4}$ であるから $\sin \frac{\theta_n}{2} > 0$

よって $\cos \theta_{n+1} = \sin \frac{\theta_n}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}$

(3) すべての自然数 n に対して、 $2 \cos \theta_n = a_n \dots\dots \textcircled{1}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\left(\text{左辺} \right) = 2 \cos \theta_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad \left(\text{右辺} \right) = a_1 = \sqrt{2}$$

よって、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると $2 \cos \theta_k = a_k$

このとき、 $-1 \leq \cos \theta_k \leq 1$ より $-2 \leq a_k \leq 2$

よって、(2) の結果より、 $n=k+1$ のとき

$$2 \cos \theta_{k+1} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_k}{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta_k} = \sqrt{2 - a_k},$$

$$a_{k+1} = \sqrt{2 - a_k} = \sqrt{2 - a_k}$$

ゆえに、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数 n に対して $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(4) (1) と (3) の結果より $a_n = 2 \cos \theta_n = 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} = \frac{\pi}{3}$ で、関数 $\cos x$ は連続であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \theta_n = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

[9]

[解答] (1) $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{a}{2x_n}$ (2) 略 (3) 略 (4) \sqrt{a}

[解説]

(1) $f'(x) = 2x$ より、点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - a$$

ここで、 $y=0$ のとき $x = x_{n+1}$ であるから $2x_n x_{n+1} - x_n^2 - a = 0$

章末問題B

$x_n=0$ とすると, $a=0$ となり, $a>0$ に反する。

よって $x_n \neq 0$

したがって $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}$

(2) (1) から $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$

すなわち $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \dots\dots ①$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n}$ と $x_1 > \sqrt{a} > 0$ から $x_2 > 0$

同様に繰り返して $x_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

よって, ① から $x_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$

ここで, $x_{n+1} - \sqrt{a} = 0$ とすると $x_n - \sqrt{a} = 0$

繰り返して, $x_1 - \sqrt{a} = 0$ となり, 条件に反する。

よって $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0$

また $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{(x_n + \sqrt{a})(x_n - \sqrt{a})}{2x_n} > 0$

したがって $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$

(3) ① から $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$

(2) より, $x_n > 0, 0 < \sqrt{a} < x_n$ が成り立つから $0 < \frac{\sqrt{a}}{x_n} < 1$

よって $0 < 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} < 1$

ゆえに $x_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})$

(2) から $x_{n+1} - \sqrt{a} > 0, x_n - \sqrt{a} > 0$

したがって $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|$

(4) (3) から

$$0 < |x_n - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}|x_{n-1} - \sqrt{a}| < \left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2} - \sqrt{a}| < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}|$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|x_1 - \sqrt{a}| = 0$

はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{a}| = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

10

【解答】 $1 + \sqrt{5}$

【解説】

数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定して, その極限値を α とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

であるから, 漸化式より $\alpha = \sqrt{2\alpha + 4}$ ($\alpha > 0$)

両辺を2乗して整理すると $\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$

$\alpha > 0$ であるから $\alpha = 1 + \sqrt{5}$

ここで $0 \leq |a_{n+1} - (1 + \sqrt{5})| = \left| \frac{\sqrt{2a_n + 4} - (1 + \sqrt{5})}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})} \right|$
 $= \frac{|2a_n + 4 - (1 + \sqrt{5})^2|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})}$
 $= \frac{2|a_n - (1 + \sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})}$

$\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5}) > 4$ であるから

$$0 \leq |a_{n+1} - (1 + \sqrt{5})| \leq \frac{2|a_n - (1 + \sqrt{5})|}{\sqrt{2a_n + 4} + (1 + \sqrt{5})} \leq \frac{1}{2}|a_n - (1 + \sqrt{5})|$$

よって $0 \leq |a_n - (1 + \sqrt{5})| \leq \frac{1}{2}|a_{n-1} - (1 + \sqrt{5})| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1 - (1 + \sqrt{5})|$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1 - (1 + \sqrt{5})| = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - (1 + \sqrt{5})| = 0$

したがって, 数列 $\{a_n\}$ は収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{5}$

11

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$ であるから

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4}$

(2) $k \geq 2$ のとき $k^3 - (k-1)k(k+1) = k > 0$ であるから

$$k^3 > (k-1)k(k+1)$$

よって $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

この式に $k=2, 3, \dots, n$ を代入して加えると

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < T_{n-1}$$

両辺に1を加えると $S_n < 1 + T_{n-1}$

(3) (2) から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n < 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

よって $S \leq \frac{5}{4}$

また $S_2 = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

S_n の各項は正であるから, n が十分大きいとき $S_n \geq S_2$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq S_2 = \frac{9}{8}$ すなわち $S \geq \frac{9}{8}$

以上から $\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{5}{4}$

12

【解答】 (1) $R_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$

(2) $T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$ (3) $\frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

【解説】

(1) $R_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

また $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1}$,

$$rS_n = r + 2r^2 + \dots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

辺々を引くと

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

よって $S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$T_n = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2r + \dots + n(n-1)r^{n-2},$$

$$rT_n = 2 \cdot 1 \cdot r + \dots + (n-1)(n-2)r^{n-2} + n(n-1)r^{n-1}$$

$(k+1)k - k(k-1) = 2k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) であるから, 辺々を引くと

$$(1-r)T_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2kr^{k-1} - n(n-1)r^{n-1}$$

$$= 2S_{n-1} - n(n-1)r^{n-1}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{1-r} \right\} - n(n-1)r^{n-1}$$

よって, $n \geq 2$ のとき

$$T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r} \dots\dots ①$$

$T_1 = 0$ であるから, ① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $T_n = 2 \left\{ \frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^3} - \frac{(n-1)r^{n-1}}{(1-r)^2} \right\} - \frac{n(n-1)r^{n-1}}{1-r}$

(3) 第 n 項までの和を U_n とすると

$$U_n = \sum_{k=0}^n k^2 r^k = \sum_{k=0}^n \{k(k-1) + k\} r^k = r^2 \sum_{k=0}^n k(k-1)r^{k-2} + r \sum_{k=0}^n k r^{k-1} = r^2 T_n + r S_n$$

ここで, $|r| < 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1)r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{2}{(1-r)^3}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (r^2 T_n + r S_n)$

$$= r^2 \cdot \frac{2}{(1-r)^3} + r \cdot \frac{1}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{2r^2 + r(1-r)}{(1-r)^3}$$

$$= \frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$$

すなわち $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \frac{(r+1)r}{(1-r)^3}$

13

【解答】 (1) $P_1(q) = q^2(3-2q)$ (2) $P_2(q) = \frac{(2-q)q^2}{q^2-q+1}$ (3) $0 < q \leq \frac{1}{2}$

章末問題B

【解説】

チーム A が勝つことを A, チーム B が勝つことを B で表し, 例えば, 1 回目にチーム A が勝ち, 2 回目にチーム B が勝ち, 3 回目にチーム A が勝つことを ABA で表す。

(1) チーム A が優勝するのは, AA, ABA, BAA のいずれかの場合である。

AA となる確率は q^2

ABA, BAA となる確率はともに $q^2(1-q)$

よって, チーム A が優勝する確率 $P_1(q)$ は

$$P_1(q) = q^2 + 2q^2(1-q) = q^2(3-2q)$$

(2) k を 0 以上の整数とする。

チーム A が優勝するのは, 次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1] AB が k 回続いたあと, AA と続く場合

[2] 1 回目 B で, そのあと AB が k 回続き, さらに AA と続く場合

[1] が起こる確率は $\{q(1-q)\}^k q^2$

[2] が起こる確率は $(1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$

$\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2$ は初項 q^2 , 公比 $q(1-q)$ の無限等比級数である。

公比について, $q(1-q) = q - q^2 = -\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ であり, $0 < q < 1$ であるから

$$0 < q(1-q) \leq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

よって, $\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2$ は収束し $\sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2 = \frac{q^2}{1-q(1-q)}$

$\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$ は初項 $(1-q)q^2$, 公比 $q(1-q)$ の無限等比級数である。

① から, $\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2$ は収束し

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2 = \frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)}$$

チーム A が優勝する確率 $P_2(q)$ は

$$\begin{aligned} P_2(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \{q(1-q)\}^k q^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)\{q(1-q)\}^k q^2 \\ &= \frac{q^2}{1-q(1-q)} + \frac{(1-q)q^2}{1-q(1-q)} \\ &= \frac{(2-q)q^2}{q^2 - q + 1} \end{aligned}$$

(3) $P_1(q) \geq P_2(q)$ とすると $q^2(3-2q) \geq \frac{(2-q)q^2}{q^2 - q + 1}$

両辺を $q^2 (>0)$ で割ると $3-2q \geq \frac{2-q}{q^2 - q + 1}$

① より, $q^2 - q + 1 = 1 - q(1-q) \geq \frac{3}{4}$ であるから, この不等式の両辺に $q^2 - q + 1$ を

掛けると $(3-2q)(q^2 - q + 1) \geq 2 - q$

左辺を展開して整理すると $2q^3 - 5q^2 + 4q - 1 \leq 0$

すなわち $(q-1)^2(2q-1) \leq 0$

$(q-1)^2 > 0$ であるから $2q-1 \leq 0$ よって $q \leq \frac{1}{2}$

ゆえに, 求める条件は $0 < q \leq \frac{1}{2}$

14

【解答】 (1) $\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t} a$ (2) $S(t) = \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t} a^2$

(3) $t=1$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{3} a^2$

【解説】

(1) $A_1A_2 = \frac{t}{1+t} a$, $A_1C_2 = \frac{1}{1+t} a$

余弦定理により

$$\begin{aligned} A_2C_2^2 &= \left(\frac{t}{1+t} a\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t} a\right)^2 - 2\left(\frac{t}{1+t} a\right)\left(\frac{1}{1+t} a\right) \cos 60^\circ \\ &= \left(\frac{t}{1+t} a\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t} a\right)^2 - \frac{t}{(1+t)^2} a^2 \\ &= \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2} a^2 \end{aligned}$$

ゆえに $A_2C_2 = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t} a$

(2) 正三角形 T_1 の面積は $\frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

正三角形 T_n, T_{n+1} は相似であり,

相似比が $1 : \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{1+t}$ であるから,

面積比は $1 : \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$ となる。

また, $0 < \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2} < 1$ から,

$S(t)$ は, 初項 $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, 公比 $\frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}$ の無限等比数列の和である。

ゆえに $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1}{1 - \frac{t^2-t+1}{(1+t)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{(t+1)^2}{3t}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(t+1)^2}{12t} a^2$$

(3) $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(2 + 2 + \frac{1}{t}\right)$

$t > 0$ から, 相加平均・相乗平均の関係により

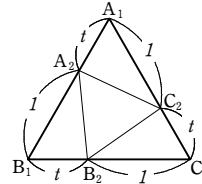
$$S(t) \geq \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \left(2 + 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a^2$$

等号は, $t = \frac{1}{t}$, $t > 0$ から, $t = 1$ のとき成り立つ。

以上から, $t = 1$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{3} a^2$

15

【解答】 (1) $p_1 = \frac{1}{a+3}$, $p_2 = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$



(2) $p_n = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} + \frac{1}{a+2}$ (3) $\frac{1}{a+2}$

【解説】

(1) はじめに袋 U の中に, 白球 $(a+2)$ 個, 赤球 1 個の計 $(a+3)$ 個が入っている。

よって, 1 回目に赤球を取り出す確率は $p_1 = \frac{1}{a+3}$

次に, p_2 を考える。

[1] 1 回目に白球を取り出すとき

(A) から, 操作後の袋の中に, 白球 a 個, 赤球 1 個の計 $(a+1)$ 個が入っている。

[2] 1 回目に赤球を取り出すとき

(B) から, 操作後の袋の中に, 赤球は入っていない。

[1], [2] から, 2 回目に赤球を取り出す確率は

$$p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+3} \cdot 0 = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

(2) $n \geq 3$ とする。3 回目以降, 袋の中に「白球 a 個, 赤球 1 個」または「白球 a 個, 赤球 0 個」が入っている。

[1] n 回目に白球を取り出すとき

(A) から, 操作後の袋の中に, 白球 a 個, 赤球 1 個の計 $(a+1)$ 個が入っている。

[2] n 回目に赤球を取り出すとき

(B) から, 操作後の袋の中に, 赤球は入っていない。

[1], [2] から, $(n+1)$ 回目に赤球を取り出す確率は

$$p_{n+1} = (1-p_n) \cdot \frac{1}{a+1} + p_n \cdot 0$$

よって $p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2}\right)$

また $p_1 - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{(a+2)(a+3)}$

ゆえに, 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{a+2}\right\}$ は初項 $-\frac{1}{(a+2)(a+3)}$, 公比 $-\frac{1}{a+1}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって $p_n = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} + \frac{1}{a+2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(3) $n=1, 2$ のとき, ① の右辺はそれぞれ

$$\frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+3},$$

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

よって, ① はすべての自然数 n に対して成り立つ。

ゆえに $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m p_k = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)}$

$$= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)} \left\{1 - \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}$$

a は自然数より $\left|-\frac{1}{a+1}\right| < 1$ であるから $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a+1}\right)^m = 0$

したがって $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m p_k = \frac{1}{a+2}$

[16]

【解答】 (1) $-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ (2) $\frac{1}{e}-1$

【解説】

(1) $\angle A_1OA_2 = \theta$ とおくと、

$\triangle A_k A_{k+1} A_{k+2} \sim \triangle A_{k+1} A_{k+2} A_{k+3}$ で、その相似比は

$$1 : \cos \theta$$

ゆえに $A_{k+1} A_{k+2} = A_k A_{k+1} \cos \theta$

$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

よって $A_k A_{k+1} = A_1 A_2 (\cos \theta)^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^{k-1}$

\vec{h}_k と \vec{h}_{k+1} のなす角は $\pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= |\vec{h}_k| |\vec{h}_{k+1}| \cos(\pi - \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^{k-1} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^k (-\cos \theta) \\ &= -\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \end{aligned}$$

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = -\frac{1}{n} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^2} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 + \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{e} - 1$

[17]

【解答】 (1) $R_6 = 1, r_6 = \frac{1}{3}$ (2) $2\pi^2$

【解説】

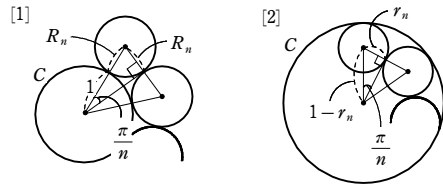


図 [1] から $(1 + R_n) \sin \frac{\pi}{n} = R_n$ よって $R_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$

図 [2] から $(1 - r_n) \sin \frac{\pi}{n} = r_n$ よって $r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$

(1) $R_6 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, r_6 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

(2) $\frac{\pi}{n} = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} R_n - r_n &= \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) - \sin \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{n} = \theta$ から $n = \frac{\pi}{\theta}$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\theta \rightarrow 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (R_n - r_n) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{\theta^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= 2\pi^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1^2} = 2\pi^2 \end{aligned}$$

[1]

【解答】 $\frac{1}{8}\pi$

【解説】

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq 4nx \leq 2n\pi$

この範囲で $\sin 4nx \geq \sin x$ を満たす条件は

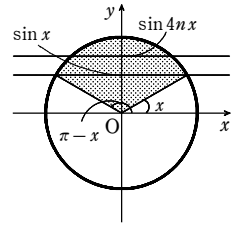
$$x + 2k\pi \leq 4nx \leq (\pi - x) + 2k\pi \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

よって $\frac{2k\pi}{4n-1} \leq x \leq \frac{(2k+1)\pi}{4n+1}$ $(k=0, 1, \dots, n-1)$

区間の長さの総和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4n+1} - \frac{2k\pi}{4n-1} \right\} = \frac{\pi}{16n^2-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-4k+4n-1) \\ &= \frac{\pi}{16n^2-1} \left\{ -4 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} (4n-1) \right\} = \frac{\pi}{16n^2-1} \left\{ -4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + (4n-1)n \right\} \\ &= \frac{2n^2+n}{16n^2-1} \pi \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{16 - \frac{1}{n^2}} \pi = \frac{1}{8}\pi$



[2]

【解答】 (1) $y = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2$ (2) 4

【解説】

(1) $y = x^2$ から $y' = 2x$

点 A における接線と、x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると $\tan \theta = 2a$

よって、 ℓ の傾きは

$$\begin{aligned} \tan(\theta - 30^\circ) &= \frac{\tan \theta - \tan 30^\circ}{1 + \tan \theta \tan 30^\circ} \\ &= \frac{2a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ゆえに、 ℓ の方程式は $y - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)$

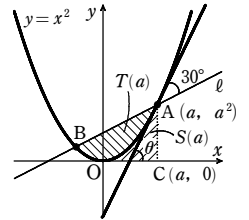
すなわち $y = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2$

(2) $S(a) = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$

点 B の x 座標を b とすると $x^2 - \left\{ \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a) + a^2 \right\} = (x-a)(x-b)$

よって $a+b = \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$ ゆえに $b = -a + \frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}} \dots \dots \textcircled{1}$

また $T(a) = \int_b^a \{-(x-a)(x-b)\} dx = -\int_b^a (x-a)(x-b) dx = \frac{1}{6}(a-b)^3$



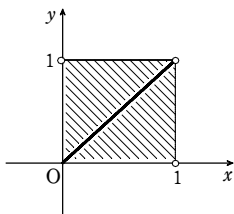
章末問題C

ゆえに、①から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(a-b)^3}{2a^3} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-1 + \frac{2\sqrt{3}-1}{2a+\sqrt{3}} \right)^3 \right\} = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

3

【図】境界線上の点は、 x 軸、 y 軸と直線 $y=x$ を除き、他は含む



【解説】

$y > 0$ であるから、漸化式の両辺を y^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{y^{n+1}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a_n}{y^n} + 1$

$$\frac{a_n}{y^n} = b_n \text{ とおくと } b_{n+1} = \frac{x}{y} b_n + 1, b_1 = \frac{a_1}{y^1} = 0$$

$$\text{この漸化式を変形すると } b_{n+1} - \frac{y}{y-x} = \frac{x}{y} \left(b_n - \frac{y}{y-x} \right)$$

よって、数列 $\left\{ b_n - \frac{y}{y-x} \right\}$ は、初項 $b_1 - \frac{y}{y-x} = -\frac{y}{y-x}$ 、公比 $\frac{x}{y}$ の等比数列である

$$\text{から } b_n - \frac{y}{y-x} = -\frac{y}{y-x} \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1}$$

$$\text{ゆえに } b_n = -\frac{y}{y-x} \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} + \frac{y}{y-x} = \frac{y}{y-x} \left[1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right]$$

$$\text{よって } a_n = y^n b_n = \frac{y^{n+1}}{y-x} \left[1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right] \dots \dots \text{①}$$

[1] $0 < x < y$ のとき

$$0 < \frac{x}{y} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} \right] = 1$$

よって、数列 $\{a_n\}$ が有限の値に収束するための条件は、数列 $\{y^{n+1}\}$ が有限の値に収束することである。

$$\text{したがって } 0 < y \leq 1$$

$$0 < x < y \text{ であるから } 0 < x < y \leq 1 \dots \dots \text{②}$$

[2] $0 < y < x$ のとき

$$\text{①を变形して } a_n = \frac{x^{n-1} y^2}{y-x} \left[\left(\frac{y}{x} \right)^{n-1} - 1 \right]$$

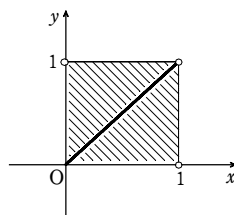
$$0 < \frac{y}{x} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{y}{x} \right)^{n-1} - 1 \right] = -1$$

よって、数列 $\{a_n\}$ が有限の値に収束するための条件は、数列 $\{x^{n-1}\}$ が有限の値に収束することである。

$$\text{したがって } 0 < x \leq 1$$

$$0 < y < x \text{ であるから } 0 < y < x \leq 1 \dots \dots \text{③}$$

以上から、点 (x, y) の存在範囲は、②、③の不等式が表す領域で、右の図の斜線部分。ただし、境界線上の点は、 x 軸、 y 軸と直線 $y=x$ を除き、他は含む。



4

【解答】(1) $p=2b, q=a-3b, r=-a+b$

$$(2) b=0 \text{ のとき } \sum_{k=1}^n x_k = a \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$a=0 \text{ のとき } \sum_{k=1}^n x_k = b \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$$

$$(3) \frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b$$

【解説】

$$(1) x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} \text{ から } \frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$$

両辺に $k(k+1)(k+3)$ を掛けると

$$2ak+6b = p(k+1)(k+3) + qk(k+3) + rk(k+1)$$

$$\text{すなわち } 2ak+6b = (p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k+3p$$

$$\text{よって、} x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} \text{ がすべての自然数 } k \text{ について成り立つとき}$$

$$0 = p+q+r, 2a = 4p+3q+r, 6b = 3p$$

$$\text{ゆえに } p=2b, q=a-3b, r=-a+b$$

(2) $b=0$ のとき、(1) から $p=0, q=a, r=-a$

$$\text{このとき } x_k = \frac{a}{k+1} - \frac{a}{k+3} = a \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

したがって、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= a \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= a \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= a \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \dots \dots \text{①}$$

また、 $a=0$ のとき、(1) から $p=2b, q=-3b, r=b$

このとき

$$x_k = \frac{2b}{k} - \frac{3b}{k+1} + \frac{b}{k+3} = b \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= b \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

$$= 2b \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - b \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n x_k = 2b \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - b \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \dots \dots \text{②}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{また、} n \geq 3 \text{ のとき、①から } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

ゆえに、 $n \geq 4$ のとき、②から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - b \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= b \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \dots \dots \text{③} \end{aligned}$$

$$(3) (1) \text{ から } x_k = \frac{2b}{k} + \frac{a-3b}{k+1} + \frac{-a+b}{k+3}$$

$$\text{したがって } x_k = a \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) + b \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right)$$

よって、①、③から、4以上の自然数 n に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= a \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) + b \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right) \\ &= a \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + b \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{5}{6} a + \frac{7}{6} b$$

5

$$\text{【解答】 (1) } \frac{1}{8} \quad (2) \frac{6}{7} S$$

【解説】

(1) 直線 $A_k A_{k+1}$ の傾きは

$$\frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k$$

また、 $y=x^2$ から $y'=2x$

点 A_{k+2} における C の接線と直線 $A_k A_{k+1}$ が平行であるから

$$2a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

$$\text{よって } a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_k) \dots \dots \text{①}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{k+2} A_k} &= (a_k - a_{k+2}, a_k^2 - a_{k+2}^2), \\ \overrightarrow{A_{k+2} A_{k+1}} &= (a_{k+1} - a_{k+2}, a_{k+1}^2 - a_{k+2}^2) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1}^2 - a_{k+2}^2) - (a_{k+1} - a_{k+2})(a_k^2 - a_{k+2}^2)| \\ &= \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} + a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2}) - (a_{k+1} - a_{k+2})(a_k + a_{k+2})(a_k - a_{k+2})| \\ &= \frac{1}{2} |(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})(a_{k+1} + a_k)| \end{aligned}$$

ここで、①を代入すると

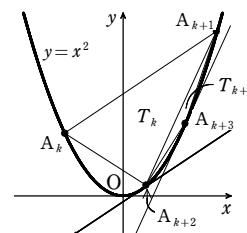
$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \left| \left(a_k - \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \right) \left(a_{k+1} - \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \right) \times (a_{k+1} - a_k) \right| \\ &= \frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3 \end{aligned}$$

したがって

$$T_{k+1} = \frac{1}{8} |a_{k+2} - a_{k+1}|^3 = \frac{1}{8} \left| \frac{a_{k+1} + a_k}{2} - a_{k+1} \right|^3 = \frac{1}{64} |a_{k+1} - a_k|^3$$

$$\text{よって } \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{1}{8}$$

(2) 直線 $A_1 A_2$ の方程式は $y = (a_1 + a_2)x - a_1 a_2$



章末問題C

同様に $U(N) - \frac{1}{4}U(N) = \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)(n-2)}{4^n} - \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)(n-2)}{4^{n+1}}$

$$\frac{3}{4}U(N) = \sum_{n=2}^N \frac{(n-1)(n-2) - (n-2)(n-3)}{4^n} - \frac{(N-1)(N-2)}{4^{N+1}}$$

$$U(N) = \frac{4}{3} \sum_{n=2}^N \frac{2n-4}{4^n} - \frac{N^2-3N+2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} \sum_{n=2}^N \frac{n}{4^n} - \frac{16}{3} \sum_{n=2}^N \frac{1}{4^n} - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} \left[T(N) - \frac{1}{4} \right] - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{16} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{N-1}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

$$= \frac{8}{3} T(N) - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \left(1 - \frac{1}{4^{N-1}}\right) - \frac{N^2}{3 \cdot 4^N} + \frac{N}{4^N} - \frac{2}{3 \cdot 4^N}$$

よって $\lim_{N \rightarrow \infty} T(N) = \frac{4}{9}, \lim_{N \rightarrow \infty} U(N) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$

ゆえに $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N} p(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{T(N) + 2U(N)\} = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{27} = \frac{16}{27}$

一方 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N+1} p(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + p(2N+1) \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + \frac{2N(2N-2)}{2^{2N+3}} \right\}$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{2N} p(n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 - N}{4^N} \right\} = \frac{16}{27}$$

以上から $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{16}{27}$

注意 本解答では $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^m}{a^N} = 0$ ($a > 1, m$ は自然数) を、証明をせずに用いた。

9

解答 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

解説

$x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} = \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - 1 + \frac{1}{n}\right)$ であるから、 $x = \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}$ をそれぞれ

$x^{2n} = P_n(x) \left(x - \frac{1}{n}\right) \left(x - 1 + \frac{1}{n}\right) + a_n x + b_n$ に代入すると

$$\frac{1}{n} a_n + b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdots \textcircled{1}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n + b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdots \textcircled{2}$$

② - ① から

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{よって} \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right) a_n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 - \frac{1}{n^{2n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} \right\}^{-1} = e^{-1}$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2}$

よって、① から $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{2n}} - \frac{1}{n} a_n\right) = 0$

10

解答 (1) $P_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ (2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$

解説

(1) 0 が 0 として伝わるのは、2n 回の伝達のうち、2k 回 ($0 \leq k \leq n$) の逆転がある場合で、その確率を Q_{2k} とすると

$$Q_{2k} = {}_{2n}C_{2k} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{2n-2k} \left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$$

よって $P_{2n} = \sum_{k=0}^n Q_{2k} = \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{2n-2k} \left(\frac{1}{4n}\right)^{2k}$

また、二項定理により

$$(a+b)^{2n} = a^{2n} + {}_{2n}C_1 a^{2n-1} b + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n}$$

$$(a-b)^{2n} = a^{2n} - {}_{2n}C_1 a^{2n-1} b + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n}$$

辺々を加えて

$$(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n} = 2(a^{2n} + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} b^{2n})$$

すなわち $\sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k} = \frac{1}{2}(a+b)^{2n} + \frac{1}{2}(a-b)^{2n}$

この等式を用いて

$$P_{2n} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}\right)^{2n} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{4n} \right]^{2n} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

(2) $-\frac{1}{2n} = h$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $h \rightarrow -0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim_{h \rightarrow -0} \left\{ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1} = \frac{1}{e}$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$

11

解答 (1) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (2) $B_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}, C_n = \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$

(3) $\frac{2}{e}$

解説

(1) $f_n(x) = x^{n+1}(1-x) = x^{n+1} - x^{n+2}$ から $f'_n(x) = (n+1)x^n - (n+2)x^{n+1}$

よって、点 $(a_n, f_n(a_n))$ における接線の方程式は

$$y - (a_n)^{n+1}(1-a_n) = \{(n+1)(a_n)^n - (n+2)(a_n)^{n+1}\}(x - a_n)$$

これが原点を通るとき

$$0 - (a_n)^{n+1}(1-a_n) = \{(n+1)(a_n)^n - (n+2)(a_n)^{n+1}\}(0 - a_n)$$

ゆえに $-(a_n)^{n+1}(1-a_n) = -(n+1)(a_n)^{n+1} + (n+2)(a_n)^{n+2}$

両辺を $(a_n)^{n+1}$ (> 0) で割ると $-(1-a_n) = -(n+1) + (n+2)a_n$

よって $(n+1)a_n = n$ $n+1 > 0$ から $a_n = \frac{n}{n+1}$

(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x) \geq 0$ であるから

$$B_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (x^{n+1} - x^{n+2}) dx = \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} - \frac{1}{n+3} x^{n+3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$0 < \frac{n}{n+1} < 1$ であるから $0 < a_n < 1$

よって $C_n = \int_0^{a_n} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{n}{n+1}} (x^{n+1} - x^{n+2}) dx = \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} - \frac{1}{n+3} x^{n+3} \right]_0^{\frac{n}{n+1}}$

$$= \frac{n^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \frac{n^{n+3}}{(n+3)(n+1)^{n+3}}$$

$$= \frac{n^{n+2} \{(n+3)(n+1) - n(n+2)\}}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)} = \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}(n+2)(n+3)} \times (n+2)(n+3)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+2}(2n+3)}{(n+1)^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{2}{e}$$

12

解答 (1) $A_n = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$ (2) $L_n = L + 2\pi r, S_n = A_n + Lr + \pi r^2$ (3) $\frac{1}{4\pi}$

解説

(1) P_n に外接する円の中心を O とする。
 P_n のある 1 辺を AB とし、その中点を M とする。
 $\triangle OAB$ は二等辺三角形であり、 P_n は、 $\triangle OAB$ と合同な n 個の二等辺三角形に分割できる。

$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$ であるから $\angle AOM = \frac{\pi}{n}$

$AB = \frac{L}{n}$ より $AM = \frac{L}{2n}$

よって $OM = \frac{AM}{\tan \angle AOM} = \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}}$

ゆえに $A_n = n \cdot \triangle OAB = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM = \frac{n}{2} \cdot \frac{L}{n} \cdot \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$

(2) Q_n における P_n の各頂点付近は右の図のようになっている。各頂点付近の斜線部分の扇形をすべて合わせると、半径 r の 1 つの円となる。

よって $L_n = L + 2\pi r$

$$S_n = A_n + r \cdot \frac{L}{n} \cdot n + \pi r^2 = A_n + Lr + \pi r^2$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}}$

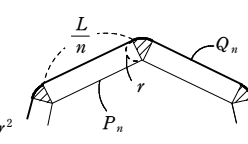
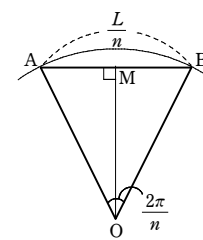
$\frac{\pi}{n} = t$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot \cos t = \frac{L^2}{4\pi}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{L^2}{4\pi}$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(L_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n + Lr + \pi r^2}{(L + 2\pi r)^2} = \frac{\frac{L^2}{4\pi} + Lr + \pi r^2}{(L + 2\pi r)^2}$

$$= \frac{L^2 + 4\pi Lr + 4\pi^2 r^2}{4\pi(L + 2\pi r)^2} = \frac{(L + 2\pi r)^2}{4\pi(L + 2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}$$



章末問題C

13

解答 (1) $a_n = 2^n - 1$ (2) $\tan \theta_n = \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2}$ (3) 略 (4) $\frac{1}{10}$

解説

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を変形すると $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
よって、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

したがって $a_n = 2^n - 1$

(2) $\vec{p}_n = (a_n, a_{n+1})$ と x 軸の正の向きとのなす角を α_n とおくと

$$\tan \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a_n + 1}{a_n} = 2 + \frac{1}{a_n} > 0$$

また $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

同様に、 $\vec{p}_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2})$ と x 軸の正の向きとのなす角を α_{n+1} とおくと

$$\tan \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}} > 0$$

また $0 < \alpha_{n+1} < \frac{\pi}{2}$

$a_{n+1} > a_n > 0$ であるから $0 < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n}$

よって $0 < \tan \alpha_{n+1} < \tan \alpha_n$, $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$

$\theta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, $\theta_n \asymp \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= \tan(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \frac{\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n+1}}{1 + \tan \alpha_n \tan \alpha_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}}{1 + \left(2 + \frac{1}{a_n}\right)\left(2 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1} + (2a_{n+1} + 1)(2a_n + 1)} \\ &= \frac{(2a_n + 1) - a_n}{a_n(2a_n + 1) + (4a_n + 3)(2a_n + 1)} = \frac{a_n + 1}{10a_n^2 + 11a_n + 3} \\ &= \frac{2^n}{10(2^n - 1)^2 + 11(2^n - 1) + 3} = \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} \end{aligned}$$

(3) $0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, $\theta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ であるから $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$

よって $0 < \theta_n < \tan \theta_n$

(2) から $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{2^n}}{10 - \frac{9}{2^n} + \frac{2}{2^{2n}}} = 0$

したがって、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot 2^n \sin \theta_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot 2^n \cos \theta_n \tan \theta_n \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot \cos \theta_n \cdot \frac{2^{2n}}{10 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 2} \right)$$

14

解答 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{\pi}$

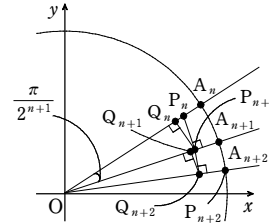
解説

(1) $\angle A_n O A_{n+1} = \frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

よって $P_{n+1} Q_n = OP_{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$
 $= OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \dots \dots \textcircled{1}$

また $OP_{n+1} = OP_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

ゆえに $\frac{P_{n+2} Q_{n+1}}{P_{n+1} Q_n} = \frac{OP_{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$
 $= \frac{OP_n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$
 $= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$



(2) (1) から $P_{n+2} Q_{n+1} = \frac{1}{2} P_{n+1} Q_n$

ここで、右の図から $P_2 Q_1 = \frac{1}{2}$

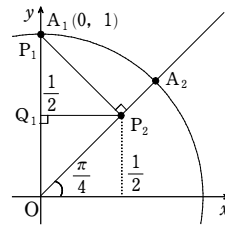
よって、数列 $\{P_{n+1} Q_n\}$ は初項 $P_2 Q_1 = \frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の

等比数列であるから $P_{n+1} Q_n = \frac{1}{2^n}$

ここで、① から $OP_n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = P_{n+1} Q_n$

ゆえに $OP_n = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}}$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} OP_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi}$



15

解答 $(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

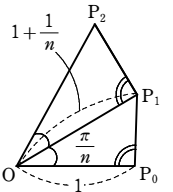
解説

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} \cdot \cos \theta_n \cdot \frac{1}{10 - \frac{9}{2^n} + \frac{2}{2^{2n}}} \right) = \frac{1}{10}$$

$\triangle OP_0 P_1$ において余弦定理により

$$a_1^2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}$$

よって $a_1 = \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n}}$
 $= \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)}$



条件(A)から $\triangle OP_{k-1} P_k \sim \triangle OP_0 P_1$ ($2 \leq k \leq n$)

ゆえに、 $\triangle OP_{k-1} P_k$ において $OP_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right) OP_{k-1}$ ($1 \leq k \leq n$)

よって $OP_{k-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} OP_0$

ゆえに $a_k = \frac{OP_{k-1}}{OP_0} \times a_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} a_1$

数列 $\{a_k\}$ は初項 a_1 、公比 $1 + \frac{1}{n}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \sqrt{1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{n} = h$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $h \rightarrow 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h\pi}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h\pi}{h\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{1 + \cos h\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

16

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$g(x) = f(x) - x$ とおくと、 $g(x)$ は連続で $f(x) = g(x) + x$

(1) 不等式により $|g(x) - g(a) + x - a| \leq \frac{2}{3}|x - a|$

よって $-\frac{2}{3}|x - a| \leq g(x) - g(a) + x - a \leq \frac{2}{3}|x - a|$

ここで $h(x) = -\frac{2}{3}|x - a| - x + a + g(a)$

$$\leq g(x) \leq \frac{2}{3}|x - a| - x + a + g(a) = k(x)$$

のように $h(x)$, $k(x)$ を定める。

$x \rightarrow -\infty$ のとき $-x = t$ とおくと $t \rightarrow \infty$

このとき $-\frac{2}{3}|x - a| - x = -\frac{2}{3}|t + a| + t = t \left(-\frac{2}{3} \left| 1 + \frac{a}{t} \right| + 1 \right) \rightarrow \infty$

章末問題C

よって, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$ であるから $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$

また, $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{2}{3}|x-a| - x = x\left(\frac{2}{3}\left|1 - \frac{a}{x}\right| - 1\right) \rightarrow -\infty$

よって, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

すなわち $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

ゆえに, 中間値の定理により $g(c) = 0$ すなわち $f(c) = c$ となる実数 c が存在し, 曲線 $y = f(x)$ は直線 $y = x$ と必ず交わる。

(2) x_1, x_2 を任意の実数とし, $x_1 > x_2$ とする。

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= f(x_1) - x_1 - \{f(x_2) - x_2\} \\ &= f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2}{3}|x_1 - x_2|$ が成り立つならば

$$f(x_1) - f(x_2) \leq \frac{2}{3}(x_1 - x_2)$$

両辺から $x_1 - x_2$ を引いて

$$f(x_1) - f(x_2) - (x_1 - x_2) \leq -\frac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

すなわち $g(x_1) - g(x_2) \leq -\frac{1}{3}(x_1 - x_2)$

$x_1 > x_2$ より $-\frac{1}{3}(x_1 - x_2) < 0$ であるから

$$g(x_1) - g(x_2) < 0 \quad \text{すなわち} \quad g(x_1) < g(x_2)$$

$x_2 < x_1 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1)$ であるから, $g(x)$ は単調に減少し, (1) の交点はただ1つしかない。