1

解答　(1)　1　　(2)　$\dfrac{1}{10}$　　(3)　$\dfrac{1}{49}$　　(4)　$-\dfrac{1}{216}$　　(5)　7　　(6)　16　　(7)　$\dfrac{1}{243}$

解説

(1)　$(-3)^0=1$

(2)　$10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

(3)　$7^{-2}=\dfrac{1}{7^2}=\dfrac{1}{49}$

(4)　$(-6)^{-3}=\dfrac{1}{(-6)^3}=-\dfrac{1}{216}$

(5)　$49^{\frac{1}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}=7^{2\times\frac{1}{2}}=7$

(6)　$8^{\frac{4}{3}}=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^{3\times\frac{4}{3}}=2^4=16$

(7)　$81^{-\frac{5}{4}}=(3^4)^{-\frac{5}{4}}=3^{4\times\left(-\frac{5}{4}\right)}=3^{-5}=\dfrac{1}{243}$

2

解答　(1)　5　　(2)　0.1　　(3)　25　　(4)　3　　(5)　2

解説

(1)　$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(2)　$\sqrt[5]{0.00001}=\sqrt[5]{0.1^5}=0.1$

(3)　$(\sqrt[4]{5})^8=\sqrt[4]{5^8}=\sqrt[4]{(5^2)^4}=5^2=25$

(4)　$\dfrac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}=\sqrt[4]{\dfrac{567}{7}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(5)　$\sqrt{\sqrt[4]{256}}=\sqrt[2\times4]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$

3

解答　(1)　$2\sqrt[3]{6}$　　(2)　2　　(3)　$\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$　　(4)　$4\sqrt[3]{2}$　　(5)　$-2-6\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}$

(6)　0

解説

(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{2\times4\times6}=\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{2^3\cdot6}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{6}$

(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{32}}\times\sqrt{8}\div\sqrt[3]{16}=\left\{(32)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{2}}\div16^{\frac{1}{3}}=(2^5)^{\frac{1}{6}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^4)^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{5}{6}}\times2^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}=2^1=2$

(3)　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

別解　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[4]{2}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

(4)　$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\cdot3^3}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^3\cdot2}$

$=3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}$

$=(3-1+2)\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$

(5)　$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3=(\sqrt[3]{2})^3-3(\sqrt[3]{2})^2\times\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4})^2-(\sqrt[3]{4})^3$

$=2-3\sqrt[3]{2^2\times4}+3\sqrt[3]{2\times4^2}-4$

$=-2-3\sqrt[3]{2^3\times2}+3\sqrt[3]{2^3\times4}$

$=-2-3(\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2})+3(\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{4})$

$=-2-6\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}$

(6)　$\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$

$=-\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\sqrt[3]{3^3\cdot3}-\sqrt[3]{3}$

$=-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}$

$=(-2+3-1)\sqrt[3]{3}=0$

4

解答　(1)　①　52　　②　$3\sqrt{6}$　　(2)　①　$x+x^{-1}=18$　　②　$x^3+x^{-3}=5778$

解説

(1)　①　$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=4^3-3\cdot4=64-12=52$

②　$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=a+a^{-1}+2=52+2=54$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$ であるから　　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

(2)　①　$x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=3^3-3\cdot3=18$

②　$x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3xx^{-1}(x+x^{-1})$

$=(x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})$

$=18^3-3\cdot18=5778$

5

解答　(1)　〔図〕　　(2)　〔図〕　(1)のグラフと x 軸に関して対称

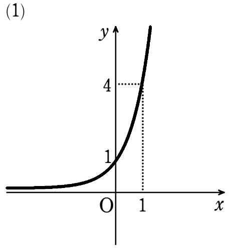
(3)　〔図〕　(1)のグラフと y 軸に関して対称

(4)　〔図〕　(1)のグラフと原点に関して対称

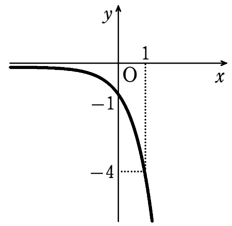
(5)　〔図〕　(1)のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの

（または x 軸をもとにして y 軸方向に 4 倍に拡大したもの）

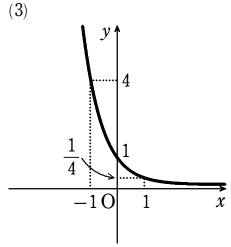
(1)



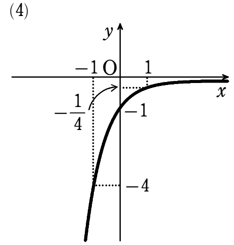
(2)



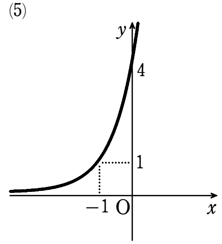
(3)



(4)



(5)

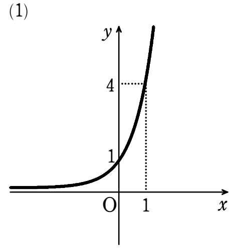


解説

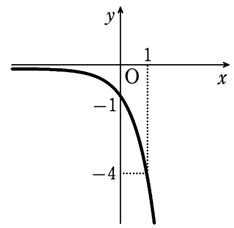
(1)　〔図〕

(2)　〔図〕　このグラフは，(1)のグラフと x 軸に関して対称である。

(1)



(2)

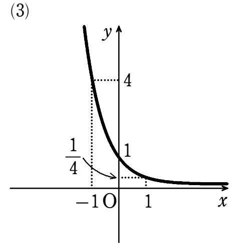


(3)　〔図〕　このグラフは，(1)のグラフと y 軸に関して対称である。

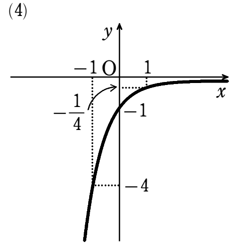
参考　$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$

(4)　〔図〕　このグラフは，(1)のグラフと原点に関して対称である。

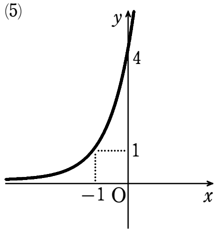
(3)



(4)



(5)　$y=4\cdot4^x=4^{x+1}$　[図]
このグラフは，(1) のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。
別解　(1) のグラフを，x 軸をもとにして y 軸方向に 4 倍に拡大したものである。

(5)


6

解答　(1)　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$　　(2)　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$　　(3)　$\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

解説

(1)　$2=2^1$，$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

底 2 は 1 より大きく，$\dfrac{2}{3}<1<\dfrac{6}{5}$ であるから　$2^{\frac{2}{3}}<2^1<2^{\frac{6}{5}}$

すなわち　$\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$ であり，$8<9<10$ であるから

$$8^{10}<9^{10}<10^{10}$$

すなわち　$2^{30}<3^{20}<10^{10}$

(3)　$x=\sqrt[3]{5}$，$y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt[4]{8}$ とすると

$$x^{12}=(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$$
$$y^{12}=(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$$
$$z^{12}=(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$$

よって　$z^{12}<x^{12}<y^{12}$

$x>0$，$y>0$，$z>0$ であるから　$z<x<y$

すなわち　$\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

7

解答　(1)　$x=2$　(2)　$x=-3$　(3)　$x=4$　(4)　$x\geqq2$　(5)　$x<3$

(6)　$x>-3$　(7)　$x=-\dfrac{4}{3}$　(8)　$x=-3$　(9)　$x\geqq\dfrac{1}{2}$　(10)　$x<-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$7^x=49$ から　$7^x=7^2$　　よって　$x=2$

(2)　$4^x=\dfrac{1}{64}$ から　$4^x=4^{-3}$　　よって　$x=-3$

(3)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{81}$ から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$　　よって　$x=4$

(4)　$5^x\geqq25$ から　$5^x\geqq5^2$

底 5 は 1 より大きいから　$x\geqq2$

(5)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\dfrac{1}{8}$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<3$

(6)　$1000=10^3=\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3}=0.1^{-3}$

よって，$0.1^x<1000$ から　$0.1^x<0.1^{-3}$

底 0.1 は 1 より小さいから　$x>-3$

別解　$0.1^x<1000$ から　$10^{-x}<10^3$

底 10 は 1 より大きいから　$-x<3$　　よって　$x>-3$

(7)　$5^{3x+1}=\dfrac{1}{125}$ から　$5^{3x+1}=5^{-3}$

よって　$3x+1=-3$　　ゆえに　$x=-\dfrac{4}{3}$

(8)　$4^{2x-1}=2^{3x-5}$ から　$2^{2(2x-1)}=2^{3x-5}$

よって　$2(2x-1)=3x-5$　　これを解いて　$x=-3$

(9)　$2^{x-2}\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ から　$2^{x-2}\geqq2^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)}$　　すなわち　$2^{x-2}\geqq2^{-\frac{3}{2}}$

底 2 は 1 より大きいから　$x-2\geqq-\dfrac{3}{2}$　　よって　$x\geqq\dfrac{1}{2}$

(10)　$\left(\dfrac{1}{27}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$ から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$3x<x-1$　　よって　$x<-\dfrac{1}{2}$

8

解答　(1)　$x=0$，2　(2)　$x=4$　(3)　$x<1$　(4)　$x\leqq-1$，$0\leqq x$

解説

(1)　方程式を変形すると　$(3^x)^2-10\cdot3^x+9=0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-10t+9=0$

よって　$(t-1)(t-9)=0$　　$t>0$ であるから　$t=1$，9

ゆえに　$3^x=1$，9　すなわち　$3^x=3^0$，3^2

したがって　$x=0$，2

(2)　方程式を変形すると　$(2^x)^2-12\cdot2^x-64=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　$t^2-12t-64=0$

よって　$(t+4)(t-16)=0$　　$t>0$ であるから　$t=16$

ゆえに　$2^x=16$　すなわち　$2^x=2^4$

したがって　$x=4$

(3)　不等式を変形すると　$(4^x)^2-3\cdot4^x-4<0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t-4<0$

よって　$(t+1)(t-4)<0$

$t+1>0$ であるから　$t-4<0$　すなわち　$t<4$

ゆえに　$4^x<4$　すなわち　$4^x<4^1$

底 4 は 1 より大きいから　$x<1$

(4)　不等式の両辺に 4^x (>0) を掛けて　$1\geqq3\cdot2^x-2\cdot4^x$

ゆえに　$2\cdot(2^x)^2-3\cdot2^x+1\geqq0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$2t^2-3t+1\geqq0$

よって　$(t-1)(2t-1)\geqq0$　　これを解くと　$t\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq t$

$t>0$ であるから　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq t$

ゆえに　$0<2^x\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq2^x$　すなわち　$0<2^x\leqq2^{-1}$，$2^0\leqq2^x$

底 2 は 1 より大きいから　$x\leqq-1$，$0\leqq x$

9

解答　$x=2$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 -3

解説

$y=(2^x)^2-4\cdot2^x+1$　$(-1\leqq x\leqq2)$

$2^x=t$ とおく。

$-1\leqq x\leqq2$ から　$2^{-1}\leqq2^x\leqq2^2$

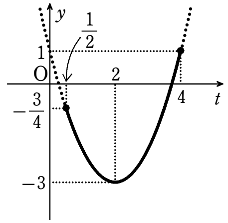
よって　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq4$　……①

また　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

① の範囲で，y は

$t=4$　すなわち　$x=2$ で最大値 1，

$t=2$　すなわち　$x=1$ で最小値 -3　をとる。



10

解答　(1)　$y=4t^2-34t+73$　　(2)　$x=-2$，2 のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$ であるから

$$y=4(t^2-2)-34t+81=4t^2-34t+73$$

(2)　(1) から　$y=4\left(t-\dfrac{17}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

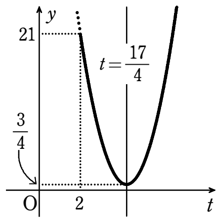
よって，t の値の範囲は　$t\geqq2$

したがって，関数 y は $t=\dfrac{17}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

$2^x+2^{-x}=\dfrac{17}{4}$ とすると　$4(2^x)^2-17\cdot2^x+4=0$

$$(4\cdot2^x-1)(2^x-4)=0$$

よって　$2^x=\dfrac{1}{4}$，4　　ゆえに　$x=-2$，2



$\boxed{1}$

解答

(1) 27　(2) $\dfrac{1}{16}$　(3) 0.008　(4) $\dfrac{16}{25}$　(5) 6　(6) 1　(7) $\dfrac{1}{3}$　(8) $\dfrac{5}{4}$

解説

(1) $9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

(2) $8^{-\frac{4}{3}}=(2^3)^{-\frac{4}{3}}=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$

(3) $0.04^{1.5}=(0.2^2)^{1.5}=0.2^3=0.008$

(4) $\left(\dfrac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-2}=\dfrac{16}{25}$

(5) $6^{\frac{1}{2}}\times36^{\frac{1}{4}}=6^{\frac{1}{2}}\times6^{2\cdot\frac{1}{4}}=6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=6^1=6$

(6) $2^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{5}{6}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=2^0=1$

(7) $\left(9^{\frac{2}{3}}\times3^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\times3^{-2\cdot\frac{3}{2}}$

$=3^2\times3^{-3}=3^{2-3}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

(8) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}$

$=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1}=\dfrac{5}{4}$

$\boxed{2}$

解答 (1) 5　(2) 3　(3) 100　(4) 0.1　(5) 6　(6) 2　(7) 2　(8) 2

解説

(1) $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(2) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(3) $\sqrt[3]{1000000}=\sqrt[3]{100^3}=100$

(4) $\sqrt[3]{0.001}=\sqrt[3]{(0.1)^3}=0.1$

(5) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{4\times54}=\sqrt[3]{2^2\times(2\cdot3^3)}=\sqrt[3]{2^3\times3^3}=\sqrt[3]{6^3}=6$

(6) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(7) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times2]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(8) $\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{(2^2)^3}=\sqrt[6]{2^{2\times3}}=\sqrt[6]{2^6}=2$

$\boxed{3}$

解答 (1) $3\sqrt{2}$　(2) -5　(3) $\sqrt[4]{2}$　(4) $2\sqrt[3]{2}$　(5) -3　(6) $4\sqrt[3]{2}$

解説

(1) (与式)$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(2) (与式)$=\sqrt[6]{125}\times(-\sqrt[3]{25})\div\sqrt[6]{5}$

$=-(5^3)^{\frac{1}{6}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}=-5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=-5$

参考　n が奇数のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

(3) (与式)$=\sqrt[4]{2\times2^4}+\sqrt[4]{2\times3^4}-\sqrt[4]{2\times(2^2)^4}=(2+3-4)\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2}$

(4) (与式)$=\sqrt[3]{3^3\times2}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3\times2}=3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

(5) $\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3\times2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}\right)^3=\left(-\sqrt[3]{2}\right)^3=-2$

$\left\{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}=\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}$

よって　(与式)$=(-2)\times\dfrac{3}{2}=-3$

(6) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times2}=3\sqrt[3]{2}$，　$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$，

$\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=-\sqrt[3]{\dfrac{2}{2^3}}=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

よって　(与式)$=3\sqrt[3]{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}=4\sqrt[3]{2}$

$\boxed{4}$

解答 (1) 4　(2) $2\sqrt{3}$　(3) 52　(4) $30\sqrt{3}$

解説

(1) $(3^a+3^{-a})^2=9^a+2\cdot3^a\cdot3^{-a}+9^{-a}=14+2\cdot1=16$

$3^a+3^{-a}>0$ であるから　$3^a+3^{-a}=4$

(2) $(3^a-3^{-a})^2=9^a-2\cdot3^a\cdot3^{-a}+9^{-a}=14-2\cdot1=12$

$a>0$ より $a>-a$ であり，底 3 は 1 より大きいから　$3^a>3^{-a}$

ゆえに　$3^a-3^{-a}>0$　　よって　$3^a-3^{-a}=2\sqrt{3}$

(3) $27^a+27^{-a}=(3^a+3^{-a})(9^a-3^a\cdot3^{-a}+9^{-a})$

$=4\cdot(14-1)=52$

(4) $27^a-27^{-a}=(3^a-3^{-a})(9^a+3^a\cdot3^{-a}+9^{-a})$

$=2\sqrt{3}\,(14+1)=30\sqrt{3}$

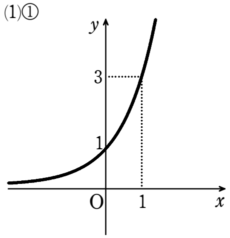
$\boxed{5}$

解答 (1) ①［図］　②［図］(1) のグラフと x 軸に関して対称

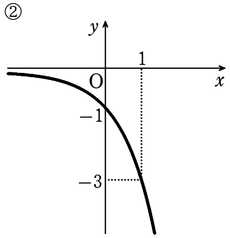
③［図］(1) のグラフと y 軸に関して対称

④［図］(1) のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したもの (または，x 軸をもとにして y 軸方向に 9 倍に拡大したもの)

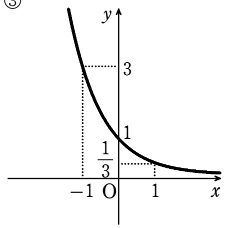
(1)①



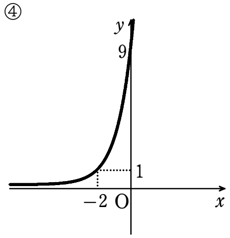
②



③



④

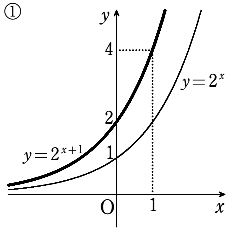


(2) ①　x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの［図］

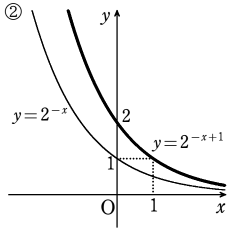
②　y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの［図］

③　y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの［図］

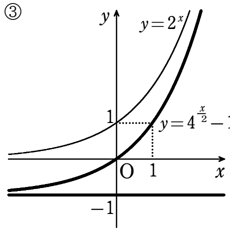
①



②



③



解説

(1)

①［図］

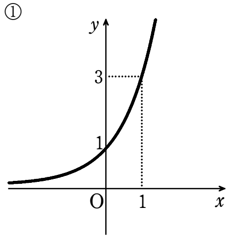
②［図］　このグラフは，(1) のグラフと x 軸に関して対称である。

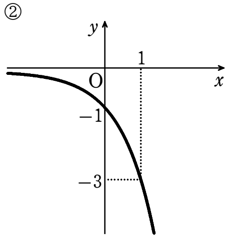
③［図］　このグラフは，(1) のグラフと y 軸に関して対称である。

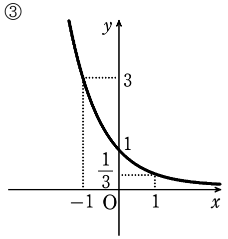
④　$y=9\cdot3^x=3^2\cdot3^x=3^{x+2}$［図］

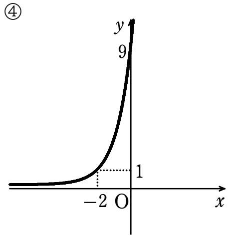
このグラフは，(1) のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

別解　(1) のグラフを，x 軸をもとにして y 軸方向に 9 倍に拡大したものである。

①


②


③


④


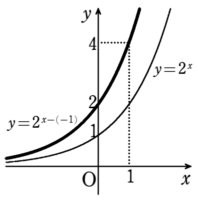
(2) ①　$y=2^{x+1}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。〔図〕

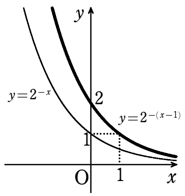
②　$2^{-x+1}=2^{-(x-1)}$

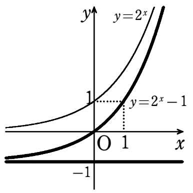
よって，$y=2^{-x+1}$ のグラフは $y=2^{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの，すなわち $y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。〔図〕

③　$4^{\frac{x}{2}}-1=(2^2)^{\frac{x}{2}}-1=2^x-1$

よって，$y=4^{\frac{x}{2}}-1$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。〔図〕







$\boxed{6}$

解答　(1)　$2^{-1}<2^0<2^{\frac{1}{2}}<2^3$　　(2)　$0.7^2<0.7^0<0.7^{-1}<0.7^{-3}$

(3)　$\sqrt[5]{8}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[8]{64}$

解説

(1)　2^3，2^{-1}，$2^{\frac{1}{2}}$，2^0

底 2 は 1 より大きく，$-1<0<\frac{1}{2}<3$ であるから

$$2^{-1}<2^0<2^{\frac{1}{2}}<2^3$$

(2)　0.7^2，0.7^{-3}，0.7^0，0.7^{-1}

底 0.7 は 1 より小さく，$-3<-1<0<2$ であるから

$$0.7^2<0.7^0<0.7^{-1}<0.7^{-3}$$

(3)　$\sqrt[5]{8}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$，　$\sqrt[6]{16}=(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$，　$\sqrt[8]{64}=(2^6)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{4}}$

底 2 は 1 より大きく，$\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ であるから

$$2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}\quad すなわち\quad \sqrt[5]{8}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[8]{64}$$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$x=3$　　(2)　$x=3$　　(3)　$x=\frac{1}{2}$　　(4)　$x<1$　　(5)　$x<-2$

(6)　$x\leqq\frac{5}{6}$

解説

(1)　$2^{3x-2}=128$ から　　$2^{3x-2}=2^7$

よって　　$3x-2=7$　　これを解いて　　$x=3$

(2)　$125^{x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$ から　　$5^{3(x-1)}=5^{-2(x-6)}$

よって　　$3(x-1)=-2(x-6)$　　これを解いて　　$x=3$

(3)　$3^{x-2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ から　　$3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$

よって　　$x-2=-\frac{3}{2}$　　これを解いて　　$x=\frac{1}{2}$

(4)　$243^x<3^{2x+3}$ から　　$3^{5x}<3^{2x+3}$

底 3 は 1 より大きいから　　$5x<2x+3$　　これを解いて　　$x<1$

(5)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{8}\right)^x$ から　　$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　　$5x+4<3x$　　これを解いて　　$x<-2$

(6)　$(0.2)^{2x-1}\geqq\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から　　$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}\geqq\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$　　よって　　$5^{-(2x-1)}\geqq5^{-\frac{2}{3}}$

底 5 は 1 より大きいから　　$-(2x-1)\geqq-\frac{2}{3}$　　これを解いて　　$x\leqq\frac{5}{6}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$x=\frac{1}{2}$　　(2)　$x=0$　　(3)　$x>1$　　(4)　$x\geqq-2$

解説

(1)　方程式を変形すると　　$(4^x)^2+4\cdot4^x-12=0$

$4^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　　$t^2+4t-12=0$

よって　　$(t+6)(t-2)=0$

$t>0$ であるから　　$t=2$　　すなわち　　$4^x=2$

ゆえに　　$2^{2x}=2^1$　　よって　　$2x=1$

したがって　　$x=\frac{1}{2}$

(2)　方程式を変形すると　　$(10^x)^2+10^x-2=0$

$10^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　　$t^2+t-2=0$

よって　　$(t+2)(t-1)=0$

$t>0$ であるから　　$t=1$　　すなわち　　$10^x=10^0$

したがって　　$x=0$

(3)　不等式を変形すると　　$(3^x)^2+2\cdot3^x-15>0$

$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　　$t^2+2t-15>0$

よって　　$(t+5)(t-3)>0$

$t+5>0$ であるから　　$t-3>0$　　ゆえに　　$t>3$

すなわち　　$3^x>3^1$　　底 3 は 1 より大きいから　　$x>1$

(4)　$\frac{1}{4^x}=2^{-2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

よって，不等式を変形すると　　$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-4\leqq0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　　$t^2-3t-4\leqq0$

よって　　$(t+1)(t-4)\leqq0$

$t+1>0$ であるから　　$t-4\leqq0$　　ゆえに　　$t\leqq4$

すなわち　　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq4$　　よって　　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　　$x\geqq-2$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$x=1$ で最小値 -3，最大値はない

(2)　$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

解説

(1)　　$y=(2^x)^2-4\cdot2^x+1$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，関数は

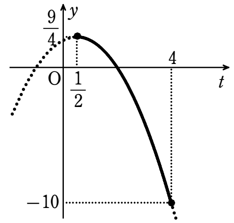
$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

$t>0$ であるから，y は $t=2$ で最小値 -3 をとる。

$t=2$ のとき　　$2^x=2$　　ゆえに　　$x=1$

よって，y は $x=1$ で最小値 -3 をとる。また，最大値はない。

(2)　　$y=-(2^x)^2+2^x+2$ $(-1\leqq x\leqq2)$



$2^x=t$ とおく。

$-1\leqq x\leqq2$ から　　$2^{-1}\leqq2^x\leqq2^2$

よって　　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq4$　……①

また　　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

① の範囲で y は

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$t=4$ で最小値 -10

をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　　ゆえに　　$x=-1$

$t=4$ のとき　$2^x=4$　　ゆえに　　$x=2$

よって，y は

$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

をとる。

$\boxed{10}$

解答　-2

解説

$2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係により

$t\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$（等号成立は $x=0$ のとき）　すなわち　$t\geqq 2$　……①

ここで　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$，$-2^{3+x}-2^{3-x}=-8(2^x+2^{-x})=-8t$

であるから

$y=(t^2-2)-8t+16$

$\quad=t^2-8t+14=(t-4)^2-2$

① から，y は $t=4$ で最小値 -2 をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\frac{16}{81}$　(2)　0.027　(3)　2　(4)　$\sqrt[4]{2}$　(5)　$\sqrt{2}$　(6)　$3\sqrt[3]{3}$

解説

(1)　$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(2)　$0.09^{1.5}=0.09^{\frac{3}{2}}=(0.3^2)^{\frac{3}{2}}=0.3^{2\times\frac{3}{2}}=0.3^3=0.027$

別解　$0.09^{1.5}=\left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}=0.027$

(3)　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解　$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4)　$\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{2}{4}}\times 2^{\frac{5}{12}}\div 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(5)　$\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$

$\quad=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^0=\sqrt{2}$

(6)　$\sqrt[3]{24}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}+\frac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\frac{3}{3^3}}$

$\quad=2\sqrt[3]{3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$\quad=\left(2+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　(ア)　a^2-b　(イ)　$a-b^{-1}$　(2)　36

解説

(1)　(ア)　$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$

$\quad=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b})\{(\sqrt[3]{a^2})^2+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\}$

$\quad=(\sqrt[3]{a^2})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a^2-b$

(イ)　$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)$

$\quad=a-b^{-1}$

(2)　$2^{3x}-2^{-3x}=(2^x-2^{-x})^3+3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x-2^{-x})=3^3+3\cdot 3=36$

別解　$(2^x-2^{-x})^2=3^2$ から　$2^{2x}+2^{-2x}=11$

よって　$2^{3x}-2^{-3x}=(2^x-2^{-x})(2^{2x}+1+2^{-2x})=3(11+1)=36$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=\frac{8}{7}$　(2)　$x=0,\ 1$　(3)　$x=3,\ y=4$

解説

(1)　$16^{2-x}=8^x$ から　$2^{4(2-x)}=2^{3x}$

ゆえに　$4(2-x)=3x$　よって　$x=\frac{8}{7}$

(2)　$3^x=X$ とおくと　$X>0$　方程式は　$X^3-4X^2+3X=0$

よって　$X(X-1)(X-3)=0$

$X>0$ であるから　$X=1,\ 3$

$X=1$ から　$3^x=3^0$　$X=3$ から　$3^x=3^1$

したがって　$x=0,\ 1$

(3)　$2^x=X$，$3^y=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

連立方程式は　$\begin{cases}\frac{Y}{3}-X=19 & \cdots\cdots ① \\ X^2+2X-Y=-1 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$Y=3X+57$　……③

③ を ② に代入して整理すると　$X^2-X-56=0$

ゆえに　$(X+7)(X-8)=0$　よって　$X=-7,\ 8$

$X>0$ であるから　$X=8$　このとき，③ から　$Y=81$

$X=8$ から　$2^x=8$　$Y=81$ から　$3^y=81$

したがって　$x=3,\ y=4$

$\boxed{4}$

解答　$-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$

解説

左辺を変形すると　$(2^x)^2+4a\cdot 2^x+3a+1=0$

ここで，$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり　$t^2+4at+3a+1=0$

これが異なる２つの正の実数解をもてばよい。

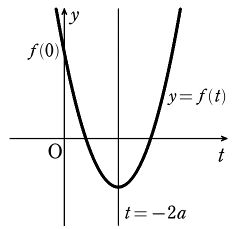
この方程式の判別式を D，$f(t)=t^2+4at+3a+1$ とすると，条件は

$D>0$　……①

$y=f(t)$ の軸について

$-2a>0$　……②

$f(0)>0$　……③



① から　$\frac{D}{4}=(2a)^2-(3a+1)=4a^2-3a-1$

$\quad=(4a+1)(a-1)>0$

よって　$a<-\frac{1}{4}$，$1<a$

② から　$a<0$

③ から　$3a+1>0$　よって　$-\frac{1}{3}<a$

以上から，求める a の範囲は　$-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$2^{\sqrt{3}}<4<\sqrt[3]{3^4}<3^{\sqrt{2}}$　(2)　$9^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{4}{7}}<10^{\frac{1}{3}}$

解説

(1)　$\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$ である。

4，$3^{\frac{4}{3}}$ をそれぞれ３乗すると　$4^3=64$，$\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^3=3^4=81$

ゆえに　$4^3<\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^3$　よって　$4<3^{\frac{4}{3}}$　……①

また，$\sqrt{3}<2$ から　$2^{\sqrt{3}}<2^2$　すなわち　$2^{\sqrt{3}}<4$　……②

更に，$\frac{4}{3}<\sqrt{2}$ から　$3^{\frac{4}{3}}<3^{\sqrt{2}}$　……③

①，②，③ から　　$2^{\sqrt{3}}<4<\sqrt[3]{3^4}<3^{\sqrt{2}}$

(2)　$9^{\frac{1}{5}}=(3^2)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{2}{5}}$ であり，底 3 は 1 より大きいから，$\frac{2}{5}<\frac{4}{7}$ より

$$3^{\frac{2}{5}}<3^{\frac{4}{7}}\quad すなわち\quad 9^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{4}{7}}\quad \cdots\cdots ①$$

次に，$3^{\frac{4}{7}}$，$10^{\frac{1}{3}}$ をそれぞれ 7 乗すると

$$\left(3^{\frac{4}{7}}\right)^7=3^4=81<10^2,\quad \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^7=10^{\frac{7}{3}}=10^2\cdot10^{\frac{1}{3}}>10^2$$

ゆえに　$\left(3^{\frac{4}{7}}\right)^7<\left(10^{\frac{1}{3}}\right)^7$　　よって　$3^{\frac{4}{7}}<10^{\frac{1}{3}}$　……②

したがって，①，② から　$9^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{4}{7}}<10^{\frac{1}{3}}$

別解　$1<a\leqq b$ のとき $0<p<q$ なら $a^p<b^q$ であることを利用する。

$3^{\frac{4}{7}}=(3^2)^{\frac{2}{7}}=9^{\frac{2}{7}}$ であり，$1<9<10$，$\frac{1}{5}<\frac{2}{7}<\frac{1}{3}$ から　$9^{\frac{1}{5}}<9^{\frac{2}{7}}<10^{\frac{1}{3}}$

よって　$9^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{4}{7}}<10^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{1}$

解答　（ア）3　（イ）1　（ウ）1　（エ）0　（オ）1

解説

$(2^{x-1}+2^{-x})^2=2^{2(x-1)}+2\cdot2^{x-1}\cdot2^{-x}+2^{-2x}=4^{x-1}+4^{-x}+1$

$(2^{x-1}+2^{-x})^3=2^{3(x-1)}+3\cdot2^{x-1}\cdot2^{-x}(2^{x-1}+2^{-x})+2^{-3x}$

$$=8^{x-1}+8^{-x}+\frac{3}{2}(2^{x-1}+2^{-x})$$

よって　$4^{x-1}+4^{-x}=(2^{x-1}+2^{-x})^2-1=t^2-1$

$$8^{x-1}+8^{-x}=(2^{x-1}+2^{-x})^3-\frac{3}{2}(2^{x-1}+2^{-x})=t^3-\frac{3}{2}t$$

ゆえに　$h(x)=2\left(t^3-\frac{3}{2}t\right)-3(t^2-1)+t=2t^3-3t^2-2t+3$

$$=t^2(2t-3)-(2t-3)=(2t-3)(t^2-1)=(2t-3)(t+1)(t-1)$$

方程式 $h(x)=0$ は t についての 3 次方程式 $(2t-{}^{ア}3)(t+{}^{イ}1)(t-{}^{ウ}1)=0$ となる。

これを解くと　$t=\frac{3}{2}$，±1

ここで，$2^{x-1}>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$2^{x-1}+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^{x-1}\cdot2^{-x}}=2\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$$

よって　$t\geqq\sqrt{2}$　　これを満たす t の値は　$t=\frac{3}{2}$

$2^{x-1}+2^{-x}=\frac{3}{2}$ の両辺に 2^{x+1} を掛けて整理すると

$$(2^x)^2-3\cdot2^x+2=0\qquad すなわち\qquad (2^x-1)(2^x-2)=0$$

よって　$2^x=1$，2　　ゆえに　$x=0$，1

したがって，$h(x)=0$ の解 x の値は小さい順に $x={}^{エ}0$，$x={}^{オ}1$ となる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a\leqq\frac{1}{9}$　(2)　$-\frac{1}{6}\leqq a\leqq4$

解説

$3^x=t$ とおく。このとき，$x\geqq-1$ から　$t\geqq\frac{1}{3}$

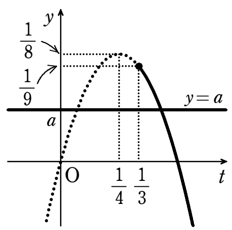
(1)　$2\cdot3^x+a\cdot3^{-x}\leqq1$ から　$2t+\frac{a}{t}\leqq1$

この両辺に $t\,(>0)$ を掛けると　$2t^2+a\leqq t$　すなわち　$a\leqq-2t^2+t$　……①

よって，連立不等式が解をもつための条件は，① を満たす t の値が $t\geqq\frac{1}{3}$ の範囲に存在することである。

$f(t)=-2t^2+t$ とすると　$f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$

$y=f(t)$ のグラフは右の図のような放物線になる。

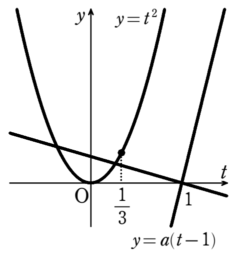


この図から，① を満たす t の値が $t\geqq\frac{1}{3}$ の範囲に存在するような実数 a の範囲は　$a\leqq\frac{1}{9}$

(2)　$3^x+a\cdot3^{-x}\geqq a$ から　$t+\frac{a}{t}\geqq a$

この両辺に $t\,(>0)$ を掛けると

$$t^2+a\geqq at\quad すなわち\quad t^2\geqq a(t-1)\quad \cdots\cdots ②$$



$t\geqq\frac{1}{3}$ を満たすすべての実数 t に対し，不等式 ② が成り立つのは，放物線 $y=t^2$ と直線 $y=a(t-1)$ の位置関係を考えると，次の [1] または [2] のいずれかの場合である。

[1]　② がすべての実数 t に対して成り立つ。

[2]　$a<0$ かつ $t=\frac{1}{3}$ で ② が成り立つ。

[1] について　② から　$t^2-at+a\geqq0$

2 次方程式 $t^2-at+a=0$ の判別式を D とすると，② がすべての実数 t に対して成り立つための条件は　$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot a=a(a-4)\leqq0$

すなわち　$a(a-4)\leqq0$

これを解くと　$0\leqq a\leqq4$　……③

[2] について

$t=\frac{1}{3}$ で ② が成り立つから　$\left(\frac{1}{3}\right)^2\geqq a\left(\frac{1}{3}-1\right)$

これを解くと　$a\geqq-\frac{1}{6}$

$a<0$ との共通範囲をとって　$-\frac{1}{6}\leqq a<0$　……④

求める a の値の範囲は，③ または ④ であるから　$-\frac{1}{6}\leqq a\leqq4$

$\boxed{3}$

解答　最小なものは 1，最大なものは 5

解説

$(n^2-3n+3)^{n^2-8n+15}=1$　……① とする。

$n^2-3n+3=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であるから，① が成り立つのは，

$$n^2-3n+3=1\quad または\quad n^2-8n+15=0$$

のときである。

$n^2-3n+3=1$ から　$(n-1)(n-2)=0$　　よって　$n=1$，2

$n^2-8n+15=0$ から　$(n-3)(n-5)=0$　　よって　$n=3$，5

したがって，① を満たす自然数 n は　1，2，3，5

このうち，最小なものは 1，最大なものは 5 である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　3　(2)　4　(3)　1　(4)　0　(5)　-2　(6)　$-\dfrac{2}{3}$　(7)　$-\dfrac{3}{2}$

(8)　-6

解説

(1)　$\log_4 64=\log_4 4^3=3$

(2)　$\log_3 81=\log_3 3^4=4$

(3)　$\log_5 5=1$

(4)　$\log_7 1=0$

(5)　$\log_3 \dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

(6)　$\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}=\log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{5}} (5^{-1})^{-\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{2}{3}$

(7)　$\log_{0.5}\sqrt{8}=\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}(2^{-1})^{-\frac{3}{2}}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}$

(8)　$\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}=\log_{\sqrt{3}}3^{-3}=\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{-6}=-6$

$\boxed{2}$

解答　(1)　2　(2)　1　(3)　4　(4)　1　(5)　$\dfrac{3}{5}$

解説

(1)　$\log_{10}25+\log_{10}4=\log_{10}(25\times 4)=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2$

(2)　$\log_6 42-\log_6 7=\log_6\dfrac{42}{7}=\log_6 6=1$

(3)　(与式)$=\log_3 54+\log_3 6-\log_3 2^2=\log_3\dfrac{54\times 6}{2^2}$

$=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

別解　(与式)$=\log_3(2\times 3^3)+\log_3(2\times 3)-2\log_3 2$

$=(\log_3 2+3\log_3 3)+(\log_3 2+\log_3 3)-2\log_3 2=4\log_3 3=4$

(4)　(与式)$=\log_{10}\dfrac{75}{13}-\log_{10}\left(\dfrac{5}{9}\right)^2+\log_{10}\dfrac{130}{243}$

$=\log_{10}\dfrac{\frac{75}{13}\times\frac{130}{243}}{\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\log_{10}\left(\dfrac{75}{13}\times\dfrac{130}{243}\times\dfrac{9^2}{5^2}\right)=\log_{10}10=1$

別解　(与式)$=\log_{10}\dfrac{3\times 5^2}{13}-2\log_{10}\dfrac{5}{3^2}+\log_{10}\dfrac{2\times 5\times 13}{3^5}$

$=(\log_{10}3+2\log_{10}5-\log_{10}13)-2(\log_{10}5-2\log_{10}3)$

$+(\log_{10}2+\log_{10}5+\log_{10}13-5\log_{10}3)$

$=\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}(2\times 5)=\log_{10}10=1$

(5)　(与式)$=\log_2\sqrt[5]{72}-\log_2\sqrt[5]{9}=\log_2\dfrac{\sqrt[5]{72}}{\sqrt[5]{9}}$

$=\log_2\sqrt[5]{\dfrac{72}{9}}=\log_2\sqrt[5]{8}=\log_2 2^{\frac{3}{5}}=\dfrac{3}{5}$

別解　(与式)$=\dfrac{1}{5}\log_2(2^3\times 3^2)-\dfrac{2}{5}\log_2 3$

$=\dfrac{1}{5}(3\log_2 2+2\log_2 3)-\dfrac{2}{5}\log_2 3=\dfrac{3}{5}\log_2 2=\dfrac{3}{5}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　3　(2)　$\dfrac{14}{3}$　(3)　$\dfrac{3}{2}$　(4)　2

解説

(1)　与式$=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 7}=\log_2 8=3$

(2)　与式$=\left(\log_2 9+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$=\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{3}\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{2}{2\log_2 3}\right)$

$=\dfrac{7}{3}\log_2 3\cdot\dfrac{2}{\log_2 3}=\dfrac{14}{3}$

(3)　与式$=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\dfrac{\log_2 25}{\log_2 9}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}$

$=\dfrac{\log_2 3}{2}\cdot\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\dfrac{3}{\log_2 5}=\dfrac{3}{2}$

(4)　与式$=\log_2 10\cdot\dfrac{\log_2 10}{\log_2 5}-\left(\log_2 5+\dfrac{1}{\log_2 5}\right)$

$=(\log_2 2+\log_2 5)\cdot\dfrac{\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 5}-\log_2 5-\dfrac{1}{\log_2 5}$

$=(1+\log_2 5)\left(\dfrac{1}{\log_2 5}+1\right)-\log_2 5-\dfrac{1}{\log_2 5}$

$=\dfrac{1}{\log_2 5}+1+1+\log_2 5-\log_2 5-\dfrac{1}{\log_2 5}=2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$4a$　(2)　$1-a$　(3)　$b+c-1$　(4)　$\dfrac{3a+b}{3}$　(5)　$\dfrac{2a+c}{b}$

解説

(1)　$\log_{10}16=\log_{10}2^4=4\log_{10}2=4a$

(2)　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-a$

(3)　$\log_{10}2.1=\log_{10}\dfrac{21}{10}=\log_{10}\dfrac{3\times 7}{10}$

$=\log_{10}3+\log_{10}7-\log_{10}10=b+c-1$

(4)　$\log_{10}\sqrt[3]{24}=\dfrac{1}{3}\log_{10}24=\dfrac{1}{3}\log_{10}(2^3\times 3)$

$=\dfrac{1}{3}(3\log_{10}2+\log_{10}3)=\dfrac{3a+b}{3}$

(5)　$\log_3 28=\dfrac{\log_{10}28}{\log_{10}3}=\dfrac{\log_{10}(2^2\times 7)}{\log_{10}3}=\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}7}{\log_{10}3}=\dfrac{2a+c}{b}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　2　(2)　$\dfrac{1}{16}$　(3)　10000

解説

(1)　$10^{\log_{10}2}=M$ とおく。

左辺は正の数であるから，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}2\cdot\log_{10}10=\log_{10}M$

よって　$\log_{10}2=\log_{10}M$

ゆえに　$M=2$　すなわち　$10^{\log_{10}2}=2$

(2)　$3^{-2\log_3 4}=M$ とおく。

左辺は正の数であるから，両辺の 3 を底とする対数をとると

$-2\log_3 4\cdot\log_3 3=\log_3 M$

よって　$\log_3 4^{-2}=\log_3 M$

ゆえに　$M=\dfrac{1}{16}$　すなわち　$3^{-2\log_3 4}=\dfrac{1}{16}$

(3)　$16^{\log_2 10}=M$ とおく。

左辺は正の数であるから，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 10\cdot\log_2 16=\log_2 M$

よって　$4\log_2 10=\log_2 M$　ゆえに　$\log_2 10^4=\log_2 M$

よって　$M=10000$　すなわち　$16^{\log_2 10}=10000$

別解　対数の定義 $a^p=M \iff p=\log_a M$ から $a^{\log_a M}=M$ であることがわかる。

このことを用いると，次のように計算できる。

(1)　$10^{\log_{10}2}=2$

(2)　$3^{-2\log_3 4}=3^{\log_3(4^{-2})}=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$

(3)　$16^{\log_2 10}=(2^4)^{\log_2 10}=2^{4\log_2 10}=2^{\log_2 10^4}=10^4=10000$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

$2^x=3^y=12^z$ の各辺は正の数であるから，2 を底とする対数をとり

$x=y\log_2 3=z(2+\log_2 3)=k$

とおくと，$k\fallingdotseq 0$ で

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{k}+\dfrac{\log_2 3}{k}-\dfrac{2+\log_2 3}{k}=0$　ゆえに　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$

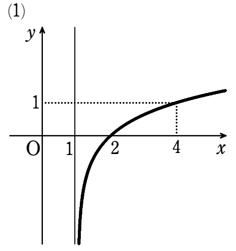
$\boxed{7}$

解答　(1)　［図］　$y=\log_3 x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの

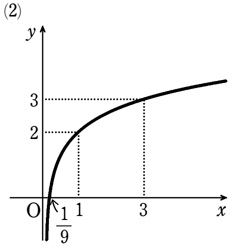
(2)　［図］　$y=\log_3 x$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの

(3)　［図］　$y=\log_3 x$ のグラフと x 軸に関して対称

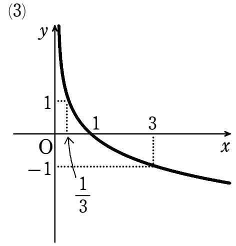
(1)



(2)



(3)



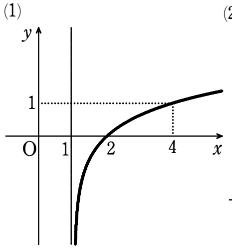
解説

(1) ［図］ このグラフは，$y=\log_3 x$ のグラフを x 軸方向に１だけ平行移動したものである。

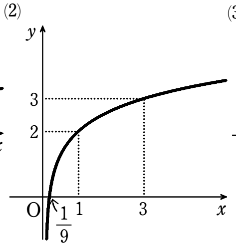
(2) $y=\log_3 9x=\log_3 9+\log_3 x=\log_3 x+2$ ［図］

このグラフは，$y=\log_3 x$ のグラフを y 軸方向に２だけ平行移動したものである。

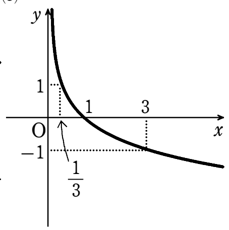
(1)



(2)



(3)



(3) $y=\log_3\dfrac{1}{x}=-\log_3 x$ ［図］

このグラフは，$y=\log_3 x$ のグラフと x 軸に関して対称である。

$\boxed{8}$

解答 (1) $\log_9 16<\log_3 8<2$　(2) $-2<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}5$

解説

(1) $\log_9 16=\dfrac{\log_3 16}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 4^2}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3 4}{2}=\log_3 4$

$2=\log_3 3^2=\log_3 9$

底３は１より大きく，$4<8<9$ であるから

$\log_3 4<\log_3 8<\log_3 9$　すなわち　$\log_9 16<\log_3 8<2$

(2) $\log_{\frac{1}{4}}5=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}5}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$

$-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$

底 $\dfrac{1}{2}$ は１より小さく，$\sqrt{5}<3<4$ であるから

$\log_{\frac{1}{2}}4<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$　すなわち　$-2<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}5$

$\boxed{1}$

解答 (1) 2　(2) -2　(3) 0　(4) $\dfrac{3}{2}$　(5) 2　(6) $\dfrac{1}{3}$　(7) -2　(8) $-\dfrac{1}{4}$

解説

(1) $\log_3 9=\log_3 3^2=2$

(2) $\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(3) $\log_{100}1=0$

(4) $\log_2\sqrt{8}=\log_2(2^3)^{\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

(5) $\log_{\sqrt{3}}3=\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$

(6) $\log_{64}4=\log_{64}(4^3)^{\frac{1}{3}}=\log_{64}64^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$

(7) $\log_{0.2}25=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}=-2$

(8) $\log_{25}\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\log_{25}5^{-\frac{1}{2}}=\log_{25}25^{-\frac{1}{4}}=-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{2}$

解答 (1) 2　(2) 2　(3) -4　(4) -2　(5) $\dfrac{1}{3}$　(6) 1

解説

(1) 与式$=\log_8(2\times 32)=\log_8 64=2$

(2) 与式$=\log_3\dfrac{45}{5}=\log_3 9=2$

(3) 与式$=\log_5\dfrac{12^3}{300\times 60^2}=\log_5\dfrac{1}{5^4}=\log_5 5^{-4}=-4$

別解　与式$=3\log_5(2^2\times 3)-\log_5(2^2\times 3\times 5^2)-2\log_5(2^2\times 3\times 5)$

$=3(2\log_5 2+\log_5 3)-(2\log_5 2+\log_5 3+2\log_5 5)$
$\qquad-2(2\log_5 2+\log_5 3+\log_5 5)$

$=-4\log_5 5=-4$

(4) 与式$=\log_{0.5}\dfrac{\frac{8}{13}\times\frac{26}{9}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\log_{0.5}4=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=-2$

別解　与式$=\log_{0.5}\dfrac{2^3}{13}-2\log_{0.5}\dfrac{2}{3}+\log_{0.5}\dfrac{2\times 13}{3^2}$

$=(3\log_{0.5}2-\log_{0.5}13)-2(\log_{0.5}2-\log_{0.5}3)$
$\qquad+(\log_{0.5}2+\log_{0.5}13-2\log_{0.5}3)$

$=2\log_{0.5}2=2\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=-2$

(5) 与式$=\log_2\sqrt[3]{18}-\log_2\sqrt[3]{9}=\log_2\dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{9}}=\log_2\sqrt[3]{2}=\dfrac{1}{3}$

別解　与式$=\dfrac{1}{3}\log_2(2\times 3^2)-\dfrac{2}{3}\log_2 3$

$=\dfrac{1}{3}(\log_2 2+2\log_2 3)-\dfrac{2}{3}\log_2 3$

$=\dfrac{1}{3}\log_2 2=\dfrac{1}{3}$

(6) 与式$=\log_5\sqrt{2}+\log_5\sqrt{\dfrac{25}{12}}+\log_5(\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$

$=\log_5\left(\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{25}{12}}\times\sqrt{6}\right)=\log_5 5=1$

別解　与式$=\dfrac{1}{2}\log_5 2+\dfrac{1}{2}\log_5\dfrac{5^2}{2^2\times 3}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\log_5(2\times 3)$

$=\dfrac{1}{2}\log_5 2+\dfrac{1}{2}(2\log_5 5-2\log_5 2-\log_5 3)+\dfrac{1}{2}(\log_5 2+\log_5 3)$

$=\log_5 5=1$

$\boxed{3}$

解答 (1) 18　(2) $\dfrac{35}{3}$　(3) -3

解説

(1) (与式)$=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 2}\cdot\log_3 2^6\cdot\dfrac{\log_3 5^{\frac{3}{2}}}{\log_3 5^2}\cdot\dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3}$

$=\dfrac{3}{\log_3 2}\cdot 6\log_3 2\cdot\dfrac{\frac{3}{2}\log_3 5}{2\log_3 5}\cdot\dfrac{4}{3}=18$

(2) (与式)$=\left(\log_2 9+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 16}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$=\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{3}\right)\left(\dfrac{4}{\log_2 3}+\dfrac{2}{2\log_2 3}\right)$

$=\dfrac{7}{3}\log_2 3\cdot\dfrac{5}{\log_2 3}=\dfrac{35}{3}$

(3) (与式)$=\left(\log_5 3+\dfrac{\log_5 9}{\log_5 25}\right)\left(\dfrac{1}{\log_5 9}-\dfrac{\log_5 25}{\log_5 3}\right)$

$=(\log_5 3+\log_5 3)\left(\dfrac{1}{2\log_5 3}-\dfrac{2}{\log_5 3}\right)$

$=2\log_5 3\left(-\dfrac{3}{2\log_5 3}\right)$

$=-3$

$\boxed{4}$

解答 (1) $p+q+r$　(2) $2p+3q+4r$　(3) $p-2q-2r$　(4) $p+\dfrac{q}{2}-\dfrac{r}{3}$

解説

(1) $\log_a xyz=\log_a x+\log_a y+\log_a z=p+q+r$

(2) $\log_a x^2y^3z^4=\log_a x^2+\log_a y^3+\log_a z^4$

$=2\log_a x+3\log_a y+4\log_a z$

$=2p+3q+4r$

(3) $\log_a\dfrac{x}{(yz)^2}=\log_a x-\log_a y^2z^2$

$=\log_a x-(\log_a y^2+\log_a z^2)$

$=\log_a x-(2\log_a y+2\log_a z)$

$=p-2q-2r$

(4) $\log_a \dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a x+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$

$=\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z$

$=p+\dfrac{q}{2}-\dfrac{r}{3}$

$\boxed{5}$

解答　(1) 7　(2) 30　(3) 5　(4) x^2　(5) $\dfrac{1}{x}$

解説

(1) $5^{\log_5 7}=7$

(2) $10^{1+\log_{10}3}=10^{\log_{10}10+\log_{10}3}=10^{\log_{10}30}=30$

$\left(10^{1+\log_{10}3}=10\cdot 10^{\log_{10}3}=10\cdot 3=30\right)$

(3) $36^{\log_6\sqrt{5}}=6^{2\log_6\sqrt{5}}=6^{\log_6 5}=5$

(4) $a^{2\log_a x}=a^{\log_a x^2}=x^2$

(5) $a^{-\log_a x}=a^{\log_a x^{-1}}=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

参考　与えられた式を y とおき，両辺の対数をとって解いてもよい。
例えば，以下は(3)の解法。

[(3)の別解]

$y=36^{\log_6\sqrt{5}}$ とおく。

6を底として両辺の対数をとると

$\log_6 y=\log_6\sqrt{5}\cdot\log_6 36$

よって　$\log_6 y=2\log_6\sqrt{5}$　ゆえに　$\log_6 y=\log_6 5$

したがって　$y=5$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

$3^x=4^y=6^z$ の各辺は正の数であるから，2を底とする対数をとり，その値を k とおく。すなわち　$\log_2 3^x=\log_2 4^y=\log_2 6^z=k$

よって　$x\log_2 3=2y=z(1+\log_2 3)=k$

すなわち　$x=\dfrac{k}{\log_2 3}$，$y=\dfrac{k}{2}$，$z=\dfrac{k}{1+\log_2 3}$

$x\neq 0$ より，$k\neq 0$ であるから

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{\log_2 3}{k}+\dfrac{1}{k}=\dfrac{\log_2 3+1}{k}=\dfrac{1}{z}$

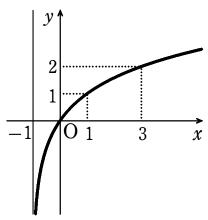
よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{z}$

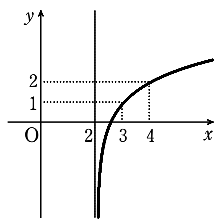
$\boxed{7}$

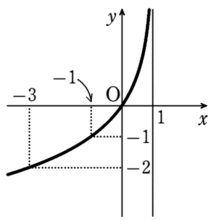
解答　(1) [図] $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの

(2) [図] $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの

(3) [図] $y=\log_2 x$ のグラフを，原点に関して対称移動したものを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの

(1)


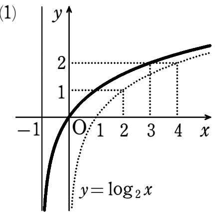
(2)


(3)


解説

(1) $\log_2(x+1)=\log_2\{x-(-1)\}$

よって，$y=\log_2(x+1)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。
グラフは右図(1)。

(1)


(2) $\log_2(2x-4)=\log_2 2(x-2)$

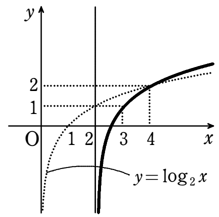
$=\log_2 2+\log_2(x-2)$

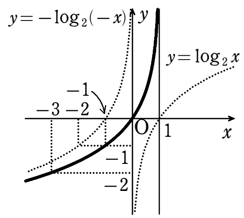
$=\log_2(x-2)+1$

よって，$y=\log_2(2x-4)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの。グラフは下図(2)。

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=\dfrac{\log_2(1-x)}{\log_2\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\log_2\{-(x-1)\}}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2\{-(x-1)\}$

よって，$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを，原点に関して対称移動したものを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもの。グラフは下図(3)。

(2)


(3)


$\boxed{8}$

解答　(1) $\log_2 0.5<1<\log_2 3$　(2) $\log_{0.3}2<0<\log_{0.3}0.5$

(3) $2\log_2 11<3\log_2 5<7$　(4) $-1<2\log_{0.1}3<\log_{0.1}\sqrt[3]{512}$

解説

(1) $1=\log_2 2$

真数の大小を調べると　$0.5<2<3$

底2は1より大きいから　$\log_2 0.5<\log_2 2<\log_2 3$

すなわち　$\log_2 0.5<1<\log_2 3$

(2) $0=\log_{0.3}1$

真数の大小を調べると　$0.5<1<2$

底0.3は1より小さいから　$\log_{0.3}2<\log_{0.3}1<\log_{0.3}0.5$

すなわち　$\log_{0.3}2<0<\log_{0.3}0.5$

(3) $2\log_2 11=\log_2 11^2=\log_2 121$

$3\log_2 5=\log_2 5^3=\log_2 125$

$7=\log_2 2^7=\log_2 128$

真数の大小を調べると　$121<125<128$

底2は1より大きいから　$\log_2 121<\log_2 125<\log_2 128$

すなわち　$2\log_2 11<3\log_2 5<7$

(4) $2\log_{0.1}3=\log_{0.1}3^2=\log_{0.1}9$

$\log_{0.1}\sqrt[3]{512}=\log_{0.1}\sqrt[3]{2^9}=\log_{0.1}8$

$-1=\log_{0.1}0.1^{-1}=\log_{0.1}10$

真数の大小を調べると　$8<9<10$

底0.1は1より小さいから　$\log_{0.1}10<\log_{0.1}9<\log_{0.1}8$

すなわち　$-1<2\log_{0.1}3<\log_{0.1}\sqrt[3]{512}$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{3}{8}$

解説

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって

$$与式=\log_{16}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}$$

$$=\log_{16}2\sqrt{2}=\frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 16}=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8}$$

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{7}{2}$

解説

$$2\log_3 441-9\log_3\sqrt{7}-\frac{1}{6}\log_3\frac{27}{343}=\log_3(3^2\cdot 7^2)^2+\log_3 7^{-\frac{9}{2}}+\log_3\left\{\left(\frac{3}{7}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{6}}$$

$$=\log_3(3^4\cdot 7^4)+\log_3 7^{-\frac{9}{2}}+\log_3\left(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\log_3\left(3^{4-\frac{1}{2}}\cdot 7^{4-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}}\right)=\log_3 3^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$$

$\boxed{3}$

解答　18

解説

$$\log_2 27\cdot\log_3 64\cdot\log_{25}\sqrt{125}\cdot\log_{27}81=\frac{\log_3 3^3}{\log_3 2}\cdot\log_3 2^6\cdot\frac{\log_3 5^{\frac{3}{2}}}{\log_3 5^2}\cdot\frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3}$$

$$=\frac{3}{\log_3 2}\cdot 6\log_3 2\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{4}{3}=18$$

$\boxed{4}$

解答　-2

解説

$$\log_3\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_3\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log_3\left(1-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\log_3\left(1-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+\cdots\cdots+\log_3\frac{8}{9}$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{8}{9}\right)=\log_3\frac{1}{9}=-2$$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{ab+3}{ab+1}$

解説

$$\log_{14}56=\frac{\log_2 56}{\log_2 14}=\frac{\log_2(2^3\times 7)}{\log_2(2\times 7)}=\frac{3\log_2 2+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 7}=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 7}$$

ここで　$\log_2 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 2}=\dfrac{b}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}}=\dfrac{b}{\dfrac{1}{a}}=ab$

よって　$\log_{14}56=\dfrac{3+ab}{1+ab}=\dfrac{ab+3}{ab+1}$

$\boxed{6}$

解答　2

解説

$$x=\log_5 50+\log_{25}400-3=\log_5 50+\frac{\log_5 400}{\log_5 25}-\log_5 125$$

$$=\log_5 50+\frac{2\log_5 20}{2}-\log_5 125=\log_5\frac{50\times 20}{125}=\log_5 8$$

よって　$\sqrt[3]{5^x}=\sqrt[3]{5^{\log_5 8}}=\sqrt[3]{8}=2$

$\boxed{7}$

解答　略

解説

$$\log_a x^{\log_a y}=\log_a y\cdot\log_a x$$

$$\log_a y^{\log_a x}=\log_a x\cdot\log_a y$$

よって　$\log_a x^{\log_a y}=\log_a y^{\log_a x}$

ゆえに　$x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$

$\boxed{8}$

解答　$\dfrac{1}{3}$

解説

$x^6=y^3=z^2$ の x を底とする対数をとると　$6=3\log_x y=2\log_x z$

よって，$\log_x y=2$，$\log_x z=3$ であるから

$$\log_x\frac{z}{y}+\log_y\frac{x}{z}+\log_z\frac{y}{x}=(\log_x z-\log_x y)+\frac{\log_x\frac{x}{z}}{\log_x y}+\frac{\log_x\frac{y}{x}}{\log_x z}$$

$$=(\log_x z-\log_x y)+\frac{1-\log_x z}{\log_x y}+\frac{\log_x y-1}{\log_x z}$$

$$=(3-2)+\frac{1-3}{2}+\frac{2-1}{3}=1-1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$\boxed{1}$

解答　$A=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$B=\dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$　（複号同順）

解説

$$\log_a 2+\log_b 2=\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{A+B}{AB}$$

$$\log_{ab}2=\frac{1}{\log_2 ab}=\frac{1}{\log_2 a+\log_2 b}=\frac{1}{A+B}$$

よって，条件から　$\dfrac{A+B}{AB}=1$，$\dfrac{1}{A+B}=-1$

したがって　$A+B=-1$，$AB=-1$

ゆえに，A，B は２次方程式 $x^2+x-1=0$ の２つの解である。

これを解いて　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって　$A=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，$B=\dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$　（複号同順）

$\boxed{2}$

解答　(1)　35　　(2)　$a=6$　　(3)　$a^3b^3c^3$

解説

(1)　$10^{\frac{x+y}{xy}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=10^{\frac{1}{x}}\times 10^{\frac{1}{y}}$

$5^x=10$ から　$x=\log_5 10$　　よって　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_5 10}=\log_{10}5$

$7^y=10$ から　$y=\log_7 10$　　よって　$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_7 10}=\log_{10}7$

したがって　$10^{\frac{1}{x}}\times 10^{\frac{1}{y}}=10^{\log_{10}5}\times 10^{\log_{10}7}=5\times 7=35$

(2)　$3^x>0$，$12^y>0$ であるから　$a>0$

また，$x\fallingdotseq 0$，$y\fallingdotseq 0$ であるから　$a\fallingdotseq 1$

$3^x=a$ の両辺の３を底とする対数をとると　$x=\log_3 a$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_3 a}$　すなわち　$\dfrac{1}{x}=\log_a 3$

$12^y=a$ の両辺の 12 を底とする対数をとると　$y=\log_{12}a$

ゆえに　$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_{12}a}$　すなわち　$\dfrac{1}{y}=\log_a 12$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\log_a 3+\log_a 12=\log_a 36=2\log_a 6$

ゆえに　$2\log_a 6=2$　すなわち　$\log_a 6=1$

よって，求める a の値は　$a=6$

(3)　a，b，c は正であるから，$a^{2x}=b^{2y}=c^{2z}=4$ の各辺は正で，各辺の２を底とする対数をとると　$\log_2 a^{2x}=\log_2 b^{2y}=\log_2 c^{2z}=\log_2 4$

ゆえに　$2x\log_2 a=2y\log_2 b=2z\log_2 c=2$

よって　$\dfrac{1}{x}=\log_2 a$，$\dfrac{1}{y}=\log_2 b$，$\dfrac{1}{z}=\log_2 c$

ゆえに　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c=\log_2 abc$

よって　$8^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=8^{\log_2 abc}=2^{3\log_2 abc}=2^{\log_2(abc)^3}=(abc)^3=a^3b^3c^3$

3

解答　$\log_a(\log_a b)<(\log_a b)^2<\log_a b^2$

解説

$1<b<a$ から，各辺の a（>1）を底とする対数をとると

$$\log_a 1<\log_a b<\log_a a$$

すなわち　$0<\log_a b<1$

ここで $\log_a b=t$ とおくと　$0<t<1$　……①

$A=(\log_a b)^2$，$B=\log_a b^2$，$C=\log_a(\log_a b)$ とおくと

$$A=t^2,\ B=2\log_a b=2t,\ C=\log_a t$$

① から　$A>0$，$B>0$，$C<0$

また，① から　$B-A=2t-t^2=t(2-t)>0$　よって　$B>A$

したがって　$C<A<B$

すなわち　$\log_a(\log_a b)<(\log_a b)^2<\log_a b^2$

4

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　m，n が自然数のとき，2^m は偶数，3^n は奇数であるから，2^m と 3^n が等しくなることはない。

よって，$2^m=3^n$ を満たす自然数 m，n は存在しない。

(2)　$\log_2 3$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n が存在する。

この等式から　$2^{\frac{m}{n}}=3$　両辺を n 乗すると　$2^m=3^n$

これは，(1) で証明したことに矛盾する。

したがって，$\log_2 3$ は無理数である。

1

解答　(1)　$x=27$　(2)　$x=\dfrac{1}{16}$　(3)　$x=6$　(4)　$0<x<125$　(5)　$0<x\leqq\dfrac{1}{9}$

(6)　$x\geqq 1$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=3^3=27$

(2)　対数の定義から，解は　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

(3)　対数の定義から　$x-2=16^{\frac{1}{2}}$　よって，解は　$x=6$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_5 x<\log_5 5^3$　すなわち　$\log_5 x<\log_5 125$

底 5 は 1 より大きいから　$x<125$　……②

①，② から，解は　$0<x<125$

(5)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} x\geqq\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x\leqq\dfrac{1}{9}$　……②

①，② から，解は　$0<x\leqq\dfrac{1}{9}$

(6)　真数は正であるから　$x+3>0$　すなわち　$x>-3$　……①

不等式から　$\log_{0.5}(x+3)\leqq\log_{0.5}0.5^{-2}$　すなわち　$\log_{0.5}(x+3)\leqq\log_{0.5}4$

底 0.5 は 1 より小さいから　$x+3\geqq 4$　すなわち　$x\geqq 1$　……②

①，② から，解は　$x\geqq 1$

2

解答　(1)　$x=1$　(2)　$x=1$　(3)　$x=0,\ -7$　(4)　$x=-1$

(5)　$3<x\leqq 5$　(6)　$2-\sqrt{7}<x<1$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

よって　$x>0$　……①

方程式を変形すると

$$\log_2 x(x+3)=2 \quad ゆえに \quad x(x+3)=2^2$$

整理して　$x^2+3x-4=0$　すなわち　$(x-1)(x+4)=0$

① から，解は　$x=1$

(2)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $4x+1>0$

よって　$x>-\dfrac{1}{4}$　……①

方程式を変形すると

$$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2 \quad すなわち \quad \log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$$

ゆえに　$(2x+3)(4x+1)=25$　整理して　$4x^2+7x-11=0$

すなわち　$(x-1)(4x+11)=0$

① から，解は　$x=1$

(3)　対数の定義から　$(x+2)(x+5)=10^1$

整理して　$x^2+7x=0$　すなわち　$x(x+7)=0$

これを解いて　$x=0,\ -7$

(4)　真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x+18>0$

よって　$-9<x<3$　……①

方程式を変形すると

$$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4} \quad すなわち \quad \log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{2}$$

両辺に 2 を掛けて

$$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18) \quad すなわち \quad \log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$　整理して　$x^2-8x-9=0$

すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

① から，解は　$x=-1$

(5)　真数は正であるから　$x-3>0$ かつ $x>0$

よって　$x>3$　……①

不等式を変形すると　$\log_{10}(x-3)x\leqq\log_{10}10$

底 10 は 1 より大きいから　$(x-3)x\leqq 10$

整理して　$x^2-3x-10\leqq 0$　すなわち　$(x+2)(x-5)\leqq 0$

これを解いて　$-2\leqq x\leqq 5$　……②

①，② から，解は　$3<x\leqq 5$

(6)　真数は正であるから　$1-x>0$ かつ $3-x>0$

よって　$x<1$　……①

$1+\log_2 3=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$ であるから，与えられた不等式は

$$\log_2(1-x)(3-x)<\log_2 6$$

底 2 は 1 より大きいから　$(1-x)(3-x)<6$

整理して　$x^2-4x-3<0$

これを解いて　$2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$　……②

①，② から，解は　$2-\sqrt{7}<x<1$

3

解答　(1)　$x=3,\ 27$　(2)　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$

解説

(1)　方程式から　$(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)=0$

よって　$\log_3 x=1,\ 3$　ゆえに　$x=3,\ 27$

(2)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^2>0$　よって　$x>0$　……①

不等式から　$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3\leqq 0$

ゆえに　$(\log_2 x+1)(\log_2 x-3)\leqq 0$

したがって　$-1\leqq\log_2 x\leqq 3$　すなわち　$\log_2\dfrac{1}{2}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$　……②

①，② から，解は　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 8$

4

解答　$x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2

解説

$y=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+6$　$(1\leqq x\leqq 8)$

$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ であるから　$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

すなわち　$0 \leqq t \leqq 3$　……①

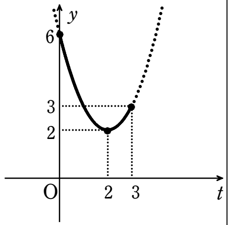
y を t で表すと　$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$

① の範囲において，y は $t=0$ で最大値 6，$t=2$ で最小値 2 をとる。

また　$t=0$ のとき　$\log_2 x=0$　よって　$x=2^0=1$

　　$t=2$ のとき　$\log_2 x=2$　よって　$x=2^2=4$

したがって　$x=1$ で最大値 6，$x=4$ で最小値 2



5

解答　(1)　$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}0.006=-2.2219$，$\log_{10}\sqrt{72}=0.9286$

(2)　39 桁　(3)　小数第 18 位

解説

(1)　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}0.006=\log_{10}(2\cdot 3\cdot 10^{-3})=\log_{10}2+\log_{10}3-3\log_{10}10=0.3010+0.4771-3$
$=-2.2219$

$\log_{10}\sqrt{72}=\log_{10}(2^3\cdot 3^2)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(3\log_{10}2+2\log_{10}3)=\dfrac{1}{2}(3\times 0.3010+2\times 0.4771)$
$=0.9286$

(2)　$\log_{10}6^{50}=50\log_{10}6=50\log_{10}(2\cdot 3)=50(\log_{10}2+\log_{10}3)=50(0.3010+0.4771)$
$=38.905$

ゆえに　$38<\log_{10}6^{50}<39$　よって　$10^{38}<6^{50}<10^{39}$

したがって，6^{50} は 39 桁の整数である。

(3)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}=100(\log_{10}2-\log_{10}3)=100(0.3010-0.4771)=-17.61$

ゆえに　$-18<\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}<-17$

よって　$10^{-18}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}<10^{-17}$　ゆえに　小数第 18 位。

6

解答　(1)　$n=19$，20　(2)　$n=11$

解説

(1)　3^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 3^n < 10^{10}$ のときである。常用対数をとると

$\log_{10}10^9 \leqq \log_{10}3^n < \log_{10}10^{10}$

よって　$9 \leqq n\log_{10}3 < 10$　すなわち　$9 \leqq 0.4771n < 10$

したがって　$\dfrac{9}{0.4771} \leqq n < \dfrac{10}{0.4771}$　……①

$\dfrac{9}{0.4771}=18.86\cdots\cdots$，$\dfrac{10}{0.4771}=20.95\cdots\cdots$

よって，不等式 ① を満たす自然数 n は　$n=19$，20

(2)　$3^{30}>16^n$ より　$\log_{10}3^{30}>\log_{10}16^n$

$\log_{10}16^n=\log_{10}2^{4n}$ より　$30\log_{10}3>4n\log_{10}2$

よって　$30\times 0.4771>4n\times 0.3010$

すなわち　$n<\dfrac{30\times 0.4771}{4\times 0.3010}=11.8\cdots\cdots$

したがって，この不等式を満たす最大の自然数 n は　$n=11$

1

解答　(1)　$x=25$　(2)　$x=\dfrac{1}{3}$　(3)　$x=\dfrac{1}{81}$　(4)　$0<x<25$　(5)　$x \geqq \dfrac{1}{27}$

(6)　$0<x<0.01$

解説

(1)　対数の定義から，解は　$x=5^2=25$

(2)　対数の定義から，解は　$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

(3)　対数の定義から，解は　$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

(4)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_5 x<\log_5 5^2$　すなわち　$\log_5 x<\log_5 25$

底 5 は 1 より大きいから　$x<25$　……②

①，② から，解は　$0<x<25$

(5)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{\frac{1}{3}}x \leqq \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}x \leqq \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x \geqq \dfrac{1}{27}$　……②

①，② から，解は　$x \geqq \dfrac{1}{27}$

(6)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式から　$\log_{0.1}x>\log_{0.1}0.1^2$　すなわち　$\log_{0.1}x>\log_{0.1}0.01$

底 0.1 は 1 より小さいから　$x<0.01$　……②

①，② から，解は　$0<x<0.01$

2

解答　(1)　$x=1$　(2)　$x=1$　(3)　$x=0$，-7　(4)　$x=-1$

(5)　$0<x \leqq \dfrac{1}{27}$，$9 \leqq x$　(6)　$\dfrac{3}{4}<x<1$　(7)　$2<x<5$　(8)　$4<x<3+\sqrt{3}$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$

よって　$x>0$　……①

方程式を変形すると

$\log_2 x(x+3)=2$　ゆえに　$x(x+3)=2^2$

整理して　$x^2+3x-4=0$　すなわち　$(x-1)(x+4)=0$

① から，解は　$x=1$

(2)　真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $4x+1>0$

よって　$x>-\dfrac{1}{4}$　……①

方程式を変形すると

$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2$　すなわち　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$

ゆえに　$(2x+3)(4x+1)=25$　整理して　$4x^2+7x-11=0$

すなわち　$(x-1)(4x+11)=0$

① から，解は　$x=1$

(3)　対数の定義から　$(x+2)(x+5)=10^1$

整理して　$x^2+7x=0$　すなわち　$x(x+7)=0$

これを解いて　$x=0$，-7

(4)　真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x+18>0$

よって　$-9<x<3$　……①

方程式を変形すると

$\log_2(3-x)=\dfrac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}$　すなわち　$\log_2(3-x)=\dfrac{\log_2(2x+18)}{2}$

両辺に 2 を掛けて

$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)$　すなわち　$\log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$　整理して　$x^2-8x-9=0$

すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

① から，解は　$x=-1$

(5)　真数は正であるから　$x>0$　……①

不等式は　$(\log_3 x+3)(\log_3 x-2) \geqq 0$

ゆえに　$\log_3 x \leqq -3$，$2 \leqq \log_3 x$

すなわち　$\log_3 x \leqq \log_3\dfrac{1}{27}$，$\log_3 9 \leqq \log_3 x$

底 3 は 1 より大きいから　$x \leqq \dfrac{1}{27}$，$9 \leqq x$　……②

①，② から　$0<x \leqq \dfrac{1}{27}$，$9 \leqq x$

(6)　真数は正であるから　$1-x>0$　……①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{2}}(1-x)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$1-x<\dfrac{1}{4}$　……②

①，② から　$x<1$　かつ　$x>\dfrac{3}{4}$　よって　$\dfrac{3}{4}<x<1$

(7)　真数は正であるから　$x-2>0$　かつ　$x+4>0$

$x-2>0$ から　$x>2$　$x+4>0$ から　$x>-4$

共通範囲をとって　$x>2$　……①

不等式を変形して　$\log_{0.5}(x-2)^2>\log_{0.5}(x+4)$

底 0.5 は 1 より小さいから　$(x-2)^2<x+4$

整理すると　$x^2-5x<0$　よって　$x(x-5)<0$

ゆえに　$0<x<5$ ……②　①，② から　$2<x<5$

(8)　真数は正であるから　$x-2>0$　かつ　$x-4>0$

$x-2>0$ から　$x>2$　$x-4>0$ から　$x>4$

共通範囲をとって　$x>4$　……①

$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=\dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2\dfrac{1}{2}}=-\log_2(x-4)$ であるから，不等式は

$\log_2(x-2)+\log_2(x-4)<1$　すなわち　$\log_2(x-2)(x-4)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-2)(x-4)<2$

整理すると　$x^2-6x+6<0$　……②

方程式 $x^2-6x+6=0$ の解は　$x=3\pm\sqrt{3}$

よって，不等式 ② の解は　$3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$　……③

①，③ から　$4<x<3+\sqrt{3}$

3

解答 (1) $x=\frac{1}{4},\ 16$　(2) $\frac{1}{27}\leqq x\leqq 243$

解説

(1) 方程式から　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-4)=0$

よって　$\log_2 x=-2,\ 4$

したがって　$x=2^{-2},\ 2^4$　すなわち　$x=\frac{1}{4},\ 16$

(2) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^2>0$　よって　$x>0$ ……①

不等式から　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}} x-15\leqq 0$

ゆえに　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x+5\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x-3\right)\leqq 0$

したがって　$-5\leqq \log_{\frac{1}{3}} x\leqq 3$　すなわち　$\log_{\frac{1}{3}} 243\leqq \log_{\frac{1}{3}} x\leqq \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいから　$\frac{1}{27}\leqq x\leqq 243$ ……②

①，②から，解は　$\frac{1}{27}\leqq x\leqq 243$

4

解答 (1) $x=64$ のとき最大値 $y=3$，$x=4$ のとき最小値 $y=-1$

(2) $x=64$ のとき最大値 $y=5$，$x=2$ のとき最小値 $y=-\frac{5}{4}$

解説

(1) $\log_4 x=t$ とおく。

底4は1より大きく，$1\leqq x\leqq 64$ であるから　$\log_4 1\leqq \log_4 x\leqq \log_4 64$

よって　$0\leqq \log_4 x\leqq \log_4 4^3$　ゆえに　$0\leqq t\leqq 3$ ……①

また　$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$

①から，y は　$t=3$　すなわち　$x=64$ のとき　最大値3

$t=1$　すなわち　$x=4$ のとき　最小値 -1　をとる。

(2) $\log_{\frac{1}{4}} x=t$ とおく。

底 $\frac{1}{4}$ は1より小さく，$1\leqq x\leqq 64$ であるから　$\log_{\frac{1}{4}} 64\leqq \log_{\frac{1}{4}} x\leqq \log_{\frac{1}{4}} 1$

よって　$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\leqq \log_{\frac{1}{4}} x\leqq 0$　ゆえに　$-3\leqq t\leqq 0$ ……①

与式は $y=\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2+\left\{\log_{\frac{1}{4}} x+\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}$ と変形できるから

$$y=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

①から，y は　$t=-3$　すなわち　$x=64$ のとき　最大値5

$t=-\frac{1}{2}$　すなわち　$x=2$ のとき　最小値 $-\frac{5}{4}$　をとる。

5

解答 42桁，小数第28位

解説

$$\log_{10}25^{30}=30\log_{10}5^2=60\log_{10}\frac{10}{2}$$

$$=60(1-\log_{10}2)=60(1-0.3010)$$

$$=60\times 0.6990=41.94$$

よって　$41<\log_{10}25^{30}<42$　ゆえに　$10^{41}<25^{30}<10^{42}$

したがって，25^{30} は42桁の数である。

また　$\log_{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{30}=30\log_{10}2^{-3}=-90\log_{10}2$

$=-90\times 0.3010=-27.09$

よって　$-28<\log_{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{30}<-27$

ゆえに　$10^{-28}<\left(\frac{1}{8}\right)^{30}<10^{-27}$

したがって，$\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第28位に初めて0でない数字が現れる。

6

解答 (1) $21\leqq n\leqq 30$　(2) $n=38$

解説

(1) 1.25^n の整数部分が3桁であるとき　$10^2\leqq 1.25^n<10^3$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}10^2\leqq \log_{10}1.25^n<\log_{10}10^3$ ……①

ここで，$1.25=\frac{5}{4}=\frac{10}{2^3}$ であるから

$$\log_{10}1.25^n=n\log_{10}\frac{10}{2^3}=n(\log_{10}10-\log_{10}2^3)=n(1-3\log_{10}2)$$

ゆえに，①は　$2\leqq n(1-3\log_{10}2)<3$

$\log_{10}2=0.3010$ を代入して　$2\leqq 0.097n<3$

よって　$20.6\cdots\cdots\leqq n<30.9\cdots\cdots$

したがって，自然数 n の値の範囲は　$21\leqq n\leqq 30$

(2) $(0.4)^n<10^{-15}$ より　$\log_{10}(0.4)^n<\log_{10}10^{-15}$

よって　$n\log_{10}0.4<-15$

ここで　$\log_{10}0.4=\log_{10}(2^2\times 10^{-1})=2\log_{10}2-1=-0.3980$

したがって　$-0.3980n<-15$　すなわち　$n>37.6\cdots\cdots$

よって，与えられた不等式を満たす最小の自然数 n は　$n=38$

1

解答 (1) $x=\frac{\log_2 3}{2\log_2 3-1}$　(2) $x=\frac{2\log_5 3}{2-\log_5 3}$

解説

(1) 方程式の両辺は正であるから，2を底とする対数をとると

$\log_2 2^x=\log_2 3^{2x-1}$　よって　$x=(2x-1)\log_2 3$

ゆえに　$(2\log_2 3-1)x=\log_2 3$

$2\log_2 3-1\neq 0$ であるから　$x=\frac{\log_2 3}{2\log_2 3-1}$

参考　方程式の両辺の3を底とする対数をとると，解は $x=\frac{1}{2-\log_3 2}$ となる。

(2) 方程式の両辺は正であるから，5を底とする対数をとると

$\log_5 5^{2x}=\log_5 3^{x+2}$　よって　$2x=(x+2)\log_5 3$

ゆえに　$(2-\log_5 3)x=2\log_5 3$

$2-\log_5 3\neq 0$ であるから　$x=\frac{2\log_5 3}{2-\log_5 3}$

参考　方程式の両辺の3を底とする対数をとると，解は $x=\frac{2}{2\log_3 5-1}$ となる。

2

解答 (1) $x=4,\ 8$　(2) $0<x\leqq\frac{\sqrt{3}}{9}$，$1<x\leqq 81$

解説

(1) 真数は正で，底は1でない正の数であるから　$0<x<1,\ 1<x$ ……①

よって　$\log_2 x\neq 0$

方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて

$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$

整理して　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$　よって　$\log_2 x=2,\ 3$

$\log_2 x=2$ から　$x=4$　$\log_2 x=3$ から　$x=8$

これらの x の値は①を満たす。

したがって，解は　$x=4,\ 8$

(2) 真数，底の条件から　$0<x<1,\ 1<x$

$\log_x 27=\frac{\log_3 27}{\log_3 x}=\frac{3}{\log_3 x}$ であるから，不等式は

$$2\log_3 x-\frac{12}{\log_3 x}\leqq 5 \quad\cdots\cdots①$$

[1] $0<x<1$ のとき　$\log_3 x<0$

①の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　$2(\log_3 x)^2-12\geqq 5\log_3 x$

整理して　$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\geqq 0$

ゆえに　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\geqq 0$

$\log_3 x<0$ より $\log_3 x-4<0$ であるから　$2\log_3 x+3\leqq 0$

よって　$\log_3 x\leqq -\frac{3}{2}$

底3は1より大きいから　$x\leqq 3^{-\frac{3}{2}}$　すなわち　$x\leqq\frac{\sqrt{3}}{9}$

$0<x<1$ との共通範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[2]　$x>1$ のとき　$\log_3 x>0$

① の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　$2(\log_3 x)^2-12\leqq 5\log_3 x$

整理して　$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\leqq 0$

ゆえに　$(\log_3 x-4)(2\log_3 x+3)\leqq 0$

$\log_3 x>0$ より $2\log_3 x+3>0$ であるから　$\log_3 x-4\leqq 0$

よって　$0<\log_3 x\leqq 4$

底 3 は 1 より大きいから

$3^0<x\leqq 3^4$　すなわち　$1<x\leqq 81$

[1], [2] から，解は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，$1<x\leqq 81$

3

解答　$0<a<1$ のとき　$-9<x<-2$；$a>1$ のとき　$x<-9, 5<x$

解説

対数の真数は正の数であるから　$3x^2-3x-18>0, 2x^2-10x>0$

これを解いて　$(x+2)(x-3)>0, x(x-5)>0$ から　$x<-2, 5<x$ …… ①

不等式から　$0<a<1$ のとき　$3x^2-3x-18<2x^2-10x$　　ゆえに　$x^2+7x-18<0$

これを解いて　$(x-2)(x+9)<0$ から　$-9<x<2$　　① から　$-9<x<-2$

$1<a$ のとき　$3x^2-3x-18>2x^2-10x$ を解いて　$x<-9, 2<x$

① から　$x<-9, 5<x$

4

解答　(1)　$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 -2

(2)　$x=5$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 0

(3)　$x=\dfrac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4

解説

(1)　真数は正であるから　$x-2>0$ かつ $3-x>0$

よって　$2<x<3$ …… ①

$2\log_4(3-x)=2\cdot\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2 4}=\log_2(3-x)$ であるから

$$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)=\log_2(x-2)+\log_2(3-x)$$
$$=\log_2(x-2)(3-x)=\log_2(-x^2+5x-6)$$

$z=-x^2+5x-6$ とすると　$z=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

① の範囲において，z は $x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

対数の底 2 は 1 より大きいから，このとき y も最大となる。

よって　$x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $\log_2\dfrac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$

(2)　$\log_5 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 5$ であるから

$\log_5 1\leqq t\leqq\log_5 5$　すなわち　$0\leqq t\leqq 1$ …… ①

y を t の式で表すと　$y=2t+t^2=(t+1)^2-1$

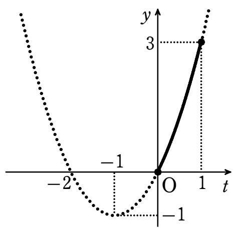
① の範囲において，y は

$t=1$ で最大値 3，$t=0$ で最小値 0

をとる。$t=\log_5 x$ より，$x=5^t$ であるから

$t=1$ のとき　$x=5$，　$t=0$ のとき　$x=5^0=1$

よって　$x=5$ で最大値 3，$x=1$ で最小値 0



(3)　$\log_3 x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ であるから

$\log_3\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\log_3 27$

すなわち　$-1\leqq t\leqq 3$ …… ①

$\log_3 3x=1+\log_3 x$，$\log_3\dfrac{x}{27}=\log_3 x-3$ である

から，y を t の式で表すと

$y=(1+t)(t-3)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

① の範囲において，y は

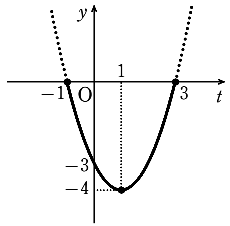
$t=-1$，3 で最大値 0，$t=1$ で最小値 -4

をとる。$t=\log_3 x$ より，$x=3^t$ であるから

$t=-1$ のとき　$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$，$t=3$ のとき　$x=3^3=27$，

$t=1$　のとき　$x=3$

よって　$x=\dfrac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4



5

解答　$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$；$x=81$，$y=\dfrac{1}{3}$ で最小値 -4

解説

$x\geqq 3$，$y\geqq\dfrac{1}{3}$，$xy=27$ の各辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x\geqq 1$，$\log_3 y\geqq -1$，$\log_3 x+\log_3 y=3$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと

$X\geqq 1$，$Y\geqq -1$，$X+Y=3$

$X+Y=3$ から　$Y=3-X$ …… ①

$Y\geqq -1$ であるから　$3-X\geqq -1$　　ゆえに　$X\leqq 4$

$X\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq X\leqq 4$ …… ②

また　$(\log_3 x)(\log_3 y)=XY=X(3-X)=-X^2+3X$

$$=-\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

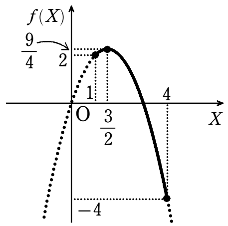
これを $f(X)$ とすると，② の範囲において，$f(X)$ は

$X=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$，$X=4$ で最小値 -4　をとる。

① から　$X=\dfrac{3}{2}$ のとき　$Y=\dfrac{3}{2}$，$X=4$ のとき　$Y=-1$

$\log_3 x=X$，$\log_3 y=Y$ より，$x=3^X$，$y=3^Y$ であるから

$x=y=3\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$；$x=81$，$y=\dfrac{1}{3}$ で最小値 -4



6

解答　(1)　0.6990　　(2)　18 桁　　(3)　4

解説

(1)　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

(2)　$\log_{10}3^{37}=37\log_{10}3=37\times 0.4771=17.6527$

よって　$17<\log_{10}3^{37}<18$　　ゆえに　$10^{17}<3^{37}<10^{18}$

したがって，3^{37} は 18 桁の整数である。

(3)　(2) から　$\log_{10}3^{37}=17+0.6527$

また　$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times 0.3010=0.6020$

(1) から　$\log_{10}5=0.6990$

よって，$\log_{10}4<0.6527<\log_{10}5$ であるから　$4<10^{0.6527}<5$

ゆえに　$4\times 10^{17}<10^{17.6527}<5\times 10^{17}$

すなわち　$4\times 10^{17}<3^{37}<5\times 10^{17}$

したがって，3^{37} の最高位の数字は　4

7

解答　21 年後

解説

現在の人口を p とし，n 年後に人口が現在の 5 倍を超えるとすると　$1.08^n p>5p$

$p>0$ であるから　$1.08^n>5$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}1.08>\log_{10}5$ …… ①

ここで　$\log_{10}1.08=\log_{10}\dfrac{108}{100}=\log_{10}\dfrac{2^2\times 3^3}{10^2}=2\log_{10}2+3\log_{10}3-2$

$=2\times 0.3010+3\times 0.4771-2=0.0333$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

よって，① から　$n>\dfrac{0.6990}{0.0333}=20.9\cdots\cdots$

n は整数であるから　$n\geqq 21$

したがって，21 年後である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=16$　　(2)　$x=2,\ 4,\ 8$　　(3)　$x=\dfrac{\pi}{12},\ y=\dfrac{\pi}{12}$

解説

(1)　真数は正であるから　　$x>0$　……①

$3^{-\log_4 x}=t$ とおくと　　$3^{2-\log_2 x}=9\cdot 3^{-\frac{\log_4 x}{\log_4 2}}=9\cdot 3^{2\cdot(-\log_4 x)}=9t^2$

方程式は　　$9t^2+26t-3=0$　　　よって　　$(t+3)(9t-1)=0$

$t>0$ であるから　　$t=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$

したがって，$\log_4 x=2$ から　　$x=16$（① を満たす）

(2)　真数は正であるから　　$x>0$　　方程式から　　$x^{(\log_2 x)^2}=64x^{6\log_2 x-11}$

両辺の 2 を底とする対数をとると　　$\log_2 x^{(\log_2 x)^2}=\log_2\left(64x^{6\log_2 x-11}\right)$

よって　　$(\log_2 x)^2\cdot\log_2 x=\log_2 64+(6\log_2 x-11)\cdot\log_2 x$

すなわち　$(\log_2 x)^3-6(\log_2 x)^2+11\log_2 x-6=0$

ゆえに　　$(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$

よって　　$\log_2 x=1,\ 2,\ 3$　　　ゆえに　　$x=2,\ 4,\ 8$

これらの x の値は $x>0$ を満たす。

(3)　$\log_x y+\log_y x=2$ から　　$\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}=2$

$\log_x y>0$ であるから，両辺に $\log_x y$ を掛けて整理すると

$(\log_x y)^2-2\log_x y+1=0$　すなわち　$(\log_x y-1)^2=0$

ゆえに　　$\log_x y=1$　　　よって　　$x=y$

$2\log_x\sin(x+y)=\log_x\sin y+\log_y\cos x$ に代入すると

$2\log_x\sin 2x=\log_x\sin x\cos x$

ゆえに　　$\sin^2 2x=\sin x\cos x$　　　よって　　$\sin^2 2x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

したがって　　$\sin 2x\left(\sin 2x-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$0<x<1$ より，$0<2x<2$ であるから　　$\sin 2x\neq 0$　　　ゆえに　　$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<2<\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，$0<2x<2$ では　　$2x=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{12}$

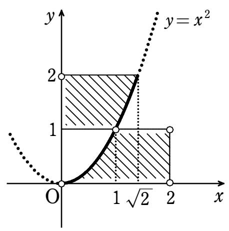
よって　　　$x=\dfrac{\pi}{12},\ y=\dfrac{\pi}{12}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　[図] 境界線は x 軸，y 軸，

線分 $y=1$ $(0\leqq x\leqq 2)$ を含まず，他は含む

(2)　$x=\sqrt{2}$，$y=2$ のとき最大値 $4+3\sqrt{2}$



解説

(1)　$\dfrac{1}{2}\geqq\log_y x$ から　　$1\geqq 2\log_y x$

よって　　$\log_y y\geqq\log_y x^2$

ゆえに

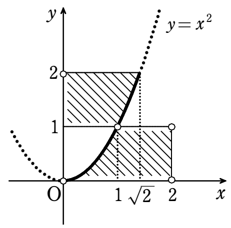
$0<y<1$ のとき　$y\leqq x^2$　　ただし $0<x\leqq 2$

$1<y\leqq 2$ のとき　$y\geqq x^2$　　ただし $0<x\leqq 2$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線は x 軸，y 軸，線分 $y=1$ $(0\leqq x\leqq 2)$

を含まず，他は含む。



(2)　$3x+2y=k$ とおくと　　$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$　……①

これは傾きが $-\dfrac{3}{2}$，y 切片が $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

直線 ① が点 $(\sqrt{2},\ 2)$ を通るとき

$k=3\sqrt{2}+2\cdot 2=4+3\sqrt{2}$

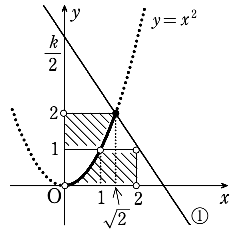
直線 ① が点 $(2,\ 1)$ を通るとき

$k=3\cdot 2+2\cdot 1=8$

$4+3\sqrt{2}>8$ であるから，直線 ① が点 $(\sqrt{2},\ 2)$ を

通るとき，k の値は最大となる。

よって　　$x=\sqrt{2}$，$y=2$ のとき最大値 $4+3\sqrt{2}$



注意　① が点 $(\sqrt{2},\ 2)$ を通るときの y 切片と，点 $(2,\ 1)$ を通るときの y 切片の大小を，図だけから判断するのは無理である。このような場合は，上の解答のように，両者の場合の k の値を求めて，その大小を調べる。

$\boxed{3}$

解答　$1<a<5$

解説

$\log_3(x-1)=\log_{3^2}(x-1)^2$ であるから，方程式は

$\log_9(x-1)^2=\log_9(4x-a-3)$

すなわち　　$(x-1)^2=4x-a-3$

整理して　　$x^2-6x+a+4=0$　……①

また，真数は正であるから　　$x-1>0$　かつ　$4x-a-3>0$

すなわち　　$x>1$　かつ　$x>\dfrac{a+3}{4}$　……②

2 次方程式 ① が，② の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件を考える。

① の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-(a+4)>0$　　　よって　　$a<5$

$f(x)=x^2-6x+a+4$ とすると，放物線 $y=f(x)$ の軸は　　直線 $x=3$

[1]　$a\leqq 1$ のとき

② より $x>1$ であり，この範囲に ① が異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$f(1)=a-1>0$　　　ゆえに　　$a>1$

これは $a\leqq 1$ を満たさない。

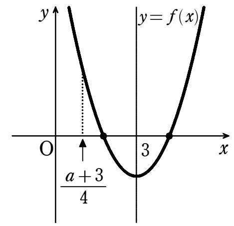
[2]　$1<a<5$ のとき

② から　　$x>\dfrac{a+3}{4}$　　　また　　$\dfrac{a+3}{4}<3$

よって，求める条件は　　$f\left(\dfrac{a+3}{4}\right)=\dfrac{1}{16}(a-1)^2>0$

これは，$1<a<5$ で常に成り立つ。

[1]，[2] から，求める a の値の範囲は　　$1<a<5$



$\boxed{1}$

解答 (1) $2<a<6$ (2) $a \leqq -3$，$6<a$

解説

(1) $2^x=t$ とおくと $t>0$

このとき，$f(x)=0$ は $t^2-2at+a^2+a-6=0$ ……①

求める条件は，① が $t>0$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつことである。

ゆえに，① の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とすると，

$$D>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$

が成り立つ。

$D>0$ から $\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+a-6)=-a+6>0$

これを解いて $a<6$ ……②

$\alpha+\beta>0$ から $2a>0$ すなわち $a>0$ ……③

$\alpha\beta>0$ から $a^2+a-6>0$ よって $(a+3)(a-2)>0$

したがって $a<-3$，$2<a$ ……④

②，③，④ の共通範囲を求めて $2<a<6$

(2) $f(x)=0$ を満たす実数 x が 1 つもないのは，次の 2 つの場合である。

[1] ① が実数解をもたない。

[2] ① が $t \leqq 0$ の範囲にのみ実数解をもつ。

[1] が成り立つための条件は $D<0$

したがって $a>6$

[2] が成り立つための条件は $D \geqq 0$，$\alpha+\beta \leqq 0$，$\alpha\beta \geqq 0$

$D \geqq 0$ から $a \leqq 6$ …… ⑤

$\alpha+\beta \leqq 0$ から $a \leqq 0$ …… ⑥

$\alpha\beta \geqq 0$ から $a \leqq -3$，$2 \leqq a$ …… ⑦

⑤，⑥，⑦ の共通範囲を求めて $a \leqq -3$

求める a の値の範囲は，[1] と [2] の範囲を合わせて $a \leqq -3$，$6<a$

$\boxed{2}$

解答 $a<1$ のとき $x=1$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$，

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=1-\log_2 a$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$，

$2<a$ のとき $x=0$ で最大値 $a+1$

解説

$2^{-x}=t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ ……①

y を t の式で表すと，$4^{-x}=(2^2)^{-x}=(2^{-x})^2=t^2$ であるから

$$y=-t^2+at+2=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+2$$

この関数のグラフは，上に凸の放物線で，軸は直線 $t=\dfrac{a}{2}$，頂点は点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}+2\right)$ である。

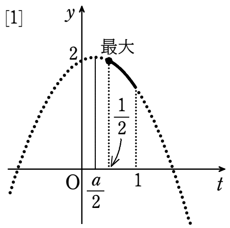
グラフの軸が区間 ① の左外，内，右外にある場合に分けると

[1] $\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{2}$ すなわち $a<1$ のとき

y は $t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$ をとる。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $2^{-x}=\dfrac{1}{2}$ よって $x=1$

[1]



[2] $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$ すなわち $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

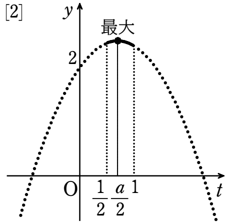
y は $t=\dfrac{a}{2}$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$ をとる。

$t=\dfrac{a}{2}$ のとき $2^{-x}=\dfrac{a}{2}$

ゆえに $2^x=\dfrac{2}{a}$

よって $x=\log_2\dfrac{2}{a}=1-\log_2 a$

[2]



[3] $1<\dfrac{a}{2}$ すなわち $a>2$ のとき

y は $t=1$ で最大値 $a+1$ をとる。

$t=1$ のとき $2^{-x}=1$

よって $x=0$

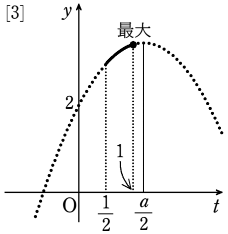
以上から

$a<1$ のとき $x=1$ で最大値 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}$，

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=1-\log_2 a$ で最大値 $\dfrac{a^2}{4}+2$，

$2<a$ のとき $x=0$ で最大値 $a+1$

[3]



$\boxed{3}$

解答 $-8-4\sqrt{5}<a \leqq 1$

解説

$2^x=X$ とおくと，$X>0$ であり，不等式は

$$4X^2+aX+1-a>0 \quad \cdots\cdots①$$

よって，$X>0$ のとき ① が成り立つような実数 a の値の範囲が求めるものである。

$f(X)=4X^2+aX+1-a$ とおくと

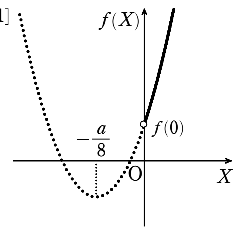
$$f(X)=4\left(X^2+\frac{a}{4}X\right)+1-a=4\left(X+\frac{a}{8}\right)^2-\frac{a^2}{16}-a+1$$

[1] $-\dfrac{a}{8}<0$ すなわち $a>0$ のとき，求める条件は

$f(0)=1-a \geqq 0$ よって $a \leqq 1$

$a>0$ であるから $0<a \leqq 1$ ……②

[1]



[2] $-\dfrac{a}{8} \geqq 0$ すなわち $a \leqq 0$ のとき，求める条件は

$$f\left(-\frac{a}{8}\right)=-\frac{a^2}{16}-a+1>0$$

整理して $a^2+16a-16<0$

これを解いて $-8-4\sqrt{5}<a<-8+4\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}$ より $8<4\sqrt{5}$

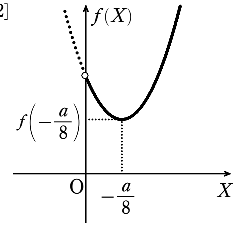
よって $0<-8+4\sqrt{5}$

$a \leqq 0$ であるから $-8-4\sqrt{5}<a \leqq 0$ ……③

[1]，[2] から，② と ③ の範囲を合わせて

$$-8-4\sqrt{5}<a \leqq 1$$

[2]



$\boxed{4}$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 左辺 $=(y-x)z^2-(y^2-x^2)z+xy(y-x)$

$=(y-x)\{z^2-(y+x)z+xy\}$

$=(y-x)(z-x)(z-y)$

$x<y<z$ より $y-x>0$，$z-x>0$，$z-y>0$ であるから

$$(y-x)(z-x)(z-y)>0$$

よって，与えられた不等式が成り立つ。

(2) 左辺 $=\dfrac{\log_{10}c-\log_{10}b}{\log_{10}a}+\dfrac{\log_{10}a-\log_{10}c}{\log_{10}b}+\dfrac{\log_{10}b-\log_{10}a}{\log_{10}c}$ ……①

$1<a<b<c$ の各辺の常用対数をとると

$$0<\log_{10}a<\log_{10}b<\log_{10}c$$

$\log_{10}a=x$，$\log_{10}b=y$，$\log_{10}c=z$ とおくと $0<x<y<z$

① から 左辺 $=\dfrac{z-y}{x}+\dfrac{x-z}{y}+\dfrac{y-x}{z}$

$=\dfrac{yz^2-y^2z+x^2z-xz^2+xy^2-x^2y}{xyz}$

$=\dfrac{(y-x)(z-x)(z-y)}{xyz}>0$

よって，与えられた不等式が成り立つ。

$\boxed{5}$

解答 (ア) $\sqrt[3]{3}$ (イ) 27 (ウ) 3

解説

解と係数の関係により

$\log_3 a+\log_a 3=\dfrac{10}{3}$ ……①，$(\log_3 a)(\log_a 3)=\dfrac{b}{3}$ ……②

① から $\log_3 a+\dfrac{1}{\log_3 a}=\dfrac{10}{3}$

整理すると $(3\log_3 a-1)(\log_3 a-3)=0$ よって $\log_3 a=\dfrac{1}{3}$，3

すなわち $a={}^{ア}\sqrt[3]{3}$ または ${}^{イ}27$

② から $b=3(\log_3 a)(\log_a 3)=3(\log_3 a)\left(\dfrac{1}{\log_3 a}\right)={}^{ウ}3$

$\boxed{6}$

解答 $(x,\ y)=(2,\ 1)$，$\left(2^{-\frac{2}{3}},\ 2^{-\frac{5}{3}}\right)$

解説

底と真数の条件から　$x>0$，$2x\neq 1$，$x\neq 1$，$y>0$，$xy>0$

よって　$x>0$，$x\neq\frac{1}{2}$，$x\neq 1$，$y>0$　……①

このとき　$\log_{2x}y+\log_x 2y=1 \iff \frac{\log_2 y}{\log_2 2x}+\frac{\log_2 2y}{\log_2 x}=1$

$$\iff \frac{\log_2 y}{1+\log_2 x}+\frac{1+\log_2 y}{\log_2 x}=1$$

$\log_2 xy=1 \iff \log_2 x+\log_2 y=1$

であるから，$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと，与えられた連立方程式は

$$\frac{Y}{1+X}+\frac{1+Y}{X}=1,\quad X+Y=1$$

第2式から　$Y=1-X$　……②

第1式に代入すると　$\frac{1-X}{1+X}+\frac{2-X}{X}=1$

よって　$(1-X)X+(2-X)(1+X)=X(1+X)$

整理して　$3X^2-X-2=0$

$(X-1)(3X+2)=0$

$X=1,\ -\frac{2}{3}$

②より　$X=1$ のとき $Y=0$，　$X=-\frac{2}{3}$ のとき $Y=\frac{5}{3}$

すなわち　$(\log_2 x,\ \log_2 y)=(1,\ 0),\ \left(-\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ \left(2^{-\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{5}{3}}\right)$　（①に適する）

7

解答　$0<a<\frac{1}{10}$，$1\leqq a<10$，$10<a$

解説

真数は正であるから　$a>0$　……①

$\log_{10}a=t$ とおくと，方程式は　$(1-t^2)x^2-2(1+t)x+1=0$　……②

これが x についての2次方程式であるから　$1-t^2\neq 0$　すなわち　$t\neq\pm 1$

よって　$\log_{10}a\neq\pm 1$　　ゆえに　$a\neq 10,\ \frac{1}{10}$　……③

また，②の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(1+t)^2-(1-t^2)=2t^2+2t=2t(t+1)$

②が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから　$t(t+1)\geqq 0$

よって　$t\leqq -1$，$0\leqq t$

ゆえに　$\log_{10}a\leqq -1$，$0\leqq\log_{10}a$

すなわち　$\log_{10}a\leqq\log_{10}10^{-1}$，$\log_{10}1\leqq\log_{10}a$

底10は1より大きいから　$a\leqq\frac{1}{10}$，$1\leqq a$　……④

①，③，④から，求める a の値の範囲は　$0<a<\frac{1}{10}$，$1\leqq a<10$，$10<a$

8

解答　(1)　$x=1,\ \sqrt[3]{4}$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (4,\ 11)$

解説

(1)　真数は正であるから　$x>0$

方程式の底を2にそろえると

$$\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=2(\log_2 x)\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 4}$$

$$\log_2 x-\frac{\log_2 x}{3}=2(\log_2 x)\cdot\frac{\log_2 x}{2}$$

$$\frac{2}{3}\log_2 x=(\log_2 x)^2$$

$$(\log_2 x)\left(\log_2 x-\frac{2}{3}\right)=0$$

よって　$\log_2 x=0$ または $\log_2 x=\frac{2}{3}$　　ゆえに　$x=1,\ \sqrt[3]{4}$

$x>0$ であるから，解は　$x=1,\ \sqrt[3]{4}$

(2)　与えられた方程式から

$\log_{10}xy=\log_{10}(y+2x^2+1)$

$xy=y+2x^2+1$

$(x-1)y=2x^2+1$　……①

$x=1$ のとき，①は $0=3$ となり，成り立たない。

よって，自然数 x は2以上である。

①から　$y=\frac{2x^2+1}{x-1}=2x+2+\frac{3}{x-1}$　……②

$x-1\ (\geqq 1)$ は3の約数であるから

$x-1=1$ または $x-1=3$

よって　$x=2$ または $x=4$

②から　$x=2$ のとき $y=9$，　$x=4$ のとき $y=11$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (4,\ 11)$

9

解答　$b\leqq 3$

解説

$\log_2 t=X$ とおく。

底2は1より大きいから，$t>4$ のとき　$X>\log_2 4=2$

また，与えられた不等式は　$X^2-bX+2>0$

$f(X)=X^2-bX+2$ とおく。

「$X>2$ を満たすすべての X について，$f(X)>0$」　……①

が成り立つ b の値の範囲を求めればよい。

$y=f(X)$ のグラフの軸は　直線 $X=\frac{b}{2}$　……(*)

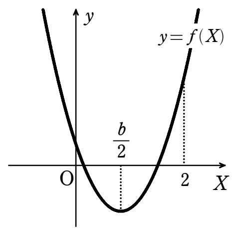
[1]　$\frac{b}{2}\leqq 2$ のとき

①が成り立つための条件は　$f(2)\geqq 0$

すなわち　$2^2-2b+2\geqq 0$

よって　$b\leqq 3$

これは $\frac{b}{2}\leqq 2$ を満たす。



[2]　$\frac{b}{2}>2$ のとき

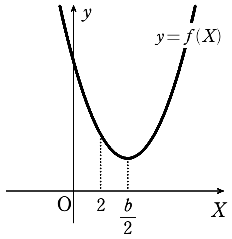
①が成り立つための条件は，$f(X)=0$ の判別式 D について　$D<0$

ここで　$D=(-b)^2-4\cdot 1\cdot 2=b^2-8$

ゆえに，$D<0$ から　$b^2-8<0$

これを解いて　$-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

ところが，これは $\frac{b}{2}>2$ を満たさない。



[1]，[2] から，求める b の値の範囲は　$b\leqq 3$

別解　（(*)以下の解答）

①が成り立つとき　$f(2)\geqq 0$

よって　$2^2-2b+2\geqq 0$　　すなわち　$b\leqq 3$

逆に，$b\leqq 3$ のとき，$y=f(X)$ のグラフの軸について　$\frac{b}{2}\leqq\frac{3}{2}<2$

また，$f(2)\geqq 0$ であるから，①が成り立つ。

ゆえに，求める b の値の範囲は　$b\leqq 3$

10

解答　(1)　5個　　(2)　順に　$\log_3 2=0.63$，7桁

解説

(1)　小数第3位に初めて0でない数が現れるから　$10^{-3}\leqq\left(\frac{5}{8}\right)^n<10^{-2}$

各辺の常用対数をとって　$-3\leqq n\log_{10}\frac{5}{8}<-2$　……①

ここで　$\log_{10}\frac{5}{8}=\log_{10}5-\log_{10}8=1-\log_{10}2-\log_{10}2^3$

$=1-4\log_{10}2=-0.204$

ゆえに，①は　$-3\leqq -0.204n<-2$

よって　$\frac{2}{0.204}<n\leqq\frac{3}{0.204}$

したがって　$9.8\cdots<n\leqq 14.7\cdots$

この不等式を満たす自然数 n の個数は　5個

(2)　$\log_3 2=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{0.3010}{0.4771}=0.63089\cdots\cdots$

小数第3位を四捨五入して　$\log_3 2=0.63$

次に，4^{10} を9進法で表したときの桁数を n とすると

$9^{n-1}\leqq 4^{10}<9^n$

各辺の3を底とする対数をとると

$\log_3 9^{n-1}\leqq\log_3 4^{10}<\log_3 9^n$

ゆえに　$(n-1)\log_3 9\leqq 10\log_3 4<n\log_3 9$

よって　$2(n-1)\leqq 20\log_3 2<2n$

各辺を2で割り，$\log_3 2=0.63$ を代入すると　$n-1\leqq 6.3<n$

ゆえに　$n\leqq 7.3$ かつ $6.3<n$　すなわち　$6.3<n\leqq 7.3$

この不等式を満たす自然数 n は　$n=7$

よって，4^{10} を9進法で表すと，7桁の数になる。

章末問題A

$\boxed{11}$

解答　$n=72$，末尾の数字は 6

解説

2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 であるから　　$4\times10^{21}\leqq 2^n<5\times10^{21}$

各辺の常用対数をとると　　$\log_{10}(4\times10^{21})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(5\times10^{21})$

$5\times10^{21}=10^{22}\div2$ であるから　　$2\log_{10}2+21\leqq n\log_{10}2<22-\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ として計算すると　　$21.6020\leqq n\times0.3010<21.6990$

よって　　　　$71.76\cdots\cdots\leqq n<72.08\cdots\cdots$

n は自然数であるから　　$n=72$

$2^4=16$ であるから，$(2^4)^m$（m は自然数）の末尾の数字は常に 6 である。

$2^{72}=(2^4)^{18}$ であるから，2^{72} の末尾の数字は　6

章末問題B

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=0$ で最小値 2　　(2)　$x=\pm1$ で最小値 a^2+a^{-2}

解説

(1)　$a^x>0$，$a^{-x}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$a^x+a^{-x}\geqq2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2 \qquad よって \qquad t\geqq2$$

等号が成り立つのは，$a^x=a^{-x}$ のときである。

$a>0$，$a\neq1$ から，$a^x=a^{-x}$ のとき　　$x=-x$　　　ゆえに　　$x=0$

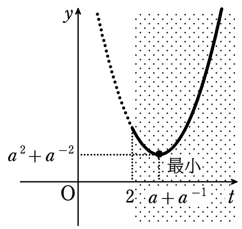
したがって，t は $x=0$ で最小値 2 をとる。

(2)　$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2\cdot a^x\cdot a^{-x}$

$\qquad=(a^x+a^{-x})^2-2=t^2-2$

よって，$f(x)$ を t で表すと

$$f(x)=(t^2-2)-2(a+a^{-1})t+2(a+a^{-1})^2$$
$$=\{t-(a+a^{-1})\}^2+(a+a^{-1})^2-2$$
$$=\{t-(a+a^{-1})\}^2+a^2+a^{-2}$$



(1) より $t\geqq2$ であり，$a+a^{-1}\geqq2$ であるから，

$f(x)$ は $t=a+a^{-1}$ で最小値 a^2+a^{-2} をとる。

$t=a+a^{-1}$ から　　$a^x+a^{-x}=a+a^{-1}$

両辺に $a^x\,(>0)$ を掛けて整理すると　　$a^{2x}-(a+a^{-1})a^x+1=0$

よって　　$(a^x-a)(a^x-a^{-1})=0$　　　ゆえに　　$a^x=a$　または　$a^x=a^{-1}$

したがって　　$x=\pm1$

よって，$f(x)$ は $x=\pm1$ で最小値 a^2+a^{-2} をとる。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=b$ のとき $\dfrac{a^3+b^3}{2}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$，$a\neq b$ のとき $\dfrac{a^3+b^3}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$

(2)　$\sqrt[3]{10}>\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$

解説

(1)　$\dfrac{a^3+b^3}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}\{4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3\}=\dfrac{3}{8}(a+b)(a-b)^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　　$\dfrac{a^3+b^3}{2}\geqq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$

ゆえに　　$a=b$ のとき　$\dfrac{a^3+b^3}{2}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$

$\qquad\qquad a\neq b$ のとき　$\dfrac{a^3+b^3}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$

(2)　(1) から，$a\neq b$ のとき　　$\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}>\dfrac{a+b}{2}$

ここで，$\dfrac{a}{2}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$，$\dfrac{b}{2}=1$ とおくと，$a=2\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}=\sqrt[3]{12}$，$b=2$ であり

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{12+8}{2}}=\sqrt[3]{10},\qquad \frac{a+b}{2}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+1$$

よって　　$\sqrt[3]{10}>\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+1$

$\boxed{3}$

解答　$a>1$ のとき　$\dfrac{\log_a(x+y)}{2},\ \dfrac{\log_a x+\log_a y}{2},\ \log_a\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

$0<a<1$ のとき　$\log_a\left(\dfrac{x+y}{2}\right),\ \dfrac{\log_a x+\log_a y}{2},\ \dfrac{\log_a(x+y)}{2}$

解説

$\dfrac{\log_a(x+y)}{2}=\log_a(x+y)^{\frac{1}{2}}$　　　$\dfrac{\log_a x+\log_a y}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a xy=\log_a(xy)^{\frac{1}{2}}$

よって　$\dfrac{x+y}{2},\ (x+y)^{\frac{1}{2}},\ (xy)^{\frac{1}{2}}$ の大小を調べるとよい．

(相加平均)≧(相乗平均) から　$\dfrac{x+y}{2}\geqq(xy)^{\frac{1}{2}}$

また　$x>2,\ y>2$ から　$x-1>1,\ y-1>1$

ゆえに　$(x-1)(y-1)>1$　すなわち　$xy>x+y$

以上から　$\dfrac{x+y}{2}\geqq(xy)^{\frac{1}{2}}>(x+y)^{\frac{1}{2}}$

よって　$a>1$ のとき　$\log_a\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\geqq\dfrac{\log_a x+\log_a y}{2}>\dfrac{\log_a(x+y)}{2}$

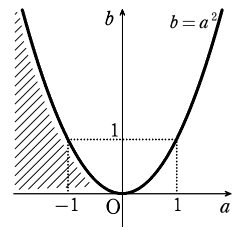
$0<a<1$ のとき　$\log_a\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqq\dfrac{\log_a x+\log_a y}{2}<\dfrac{\log_a(x+y)}{2}$

$\boxed{4}$

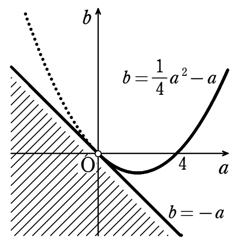
解答　(1)　[図] 斜線部分。ただし，境界線を含まない

(2)　[図] 斜線部分および太い実線部分。ただし，直線 $b=-a$ 上の点は含まない

(1)



(2)



解説

(1)　$2^x=t$ とおくと　　$t>0$

方程式は　　$t^2+2at+b=0$ ……[A]

求める条件は，2 次方程式 [A] が異なる 2 つの正の実数解をもつことである。

[A] の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とすると，

$\alpha\neq\beta$，$\alpha>0$，$\beta>0$ であるための条件は

$\qquad D>0$，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$

$D>0$ から　　$\dfrac{D}{4}=a^2-b>0$

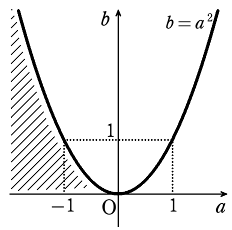
ゆえに　　　$b<a^2$　　　…… ①

$\alpha+\beta=-2a>0$ から　$a<0$　…… ②

$\alpha\beta>0$ から　　$b>0$　　　…… ③

①，②，③ の共通範囲は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



(2)　$\log_2(x^2+1)=t$ ……① とおくと，方程式は

$t^2-at+a+b=0$ ……②

$x^2\geqq 0$ より $x^2+1\geqq 1$ であるから　$\log_2(x^2+1)\geqq \log_2 1=0$

したがって　$t\geqq 0$　① を満たす x の個数は

$t=0$ のとき $x=0$ から 1 個，　$t>0$ のとき $x^2>0$ から 2 個。

求める条件は，2 次方程式 ② が $t>0$ の範囲に 1 つの実数解をもつことである。

ゆえに，次の [1]，[2] の場合である。

[1]　2 次方程式 ② が正の重解をもつ。

判別式について　$D=a^2-4(a+b)=0$

このときの重解について　$t=-\dfrac{-a}{2\cdot 1}=\dfrac{a}{2}>0$

よって　$b=\dfrac{1}{4}a^2-a$　かつ　$a>0$　……③

[2]　2 次方程式 ② が正の解と負の解をもつ。

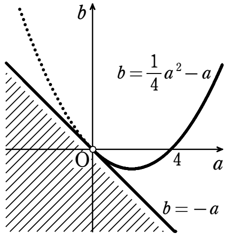
2 つの解を α，β とすると

$\alpha\beta=a+b<0$

よって　$b<-a$　……④

③，④ の範囲を図示すると，右の図の斜線部分および太い実線部分のようになる。

ただし，直線 $b=-a$ 上の点は含まない。



5

解答　(1)　$y=a^{(\log_a x)^2-3\log_a x+3}$　　(2)　(a)　$27\sqrt{3}$　　(b)　$x=27$ で最小値 $3\sqrt{3}$

(3)　$a=\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$\log_a y=(\log_a x)^2-3\log_a x+3$ から　$y=a^{(\log_a x)^2-3\log_a x+3}$

(2)　$f_a(x)=(\log_a x)^2-3\log_a x+3$ とおく。

(a)　$\log_9 3=\dfrac{1}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$f_9(3)=(\log_9 3)^2-3\log_9 3+3=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+3=\frac{7}{4}$$

よって，(1) から　$y=9^{f_9(3)}=(3^2)^{\frac{7}{4}}=3^{\frac{7}{2}}=27\sqrt{3}$

(b)　$f_9(x)=\left(\log_9 x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

したがって，$f_9(x)$ は $\log_9 x=\dfrac{3}{2}$ すなわち $x=27$ で最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

底 9 は 1 より大きいから，$y=9^{f_9(x)}$ は $f_9(x)$ が最小のとき最小値をとる。

したがって，y は $x=27$ で最小値 $9^{\frac{3}{4}}=3\sqrt{3}$ をとる。

(3)　(2) と同様にして　$f_a(x)\geqq \dfrac{3}{4}$

[1]　$a>1$ のとき

$y=a^{f_a(x)}$ は $f_a(x)$ が最小のとき最小値をとる。

よって　$y=a^{f_a(x)}\geqq a^{\frac{3}{4}}$

このとき y は最大値をもたないので不適。

[2]　$0<a<1$ のとき

$y=a^{f_a(x)}$ は $f_a(x)$ が最小のとき最大値をとる。

よって　$y=a^{f_a(x)}\leqq a^{\frac{3}{4}}$

このとき y は最大値 $a^{\frac{3}{4}}$ をもつ。

最大値が $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ であるとき　$a^{\frac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　ゆえに　$a^{\frac{3}{4}}=2^{-\frac{3}{2}}$

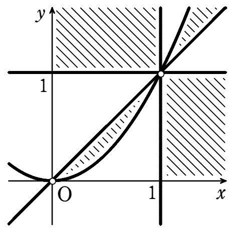
したがって　$a=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

これは $0<a<1$ を満たす。

[1]，[2] から　$a=\dfrac{1}{4}$

6

解答　〔図〕境界線を含まない



解説

真数は正で，底は 1 でない正の数であるから

$0<x<1$，$1<x$，$0<y<1$，$1<y$

$\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$ であるから，与えられた不等式は　$\log_x y+2\cdot\dfrac{1}{\log_x y}<3$

$\log_x y=t$ とすると　$t+\dfrac{2}{t}<3$　……①

また，$y\neq 1$ から，$t\neq 0$ である。

$t>0$ のとき，① の両辺に t を掛けると　$t^2+2<3t$

すなわち　$(t-1)(t-2)<0$　よって　$1<t<2$

$t>0$ との共通範囲は　$1<t<2$

$t<0$ のとき，① の両辺に t を掛けると　$t^2+2>3t$

すなわち　$(t-1)(t-2)>0$　よって　$t<1$，$2<t$

$t<0$ との共通範囲は　$t<0$

したがって　$t<0$，$1<t<2$

よって　$\log_x y<0$　または　$1<\log_x y<2$

ゆえに

$\log_x y<\log_x 1$　または　$\log_x x<\log_x y<\log_x x^2$

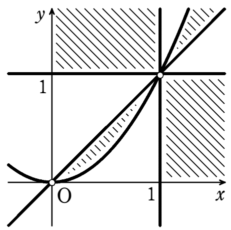
よって

$0<x<1$ のとき　$y>1$ または $x>y>x^2$

$x>1$ のとき　$0<y<1$ または $x<y<x^2$

これを図示すると，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。



7

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　13

解説

(1)　$\log_{10}3$ が有理数であると仮定する。

$\log_{10}3>0$ であるから，$\log_{10}3=\dfrac{n}{m}$（m，n は自然数）と表される。

$\log_{10}3^m=n$ から　$3^m=10^n$

一方，m，n は自然数であるから，3^m は奇数，10^n は偶数となり，$3^m=10^n$ に矛盾する。

よって，$\log_{10}3$ は無理数である。

(2)　$3^2=9<10$ より　$\log_{10}3^2<\log_{10}10$

すなわち，$2\log_{10}3<1$ から　$\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　……①

$3^{13}=1594323>10^6$ より　$\log_{10}3^{13}>\log_{10}10^6$

すなわち，$13\log_{10}3>6$ から　$\log_{10}3>\dfrac{6}{13}$　……②

①，② より　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$　……③

(3)　③ の各辺に 26 を掛けると　$\dfrac{6}{13}\times 26<26\log_{10}3<\dfrac{1}{2}\times 26$

すなわち　$12<\log_{10}3^{26}<13$　よって　$10^{12}<3^{26}<10^{13}$

ゆえに，3^{26} の桁数は　13

8

解答　(1)　$(x,\ y)=(4,\ 3)$　(2)　略

解説

(1)　$2^x+3^y=43$ から　$2^x=43-3^y$　……①

$2^x>0$ であるから　$43-3^y>0$　すなわち　$3^y<43$

これを満たす自然数 y は　$y=1,\ 2,\ 3$

[1]　$y=1$ のとき

① から　$2^x=43-3=40$　これを満たす自然数 x は存在しない。

[2]　$y=2$ のとき

① から　$2^x=43-3^2=34$　これを満たす自然数 x は存在しない。

[3]　$y=3$ のとき

① から　$2^x=43-3^3=16$　これを解くと　$x=4$

[1]～[3] から，方程式 $2^x+3^y=43$ を満たす自然数 x，y の組は　$(x,\ y)=(4,\ 3)$

また，$\log_2 4-\log_3 3=2-1=1$ となり，$(x,\ y)=(4,\ 3)$ は方程式 $\log_2 x-\log_3 y=1$ も満たす。

したがって，求める自然数の組は　$(x,\ y)=(4,\ 3)$

(2)　$\begin{cases}2^x+3^y=43 & \cdots\cdots ②\\ \log_2 x-\log_3 y=1 & \cdots\cdots ③\end{cases}$ とする。

[1]　$0<x<4$ のとき

$\log_2 x<2$ であるから，③ より　$1+\log_3 y<2$　すなわち　$\log_3 y<1$

よって　$0<y<3$

これと $0<x<4$ から　$2^x+3^y<2^4+3^3$　すなわち　$2^x+3^y<43$

よって，② と ③ を同時に満たす x，y は存在しない。

[2]　$x>4$ のとき

$\log_2 x>2$ であるから，③ より　$1+\log_3 y>2$　すなわち　$\log_3 y>1$

よって　$y>3$

これと $x>4$ から　$2^x+3^y>2^4+3^3$　すなわち　$2^x+3^y>43$

よって，② と ③ を同時に満たす x，y は存在しない。

[1]，[2] と (1) の結果から，②，③ を同時に満たす正の実数 x，y は $(x,\ y)=(4,\ 3)$ 以外に存在しない。

9

解答　104 回

解説

ボタンを押して「はずれ」が表示される確率を p とする。

装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「当たり」の出る確率は 36 % であるから，余事象の確率を考えると　$1-p^{20}=\dfrac{36}{100}$

よって　$p^{20}=\dfrac{64}{100}$　すなわち　$p=\left(\dfrac{64}{100}\right)^{\frac{1}{20}}$　…… ①

装置のボタンを n 回押したとする。

このとき，1 回以上「当たり」の出る確率は　$1-p^n$

よって，90 % 以上，すなわち $\dfrac{90}{100}$ 以上になるとすると　$1-p^n\geqq\dfrac{90}{100}$

よって　$p^n\leqq\dfrac{1}{10}$

両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}p\leqq\log_{10}\dfrac{1}{10}$　すなわち　$n\log_{10}p\leqq-1$

① から　$n\log_{10}\left(\dfrac{64}{100}\right)^{\frac{1}{20}}\leqq-1$　すなわち　$\dfrac{1}{20}n(\log_{10}64-\log_{10}100)\leqq-1$

ゆえに　$\dfrac{1}{10}n(3\log_{10}2-1)\leqq-1$

$3\log_{10}2-1<0$　であるから　$n\geqq\dfrac{10}{1-3\log_{10}2}$　…… ②

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であるから

$$\frac{10}{1-3\cdot0.3010}<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<\frac{10}{1-3\cdot0.3011}$$

よって　$103.09<\dfrac{10}{1-3\log_{10}2}<103.42$

ゆえに，② を満たす最小の自然数は　$n=104$

したがって，最低 104 回押せばよい。

1

解答　$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$，$(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

解説

等式を整理すると

$$(10^{x-y}+10^{y-z})l+10^{x-z}m-xn=13l+36m+yn\quad\cdots\cdots①$$

① に $l=1$，$m=0$，$n=0$ を代入すると　$10^{x-y}+10^{y-z}=13$　…… ②

① に $l=0$，$m=1$，$n=0$ を代入すると　$10^{x-z}=36$　…… ③

① に $l=0$，$m=0$，$n=1$ を代入すると　$-x=y$　…… ④

逆に，②，③，④ が成り立つとき，どのような整数 l，m，n に対しても ① が成り立つ。

したがって，②，③，④ を満たす実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が求めるものである。

$10^{x-z}=10^{x-y}\cdot10^{y-z}$ であるから，③ より　$10^{x-y}\cdot10^{y-z}=36$　…… ⑤

②，⑤ から，10^{x-y}，10^{y-z} は t についての 2 次方程式 $t^2-13t+36=0$ の 2 つの解である。この 2 次方程式を解くと，$(t-4)(t-9)=0$ から　$t=4,\ 9$

よって　$(10^{x-y},\ 10^{y-z})=(4,\ 9),\ (9,\ 4)$

[1]　$(10^{x-y},\ 10^{y-z})=(4,\ 9)$ のとき

$10^{x-y}=4$ と ④ から　$10^{2x}=4$　　$10^x>0$ であるから　$10^x=2$

ゆえに　$x=\log_{10}2$　このとき　$y=-\log_{10}2$

また，$10^{y-z}=9$ から　$y-z=\log_{10}9$

よって　$z=y-\log_{10}9=-(\log_{10}2+\log_{10}9)=-\log_{10}18$

[2]　$(10^{x-y},\ 10^{y-z})=(9,\ 4)$ のとき

$10^{x-y}=9$ と ④ から　$10^{2x}=9$　　$10^x>0$ であるから　$10^x=3$

ゆえに　$x=\log_{10}3$　このとき　$y=-\log_{10}3$

また，$10^{y-z}=4$ から　$y-z=\log_{10}4$

よって　$z=y-\log_{10}4=-(\log_{10}3+\log_{10}4)=-\log_{10}12$

[1]，[2] から，求める実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は

$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$，$(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

2

解答　$2-\sqrt{3}<2^x+3^y\leqq3+2\sqrt{2}$

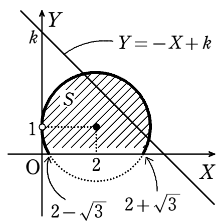
解説

$X=2^x$，$Y=3^y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

条件式から　$(2^x)^2-4\cdot2^x+(3^y)^2-2\cdot3^y\leqq-1$

よって　$X^2-4X+Y^2-2Y\leqq-1$

$(X-2)^2+(Y-1)^2\leqq4$



ゆえに，条件を満たす $(X,\ Y)$ の領域 S は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線のうち，x 軸と y 軸上の点は含まず，それ以外は含む。

$2^x+3^y=k$ とおくと　$X+Y=k$

よって　$Y=-X+k$　…… ①

この直線と領域 S が共有点をもつときの k の値の範囲を求める。

直線 ① が円 $X^2-4X+Y^2-2Y=-1$ …… ② に接する場合を考える。

① を ② に代入すると　$X^2-4X+(-X+k)^2-2(-X+k)=-1$

整理して　$X^2-(k+1)X+\dfrac{1}{2}(k-1)^2=0$　…… ③

③ の判別式を D とすると　$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}(k-1)^2=-k^2+6k-1$

直線 ① と円 ② が接するとき，$D=0$ であるから　$-k^2+6k-1=0$

ゆえに　$k=3\pm2\sqrt{2}$

$k=3+2\sqrt{2}$ のとき，直線 ① と円 ② は第 1 象限で接する。

$k=3-2\sqrt{2}$ のとき，③ の解は　$X=-\dfrac{-(k+1)}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

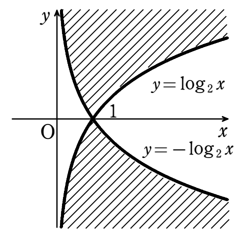
$2-\sqrt{3}<2-\sqrt{2}$ であるから，直線 ① と円 ② は第 4 象限 (領域 S の外部) で接する。

また，直線 ① が点 $(2-\sqrt{3},\ 0)$ を通るとき　$k=2-\sqrt{3}$

グラフから，$k=2^x+3^y$ のとりうる値の範囲は　$2-\sqrt{3}<2^x+3^y\leqq3+2\sqrt{2}$

3

解答　(1)［図］境界線を含む　(2)　-3



解説

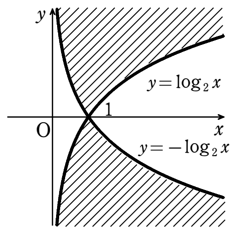
(1)　$y^2\geqq(\log_2 x)^2$ から　$(y+\log_2 x)(y-\log_2 x)\geqq0$

ゆえに　$\begin{cases}y+\log_2 x\geqq0\\ y-\log_2 x\geqq0\end{cases}$　または　$\begin{cases}y+\log_2 x\leqq0\\ y-\log_2 x\leqq0\end{cases}$

よって　$\begin{cases}y\geqq-\log_2 x\\ y\geqq\log_2 x\end{cases}$　または　$\begin{cases}y\leqq-\log_2 x\\ y\leqq\log_2 x\end{cases}$

よって，求める集合は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　$\log_2 x=n$ (n は整数) とおくと　$x=2^n$

$(\log_2 x)^2>100x^2$ から　$n^2>100\cdot2^{2n}$

[1]　$n>0$ のとき　$n>10\cdot2^n$　…… ①

一方，n は自然数であるから

$$10\cdot2^n=10\cdot(1+1)^n\geqq10({}_nC_0+{}_nC_1)=10(1+n)>n$$

よって，① を満たす整数 n は存在しない。

[2]　$n\leqq0$ のとき　$n<-10\cdot2^n$　…… ②

ここで，関数 $y=-10\cdot2^x$ は減少関数であり，n の値が増加すると $-10\cdot2^n$ の値は減少する。

$n=-3$ のとき　$-10\cdot2^{-3}=-\dfrac{5}{4}>-3$

$n=-2$ のとき　$-10\cdot2^{-2}=-\dfrac{5}{2}<-2$

よって，-3 以下の整数 n は ② を満たす。

[1]，[2] から，求める最大の整数は　-3

4

解答 (1) $k=14$ (2) 603 個

解説

(1) $10^4<2^k<2\cdot10^4$ の各辺の常用対数をとると $\log_{10}10^4<\log_{10}2^k<\log_{10}2\cdot10^4$

すなわち $4<k\log_{10}2<4+\log_{10}2$

$\log_{10}2=0.3010$ であるから $4<0.3010\times k<4+0.3010$

よって $\dfrac{4}{0.3010}<k<\dfrac{4}{0.3010}+1$

すなわち $13.2\cdots\cdots<k<14.2\cdots\cdots$

k は整数であるから $k=14$

(2) n を 0 以上の整数，k を 2004 以下の自然数とすると，$10^n\leqq2^k<2\cdot10^n$ を満たす k の個数が求めるものである。各辺の常用対数をとると

$\log_{10}10^n\leqq\log_{10}2^k<\log_{10}2\cdot10^n$

すなわち $n\leqq k\log_{10}2<n+\log_{10}2$

よって $\dfrac{n}{0.3010}\leqq k<\dfrac{n}{0.3010}+1$

区間の幅が 1 であるから，1 個の n の値に対して不等式を満たす k の値も 1 個存在する。

$\log_{10}2^{2004}=2004\log_{10}2=603.2040=603+0.2040$，$0<0.2040<0.3010$ であるから

$603<\log_{10}2^{2004}<603+\log_{10}2$

すなわち $\log_{10}10^{603}<\log_{10}2^{2004}<\log_{10}2\cdot10^{603}$

ゆえに，$10^{603}<2^{2004}<2\cdot10^{603}$ であるから，2^{2004} の最高位の数字は 1 である。

したがって，最大の n は 603 となる。

$n=0$ のとき，不等式を満たす自然数 k は存在せず，$n=1$ のとき，$k=4$ であるから，最小の n は 1 である。

よって，求める個数は 603 個

5

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 5

解説

(1) $\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n が存在すると仮定する。

このとき，$2^{\frac{m}{n}}=3$ であるから $2^m=3^n$ ……①

ところが，m，n は自然数であるから，2^m は偶数，3^n は奇数である。

よって，① の等式は矛盾である。

したがって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m，n は存在しない。

(2) $p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

このとき，この 2 数の差 $|p\log_2 3-q\log_2 3|=|(p-q)\log_2 3|=|p-q|\log_2 3$ は自然数である。

その自然数を k とすると，$|p-q|\log_2 3=k$ より $\log_2 3=\dfrac{k}{|p-q|}$

この等式が成り立つことは，(1) の結果と矛盾する。

よって，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3) $2^3<3^2$ の両辺において，2 を底とする対数をとると $\log_2 2^3<\log_2 3^2$

すなわち $3<2\log_2 3$ よって $1.5<\log_2 3$ ……②

$3^5<2^8$ の両辺において，2 を底とする対数をとると $\log_2 3^5<\log_2 2^8$

すなわち $5\log_2 3<8$ よって $\log_2 3<1.6$ ……③

②，③ から，$\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5

6

解答 (1) 4 (2) $[\log_2 125]=6$，$[\log_2 2015]=10$ (3) $n=4$，5，6，7，14，15

解説

(1) $\log_2 16=\log_2 2^4=4$

(2) $2^6<125<2^7$ より $6<\log_2 125<7$

よって $[\log_2 125]=6$

$2^{10}<2015<2^{11}$ より $10<\log_2 2015<11$

よって $[\log_2 2015]=10$

(3) $[\log_2 n]=m$ とすると，m は整数であり

$m\leqq\log_2 n<m+1$

すなわち $\log_2 2^m\leqq\log_2 n<\log_2 2^{m+1}$

底 2 は 1 より大きいから $2^m\leqq n<2^{m+1}$ ……①

また，$[\log_2(n+50)]=m+3$ より

$m+3\leqq\log_2(n+50)<m+4$

すなわち $\log_2 2^{m+3}\leqq\log_2(n+50)<\log_2 2^{m+4}$

底 2 は 1 より大きいから $2^{m+3}\leqq n+50<2^{m+4}$

よって $2^{m+3}-50\leqq n<2^{m+4}-50$ ……②

ゆえに，①，② をともに満たす n が存在するような m を考えればよい。

ここで，$2^{m+1}\leqq2^{m+3}-50$ とすると

$50\leqq(2^2-1)2^{m+1}$ よって $\dfrac{25}{3}\leqq2^m$

$\dfrac{25}{3}=8.3\cdots\cdots$ であるから，この不等式を満たす整数 m は $m\geqq4$

また，$2^{m+4}-50\leqq2^m$ とすると $(2^4-1)2^m\leqq50$

よって $2^m\leqq\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{10}{3}=3.3\cdots\cdots$ であるから，この不等式を満たす整数 m は $m\leqq1$

したがって，$m\geqq4$ のとき $2^{m+1}\leqq2^{m+3}-50$

$m\leqq1$ のとき $2^{m+4}-50\leqq2^m$

である。ゆえに，$m\leqq1$ または $4\leqq m$ のとき，①，② をともに満たす正の整数 n は存在しない。

よって，$m=2$，3 のときを考える。

[1] $m=2$ のとき，① より $4\leqq n<8$

② より $-18\leqq n<14$

これらをともに満たす n は $n=4$，5，6，7

[2] $m=3$ のとき，① より $8\leqq n<16$

② より $14\leqq n<78$

これらをともに満たす n は $n=14$，15

[1]，[2] から求める正の整数 n は

$n=4$，5，6，7，14，15

7

解答 (1) $m=2$，$n=1$ (2) 略

解説

(1) n は自然数で，$0<a<1$ であるから $0<\dfrac{1}{n+a}<\dfrac{1}{n}\leqq1$

したがって，m は $\log_2 6$ の整数部分，$\dfrac{1}{n+a}$ は $\log_2 6$ の小数部分を表している。

ここで，$2^2<6<2^3$ より $2<\log_2 6<3$ であるから $m=2$

よって $\dfrac{1}{n+a}=\log_2 6-2=\log_2 6-\log_2 2^2=\log_2\dfrac{3}{2}$

$2^{\frac{1}{2}}<\dfrac{3}{2}<2$ から $\dfrac{1}{2}<\log_2\dfrac{3}{2}<1$ すなわち $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{n+a}<1$

したがって $1<n+a<2$

n は自然数で，$0<a<1$ であるから $n=1$

(2) (1) から $\dfrac{1}{1+a}=\log_2\dfrac{3}{2}$

$a>\dfrac{2}{3}\Longleftrightarrow1+a>\dfrac{5}{3}\Longleftrightarrow\dfrac{1}{1+a}<\dfrac{3}{5}$ である。

ここで $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{3}{5}-\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{5}\left(3-5\log_2\dfrac{3}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{5}\left(\log_2 8-\log_2\dfrac{243}{32}\right)=\dfrac{1}{5}\log_2\dfrac{256}{243}>0$

したがって，不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つ。

8

解答 (1) $n=10$ (2) $n=46$

解説

(1) $0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から $3.010<10\log_{10}2<3.011$

よって，$10\log_{10}2$ の整数部分は 3 で，その小数部分は $10\log_{10}2-3$

ゆえに $0.010<\{10\log_{10}2\}<0.011<0.02$

したがって，$\{n\log_{10}2\}<0.02$ を満たす正の整数の 1 つは $n=10$

(2) 2^n の最高位の数字が 7 であるとき $7\cdot10^m\leqq2^n<8\cdot10^m$ (m は正の整数)

各辺の常用対数をとって

$\log_{10}7\cdot10^m\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}8\cdot10^m$

ゆえに $m+\log_{10}7\leqq n\log_{10}2<m+\log_{10}8$

ここで $0.8450<\log_{10}7<0.8451$

また，$\log_{10}8=3\log_{10}2$ より，$0.9030<\log_{10}8<0.9033$ であるから

$0.8451<\{n\log_{10}2\}<0.9030$ ……(*)

を満たす正の整数 n を 1 つ見つければよい。

ここで，$1.8060<6\log_{10}2<1.8066$ から $0.8060<\{6\log_{10}2\}<0.8066$

(1) より，$0.010<\{10\log_{10}2\}<0.011$ であるから

$0.8060+4\times0.010<\{46\log_{10}2\}<0.8066+4\times0.011$

すなわち $0.8460<\{46\log_{10}2\}<0.8506$

ゆえに，$n=46$ は (*) を満たすから，求める正の整数の 1 つは $n=46$

注意 $0.8060+5\times0.010=0.8560<\{56\log_{10}2\}<0.8066+5\times0.011=0.8616$ となり (*) を満たすから，$n=56$ を答えとしてもよい。