$\boxed{1}$

解答　(1)　1，4，7　　(2)　2，6　　(3)　69774　　(4)　76986

解説

(1)　□に入る数を a $(0 \leqq a \leqq 9)$ とする。

$4+2+a+5=11+a$ が３の倍数であるとき，４桁の自然数は３の倍数になる。

$11+a$ が３の倍数になるのは，$a=1,\ 4,\ 7$ のときである。

よって，求める数は　1，4，7

(2)　□に入る数を a $(0 \leqq a \leqq 9)$ とする。

下２桁が４の倍数であるとき，４桁の自然数は４の倍数になる。

下２桁すなわち $50+a$ が４の倍数になるのは，$a=2,\ 6$ のときである。

よって，求める数は　2，6

(3)　□に入る数を大きい位から a，b $(0 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9)$ とする。

$6+a+7+b+4=a+b+17$ が３の倍数であるとき，５桁の自然数は３の倍数になる。

$a+b+17$ が３の倍数になり，５桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=7$ のときである。

よって，求める自然数は　69774

(4)　□に入る数を大きい位から a，b $(0 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9)$ とする。

$7+6+a+8+b=a+b+21$ が９の倍数であるとき，５桁の自然数は９の倍数になる。

$a+b+21$ が９の倍数になり，５桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=6$ のときである。

よって，求める自然数は　76986

$\boxed{2}$

解答　$n=21,\ 84,\ 189,\ 756$

解説

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の２乗になるときである。

756 を素因数分解すると　$756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$

$2^2\cdot 3^3\cdot 7$ を　$3\cdot 7=21$ で割ると　$2^2\cdot 3^2$　すなわち $(2\cdot 3)^2$

$3^3\cdot 7=189$ で割ると　2^2

$2^2\cdot 3\cdot 7=84$ で割ると　3^2

756 で割ると　1^2

よって，求める自然数 n は　$n=21,\ 84,\ 189,\ 756$

$\boxed{3}$

解答　(1)　24　　(2)　$n=2025,\ 5625$　　(3)　５個

解説

(1)　$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

よって，求める正の約数の個数は

$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$ (個)

(2)　15 を素因数分解すると　$15=3\cdot 5$

よって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^{14}，p^2q^4 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される。

n は 45 の倍数であり，$45=3^2\cdot 5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は　$n=3^2\cdot 5^4,\ 3^4\cdot 5^2$

すなわち　$n=2025,\ 5625$

(3)　10 を素因数分解すると　$10=2\cdot 5$

よって，正の約数の個数が 10 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^9，pq^4 (p，q は異なる素数) のいずれかの形で表される。

[1]　自然数 n が p^9 の形で表されるとき

$2^9>200$ であるから，条件を満たさない。

[2]　自然数 n が pq^4 の形で表されるとき

$p=2$ とすると

$2\cdot 3^4=162$，$2\cdot 5^4>200$ であるから，$p=2$，$q=3$ は条件を満たす。

$p=3$ とすると

$3\cdot 2^4=48$，$3\cdot 5^4>200$ であるから，$p=3$，$q=2$ は条件を満たす。

$p=5$ とすると

$5\cdot 2^4=80$，$5\cdot 3^4>200$ であるから，$p=5$，$q=2$ は条件を満たす。

$p=7$ とすると

$7\cdot 2^4=112$，$7\cdot 3^4>200$ であるから，$p=7$，$q=2$ は条件を満たす。

$p=11$ とすると

$11\cdot 2^4=176$，$11\cdot 3^4>200$ であるから，$p=11$，$q=2$ は条件を満たす。

$p=13$ とすると

$13\cdot 2^4>200$ であるから，条件を満たさない。

以上から，200 以下の自然数のうち，正の約数が 10 個である数は，162，48，80，112，176 の５個である。

$\boxed{4}$

解答　(1)　最大公約数 84，最小公倍数 504　　(2)　最大公約数 42，最小公倍数 1260

解説

(1)　$168=2^3\cdot 3\cdot 7$

$252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$

最大公約数は　$2^2\cdot 3\cdot 7=84$

最小公倍数は　$2^3\cdot 3^2\cdot 7=504$

(2)　$84=2^2\cdot 3\cdot 7$

$126=2\cdot 3^2\cdot 7$

$630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 7=42$

最小公倍数は　$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(5,\ 90),\ (10,\ 45)$

(2)　$(a,\ b)=(18,\ 540),\ (36,\ 270),\ (54,\ 180),\ (90,\ 108)$

解説

(1)　最大公約数が５であるから，a，b は

$a=5a'$，$b=5b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $5a'b'$ と表されるから

$5a'b'=90$　すなわち　$a'b'=18$

$a'b'=18$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 18),\ (2,\ 9)$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 90),\ (10,\ 45)$

(2)　最大公約数が 18 であるから，a，b は

$a=18a'$，$b=18b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $18a'b'$ と表されるから

$18a'b'=540$　すなわち　$a'b'=30$

$a'b'=30$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 30),\ (2,\ 15),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6)$

よって　$(a,\ b)=(18,\ 540),\ (36,\ 270),\ (54,\ 180),\ (90,\ 108)$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(14,\ 266),\ (42,\ 238),\ (98,\ 182),\ (126,\ 154)$

(2)　$(a,\ b)=(5,\ 140),\ (20,\ 35)$　　(3)　$(a,\ b)=(77,\ 91)$

(4)　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

解説

(1)　最大公約数が 14 であるから，a，b は

$a=14a'$，$b=14b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 280 であるから　$14a'+14b'=280$

すなわち　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

よって　$(a,\ b)=(14,\ 266),\ (42,\ 238),\ (98,\ 182),\ (126,\ 154)$

(2)　最大公約数が５であるから，a，b は

$a=5a'$，$b=5b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積が 700 であるから　$25a'b'=700$

すなわち　$a'b'=28$

$a'b'=28$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 28),\ (4,\ 7)$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 140),\ (20,\ 35)$

(3)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 168 であるから　$ga'+gb'=168$

すなわち　$g(a'+b')=2^3\cdot 3\cdot 7$　……①

最小公倍数が 1001 であるから　$ga'b'=1001$

すなわち　$ga'b'=7\cdot 11\cdot 13$　……②

①，② から　$g=7$ ($g=1$ は不適)

よって　$a'+b'=2^3\cdot 3$，$a'b'=11\cdot 13$

$a'b'=11\cdot 13$，$a'<b'$を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 143),\ (11,\ 13)$

$a'+b'=2^3\cdot 3=24$ を満たすのは　$(a',\ b')=(11,\ 13)$

よって　$(a,\ b)=(77,\ 91)$

(4)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積が 300 であるから　$ga'\cdot gb'=300$

すなわち　$g\cdot ga'b'=300$　……①

最小公倍数が 60 であるから

$$ga'b'=60 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$g=5$，$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$$

よって　　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$

$\boxed{1}$

解答　(1)　1，4，7　　(2)　2，6　　(3)　79485　　(4)　43983

解説

(1)　□ に入る数を $a\ (0\leqq a\leqq 9)$ とする。

$5+8+a+7=20+a$ が 3 の倍数であるとき，4 桁の自然数は 3 の倍数になる。

$20+a$ が 3 の倍数になるのは，$a=1,\ 4,\ 7$ のときである。

よって，求める数は　　1，4，7

(2)　□ に入る数を $a\ (0\leqq a\leqq 9)$ とする。

下 2 桁が 4 の倍数であるとき，4 桁の自然数は 4 の倍数になる。

下 2 桁が 4 の倍数になるのは，$a=2,\ 6$ のときである。

よって，求める数は　　2，6

(3)　□ に入る数を大きい位から a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。

$7+a+4+b+5=a+b+16$ が 3 の倍数であるとき，5 桁の自然数は 3 の倍数になる。

$a+b+16$ が 3 の倍数になり，5 桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=8$ のときである。

よって，求める自然数は　　79485

(4)　□ に入る数を大きい位から a，b $(0\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9)$ とする。

$4+3+a+8+b=a+b+15$ が 9 の倍数であるとき，5 桁の自然数は 9 の倍数になる。

$a+b+15$ が 9 の倍数になり，5 桁の自然数が最大となるのは $a=9$，$b=3$ のときである。

よって，求める自然数は　　43983

$\boxed{2}$

解答　$n=3,\ 12,\ 48,\ 147,\ 588,\ 2352$

解説

$\sqrt{\dfrac{2352}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{2352}{n}$ がある自然数の 2 乗になるときである。

2352 を素因数分解すると　　$2352=2^4\cdot 3\cdot 7^2$

$2^4\cdot 3\cdot 7^2$ を 3 で割ると　$2^4\cdot 7^2$　すなわち　$(2^2\cdot 7)^2$

$2^2\cdot 3=12$　で割ると　$2^2\cdot 7^2$　すなわち　$(2\cdot 7)^2$

$3\cdot 7^2=147$ で割ると　2^4　すなわち　$(2^2)^2$

$2^4\cdot 3=48$　で割ると　7^2

$2^2\cdot 3\cdot 7^2=588$ で割ると　2^2

2352 で割ると　1^2

よって，求める自然数 n は　　$n=3,\ 12,\ 48,\ 147,\ 588,\ 2352$

$\boxed{3}$

解答　(1)　①　9 個　　②　24 個　　③　36 個　　(2)　$n=400,\ 2500$　　(3)　5 個

解説

(1)　①　196 を素因数分解すると　　$196=2^2\cdot 7^2$

よって，196 の正の約数の個数は

$$(2+1)(2+1)=3\cdot 3=9\ (個)$$

②　936 を素因数分解すると　　$936=2^3\cdot 3^2\cdot 13$

よって，936 の正の約数の個数は

$$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24\ (個)$$

③　3150 を素因数分解すると　　$3150=2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$

よって，3150 の正の約数の個数は

$$(1+1)(2+1)(2+1)(1+1)=2\cdot 3\cdot 3\cdot 2=36\ (個)$$

(2)　15 を素因数分解すると　　$15=3\cdot 5$

よって，正の約数の個数が 15 個である自然数 n を素因数分解すると，

$$p^{14},\ p^2q^4\quad (p,\ q\ は異なる素数)$$

のどちらかの形で表される。

n は 20 の倍数であり，$20=2^2\cdot 5$ であるから，n は p^2q^4 の形で表される。

したがって，求める自然数 n は

$$n=2^2\cdot 5^4,\ 5^2\cdot 2^4\quad すなわち\quad n=400,\ 2500$$

(3)　9 を素因数分解すると　　$9=3^2$

よって，正の約数の個数が 9 個である自然数 n を素因数分解すると，

p^8，p^2q^2 $(p,\ q$ は異なる素数$)$ のいずれかの形で表される。

[1]　自然数 n が p^8 の形で表されるとき

$2^8=256$，$3^8>300$ であるから，$p=2$ は条件を満たす。

[2]　自然数 n が p^2q^2 $(p<q)$ の形で表されるとき

$p=2$ とすると

$2^2\cdot 3^2=36$，$2^2\cdot 5^2=100$，$2^2\cdot 7^2=196$，$2^2\cdot 11^2>300$ であるから，

$q=3,\ 5,\ 7$ は条件を満たす。

$p=3$ とすると

$3^2\cdot 5^2=225$，$3^2\cdot 7^2>300$ であるから，$q=5$ は条件を満たす。

$p=5$ とすると

$5^2\cdot 7^2>300$ であるから，条件を満たさない。

以上から，300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数は，36，100，196，225，256 の 5 個である。

$\boxed{4}$

解答　(1)　最大公約数 42，最小公倍数 1512

(2)　最大公約数 13，最小公倍数 2340

解説

(1)　右の計算から最大公約数は　$2\cdot 3\cdot 7=42$

最小公倍数は　$2\cdot 3\cdot 7\cdot 4\cdot 9=1512$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 168 & 378 \\ \hline 3 & 84 & 189 \\ \hline 7 & 28 & 63 \\ \hline & 4 & 9 \end{array}$$

(2)　右の計算から最大公約数は　13

最小公倍数は　$13\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2\cdot 3=2340$

$$\begin{array}{r|rrr} 13 & 65 & 156 & 234 \\ \hline 2 & 5 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 9 \\ \hline & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(5,\ 75),\ (15,\ 25)$　　(2)　$(a,\ b)=(20,\ 160)$

解説

(1)　最大公約数が 5 であるから，a，b は

$$a=5a',\ b=5b'$$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $5a'b'$ と表されるから

$$5a'b'=75\qquad すなわち\quad a'b'=15$$

$a'b'=15$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$$

よって　$(a,\ b)=(5,\ 75),\ (15,\ 25)$

(2)　最大公約数が 20 であるから，a，b は

$a=20a'$，$b=20b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $20a'b'$ と表されるから

$20a'b'=160$　すなわち　$a'b'=8$

$a'b'=8$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 8)$

よって　$(a,\ b)=(20,\ 160)$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$(a,\ b)=(16,\ 304),\ (48,\ 272),\ (112,\ 208),\ (144,\ 176)$

(2)　$(a,\ b)=(6,\ 120),\ (24,\ 30)$　(3)　$(a,\ b)=(55,\ 85)$

(4)　$(a,\ b)=(7,\ 105),\ (21,\ 35)$

解説

(1)　最大公約数が 16 であるから，a，b は

$a=16a'$，$b=16b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 320 であるから　$16a'+16b'=320$

すなわち　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

よって　$(a,\ b)=(16,\ 304),\ (48,\ 272),\ (112,\ 208),\ (144,\ 176)$

(2)　最大公約数が 6 であるから，a，b は

$a=6a'$，$b=6b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積が 720 であるから　$36a'b'=720$

すなわち　$a'b'=20$

$a'b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 20),\ (4,\ 5)$

よって　$(a,\ b)=(6,\ 120),\ (24,\ 30)$

(3)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の和が 140 であるから　$ga'+gb'=140$

すなわち　$g(a'+b')=2^2\cdot5\cdot7$　……①

最小公倍数が 935 であるから　$ga'b'=935$

すなわち　$ga'b'=5\cdot11\cdot17$　……②

①，② から　$g=5$　($g=1$ は不適)

よって　$a'+b'=2^2\cdot7$，$a'b'=11\cdot17$

$a'b'=11\cdot17$，$a'<b'$を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 187),\ (11,\ 17)$

$a'+b'=2^2\cdot7=28$ を満たすのは　$(a',\ b')=(11,\ 17)$

よって　$(a,\ b)=(55,\ 85)$

(4)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから　$735=g\cdot105$

ゆえに　$g=7$

最小公倍数が 105 であるから　$ga'b'=105$　すなわち　$7a'b'=105$

よって　$a'b'=15$

$a'b'=15$，$a'<b'$を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

よって　$(a,\ b)=(7,\ 105),\ (21,\ 35)$

別解　a，b の積が 735 であるから　$ga'\cdot gb'=735$　……①

最小公倍数が 105 であるから　$ga'b'=105$　……②

①÷② から　$g=7$　② より　$a'b'=15$ (以下同様)

$\boxed{1}$

解答　$n=180$

解説

$\dfrac{n}{36}$，$\dfrac{n}{45}$ がともに自然数となるから，n は 36 の倍数かつ 45 の倍数である。

このような n のうちで，最も小さいものは，36 と 45 の最小公倍数である。

36 と 45 を素因数分解すると　$36=2^2\cdot3^2$，$45=3^2\cdot5$

よって，求める n の値は　$n=2^2\cdot3^2\cdot5=180$

$\boxed{2}$

解答　385

解説

$\sqrt{\dfrac{500}{77n}}=\sqrt{\dfrac{2^2\cdot5^3}{7\cdot11n}}=10\sqrt{\dfrac{5}{7\cdot11n}}$ であるから，これが有理数となるような最小の自然数 n は　$n=5\cdot7\cdot11=385$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$n=9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144$　(2)　$n=125,\ 250,\ 500,\ 375,\ 750,\ 1500$

解説

(1)　16 と 144 を素因数分解すると

$16=2^4$，$144=2^4\cdot3^2$

よって，16 との最小公倍数が 144 である自然数 n は

$n=2^a\cdot3^2$　$(a=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^0\cdot3^2,\ 2^1\cdot3^2,\ 2^2\cdot3^2,\ 2^3\cdot3^2,\ 2^4\cdot3^2$

すなわち　$n=9,\ 18,\ 36,\ 72,\ 144$

(2)　12，50，1500 を素因数分解すると

$12=2^2\cdot3$，$50=2\cdot5^2$，$1500=2^2\cdot3\cdot5^3$

よって，12，50 との最小公倍数が 1500 である自然数 n は

$n=2^a\cdot3^b\cdot5^3$　$(a=0,\ 1,\ 2;\ \ b=0,\ 1)$

と表される。

したがって，求める自然数 n は

$n=2^0\cdot3^0\cdot5^3,\ 2^1\cdot3^0\cdot5^3,\ 2^2\cdot3^0\cdot5^3,\ 2^0\cdot3^1\cdot5^3,\ 2^1\cdot3^1\cdot5^3,\ 2^2\cdot3^1\cdot5^3$

すなわち　$n=125,\ 250,\ 500,\ 375,\ 750,\ 1500$

□1

解答　$a=30, b=48, c=72$

解説

(A) から，a', b', c' をその最大公約数が 1 である正の整数として

$a=6a', b=6b', c=6c'\ (0<a'<b'<c')$ とおける．

(B) から，b'', c'' を互いに素である正の整数として

$b=24b'', c=24c''\ (0<b''<c'')$ とおけて　$24b''c''=144$

よって　$b''c''=6$　　$b''<c''$ であるから　$(b'', c'')=(1, 6), (2, 3)$

$(b'', c'')=(1, 6)$ のとき　$a=2\cdot3a', b=2^3\cdot3, c=2^4\cdot3^2$

(C) について　$240=2^4\cdot3\cdot5$　　また $a'<b'=4$ から，(C) に反する．

$(b'', c'')=(2, 3)$ のとき　$a=2\cdot3a', b=2^4\cdot3,\ c=2^3\cdot3^2$

$a'<b'=8$ から，(C) について　$a'=5$

よって　$a=6\cdot5=30, b=48, c=72$

□2

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$N=1001a+99b+11c+(b+d-a-c)$

$=11\times(91a+9b+c)+(b+d-a-c)$

と変形でき，$91a+9b+c$，$b+d-a-c$ は整数である。

よって　N が 11 で割り切れる $\Longleftrightarrow$ $(b+d)-(a+c)$ が 11 の倍数

(2)　$N=10^6\times a+10^3b+c$ とする。

ただし a，b，c は $100\leqq a\leqq999$，$0\leqq b\leqq999$，$0\leqq c\leqq999$

$a+c-b=7m$（m は整数）と表されるとすると

$c=7m+b-a$

よって　$N=10^6a+10^3b+(7m+b-a)$

$=(10^6-1)a+1001b+7m$

$=7\times142857a+7\times143b+7m$

$=7(142857a+143b+m)$

$142857a+143b+m$ は整数であるから，N は 7 の倍数である。

□1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　a，b は 7 の倍数であるから，整数 k，l を用いて

$a=7k$，$b=7l$

と表される。

よって　$4a+5b=4\cdot7k+5\cdot7l=7(4k+5l)$

$4k+5l$ は整数であるから，$4a+5b$ は 7 の倍数である。

(2)　$a+2$，$a+3$ は，自然数 k，l を用いて

$a+2=5k$，$a+3=7l$

と表される。

$a+17=(a+2)+15=5k+15=5(k+3)$

$a+17=(a+3)+14=7l+14=7(l+2)$

よって　$5(k+3)=7(l+2)$

$5(k+3)$ は 7 の倍数であるが，5 と 7 は互いに素であるから，$k+3$ は 7 の倍数である。

したがって，自然数 m を用いて

$k+3=7m$

と表されるから　$a+17=5(k+3)=5\cdot7m=35m$

したがって，$a+17$ は 35 の倍数である。

□2

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　すべての整数 n は

$n=2k$，$n=2k+1$　(k は整数)

のいずれかの形で表される。

[1]　$n=2k$ のとき

$n^2+5n+4=(2k)^2+5\cdot2k+4=2(2k^2+5k+2)$

[2]　$n=2k+1$ のとき

$n^2+5n+4=(2k+1)^2+5(2k+1)+4=4k^2+14k+10=2(2k^2+7k+5)$

いずれの場合も n^2+5n+4 は偶数である。

よって，n^2+5n+4 は偶数である。

別解　(与式)$=n(n+1)+4(n+1)$ であり，連続する 2 つの整数の積 $n(n+1)$ は偶数で，$4(n+1)$ も偶数であるから，n^2+5n+4 は偶数である。

(2)　すべての整数 n は

$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$　(k は整数)

のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot3k^2+1$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$

いずれの場合も n^2+1 は 3 の倍数でない。

よって，n^2+1 は 3 の倍数でない。

□3

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

(2)　$n^3+9n^2+8n=n(n+1)(n+8)=n(n+1)\{(n+2)+6\}$

$=n(n+1)(n+2)+6n(n+1)$

連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であるから，$n(n+1)(n+2)$ は 6 の倍数である。

また，$6n(n+1)$ も 6 の倍数である。

よって，n^3+9n^2+8n は 6 の倍数である。

(3)　$2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$

$=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$

$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$

$n(n+1)(n+2)$，$(n-1)n(n+1)$ は，連続する 3 整数の積であり，6 の倍数である。

よって，$2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数である。

□4

解答　(1)　4　　(2)　11　　(3)　9

解説

(1)　$n\equiv3 \pmod 8$ のとき

$n^2+2n+5\equiv3^2+2\cdot3+5$

$\equiv20\equiv4 \pmod 8$

よって，n^2+2n+5 を 8 で割った余りは　4

(2)　$n\equiv15 \pmod{17}$ のとき

$3n^2+5n+9\equiv3\cdot15^2+5\cdot15+9$

$\equiv759\equiv11 \pmod{17}$

よって，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余りは　11

別解　$3n^2+5n+9\equiv3\cdot15^2+5\cdot15+9$

$\equiv3\cdot225+75+9$

$\equiv3\cdot4+7+9\equiv28$

$\equiv11 \pmod{17}$

(3)　$n\equiv2 \pmod{35}$ のとき

$n^4+3n^3+4\equiv2^4+3\cdot2^3+4$

$\equiv16+24+4\equiv44$

$\equiv9 \pmod{35}$

よって，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余りは　9

□5

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　3　　(4)　7　　(5)　9　　(6)　43

解説

(1)　$37\equiv1 \pmod 6$ であるから　　$37^{100}\equiv1^{100}\equiv1 \pmod 6$

よって，37^{100} を 6 で割った余りは　1

(2)　$5^2\equiv1 \pmod 8$ であるから　　$5^{80}\equiv(5^2)^{40}\equiv1^{40}\equiv1 \pmod 8$

よって，5^{80} を 8 で割った余りは　1

(3)　$3^3\equiv1 \pmod{13}$ であるから　　$3^{100}\equiv(3^3)^{33}\cdot3\equiv1^{33}\cdot3\equiv3 \pmod{13}$

よって，3^{100} を 13 で割った余りは　3

(4)　$4^3 \equiv 1 \pmod 9$ であるから　$4^{200} \equiv (4^3)^{66} \cdot 4^2 \equiv 1^{66} \cdot 4^2 \equiv 7 \pmod 9$

よって，4^{200} を 9 で割った余りは　7

(5)　123^{122} の一の位は 123^{122} を 10 で割った余りに等しい。以下，10 を法として考える。

$123 \equiv 3$，$123^2 \equiv 3^2 \equiv 9$，$123^3 \equiv 3^3 \equiv 7$，$123^4 \equiv 3^4 \equiv 1$

よって　$123^{122} \equiv (123^4)^{30} \cdot 123^2 \equiv 1^{30} \cdot 9 \equiv 9$

したがって，123^{122} の一の位は　9

(6)　7^{251} の下 2 桁は 7^{251} を 100 で割った余りに等しい。以下，100 を法として考える。

$7^2 \equiv 49$，$7^3 \equiv 49 \cdot 7 \equiv 343 \equiv 43$，$7^4 \equiv 43 \cdot 7 \equiv 301 \equiv 1$

よって　$7^{251} \equiv (7^4)^{62} \cdot 7^3 \equiv 1^{62} \cdot 43 \equiv 43$

したがって，7^{251} の下 2 桁は　43

6

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$n^5 + n^2 + 2 \equiv 2 \pmod 3$$

[2]　$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$n^5 + n^2 + 2 \equiv 1^5 + 1^2 + 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$$

[3]　$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$n^5 + n^2 + 2 \equiv 2^5 + 2^2 + 2 \equiv 38 \equiv 2 \pmod 3$$

よって，$n^5 + n^2 + 2$ は 3 の倍数でない。

(2)　$5^{n+1} + 6^{2n-1} \equiv 5^2 \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 6^{2(n-1)} \equiv 25 \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 36^{n-1}$

$$\equiv (-6) \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 5^{n-1} \equiv 0 \pmod{31}$$

よって，$5^{n+1} + 6^{2n-1}$ は 31 の倍数である。

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　a，b は 7 の倍数であるから，整数 k，l を用いて，$a = 7k$，$b = 7l$ と表される。

よって　$a + 3b = 7k + 3 \cdot 7l = 7(k + 3l)$

$k + 3l$ は整数であるから，$a + 3b$ は 7 の倍数である。

(2)　$n+1$，$n+4$ は，自然数 k，l を用いて

$$n + 1 = 6k, \quad n + 4 = 9l$$

と表される。

$$n + 13 = (n+1) + 12 = 6k + 12 = 6(k+2)$$

$$n + 13 = (n+4) + 9 = 9l + 9 = 9(l+1)$$

よって　$6(k+2) = 9(l+1)$　すなわち　$2(k+2) = 3(l+1)$

$2(k+2)$ は 3 の倍数であるが，2 と 3 は互いに素であるから，$k+2$ は 3 の倍数である。

よって，自然数 m を用いて　$k + 2 = 3m$　と表されるから

$$n + 13 = 6(k+2) = 6 \cdot 3m = 18m$$

したがって，$n + 13$ は 18 の倍数である。

2

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される。

$n^4 + 2n^2 = n^2(n^2 + 2)$ であるから

[1]　$n = 3k$ のとき

$$n^4 + 2n^2 = 9k^2(9k^2 + 2) = 3 \cdot 3k^2(9k^2 + 2)$$

[2]　$n = 3k+1$ のとき

$$n^4 + 2n^2 = (3k+1)^2(9k^2 + 6k + 1 + 2) = 3(3k+1)^2(3k^2 + 2k + 1)$$

[3]　$n = 3k+2$ のとき

$$n^4 + 2n^2 = (3k+2)^2(9k^2 + 12k + 4 + 2) = 3(3k+2)^2(3k^2 + 4k + 2)$$

よって，$n^4 + 2n^2$ は 3 の倍数である。

(2)　すべての整数 n は，$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ (k は整数) のいずれかの形で表される。

[1]　$n = 5k$ のとき　$n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + k) + 1$

[2]　$n = 5k+1$ のとき　$n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 3k) + 3$

[3]　$n = 5k+2$ のとき　$n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 5k + 1) + 2$

[4]　$n = 5k+3$ のとき　$n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 7k + 2) + 3$

[5]　$n = 5k+4$ のとき　$n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 9k + 4) + 1$

それぞれの場合について，$n^2 + n + 1$ を 5 で割った余りは，1，3，2，3，1 であり，

$n^2 + n + 1$ は 5 で割り切れない。

(3)　すべての整数 n は

$$n = 7k, \quad n = 7k \pm 1, \quad n = 7k \pm 2, \quad n = 7k \pm 3 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

[1]　$n = 7k$ のとき

$$n^2 = (7k)^2 = 49k^2 = 7 \cdot 7k^2$$

[2]　$n = 7k \pm 1$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 1)^2 = 49k^2 \pm 14k + 1 = 7(7k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順})$$

[3]　$n = 7k \pm 2$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 2)^2 = 49k^2 \pm 28k + 4 = 7(7k^2 \pm 4k) + 4 \quad (\text{複号同順})$$

[4]　$n = 7k \pm 3$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 3)^2 = 49k^2 \pm 42k + 9 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2 \quad (\text{複号同順})$$

よって，n^2 を 7 で割ったときの余りは，0 か 1 か 2 か 4 である。

3

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略　　(5)　略

解説

(1)　$n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = n(n^2 - 1) + 6n$

$$= (n-1)n(n+1) + 6n$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

$6n$ も 6 の倍数である。

よって，$n^3 + 5n$ は 6 の倍数である。

(2)　$2n^3 + 4n = 2(n^3 - n) + 6n = 2n(n^2 - 1) + 6n$

$$= 2(n-1)n(n+1) + 6n$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

$6n$ も 6 の倍数である。

よって，$2n^3 + 4n$ は 6 の倍数である。

(3)　$n^3 - 3n^2 - 4n = n(n+1)(n-4) = n(n+1)\{(n+2) - 6\}$

$$= n(n+1)(n+2) - 6n(n+1)$$

$n(n+1)(n+2)$ は，連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

また，$6n(n+1)$ も 6 の倍数である。

よって，$n^3 - 3n^2 - 4n$ は 6 の倍数である。

(4)　$2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1) = n(n-1)\{(n-2) + (n+1)\}$

$$= (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1)$$

$(n-2)(n-1)n$，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，どちらも 6 の倍数である。

よって，$2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数である。

(5)　$2n^3 + 3n^2 - 5n = n(n-1)(2n+5)$

$$= n(n-1)\{2(n+1) + 3\}$$

$$= 2(n-1)n(n+1) + 3(n-1)n$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

また，$(n-1)n$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。

よって，$3(n-1)n$ は 6 の倍数である。

したがって，$2n^3 + 3n^2 - 5n$ は 6 の倍数である。

4

解答　(1)　4　　(2)　6

解説

(1)　$n \equiv 2 \pmod 5$ のとき　$n^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod 5$

よって，n^6 を 5 で割った余りは　4

(2)　$n \equiv 3 \pmod 7$ のとき

$$2n^2 + 5n + 8 \equiv 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 8 \equiv 41 \equiv 6 \pmod 7$$

よって，$2n^2+5n+8$ を 7 で割った余りは　6

5

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　4　　(4)　9　　(5)　7　　(6)　49

解説

(1)　$26\equiv 1 \pmod{5}$ であるから　　$26^{100}\equiv 1^{100}\equiv 1 \pmod{5}$

よって，26^{100} を 5 で割った余りは　1

(2)　$7^2\equiv 1 \pmod{8}$ であるから　　$7^{60}\equiv (7^2)^{30}\equiv 1^{30}\equiv 1 \pmod{8}$

よって，7^{60} を 8 で割った余りは　1

(3)　$4^3\equiv 1 \pmod{7}$ であるから　　$4^{100}\equiv (4^3)^{33}\cdot 4\equiv 1^{33}\cdot 4\equiv 4 \pmod{7}$

よって，4^{100} を 7 で割った余りは　4

(4)　$3^3\equiv 1 \pmod{13}$ であるから　　$3^{200}\equiv (3^3)^{66}\cdot 3^2\equiv 1^{66}\cdot 3^2\equiv 9 \pmod{13}$

よって，3^{200} を 13 で割った余りは　9

(5)　23^{23} の一の位は，23^{23} を 10 で割った余りに等しい。

10 を法として考えると

$$23\equiv 3,\ 23^2\equiv 3^2\equiv 9,\ 23^3\equiv 3^3\equiv 7,\ 23^4\equiv 3^4\equiv 1$$

よって，$23^{23}\equiv (23^4)^5\cdot 23^3\equiv 1^5\cdot 7\equiv 7 \pmod{10}$

したがって，23^{23} の一の位は　7

(6)　7^{50} の下 2 桁は，7^{50} を 100 で割った余りに等しい。

100 を法として考えると

$$7^2\equiv 49,\ 7^3\equiv 49\cdot 7\equiv 343\equiv 43,\ 7^4\equiv 43\cdot 7\equiv 301\equiv 1$$

よって，$7^{50}\equiv (7^4)^{12}\cdot 7^2\equiv 1^{12}\cdot 49\equiv 49 \pmod{100}$

したがって，7^{50} の下 2 桁は　49

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　[1]　$n\equiv 0 \pmod{5}$ のとき

$$n^2+n+1\equiv 0^2+0+1\equiv 1 \pmod{5}$$

[2]　$n\equiv 1 \pmod{5}$ のとき

$$n^2+n+1\equiv 1^2+1+1\equiv 3 \pmod{5}$$

[3]　$n\equiv 2 \pmod{5}$ のとき

$$n^2+n+1\equiv 2^2+2+1\equiv 7\equiv 2 \pmod{5}$$

[4]　$n\equiv 3 \pmod{5}$ のとき

$$n^2+n+1\equiv 3^2+3+1\equiv 13\equiv 3 \pmod{5}$$

[5]　$n\equiv 4 \pmod{5}$ のとき

$$n^2+n+1\equiv 4^2+4+1\equiv 21\equiv 1 \pmod{5}$$

よって，いずれの場合も $n^2+n+1\equiv 0 \pmod{5}$ でないから，n^2+n+1 は 5 で割り切れない。

(2)　$2^{6n-5}+3^{2n}\equiv 2\cdot 2^{6(n-1)}+(3^2)^n\equiv 2\cdot 64^{n-1}+9^n$

$$\equiv 2\cdot(-2)^{n-1}+(-2)^n$$

$$\equiv -(-2)^n+(-2)^n\equiv 0 \pmod{11}$$

よって，$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である。

(3)　$4^{n+1}+5^{2n-1}\equiv 4^2\cdot 4^{n-1}+5\cdot 5^{2(n-1)}$

$$\equiv 16\cdot 4^{n-1}+5\cdot 25^{n-1}$$

$$\equiv -5\cdot 4^{n-1}+5\cdot 4^{n-1}\equiv 0 \pmod{21}$$

よって，$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 の倍数である。

1

解答　略

解説

すべての整数 n は

$$n=7k,\quad n=7k\pm 1,\quad n=7k\pm 2,\quad n=7k\pm 3\quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

[1]　$n=7k$ のとき

$$n^2=(7k)^2=49k^2=7\cdot 7k^2$$

[2]　$n=7k\pm 1$ のとき

$$n^2=(7k\pm 1)^2=49k^2\pm 14k+1$$
$$=7(7k^2\pm 2k)+1\quad (\text{複号同順})$$

[3]　$n=7k\pm 2$ のとき

$$n^2=(7k\pm 2)^2=49k^2\pm 28k+4$$
$$=7(7k^2\pm 4k)+4\quad (\text{複号同順})$$

[4]　$n=7k\pm 3$ のとき

$$n^2=(7k\pm 3)^2=49k^2\pm 42k+9$$
$$=7(7k^2\pm 6k+1)+2\quad (\text{複号同順})$$

よって，n^2 を 7 で割ったときの余りは，0 か 1 か 2 か 4 である。

2

解答　略

解説

連続する 3 つの奇数を $2k-1$，$2k+1$，$2k+3$ (k は整数) とすると

$$N=(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2+1$$
$$=(4k^2-4k+1)+(4k^2+4k+1)+(4k^2+12k+9)+1$$
$$=12k^2+12k+12=12(k^2+k+1)$$
$$=12\{k(k+1)+1\}$$

$k(k+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから，2 の倍数である。

よって，$k(k+1)+1$ は奇数である。

したがって，N は 12 の倍数であるが，24 の倍数ではない。

3

解答　略

解説

$m^3n-mn^3=(m^3-m)n-(n^3-n)m=(m-1)m(m+1)n-(n-1)n(n+1)m$

$(m-1)m(m+1)$，$(n-1)n(n+1)$ はともに連続する 3 整数の積であるから，6 の倍数である。

ゆえに，k，l を整数として，次のように表される。

$$(m-1)m(m+1)=6k,\ (n-1)n(n+1)=6l$$

よって　　$m^3n-mn^3=6(kn-lm)$

したがって，m^3n-mn^3 は 6 の倍数である。

4［お茶の水女子大］

解答　略

解説

a，b が 3 で割り切れないとき，a，b は 2 つの整数 m，n を用いて

[1]　$a=3m+1$，$b=3n+1$　　　[2]　$a=3m+1$，$b=3n+2$

[3]　$a=3m+2$，$b=3n+1$　　[4]　$a=3m+2$，$b=3n+2$

のいずれかの形で表される。

このうち，$a-b$ が 3 で割り切れないのは [2]，[3] の場合である。

[2] の場合

$$a^3+b^3=(3m+1)^3+(3n+2)^3$$
$$=(27m^3+27m^2+9m+1)+(27n^3+54n^2+36n+8)$$
$$=9(3m^3+3m^2+m+3n^3+6n^2+4n+1)$$

$3m^3+3m^2+m+3n^3+6n^2+4n+1$ は整数であるから，a^3+b^3 は 9 の倍数，すなわち 9 で割り切れる。

[3] の場合も同様に，a^3+b^3 は 9 で割り切れる。

よって，a，b，$a-b$ がどれも 3 で割り切れないとき，a^3+b^3 は 9 で割り切れる。

別解　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　……①

[2]，[3] の場合，$a+b$ は 3 の倍数となるから，$a+b=3q$　(q は整数)　と表される。

これを ① に代入して

$$a^3+b^3=(3q)^3-3ab\cdot 3q=27q^3-9abq=9(3q^3-abq)$$

$3q^3-abq$ は整数であるから，a^3+b^3 は 9 で割り切れる。

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　[1]　n が偶数　すなわち　$n=2k$ (k は整数) のとき

$$N=2(2k)^3+4\cdot 2k=16k^3+8k=8k(2k^2+1)$$

[A]　$k=3l$ (l は整数) のとき

$$N=8\cdot 3l\{2(3l)^2+1\}=24l\{2(3l)^2+1\}$$

[B]　$k=3l+1$ (l は整数) のとき

$$N=8(3l+1)\{2(3l+1)^2+1\}=8(3l+1)(18l^2+12l+3)$$
$$=24(3l+1)(6l^2+4l+1)$$

[C]　$k=3l+2$ (l は整数) のとき

$$N=8(3l+2)\{2(3l+2)^2+1\}=8(3l+2)(18l^2+24l+9)$$
$$=24(3l+2)(6l^2+8l+3)$$

以上から，n が偶数のとき N は 24 で割り切れる。

[2]　n が奇数　すなわち　$n=2k+1$ (k は整数) のとき

$$N=2(2k+1)^3+4(2k+1)=2(8k^3+12k^2+6k+1)+(8k+4)$$
$$=16k^3+24k^2+20k+6=4(4k^3+6k^2+5k+1)+2$$

以上から，n が奇数のとき N は 4 で割り切れない。

(2)　自然数は k を自然数として $6k-5$，$6k-4$，$6k-3$，$6k-2$，$6k-1$，$6k$ のどれかで表される。このうち，2 でも 3 でも割り切れないのは $6k-5$，$6k-1$ である。

[1]　$P=6k-1$ のとき

$$P^2-1=(6k-1)^2-1=36k^2-12k=12k(3k-1)$$

k が偶数のとき，$12k$ が 24 の倍数であり，P^2-1 は 24 で割り切れる。また，k が奇数のとき，$3k-1$ は偶数となり，P^2-1 は 24 で割り切れる。

[2]　$P=6k-5$ のとき

$$P^2-1=(6k-5)^2-1=36k^2-60k+24=12(k-1)(3k-2)$$

k が偶数のとき，$3k-2$ は偶数となり，P^2-1 は 24 で割り切れる。また，k が奇数のとき，$k-1$ は偶数となり，P^2-1 は 24 で割り切れる。

したがって，いずれの場合も題意は成り立つ。

2

解答　略

解説

$n=2$ のとき　$n^2+2=2^2+2=6$ は素数ではない。

$n=3$ のとき　$n^2+2=3^2+2=11$ は素数である。

3 以外の素数はすべて 3 で割り切れないから，n ($n\geqq 4$) が素数であるとき，

$n=3k+1$ または $n=3k+2$ (k は自然数) と表される。

[1]　$n=3k+1$ のとき

$$n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$$

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$$

[1]，[2] のいずれの場合も，n^2+2 は 3 で割り切れて，しかも 3 より大きい自然数であるから，素数ではない。

したがって，2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限る。

3

解答　略

解説

すべての整数 n は $n=2k$，$n=2k+1$ (k は整数) のどちらかの形で表される。

$n=2k$ のとき　　$n^2=(2k)^2=4k^2$

$n=2k+1$ のとき　$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

よって，n^2 を 4 で割ったときの余りは，0 か 1 である。

ゆえに，a，b がともに偶数でないと仮定すると，a^2，b^2 を 4 で割った余りは 1 であるから　　a^2+b^2 を 4 で割った余りは　2

c^2 を 4 で割った余りは　0 か 1

したがって，$a^2+b^2\neq c^2$ となり矛盾する。

よって，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数である。

参考　例題 79 の証明は，命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより，もとの命題が真であると結論する方法を用いている。このような証明方法を **背理法** といい，数学Ⅰ「集合と命題」で学習する。

4

解答　(1)　$n=3k+2$ (k は 0 以上の整数)　　(2)　略

解説

(1)　n^3+1 が 3 で割り切れるものを考えるから，$n^3+1\equiv 0 \pmod 3$ を満たす自然数 n を求めればよい。

3 を法として，$n\equiv 0$，1，2 の各場合に関し，n^3+1 を計算すると，次の表のようになる。

n	0	1	2
n^3	$0^3\equiv 0$	$1^3\equiv 1$	$2^3=8\equiv 2$
n^3+1	$0+1\equiv 1$	$1+1\equiv 2$	$2+1=3\equiv 0$

よって，$n^3+1\equiv 0 \pmod 3$ を満たすのは，$n\equiv 2 \pmod 3$ の場合である。

したがって　　$n=3k+2$ (k は 0 以上の整数)

(2)　3 を法として，$n\equiv 0$，1，2 の各場合に関し，n^6+1 を計算すると，次の表のようになる。

n	0	1	2
n^6	$0^6\equiv 0$	$1^6\equiv 1$	$2^6=64\equiv 1$
n^6+1	$0+1\equiv 1$	$1+1\equiv 2$	$1+1\equiv 2$

よって，いずれの場合も $n^6+1\equiv 0 \pmod 3$ を満たさない。

したがって，n^6+1 は 3 で割り切れない。

1

解答　①　31　　②　17

解説

①　$961=217\cdot 4+93$

$217=93\cdot 2+31$

$93=31\cdot 3+0$

よって，最大公約数は　31

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & 2 & 4 \\ 31) & 93 &)\,217 &)\,961 \\ \uparrow & 93 & 186 & 868 \\ & 0 & 31 & 93 \end{array}$$

最大公約数

②　$833=646\cdot 1+187$

$646=187\cdot 3+85$

$187=85\cdot 2+17$

$85=17\cdot 5+0$

よって，最大公約数は　17

$$\begin{array}{rrrrr} & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 17) & 85 &)\,187 &)\,646 &)\,833 \\ & 85 & 170 & 561 & 646 \\ & 0 & 17 & 85 & 187 \end{array}$$

2

解答　$n=1,\ 11,\ 16,\ 26,\ 31,\ 41,\ 46$

解説

$7n+3=(2n+3)\cdot 3+n-6$，　$2n+3=(n-6)\cdot 2+15$

よって，$7n+3$ と $2n+3$ の最大公約数は，$n-6$ と 15 の最大公約数に等しい。

$15=3\cdot 5$ であるから，$n-6$ は 5 の倍数であるが，3 の倍数でない。

また，$-5\leqq n-6\leqq 44$ であるから　　$n-6=-5,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 35,\ 40$

よって　　$n=1,\ 11,\ 16,\ 26,\ 31,\ 41,\ 46$

3

解答　(1)　$x=-2,\ y=7$　　(2)　$x=-13,\ y=9$　　(3)　$x=-30,\ y=-81$

解説

(1)　24 と 7 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$24=7\cdot 3+3$　移項すると　$3=24-7\cdot 3$

$7=3\cdot 2+1$　移項すると　$1=7-3\cdot 2$

よって　$1=7-3\cdot 2$

$=7-(24-7\cdot 3)\cdot 2$

$=24\cdot(-2)+7\cdot 7$

すなわち　$24\cdot(-2)+7\cdot 7=1$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=-2,\ y=7$

(2)　29 と 42 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$42=29\cdot 1+13$　　移項すると　$13=42-29\cdot 1$

$29=13\cdot 2+3$　　移項すると　$3=29-13\cdot 2$

$13=3\cdot 4+1$　　移項すると　$1=13-3\cdot 4$

よって　　$1=13-3\cdot 4$

$=13-(29-13\cdot 2)\cdot 4$

$=13\cdot 9+29\cdot(-4)$

$=(42-29\cdot 1)\cdot 9+29\cdot(-4)$

$=29\cdot(-13)+42\cdot 9$

すなわち　　$29\cdot(-13)+42\cdot 9=1$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$x=-13,\ y=9$

(3)　62 と 23 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$62=23\cdot 2+16$　　移項すると　$16=62-23\cdot 2$

$23=16\cdot 1+7$　　移項すると　$7=23-16\cdot 1$

$16=7\cdot 2+2$　　移項すると　$2=16-7\cdot 2$

$7=2\cdot 3+1$　　移項すると　$1=7-2\cdot 3$

よって　　$1=7-2\cdot 3=7-(16-7\cdot 2)\cdot 3$

$=7\cdot 7+16\cdot(-3)=(23-16\cdot 1)\cdot 7+16\cdot(-3)$

$=23\cdot 7+16\cdot(-10)=23\cdot 7+(62-23\cdot 2)\cdot(-10)$

$=62\cdot(-10)+23\cdot 27=62\cdot(-10)-23\cdot(-27)$

すなわち　　$62\cdot(-10)-23\cdot(-27)=1$

両辺に 3 を掛けて　　$62\cdot(-30)-23\cdot(-81)=3$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　　$x=-30,\ y=-81$

4

解答　k は整数とする。

(1)　$x=14k+3,\ y=-33k-7$　　(2)　$x=42k-65,\ y=-29k+45$

解説

(1)　　$33x+14y=1$　　……①

$x=3,\ y=-7$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　　$33\cdot 3+14\cdot(-7)=1$　……②

①－② から　$33(x-3)+14(y+7)=0$　……③

33 と 14 は互いに素であるから，③ より

$x-3=14k,\ y+7=-33k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は

$x=14k+3,\ y=-33k-7$　(k は整数)

参考　33 と 14 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$33=14\cdot 2+5$　　移項すると　$5=33-14\cdot 2$

$14=5\cdot 2+4$　　移項すると　$4=14-5\cdot 2$

$5=4\cdot 1+1$　　移項すると　$1=5-4\cdot 1$

よって　　$1=5-4\cdot 1$

$=5-(14-5\cdot 2)\cdot 1$

$=5\cdot 3+14\cdot(-1)$

$=(33-14\cdot 2)\cdot 3+14\cdot(-1)$

$=33\cdot 3+14\cdot(-7)$

(2)　　$29x+42y=5$　　……①

$x=-13,\ y=9$ は，$29x+42y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　　$29\cdot(-13)+42\cdot 9=1$

両辺に 5 を掛けると

$29\cdot(-65)+42\cdot 45=5$　……②

①－② から　$29(x+65)+42(y-45)=0$　……③

29 と 42 は互いに素であるから，③ より

$x+65=42k,\ y-45=-29k$　(k は整数)

したがって，① のすべての整数解は

$x=42k-65,\ y=-29k+45$　(k は整数)

参考　29 と 42 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$42=29\cdot 1+13$　　移項すると　$13=42-29\cdot 1$

$29=13\cdot 2+3$　　移項すると　$3=29-13\cdot 2$

$13=3\cdot 4+1$　　移項すると　$1=13-3\cdot 4$

よって　　$1=13-3\cdot 4$

$=13-(29-13\cdot 2)\cdot 4$

$=13\cdot 9+29\cdot(-4)$

$=(42-29\cdot 1)\cdot 9+29\cdot(-4)$

$=29\cdot(-13)+42\cdot 9$

5

解答　949

解説

12 で割ると 1 余り，7 で割ると 4 余る整数を n とすると，n は整数 x，y を用いて

$n=12x+1$，　$n=7y+4$

と表される。

よって　　$12x+1=7y+4$

すなわち　　$12x-7y=3$　　……①

$x=3$，$y=5$ は，$12x-7y=1$ の整数解の 1 つであるから

$12\cdot 3-7\cdot 5=1$

両辺に 3 を掛けると

$12\cdot 9-7\cdot 15=3$　……②

①－②から　　$12(x-9)-7(y-15)=0$　……③

12 と 7 は互いに素であるから，③を満たす整数 x は

$x-9=7k$　　すなわち　　$x=7k+9$　(k は整数)

と表される。

したがって　　$n=12x+1=12(7k+9)+1=84k+109$

$84k+109$ が 3 桁で最大となるのは，$k=10$ のときで

$84\cdot 10+109=949$

6

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (7,\ 3),\ (12,\ 1)$

(2)　$(x,\ y)=(4,\ 11),\ (8,\ 8),\ (12,\ 5),\ (16,\ 2)$

(3)　$(x,\ y,\ z)=(8,\ 1,\ 1),\ (6,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 3),\ (2,\ 1,\ 4),\ (3,\ 2,\ 1),$
$(1,\ 2,\ 2)$

解説

(1)　$2x+5y=29$ から　　$2x=29-5y$　……①

$2x>0$ であるから　　$29-5y>0$　　　よって　　$y<\dfrac{29}{5}=5.8$

また，① において，$2x$ は偶数であるから，$29-5y$ も偶数になる。

ゆえに　　$y=1,\ 3,\ 5$

① から　　$y=1$ のとき　$x=12$　　$y=3$ のとき　$x=7$

$y=5$ のとき　$x=2$

したがって　　$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (7,\ 3),\ (12,\ 1)$

別解　　$2x+5y=29$　　……①

$x=2,\ y=5$ は ① の整数解の 1 つである。

よって　　$2\cdot 2+5\cdot 5=29$　……②

①－② から　　$2(x-2)+5(y-5)=0$

すなわち　　$2(x-2)=-5(y-5)$

2 と 5 は互いに素であるから，k を整数として　　$x-2=5k,\ y-5=-2k$

よって　　$x=5k+2,\ y=-2k+5$　……③

$x\geqq 1,\ y\geqq 1$ であるから　　$5k+2\geqq 1$ かつ $-2k+5\geqq 1$

ゆえに　$-\frac{1}{5} \leqq k \leqq 2$　　これを満たす整数 k は　$k=0,\ 1,\ 2$

③ から　$k=0$ のとき　$x=2,\ y=5$　　$k=1$ のとき　$x=7,\ y=3$

$k=2$ のとき　$x=12,\ y=1$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (7,\ 3),\ (12,\ 1)$

(2)　$3x+4y=56$ から　$3x=4(14-y)$　……①

$3x>0$ であるから　$4(14-y)>0$　　よって　$y<14$

また，① において，3 と 4 は互いに素であるから，$14-y$ は 3 の倍数になる。

ゆえに　$y=2,\ 5,\ 8,\ 11$

① から　$y=2$ のとき　$x=16$　　$y=5$ のとき　$x=12$

$y=8$ のとき　$x=8$　　$y=11$ のとき　$x=4$

したがって　$(x,\ y)=(4,\ 11),\ (8,\ 8),\ (12,\ 5),\ (16,\ 2)$

別解　$3x+4y=56$ から　$3x=4(14-y)$

3 と 4 は互いに素であるから　$x=4k,\ 14-y=3k$（k は整数）と表される。

よって　$x=4k,\ y=-3k+14$　……①

x は自然数であるから，k も自然数である。

また，$y \geqq 1$ であるから　$-3k+14 \geqq 1$

ゆえに，$k \leqq \frac{13}{3}=4.3\cdots\cdots$ であるから　$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$

① から　$k=1$ のとき　$x=4,\ y=11$　　$k=2$ のとき　$x=8,\ y=8$

$k=3$ のとき　$x=12,\ y=5$　　$k=4$ のとき　$x=16,\ y=2$

したがって　$(x,\ y)=(4,\ 11),\ (8,\ 8),\ (12,\ 5),\ (16,\ 2)$

(3)　$x+5y+2z=15$ から　$5y=15-x-2z$

$x \geqq 1,\ z \geqq 1$ から　$5y \leqq 15-1-2\cdot 1=12$

よって，$y \leqq \frac{12}{5}=2.4$ であるから　$y=1,\ 2$

[1]　$y=1$ のとき　$x+2z=10$

これを満たす自然数 $(x,\ z)$ の組は　$(x,\ z)=(8,\ 1),\ (6,\ 2),\ (4,\ 3),\ (2,\ 4)$

[2]　$y=2$ のとき　$x+2z=5$

これを満たす自然数 $(x,\ z)$ の組は　$(x,\ z)=(3,\ 1),\ (1,\ 2)$

以上から

$(x,\ y,\ z)=(8,\ 1,\ 1),\ (6,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 3),\ (2,\ 1,\ 4),\ (3,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 2)$

7

解答　(1)　$(x,\ y)=(-5,\ 8),\ (-7,\ -2),\ (-1,\ 4),\ (-11,\ 2)$

(2)　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$　　(3)　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (11,\ 10)$

(4)　$(x,\ y)=(3,\ 2)$

解説

(1)　方程式は次のように変形できる。

$(x+6)(y-3)+18-23=0$

すなわち　$(x+6)(y-3)=5$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+6,\ y-3$ も整数である。

ゆえに　$(x+6,\ y-3)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(-5,\ 8),\ (-1,\ 4),\ (-7,\ -2),\ (-11,\ 2)$

(2)　$3xy+3x+y=(3x+1)(y+1)-1$ であるから，

$3xy+3x+y=5$ より　$(3x+1)(y+1)=6$　……①

x が整数であるとき，$3x+1$ は 3 で割ると 1 余る整数である。

よって，① を満たす整数 $3x+1,\ y+1$ の組は

$(3x+1,\ y+1)=(-2,\ -3),\ (1,\ 6)$

したがって　$(x,\ y)=(-1,\ -4),\ (0,\ 5)$

(3)　$x^2-y^2=21$ から　$(x+y)(x-y)=21$　……①

$x,\ y$ は自然数であるから，$x+y,\ x-y$ は整数で　$x+y \geqq 2$

また　$x+y>x-y$

よって，① から　$(x+y,\ x-y)=(7,\ 3),\ (21,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (11,\ 10)$

(4)　$4x^2-y^2=32$ から　$(2x+y)(2x-y)=32$　……①

$x,\ y$ は自然数であるから，$2x+y,\ 2x-y$ は整数で　$2x+y \geqq 3$

また　$2x+y>2x-y$

よって，① から　$(2x+y,\ 2x-y)=(8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$

ここで，$(2x+y)+(2x-y)=4x$ であるから，$2x+y$ と $2x-y$ の和は 4 の倍数である。

よって，$(2x+y,\ 2x-y)=(8,\ 4)$ のみ適する。

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 2)$

8

解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)$

解説

(1)　$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから　$xyz=x+y+z \leqq z+z+z=3z$

ゆえに　$xy \leqq 3$　　よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$

[1]　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき，等式は　$z=2+z$

これを満たす自然数 z はない。

[2]　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき，等式は　$2z=3+z$

よって　$z=3$　　このとき $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

[3]　$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき，等式は　$3z=4+z$

よって　$z=2$　　このとき，$y>z$ となり不適。

[1]～[3] から　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$x \leqq y \leqq z$　……①

①より $1 \leqq x \leqq y \leqq z$ であるから，$\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$　……②

よって　$\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$ から　$x \leqq 2$ により　$x=1,\ 2$

$x=1$ のとき，与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$　……③

②，③ より　$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$　　ゆえに　$y \leqq 4$

y は自然数で，$1=x \leqq y$ であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$y=1,\ 2$ のとき　③ を満たす自然数 z は存在しない。

$y=3$　のとき　③ から　$z=6$（$y \leqq z$ を満たす）

$y=4$　のとき　③ から　$z=4$（$y \leqq z$ を満たす）

$x=2$ のとき，与式から　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$　……④

②，④ より　$1=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$　　ゆえに　$y \leqq 2$

y は自然数で，$2=x \leqq y$ であるから　$y=2$　　このとき ④ から　$z=2$

以上から　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)$

9

解答　(1)　$(x,\ y)=(4,\ -3),\ (4,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

解説

(1)　$3x^2+4xy-4y^2=(3x-2y)(x+2y)$ であるから，$a,\ b$ を定数として

（左辺）$=(3x-2y+a)(x+2y+b)$ と表される。

これを展開して整理すると　$3x^2+4xy-4y^2+(a+3b)x+(2a-2b)y+ab$

$a+3b=4,\ 2a-2b=-16$ としてこれを解くと　$a=-5,\ b=3$

ゆえに　$(3x-2y-5)(x+2y+3)=3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15$

よって，$3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-28=0$ を変形すると

$(3x-2y-5)(x+2y+3)-13=0$　すなわち　$(x+2y+3)(3x-2y-5)=13$

$x,\ y$ は整数であるから，$x+2y+3,\ 3x-2y-5$ も整数である。

よって

$\begin{cases} x+2y+3=-13 \\ 3x-2y-5=-1 \end{cases}$，$\begin{cases} x+2y+3=-1 \\ 3x-2y-5=-13 \end{cases}$，$\begin{cases} x+2y+3=1 \\ 3x-2y-5=13 \end{cases}$，$\begin{cases} x+2y+3=13 \\ 3x-2y-5=1 \end{cases}$

これらの連立方程式の解は，順に

$(x,\ y)=\left(-3,\ -\frac{13}{2}\right),\ \left(-3,\ -\frac{1}{2}\right),\ (4,\ -3),\ (4,\ 3)$

$x,\ y$ がともに整数であるものは　$(x,\ y)=(4,\ -3),\ (4,\ 3)$

(2)　$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$ を y について整理すると

$y^2+2(x+2)y+5x^2-12x+11=0$　……①

この y についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(x+2)^2-1\cdot(5x^2-12x+11)=-4x^2+16x-7$

$=-(4x^2-16x+7)=-(2x-1)(2x-7)$

① の解は整数（実数）であるから　$D \geqq 0$

ゆえに　$(2x-1)(2x-7) \leqq 0$　　よって　$\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{7}{2}$

x は整数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき，① は　$y^2+6y+4=0$

これを解いて　$y=-3\pm\sqrt{5}$

$x=2$ のとき，① は　$y^2+8y+7=0$

ゆえに　$(y+1)(y+7)=0$　　よって　$y=-1,\ -7$

$x=3$ のとき，① は　$y^2+10y+20=0$

これを解いて　$y=-5\pm\sqrt{5}$

したがって，$x,\ y$ がともに整数であるものは　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

別解　① から　$\{y+(x+2)\}^2-(x+2)^2+5x^2-12x+11=0$

ゆえに　$(y+x+2)^2+4x^2-16x+7=0$

よって　$(y+x+2)^2+4(x-2)^2-4\cdot 2^2+7=0$

ゆえに　$(y+x+2)^2+\{2(x-2)\}^2=9$

$x,\ y$ が整数のとき，$y+x+2$ は整数，$2(x-2)$ は偶数である。

よって　$(y+x+2,\ 2(x-2))=(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (2,\ -7)$

1

解答 (1) ① 17　② 1　③ 13　④ 1　⑤ 37

解説

① $408=119\cdot3+51$
$119=51\cdot2+17$
$51=17\cdot3+0$
よって，最大公約数は　17

② $322=155\cdot2+12$
$155=12\cdot12+11$
$12=11\cdot1+1$
$11=1\cdot11+0$
よって，最大公約数は　1

③ $923=377\cdot2+169$
$377=169\cdot2+39$
$169=39\cdot4+13$
$39=13\cdot3+0$
よって，最大公約数は　13

④ $498=223\cdot2+52$
$223=52\cdot4+15$
$52=15\cdot3+7$
$15=7\cdot2+1$
$7=1\cdot7+0$
よって，最大公約数は　1

⑤ $629=259\cdot2+111$
$259=111\cdot2+37$
$111=37\cdot3+0$
よって，最大公約数は　37

2

解答 ① $n=2,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 47$
② $n=4,\ 18,\ 32,\ 46,\ 60,\ 74,\ 88$

解説

① $11n+28=(4n+7)\cdot2+3n+14$，　$4n+7=(3n+14)\cdot1+n-7$，
$3n+14=(n-7)\cdot3+35$
よって，$11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数は，$n-7$ と 35 の最大公約数に等しい。
$35=5\cdot7$ であるから，$n-7$ は 5 の倍数であるが，7 の倍数でない。
また，$-6\leqq n-7\leqq43$ であるから
$n-7=-5,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40$
よって　$n=2,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37,\ 47$

② $6n+4=(5n+1)\cdot1+n+3$，　$5n+1=(n+3)\cdot5-14$
よって，$5n+1$ と $6n+4$ の最大公約数は，$n+3$ と 14 の最大公約数に等しい。
$14=2\cdot7$ であるから，$n+3$ は 7 の倍数であるが，2 の倍数でない。
また，$4\leqq n+3\leqq103$ であるから
$n+3=7,\ 21,\ 35,\ 49,\ 63,\ 77,\ 91$
よって　$n=4,\ 18,\ 32,\ 46,\ 60,\ 74,\ 88$

参考 -14 の約数のうち最大のものは 14 であるから，$n+3$ と -14 の最大公約数は，$n+3$ と 14 の最大公約数に等しい。

3

解答 (1) $x=4,\ y=-5$　(2) $x=-9,\ y=13$　(3) $x=-8,\ y=-22$

解説

(1) 24 と 19 に互除法の計算を行うと，次のようになる。
$24=19\cdot1+5$　移項すると　$5=24-19\cdot1$
$19=5\cdot3+4$　移項すると　$4=19-5\cdot3$
$5=4\cdot1+1$　移項すると　$1=5-4\cdot1$
よって　$1=5-4\cdot1$
$=5-(19-5\cdot3)\cdot1$
$=5\cdot4+19\cdot(-1)$
$=(24-19\cdot1)\cdot4+19\cdot(-1)$
$=24\cdot4+19\cdot(-5)$
すなわち　$24\cdot4+19\cdot(-5)=1$
よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=4,\ y=-5$

参考 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法を考えてみる。
$24=19\cdot1+5$ より，方程式は次のようになる。
$(19\cdot1+5)x+19y=1$
整理すると　$5x+19(x+y)=1$
$19=5\cdot3+4$ より　$5x+(5\cdot3+4)(x+y)=1$
すなわち　$5(4x+3y)+4(x+y)=1$
$4x+3y=m$，$x+y=n$ とおくと　$5m+4n=1$
この等式を満たす整数 m，n の組の 1 つは　$m=1,\ n=-1$
$4x+3y=1$，$x+y=-1$ を解くと　$x=4,\ y=-5$

(2) 36 と 25 に互除法の計算を行うと，次のようになる。
$36=25\cdot1+11$　移項すると　$11=36-25\cdot1$
$25=11\cdot2+3$　移項すると　$3=25-11\cdot2$
$11=3\cdot3+2$　移項すると　$2=11-3\cdot3$
$3=2\cdot1+1$　移項すると　$1=3-2\cdot1$
よって　$1=3-2\cdot1$
$=3-(11-3\cdot3)\cdot1$
$=3\cdot4+11\cdot(-1)$
$=(25-11\cdot2)\cdot4+11\cdot(-1)$
$=25\cdot4+11\cdot(-9)$
$=25\cdot4+(36-25\cdot1)\cdot(-9)$
$=36\cdot(-9)+25\cdot13$
すなわち　$36\cdot(-9)+25\cdot13=1$
よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=-9,\ y=13$

(3) 184 と 67 に互除法の計算を行うと，次のようになる。
$184=67\cdot2+50$　移項すると　$50=184-67\cdot2$
$67=50\cdot1+17$　移項すると　$17=67-50\cdot1$
$50=17\cdot2+16$　移項すると　$16=50-17\cdot2$
$17=16\cdot1+1$　移項すると　$1=17-16\cdot1$
よって　$1=17-16\cdot1$
$=17-(50-17\cdot2)\cdot1$
$=17\cdot3+50\cdot(-1)$
$=(67-50\cdot1)\cdot3+50\cdot(-1)$
$=67\cdot3+50\cdot(-4)$
$=67\cdot3+(184-67\cdot2)\cdot(-4)$
$=184\cdot(-4)-67\cdot(-11)$
すなわち　$184\cdot(-4)-67\cdot(-11)=1$
両辺に 2 を掛けて
$184\cdot\{2\cdot(-4)\}-67\cdot\{2\cdot(-11)\}=2$
すなわち　$184\cdot(-8)-67\cdot(-22)=2$
よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=-8,\ y=-22$

4

解答 k は整数とする。
(1) $x=17k+8,\ y=-30k-14$　(2) $x=42k-65,\ y=-29k+45$
(3) $x=35k+64,\ y=46k+84$

解説

(1) $30x+17y=2$ ……①
① の右辺を 1 とした方程式 $30x+17y=1$ について，$x=4,\ y=-7$ はその整数解の 1 つである。
よって　$30\cdot4+17\cdot(-7)=1$
両辺に 2 を掛けて　$30\cdot8+17\cdot(-14)=2$ ……②
①−② から　$30(x-8)+17(y+14)=0$
すなわち　$30(x-8)=-17(y+14)$ ……③
30 と 17 は互いに素であるから，$x-8$ は 17 の倍数である。
よって，k を整数として，$x-8=17k$ と表される。
これを ③ に代入して　$y+14=-30k$
したがって，求める整数解は　$x=17k+8,\ y=-30k-14$　(k は整数)

参考 30 と 17 に互除法の計算を行うと，次のようになる。
$30=17\cdot1+13$　移項すると　$13=30-17\cdot1$
$17=13\cdot1+4$　移項すると　$4=17-13\cdot1$
$13=4\cdot3+1$　移項すると　$1=13-4\cdot3$
よって　$1=13-4\cdot3$
$=13-(17-13\cdot1)\cdot3$
$=13\cdot4+17\cdot(-3)$
$=(30-17\cdot1)\cdot4+17\cdot(-3)$
$=30\cdot4+17\cdot(-7)$

(2) $29x+42y=5$ ……①
① の右辺を 1 とした方程式 $29x+42y=1$ について，$x=-13,\ y=9$ はその整数解の 1 つである。
よって　$29\cdot(-13)+42\cdot9=1$
両辺に 5 を掛けて　$29\cdot(-65)+42\cdot45=5$ ……②
①−② から　$29(x+65)+42(y-45)=0$
すなわち　$29(x+65)=-42(y-45)$ ……③
29 と 42 は互いに素であるから，$x+65$ は 42 の倍数である。
よって，k を整数として，$x+65=42k$ と表される。
これを ③ に代入して　$y-45=-29k$
したがって，求める整数解は　$x=42k-65,\ y=-29k+45$　(k は整数)

参考 29 と 42 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$42=29\cdot1+13$　　移項すると　$13=42-29\cdot1$

$29=13\cdot2+3$　　移項すると　$3=29-13\cdot2$

$13=3\cdot4+1$　　移項すると　$1=13-3\cdot4$

よって　$1=13-3\cdot4$

$=13-(29-13\cdot2)\cdot4$

$=13\cdot9+29\cdot(-4)$

$=(42-29\cdot1)\cdot9+29\cdot(-4)$

$=29\cdot(-13)+42\cdot9$

(3)　$46x-35y=4$　……①

① の右辺を 1 とした方程式 $46x-35y=1$ について，$x=16$，$y=21$ はその整数解の 1 つである。

よって　$46\cdot16-35\cdot21=1$

両辺に 4 を掛けて　$46\cdot64-35\cdot84=4$　……②

①−② から　$46(x-64)-35(y-84)=0$

すなわち　$46(x-64)=35(y-84)$　……③

46 と 35 は互いに素であるから，$x-64$ は 35 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-64=35k$ と表される。

これを ③ に代入して　$y-84=46k$

したがって，求める整数解は　$x=35k+64$，$y=46k+84$　(k は整数)

参考　46 と 35 に互除法の計算を行うと，次のようになる。

$46=35\cdot1+11$　　移項すると　$11=46-35\cdot1$

$35=11\cdot3+2$　　移項すると　$2=35-11\cdot3$

$11=2\cdot5+1$　　移項すると　$1=11-2\cdot5$

よって　$1=11-2\cdot5$

$=11-(35-11\cdot3)\cdot5$

$=11\cdot16-35\cdot5$

$=(46-35\cdot1)\cdot16-35\cdot5$

$=46\cdot16-35\cdot21$

5

解答　最大のものと最小のものは順に　(1)　957，117　(2)　997，115

解説

(1)　求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=5x+2$，　$n=14y+5$

よって　$5x+2=14y+5$

すなわち　$5x-14y=3$　……①

① の右辺を 1 とした方程式 $5x-14y=1$ について，$x=3$，$y=1$ はその整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot3-14\cdot1=1$

両辺に 3 を掛けて　$5\cdot9-14\cdot3=3$　……②

①−② から　$5(x-9)-14(y-3)=0$

すなわち　$5(x-9)=14(y-3)$

5 と 14 は互いに素であるから，$x-9$ は 14 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-9=14k$ と表される。

ゆえに　$x=14k+9$

したがって　$n=5(14k+9)+2=70k+47$

$70k+47$ が 3 桁で最大となるのは，$k=13$ のときで　$n=70\cdot13+47=957$

$70k+47$ が 3 桁で最小となるのは，$k=1$ のときで　$n=70\cdot1+47=117$

別解　$x=-5$，$y=-2$ が ① の整数解の 1 つであることに気がつけば，次のようになる。

$x=-5$，$y=-2$ は，① の整数解の 1 つであるから

$5\cdot(-5)-14\cdot(-2)=3$　……③

①−③ から　$5(x+5)-14(y+2)=0$

すなわち　$5(x+5)=14(y+2)$

5 と 14 は互いに素であるから，$x+5$ は 14 の倍数である。

よって，k を整数として，$x+5=14k$ と表される。

ゆえに　$x=14k-5$

したがって　$n=5(14k-5)+2=70k-23$

$70k-23$ が 3 桁で最大となるのは，$k=14$ のときで　$n=70\cdot14-23=957$

$70k-23$ が 3 桁で最小となるのは，$k=2$ のときで　$n=70\cdot2-23=117$

参考　$n+23$ は 5 でも 14 でも割り切れるから，k を整数として，$n+23=5\cdot14k$ と表される。

よって　$n=70k-23$

(2)　求める自然数を n とすると，n は x，y を整数として，次のように表される。

$n=3x+1$，　$n=7y+3$

よって　$3x+1=7y+3$

すなわち　$3x-7y=2$　……①

$x=3$，$y=1$ は，① の整数解の 1 つであるから

$3\cdot3-7\cdot1=2$　……②

①−② から　$3(x-3)-7(y-1)=0$

すなわち　$3(x-3)=7(y-1)$

3 と 7 は互いに素であるから，$x-3$ は 7 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-3=7k$ と表される。

ゆえに　$x=7k+3$

したがって　$n=3(7k+3)+1=21k+10$

$21k+10$ が 3 桁で最大となるのは，$k=47$ のときで　$n=21\cdot47+10=997$

$21k+10$ が 3 桁で最小となるのは，$k=5$ のときで　$n=21\cdot5+10=115$

参考　$n-10$ は 3 でも 7 でも割り切れるから，k を整数として，$n-10=3\cdot7k$ と表される。

よって　$n=21k+10$

6

解答　(1)　$(x,\ y)=(1,\ 17),\ (3,\ 10),\ (5,\ 3)$

(2)　$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (10,\ 12),\ (15,\ 8),\ (20,\ 4)$

(3)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9),\ (1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 4,\ 3),\ (1,\ 5,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

解説

(1)　$7x+2y=41$ から　$2y=41-7x$　……①

$y>0$ であるから　$41-7x>0$　　ゆえに　$x<\dfrac{41}{7}=5.8\cdots\cdots$

① において，$2y$ は偶数であるから，$41-7x$ は偶数である。

よって　$x=1,\ 3,\ 5$

① から　$x=1$ のとき $y=17$，　$x=3$ のとき $y=10$，

$x=5$ のとき $y=3$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ 17),\ (3,\ 10),\ (5,\ 3)$

(2)　$4x+5y=100$ から　$4x=5(20-y)$　……①

$x>0$ であるから　$5(20-y)>0$　　ゆえに　$y<20$

① において，$4x$ は 4 の倍数であるから，$5(20-y)$ は 4 の倍数である。

よって　$y=4,\ 8,\ 12,\ 16$

① から　$y=4$ のとき $x=20$，　$y=8$ のとき $x=15$，

$y=12$ のとき $x=10$，　$y=16$ のとき $x=5$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (10,\ 12),\ (15,\ 8),\ (20,\ 4)$

(3)　$y\geqq1$，$z\geqq1$ であるから　$4x=15-2y-z\leqq15-2\cdot1-1=12$

ゆえに　$x\leqq3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$2y+z=11$

$z\geqq1$ であるから　$2y=11-z\leqq11-1=10$

ゆえに　$y\leqq5$

y は自然数であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 9),\ (2,\ 7),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1)$

[2]　$x=2$ のとき　$2y+z=7$

$z\geqq1$ であるから　$2y=7-z\leqq7-1=6$

ゆえに　$y\leqq3$

y は自然数であるから　$y=1,\ 2,\ 3$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$

[3]　$x=3$ のとき　$2y+z=3$

$z\geqq1$ であるから　$2y=3-z\leqq3-1=2$

ゆえに　$y\leqq1$

y は自然数であるから　$y=1$

よって　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

以上から　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9),\ (1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 4,\ 3),\ (1,\ 5,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

7

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

(2)　$(x,\ y)=(-4,\ -4),\ (-11,\ 3),\ (-3,\ -1),\ (-8,\ 4),$
$(-6,\ 8),\ (1,\ 1),\ (-7,\ 5),\ (-2,\ 0)$

(3)　$(x,\ y)=(3,\ 14),\ (8,\ 4)$　(4)　$(x,\ y)=(6,\ 1),\ (18,\ 17)$

(5)　$(x,\ y)=(5,\ 1),\ (11,\ 5)$

解説

(1)　方程式は次のように変形できる。

$(x-1)(y-5)-5=0$

すなわち　$(x-1)(y-5)=5$

x，y は整数であるから，$x-1$，$y-5$ も整数である。

ゆえに　$(x-1,\ y-5)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (-1,\ -5),\ (-5,\ -1)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 10),\ (6,\ 6),\ (0,\ 0),\ (-4,\ 4)$

(2)　方程式は次のように変形できる。

$(x+5)(y-2)+10-4=0$

すなわち　$(x+5)(y-2)=-6$

x，y は整数であるから，$x+5$，$y-2$ も整数である。

ゆえに　$(x+5,\ y-2)=(1,\ -6),\ (-6,\ 1),\ (2,\ -3),\ (-3,\ 2),$
$(-1,\ 6),\ (6,\ -1),\ (-2,\ 3),\ (3,\ -2)$

よって　$(x,\ y)=(-4,\ -4),\ (-11,\ 3),\ (-3,\ -1),\ (-8,\ 4),$
$(-6,\ 8),\ (1,\ 1),\ (-7,\ 5),\ (-2,\ 0)$

(3)　$2xy+6x+y=(2x+1)(y+3)-3$ であるから　$(2x+1)(y+3)-3=116$
すなわち　$(2x+1)(y+3)=119$
$2x+1\geqq 3$，$y+3\geqq 4$，$119=7\cdot 17$ であるから，これを満たす整数 $2x+1$，$y+3$ の組は
$(2x+1,\ y+3)=(7,\ 17),\ (17,\ 7)$
よって　$(x,\ y)=(3,\ 14),\ (8,\ 4)$

(4)　左辺を因数分解して　$(x+y)(x-y)=35$
x，y は自然数であるから，$x+y$ は 2 以上の自然数，$x-y$ は整数である。
ゆえに　$(x+y,\ x-y)=(5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (35,\ 1)$
よって　$(x,\ y)=(6,\ -1),\ (6,\ 1),\ (18,\ 17)$
x，y は自然数であるから　$(x,\ y)=(6,\ 1),\ (18,\ 17)$

(5)　左辺を因数分解して　$(x+2y)(x-2y)=21$
x，y は自然数であるから，$x+2y$ は 3 以上の自然数，$x-2y$ は整数である。
ゆえに　$(x+2y,\ x-2y)=(3,\ 7),\ (7,\ 3),\ (21,\ 1)$
よって　$(x,\ y)=(5,\ -1),\ (5,\ 1),\ (11,\ 5)$
x，y は自然数であるから　$(x,\ y)=(5,\ 1),\ (11,\ 5)$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 2,\ 2)$
(2)　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$
(3)　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$

解説

(1)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　$2xyz=x+3y+4z\leqq z+3z+4z=8z$
よって　$xy\leqq 4$
この不等式を満たす自然数 x，y $(x\leqq y)$ の組は
$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2)$
これらの各組 $(x,\ y)$ に対して，等式 $x+3y+4z=2xyz$ を満たす z の値は次のようになる。
$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき　$z=-2$　　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき　解 z はない。
$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき　$z=5$　　$(x,\ y)=(1,\ 4)$ のとき　$z=\dfrac{13}{4}$
$(x,\ y)=(2,\ 2)$ のとき　$z=2$
したがって　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 2,\ 2)$

(2)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……①
よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$　　ゆえに　$x\leqq 3$
x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$
[1]　$x=1$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす自然数 y，z はない。
[2]　$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……②
① より　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 4$
y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$
$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。
$y=3$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$z=6$ ($y\leqq z$ を満たす)
$y=4$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=4$ ($y\leqq z$ を満たす)
[3]　$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……③
① より　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 3$
y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$
このとき，③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　　よって　$z=3$ ($y\leqq z$ を満たす)
以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

(3)　与式の両辺を $2xyz$ で割って　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$
$0<x<y<z$ であるから　$\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$
よって　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$
ゆえに　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{x}$　　よって　$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{6}$
ゆえに　$x<6$　　$4\leqq x$ であるから　$x=4,\ 5$
[1]　$x=4$ のとき，等式は　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　……①
ここで　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$\dfrac{1}{4}<\dfrac{2}{y}$
よって　$\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{8}$　　ゆえに　$y<8$
$4<y$ であるから　$y=5,\ 6,\ 7$
$y=5$ のとき，① は　$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=20$
これは $y<z$ を満たす。
$y=6$ のとき，① は　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=12$
これは $y<z$ を満たす。
$y=7$ のとき，① は　$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=\dfrac{28}{3}$
これは自然数でないから条件を満たさない。
[2]　$x=5$ のとき，等式は　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}$　……②
ここで　$\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$
ゆえに　$\dfrac{3}{10}<\dfrac{2}{y}$　　よって　$\dfrac{1}{y}>\dfrac{3}{20}$
ゆえに　$y<\dfrac{20}{3}=6.6\cdots\cdots$　　$5<y$ であるから　$y=6$
このとき，② は　$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}$　　よって　$z=\dfrac{15}{2}$
これは自然数でないから条件を満たさない。
[1]，[2] から　$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12)$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$

解説

(1)　$(2x-y+a)(x+2y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(a+2b)x+(2a-b)y+ab$
となり，$a+2b=-3$，$2a-b=4$ を解くと
$a=1$，$b=-2$
ゆえに　$(2x-y+1)(x+2y-2)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$
$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$ を変形すると
$(2x-y+1)(x+2y-2)-3=0$
よって　$(x+2y-2)(2x-y+1)=3$
x，y は整数であるから，$x+2y-2$，$2x-y+1$ も整数である。
したがって　$\begin{cases}x+2y-2=-3\\2x-y+1=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=-1\\2x-y+1=-3\end{cases}$
$\begin{cases}x+2y-2=1\\2x-y+1=3\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=3\\2x-y+1=1\end{cases}$
これらの連立方程式の解は，順に
$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right),\ \left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right),\ (1,\ 2)$
x，y がともに整数であるものは
$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$ を x について整理すると
$x^2-2(y+1)x+2y^2-3y+5=0$　……①
① を x について解くと
$x=y+1\pm\sqrt{(y+1)^2-(2y^2-3y+5)}$
$=y+1\pm\sqrt{-y^2+5y-4}$　……②
② は実数であるから
$-y^2+5y-4\geqq 0$
よって　$-(y-1)(y-4)\geqq 0$　　ゆえに　$1\leqq y\leqq 4$
y は整数であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$
$y=1$ のとき，① は　$x^2-4x+4=0$
よって　$(x-2)^2=0$　　ゆえに　$x=2$
$y=2$ のとき，① は　$x^2-6x+7=0$
これを解いて　$x=3\pm\sqrt{2}$
$y=3$ のとき，① は　$x^2-8x+14=0$
これを解いて　$x=4\pm\sqrt{2}$
$y=4$ のとき，① は　$x^2-10x+25=0$
よって　$(x-5)^2=0$　　ゆえに　$x=5$
x，y がともに整数であるものは
$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$

$\boxed{1}$

解答　$n=5,\ 13$

解説

$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+56}=k$$

両辺を２乗して移項すると　$k^2-n^2=56$

すなわち　$(k+n)(k-n)=56$　……①

ここで，k，n は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n$，$k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は次のようになる。

$$(k+n,\ k-n)=(56,\ 1),\ (28,\ 2),\ (14,\ 4),\ (8,\ 7)$$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$$(k+n,\ k-n)=(28,\ 2),\ (14,\ 4)$$

これを満たす自然数 k，n の組は次のようになる。

$$(k,\ n)=(15,\ 13),\ (9,\ 5)$$

したがって，求める自然数 n は　$n=5,\ 13$

$\boxed{2}$

解答　16

解説

自然数 n は，x，y を整数として

$n=7x+2$，　$n=9y+7$　と表される。

よって　$7x+2=9y+7$

すなわち　$7x-9y=5$　……①

$x=2$，$y=1$ は ① の整数解の１つである。

よって　$7\cdot2-9\cdot1=5$　……②

①−② から　$7(x-2)-9(y-1)=0$

すなわち　$7(x-2)=9(y-1)$

7 と 9 は互いに素であるから，$x-2$ は 9 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-2=9k$ と表される。

ゆえに，$x=9k+2$ であるから　$n=7(9k+2)+2=63k+16$

したがって，n を 63 で割ったときの余りは　16

$\boxed{3}$

解答　1，2，3，6

解説

$$\begin{aligned}n^2+3n+8&=(n+2)(n+1)-2+8\\&=(n+2)(n+1)+6\end{aligned}$$

よって，n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数は，$n+2$ と 6 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，6 の正の約数の 1，2，3，6 である。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-7,\ 1),\ (-3,\ 4),\ (1,\ 7)$

(2)　$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (12,\ 6)$ のとき最大値 72

解説

(1)　$3x-4y+25=0$ から　$3x-4y=-25$　……①

$x=-3$，$y=4$ は，① の整数解の１つであるから

$3(x+3)-4(y-4)=0$　すなわち　$3(x+3)=4(y-4)$

3 と 4 は互いに素であるから，k を整数として $x+3=4k$，$y-4=3k$ と表される。

よって　$x=4k-3$，$y=3k+4$（k は整数）……②

$x^2+y^2\leqq50$ に代入して　$(4k-3)^2+(3k+4)^2\leqq50$

ゆえに　$25k^2+25\leqq50$　　よって　$k^2\leqq1$

この不等式を満たす整数 k の値は　$k=-1,\ 0,\ 1$

② から　$k=-1$ のとき　$(x,\ y)=(-7,\ 1)$

$k=0$ のとき　$(x,\ y)=(-3,\ 4)$

$k=1$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 7)$

よって，解は　$(x,\ y)=(-7,\ 1),\ (-3,\ 4),\ (1,\ 7)$

(2)　$2a+3b=42$ から　$2a=3(14-b)$

2 と 3 は互いに素であるから，$a=3k$，$14-b=2k$（k は整数）と表される。

したがって　$ab=3k(14-2k)=-6k^2+42k=-6\left(k-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{147}{2}$

$y=-6\left(k-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{147}{2}$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $k=\dfrac{7}{2}$ である。

この軸に最も近い整数値は　$k=3,\ 4$

ゆえに，ab は $k=3,\ 4$ のとき最大となり，その値は　72

よって　$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (12,\ 6)$ のとき最大値 72

$\boxed{5}$

解答　$(x,\ y,\ z)=(5,\ 10,\ 4),\ (10,\ 1,\ 8)$

解説

$$\begin{cases}x+y+z=19 & \cdots\cdots① \\ x+5y+10z=95 & \cdots\cdots②\end{cases}$$　とする。

②−①から　$4y+9z=76$　……③

よって　$9z=4(19-y)$　……④

9 と 4 は互いに素であるから，z は 4 の倍数である。

したがって，k を整数として，$z=4k$ と表される。

これを④に代入すると

$9\cdot4k=4(19-y)$　すなわち　$19-y=9k$

よって，③の整数解は　$y=-9k+19$，$z=4k$

これを①に代入すると

$x+(-9k+19)+4k=19$　すなわち　$x=5k$

x，y，z がすべて正の整数となるような整数 k は　$k=1,\ 2$

したがって，求める解は

$(x,\ y,\ z)=(5,\ 10,\ 4),\ (10,\ 1,\ 8)$

$\boxed{6}$

解答　$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)$

解説

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\geqq1$　……①　とする。

$2\leqq p<q<r$ から　$\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{p}\leqq\dfrac{1}{2}$　……②

ゆえに　$1\leqq\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{p}$

よって　$1<\dfrac{3}{p}$　すなわち　$p<3$

p は $2\leqq p<3$ を満たす整数であるから　$p=2$

$p=2$ のとき，① は　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\geqq\dfrac{1}{2}$

② から　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2}{q}$

よって　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{q}$　すなわち　$q<4$

q は $2<q<4$ を満たす整数であるから　$q=3$

$p=2$，$q=3$ を ① に代入して整理すると

$\dfrac{1}{r}\geqq\dfrac{1}{6}$　すなわち　$r\leqq6$

r は $3<r\leqq6$ を満たす整数であるから　$r=4,\ 5,\ 6$

以上から，求める整数 p，q，r の組は

$(p,\ q,\ r)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 6)$

1

解答　896

解説

n は x，y，z を整数として，次のように表される。

$n=3x+2$，$n=5y+1$，$n=11z+5$

$3x+2=5y+1$ から　$3x-5y=-1$ ……①

$x=3$，$y=2$ は，① の整数解の 1 つであるから

$3(x-3)-5(y-2)=0$　すなわち　$3(x-3)=5(y-2)$

3 と 5 は互いに素であるから，k を整数として，$x-3=5k$ と表される。

よって　$x=5k+3$（k は整数）

次に，$3x+2=11z+5$ に $x=5k+3$ を代入して　$3(5k+3)+2=11z+5$

ゆえに　$11z-15k=6$ ……②

$z=6$，$k=4$ は，② の整数解の 1 つであるから

$11(z-6)-15(k-4)=0$　すなわち　$11(z-6)=15(k-4)$

11 と 15 は互いに素であるから，l を整数として，$z-6=15l$ と表される。

よって　$z=15l+6$（l は整数）

$n=11z+5$ に代入して　$n=11(15l+6)+5=165l+71$

$165l+71<1000$ すなわち $165l<929$ を満たす最大の整数 l は，$l=5$ である。

このとき　$n=165\cdot5+71=896$

2

解答　891

解説

$9x+11y=n$ …… ①

$x=5n$，$y=-4n$ は①の整数解の 1 つであるから

$9(x-5n)+11(y+4n)=0$　すなわち　$9(x-5n)=-11(y+4n)$

9 と 11 は互いに素であるから，k を整数として，

$x-5n=11k$，$y+4n=-9k$

と表される。したがって，① の解は

$x=5n+11k$，$y=-4n-9k$（k は整数）

$x\geqq0$ とすると　$5n+11k\geqq0$ ……②

$y\geqq0$ とすると　$-4n-9k\geqq0$ ……③

② から　$k\geqq-\dfrac{5}{11}n$　　③ から　$k\leqq-\dfrac{4}{9}n$

n は自然数であるから，②，③ の共通範囲は　$-\dfrac{5}{11}n\leqq k\leqq-\dfrac{4}{9}n$ …… ④

方程式 ① がちょうど 10 個の負でない整数解をもつための条件は，④ を満たす整数 k がちょうど 10 個存在することである。

$-\dfrac{4}{9}n-\left(-\dfrac{5}{11}n\right)=\dfrac{n}{99}$ であるから，④ を満たす整数 k がちょうど 10 個存在するとき

$9\leqq\dfrac{n}{99}<10$　すなわち　$891\leqq n<990$

ここで，$n=891$ のとき，④ は　$-405\leqq k\leqq-396$

この不等式を満たす整数 k は，$-396-(-405)+1=10$（個）ある。

よって，求める自然数 n は　$n=891$

3［名古屋大］

解答　(1)　$(x,\ y)=(9,\ 36)$，$(10,\ 20)$，$(12,\ 12)$，$(16,\ 8)$，$(24,\ 6)$，$(40,\ 5)$

(2)　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

解説

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ から　$8y+4x=xy$

ゆえに　$xy-4x-8y=0$

よって　$(x-8)(y-4)=32$ …… ①

x，y は正の整数であるから，$x-8$，$y-4$ は整数である。

また，$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから　$x-8\geqq-7$，$y-4\geqq-3$

ゆえに，① から

$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32)$，$(2,\ 16)$，$(4,\ 8)$，$(8,\ 4)$，$(16,\ 2)$，$(32,\ 1)$

よって　$(x,\ y)=(9,\ 36)$，$(10,\ 20)$，$(12,\ 12)$，$(16,\ 8)$，$(24,\ 6)$，$(40,\ 5)$

(2)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ から　$2py+px=xy$

ゆえに　$xy-px-2py=0$　　よって　$(x-2p)(y-p)=2p^2$ …… ①

x，y は正の整数，p は素数であるから，$x-2p$，$y-p$ は整数である。

また，$x\geqq1$，$y\geqq1$ であるから　$x-2p\geqq1-2p$，$y-p\geqq1-p$ …… ②

p は 3 以上の素数であるから，$2p^2$ の正の約数は　1，2，p，$2p$，p^2，$2p^2$

ゆえに，①，② を満たす整数 $x-2p$，$y-p$ の組と，そのときの x，y，$2x+3y$ の値は，次の表のようになる。

$x-2p$	1	2	p	$2p$	p^2	$2p^2$
$y-p$	$2p^2$	p^2	$2p$	p	2	1
x	$2p+1$	$2p+2$	$3p$	$4p$	p^2+2p	$2p^2+2p$
y	$2p^2+p$	p^2+p	$3p$	$2p$	$p+2$	$p+1$
$2x+3y$	$6p^2+7p+2$	$3p^2+7p+4$	$15p$	$14p$	$2p^2+7p+6$	$4p^2+7p+3$

ここで，$p\geqq3$ であるから

$(6p^2+7p+2)-(4p^2+7p+3)=2p^2-1>0$

$(4p^2+7p+3)-(3p^2+7p+4)=p^2-1>0$

$(3p^2+7p+4)-(2p^2+7p+6)=p^2-2>0$

$(2p^2+7p+6)-15p=2p^2-8p+6=2(p-1)(p-3)\geqq0$

$15p-14p=p>0$

よって　$6p^2+7p+2>4p^2+7p+3>3p^2+7p+4>2p^2+7p+6\geqq15p>14p$

表より，$2x+3y=14p$ のとき　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

したがって，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は　$(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

1

解答　(1)（ア）順に 45，143　（イ）順に $101001_{(2)}$，$131_{(5)}$

(2)（ア）3.625　（イ）$0.0101_{(2)}$

解説

(1)（ア）$101101_{(2)}$

$=1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=45$

$12022_{(3)}=1\cdot3^4+2\cdot3^3+0\cdot3^2+2\cdot3^1+2\cdot3^0=143$

（イ）右の計算から

$41=101001_{(2)}$

$41=131_{(5)}$

(1)(イ)

2) 41
2) 20 … 1
2) 10 … 0
2) 5 … 0
2) 2 … 1
2) 1 … 0
　 0 … 1

5) 41
5) 8 … 1
5) 1 … 3
　 0 … 1

(2)（ア）$11.101_{(2)}=1\cdot2^1+1\cdot2^0+1\cdot\dfrac{1}{2}+0\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}$

$=2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}$

$=3+\dfrac{5}{8}=3.625$

（イ）　$0.3125\times2=0.625$

$0.625\times2=1.25$

$(1.25-1)\times2=0.5$

$0.5\times2=1$

よって，0.3125 を 2 進法で表すと　$0.0101_{(2)}$

(2)(イ)

$$\begin{array}{r}0.3125\\ \times\quad 2\\ \hline 0.625\\ \times\quad 2\\ \hline 1.25\\ \times\quad 2\\ \hline 0.5\\ \times\quad 2\\ \hline 1\end{array}$$

2

解答　(1)　$1110_{(3)}$　(2)　$11311_{(5)}$　(3)　$314_{(6)}$　(4)　$4512_{(7)}$　(5)　$302022_{(4)}$

(6)　$123_{(5)}$

解説

(1)　$212_{(3)}+121_{(3)}=1110_{(3)}$

$$\begin{array}{r}212\\ +\ 121\\ \hline 1110\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}23\\ +\ 16\\ \hline 39\end{array}$$

(2)　$3412_{(5)}+2344_{(5)}=11311_{(5)}$

$$\begin{array}{r}3412\\ +\ 2344\\ \hline 11311\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}482\\ +\ 349\\ \hline 831\end{array}$$

(3)　$543_{(6)}-225_{(6)}=314_{(6)}$

$$\begin{array}{r}543\\ -\ 225\\ \hline 314\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}207\\ -\ 89\\ \hline 118\end{array}$$

(4)　$6241_{(7)}-1426_{(7)}=4512_{(7)}$

$$\begin{array}{r}6241\\ -\ 1426\\ \hline 4512\end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r}2185\\ -\ 559\\ \hline 1626\end{array}$$

(5)　$3112_{(4)} \times 33_{(4)} = 302022_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 3112 \\ \times \quad 33 \\ \hline 22002 \\ 22002 \\ \hline 302022 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 214 \\ \times \quad 15 \\ \hline 1070 \\ 214 \\ \hline 3210 \end{array}$$

(6)　$3434_{(5)} \div 23_{(5)} = 123_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 123 \\ 23 \overline{)\,3434} \\ \underline{23} \\ 113 \\ \underline{101} \\ 124 \\ \underline{124} \\ 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 38 \\ 13 \overline{)\,494} \\ \underline{39} \\ 104 \\ \underline{104} \\ 0 \end{array}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a=2$，$b=4$，$N=102$　　(2)　$a=2$，$b=3$，$c=1$，$N=66$

解説

(1)　$a0b_{(7)}$ は 7 進数であるから　　$1 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$

$b0a_{(5)}$ は 5 進数であるから　　$1 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq a \leqq 4$

よって　　$1 \leqq a \leqq 4$，$1 \leqq b \leqq 4$　……①

N を 10 進法で表すと

$$N = a0b_{(7)} = a \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49a + b$$

$$N = b0a_{(5)} = b \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + a \cdot 5^0 = 25b + a$$

ゆえに　　$49a + b = 25b + a$　　　　整理すると　　$2a = b$

これと ① を満たす整数 a，b の組は　　$(a,\ b) = (1,\ 2)$，$(2,\ 4)$

[1]　$(a,\ b) = (1,\ 2)$ のとき

$$N = 49 \cdot 1 + 2 = 51$$

これは 2 桁の数であり，適さない。

[2]　$(a,\ b) = (2,\ 4)$ のとき

$$N = 49 \cdot 2 + 4 = 102$$

これは 3 桁の数であり，適する。

したがって　　$a=2$，$b=4$，$N=102$

(2)　$abc_{(5)}$ は 3 桁の 5 進数であるから　　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$0 \leqq c \leqq 4$　……①

$cab_{(7)}$ は 3 桁の 7 進数であるから　　$1 \leqq c \leqq 6$，$0 \leqq a \leqq 6$，$0 \leqq b \leqq 6$　……②

①，② から　　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$，$1 \leqq c \leqq 4$　……③

N を 10 進法で表すと

$$N = abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = 25a + 5b + c$$

$$N = cab_{(7)} = c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49c + 7a + b$$

よって　　$25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

整理すると　　$9a + 2b = 24c$　……④

ここで，③ より　　$24c = 9a + 2b \leqq 9 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 44$

ゆえに　　$c \leqq \dfrac{11}{6} = 1.8\cdots\cdots$

よって，③ から　　$c = 1$

④ に代入すると　　$9a + 2b = 24$

ゆえに　　$2b = 3(8 - 3a)$　……⑤

2 と 3 は互いに素であるから，b は 3 の倍数である。

よって，③ より　　$b = 0$，3

[1]　$b = 0$ のとき

⑤ を満たす整数 a は存在しないから不適。

[2]　$b = 3$ のとき

⑤ から　$a = 2$　　　これは ③ を満たす。

以上から　　$a=2$，$b=3$，$c=1$

したがって　　$N = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 66$

$\boxed{4}$

解答　(1)　72 個　　(2)　148 個

解説

(1)　1 から 150 までの自然数のうち，

3 の倍数の個数は，150 を 3 で割った商で　50

$3^2\,(=9)$ の倍数の個数は，150 を 3^2 で割った商で　16

$3^3\,(=27)$ の倍数の個数は，150 を 3^3 で割った商で　5

$3^4\,(=81)$ の倍数の個数は，150 を 3^4 で割った商で　1

よって，N を素因数分解したときの素因数 3 の個数は

$$50 + 16 + 5 + 1 = 72 \text{（個）}$$

(2)　末尾に続く 0 の個数は，$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots \cdot 600$ に含まれる因数 10 の個数であり，10 は $2 \cdot 5$ と素因数分解される。

1，2，3，……，600 に含まれる素因数 2 の個数は，明らかに素因数 5 の個数より多いから，因数 10 の個数は素因数 5 の個数と一致する。

1 から 600 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，600 を 5 で割った商で　120

$5^2\,(=25)$ の倍数の個数は，600 を 5^2 で割った商で　24

$5^3\,(=125)$ の倍数の個数は，600 を 5^3 で割った商で　4

よって，素因数 5 の個数は，全部で　　$120 + 24 + 4 = 148$（個）

したがって，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 148 個並ぶ。

$\boxed{5}$

解答　$n = 3$，11

解説

$$n^2 - 14n + 40 = (n-4)(n-10) = (4-n)(10-n)$$

$n - 4 > n - 10$，$4 - n < 10 - n$ であるから，$n^2 - 14n + 40$ が素数であるとき

$$n - 10 = 1 \quad \text{または} \quad 4 - n = 1$$

$n - 10 = 1$ より　$n = 11$　　　$4 - n = 1$ より　$n = 3$

$n = 11$ のとき　$n^2 - 14n + 40 = 7 \cdot 1 = 7$（素数）

$n = 3$ のとき　$n^2 - 14n + 40 = 1 \cdot 7 = 7$（素数）

よって，$n^2 - 14n + 40$ が素数となるような n は　　$n = 3$，11

$\boxed{6}$★★★

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$a - 2b$，b の最大公約数を k とすると，互いに素な自然数 m，n を用いて

$$a - 2b = km, \quad b = kn$$

と表される。

$a - 2b = km$ から　$a = km + 2b = km + 2 \cdot kn = k(m + 2n)$

$m + 2n$ は自然数であるから，k は a の約数である。

よって，k は a と b の公約数である。

a，b は互いに素であるから，$k = 1$ のみ。

よって，$a - 2b$ と b の公約数は 1 だけであるから，$a - 2b$ と b の最大公約数は　1

したがって，$a - 2b$ と b は互いに素である。

(2)　$2n - 1$ と $2n + 1$ の最大公約数を g とすると

$$2n - 1 = ga,\ 2n + 1 = gb \quad (a,\ b \text{ は互いに素である自然数})$$

と表される。この 2 式から n を消去して　　$2 = g(b - a)$

$2n - 1 < 2n + 1$ より $b - a > 0$ であり，g，a，b は自然数であるから

$$g = 1 \quad \text{または} \quad 2$$

$2n - 1$，$2n + 1$ は奇数であるから g も奇数である。よって　　$g = 1$

ゆえに，$2n - 1$ と $2n + 1$ の最大公約数は 1 であるから，$2n - 1$ と $2n + 1$ は互いに素である。

1

解答　(1)　(ア)　順に　101，520

　　　(イ)　順に 11100$_{(2)}$，1001$_{(3)}$

(2)　(ア)　9.656　　(イ)　0.111$_{(5)}$

解説

(1)　(ア)　1100101$_{(2)}$

$$=1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$$
$$=101$$

$$201021_{(3)}=2\cdot 3^5+0\cdot 3^4+1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0$$
$$=520$$

(イ)　右の計算から

$28=11100_{(2)}$

$28=1001_{(3)}$

(1) (イ)

$$\begin{array}{r|rl} 2 & 28 & \\ \hline 2 & 14 & \cdots 0 \\ \hline 2 & 7 & \cdots 0 \\ \hline 2 & 3 & \cdots 1 \\ \hline 2 & 1 & \cdots 1 \\ \hline & 0 & \cdots 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rl} 3 & 28 & \\ \hline 3 & 9 & \cdots 1 \\ \hline 3 & 3 & \cdots 0 \\ \hline 3 & 1 & \cdots 0 \\ \hline & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

(2)　(ア)　$14.312_{(5)}=1\cdot 5^1+4\cdot 5^0+3\cdot\dfrac{1}{5}+1\cdot\dfrac{1}{5^2}+2\cdot\dfrac{1}{5^3}=5+4+\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{2}{125}$

$$=9+\frac{82}{125}=9.656$$

(イ)　$0.248\times 5=1.24$

$(1.24-1)\times 5=1.2$

$(1.2-1)\times 5=1$

よって，0.248 を 5 進法で表すと

0.111$_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 0.248 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1.24 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1.2 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

2

解答　(1)　1100$_{(3)}$　(2)　3203$_{(5)}$　(3)　12633$_{(7)}$　(4)　325$_{(6)}$　(5)　1667$_{(8)}$

(6)　33114$_{(5)}$　(7)　6523$_{(8)}$　(8)　111222$_{(4)}$　(9)　30423$_{(5)}$　(10)　32$_{(7)}$

(11)　121$_{(5)}$　(12)　421$_{(5)}$

解説

(1)　$201_{(3)}+122_{(3)}=1100_{(3)}$

$$\begin{array}{r} 201 \\ +\ 122 \\ \hline 1100 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 19 \\ +\ 17 \\ \hline 36 \end{array}$$

(2)　$1044_{(5)}+2104_{(5)}=3203_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 1044 \\ +\ 2104 \\ \hline 3203 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 149 \\ +\ 279 \\ \hline 428 \end{array}$$

(3)　$6354_{(7)}+3246_{(7)}=12633_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 6354 \\ +\ 3246 \\ \hline 12633 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 2244 \\ +\ 1161 \\ \hline 3405 \end{array}$$

(4)　$453_{(6)}-124_{(6)}=325_{(6)}$

$$\begin{array}{r} 453 \\ -\ 124 \\ \hline 325 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 177 \\ -\ 52 \\ \hline 125 \end{array}$$

(5)　$7654_{(8)}-5765_{(8)}=1667_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 7654 \\ -\ 5765 \\ \hline 1667 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 4012 \\ -\ 3061 \\ \hline 951 \end{array}$$

(6)　$42031_{(5)}-3412_{(5)}=33114_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 42031 \\ -\ 3412 \\ \hline 33114 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 2766 \\ -\ 482 \\ \hline 2284 \end{array}$$

(7)　$573_{(8)}\times 11_{(8)}=6523_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 573 \\ \times\ 11 \\ \hline 573 \\ 573\ \\ \hline 6523 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 379 \\ \times\ 9 \\ \hline 3411 \end{array}$$

(8)　$3012_{(4)}\times 13_{(4)}=111222_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 3012 \\ \times\ 13 \\ \hline 21102 \\ 3012\ \\ \hline 111222 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 198 \\ \times\ 7 \\ \hline 1386 \end{array}$$

(9)　$1032_{(5)}\times 24_{(5)}=30423_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 1032 \\ \times\ 24 \\ \hline 4233 \\ 2114\ \\ \hline 30423 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 142 \\ \times\ 14 \\ \hline 568 \\ 142\ \\ \hline 1988 \end{array}$$

(10)　$1163_{(7)}\div 25_{(7)}=32_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 25\overline{)1163} \\ 111\ \\ \hline 53 \\ 53 \\ \hline 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 23 \\ 19\overline{)437} \\ 38\ \\ \hline 57 \\ 57 \\ \hline 0 \end{array}$$

(11)　$3041_{(5)}\div 21_{(5)}=121_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 21\overline{)3041} \\ 21\ \ \\ \hline 44\ \\ 42\ \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 36 \\ 11\overline{)396} \\ 33\ \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 0 \end{array}$$

(12)　$43021_{(5)}\div 101_{(5)}=421_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 421 \\ 101\overline{)43021} \\ 404\ \ \\ \hline 212\ \\ 202\ \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると
$$\begin{array}{r} 111 \\ 26\overline{)2886} \\ 26\ \ \\ \hline 28\ \\ 26\ \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

3

解答　(1)　$a=0$，$b=4$，$N=19$　　(2)　$a=3$，$b=3$，$c=4$，$N=220$

解説

(1)　2 進数 $10a11_{(2)}$ において　　$0\leqq a\leqq 1$

5 進数 $3b_{(5)}$ において　　$0\leqq b\leqq 4$

$10a11_{(2)}$，$3b_{(5)}$ のそれぞれを 10 進法で表すと

$10a11_{(2)}=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+a\cdot 2^2+1\cdot 2+1=4a+19$

$3b_{(5)}=3\cdot 5+b=b+15$

よって　　$N=4a+19=b+15$

整理すると　　$4(a+1)=b$

ゆえに　　$a=0$ のとき　$b=4$　　　これは $0\leqq b\leqq 4$ を満たす。

　　　　　$a=1$ のとき　$b=8$　　　これは $0\leqq b\leqq 4$ を満たさない。

したがって　　$a=0$，$b=4$　　　また　　$N=4\cdot 0+19=19$

(2)　$abc_{(8)}$ と $cba_{(7)}$ はともに 3 桁の数であり，底について $7<8$ であるから

$1\leqq a\leqq 6$，$0\leqq b\leqq 6$，$1\leqq c\leqq 6$

$abc_{(8)}=a\cdot 8^2+b\cdot 8^1+c\cdot 8^0=64a+8b+c$　…… ①

$cba_{(7)}=c\cdot 7^2+b\cdot 7^1+a\cdot 7^0=49c+7b+a$

この 2 数は同じ数であるから　　$64a+8b+c=49c+7b+a$

ゆえに　　$b=48c-63a$　すなわち　$b=3(16c-21a)$　…… ②

b は 3 の倍数であり，$0\leqq b\leqq 6$ から　　　$b=0$，3，6

[1]　$b=0$ のとき，② から　　$16c=21a$

16 と 21 は互いに素であるから，k を整数とすると　　$a=16k$，$c=21k$

$1\leqq a\leqq 6$，$1\leqq c\leqq 6$ を満たす整数 k は存在しない。

したがって，$b=0$ は不適である。

[2]　$b=3$ のとき，② から　　$1=16c-21a$

ゆえに　　$16c=21a+1$ …… ③

この等式の左辺は偶数であるから，$21a$ は奇数である。

よって，a は奇数であり，$1\leqq a\leqq 6$ から　$a=1,\ 3,\ 5$

③ に $a=1,\ 3,\ 5$ を代入すると，それぞれ　$16c=22$，　$16c=64$，　$16c=106$

これらを解いて，$1\leqq c\leqq 6$ を満たすものは　$c=4$

したがって　$a=3$，$c=4$

[3]　$b=6$ のとき，② から　$2=16c-21a$

ゆえに　$21a=2(8c-1)$

21 と 2 は互いに素であるから，$8c-1$ は 21 の倍数である。

$1\leqq c\leqq 6$ より，$7\leqq 8c-1\leqq 47$ であるから　$8c-1=21,\ 42$

この等式を満たす整数 c は存在しない。

したがって，$b=6$ は不適である。

以上から　$a=3$，$b=3$，$c=4$

この値を ① に代入して　$N=64\cdot 3+8\cdot 3+4=220$

4

解答　(1)　18 回　　(2)　6 個

解説

(1)　20! が 2 で割り切れる回数は，20! を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。1 から 20 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，20 を 2 で割った商で　10

2^2 の倍数の個数は，20 を 2^2 で割った商で　5

2^3 の倍数の個数は，20 を 2^3 で割った商で　2

2^4 の倍数の個数は，20 を 2^4 で割った商で　1

$20<2^5$ であるから，$2^n\ (n\geqq 5)$ の倍数はない。

よって，素因数 2 の個数は，全部で　$10+5+2+1=18$ (個)

したがって，20! は 2 で 18 回割り切れる。

(2)　25! を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，25! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。1 から 25 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，25 を 5 で割った商で　5

5^2 の倍数の個数は，25 を 5^2 で割った商で　1

$25<5^3$ であるから，$5^n\ (n\geqq 3)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は，全部で　$5+1=6$ (個)

したがって，0 は 6 個連続して現れる。

5

解答　(1)　$n=7,\ 21$　　(2)　$n=1,\ 21$

解説

(1)　$n^2-28n+160=(n-8)(n-20)$

$=(8-n)(20-n)$

$n-8>n-20$，$8-n<20-n$ であるから，$n^2-28n+160$ が素数であるとき

$n-20=1$　または　$8-n=1$

$n-20=1$ より　$n=21$　　　$8-n=1$ より　$n=7$

$n=21$ のとき　$n^2-28n+160=13\cdot 1=13$ (素数)

$n=7$ のとき　$n^2-28n+160=1\cdot 13=13$ (素数)

よって，$n^2-28n+160$ が素数となるような n は　$n=7,\ 21$

(2)　$n^2-22n+40=(n-2)(n-20)$

n は自然数であるから　$n-20<n-2$

ゆえに，$n^2-22n+40$ が素数であるとき

$n-20>0$，$n-2>0$ ならば　$n-20=1$　すなわち　$n=21$

$n-20<0$，$n-2<0$ ならば　$n-2=-1$　すなわち　$n=1$

$n=1$ のとき　$n^2-22n+40=(-1)\cdot(-19)=19$ (素数)

$n=21$ のとき　$n^2-22n+40=19\cdot 1=19$ (素数)

よって，$n^2-22n+40$ が素数となるような n は　$n=1,\ 21$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$a+2b$，b の最大公約数を k とすると，互いに素な自然数 m，n を用いて

$a+2b=km$，　$b=kn$

と表される。

$a+2b=km$ から　$a=km-2b=km-2\cdot kn=k(m-2n)$

$m-2n$ は自然数であるから，k は a の約数である。

よって，k は a と b の公約数である。

a，b は互いに素であるから，$k=1$ のみ。

よって，$a+2b$ と b の公約数は 1 だけであるから，$a+2b$ と b の最大公約数は　1

したがって，$a+2b$ と b は互いに素である。

(2)　$4n-1$ と $4n+1$ の最大公約数を g とすると，$4n-1=ga$，$4n+1=gb$ (a，b は互いに素な自然数で，$a<b$) と表される。

この 2 式から n を消去して　$2=g(b-a)$

$b-a>0$ であり，g，a，b は自然数であるから　$g=1$　または　2

$4n-1$ と $4n+1$ は奇数であるから g も奇数である。　よって　$g=1$

ゆえに，$4n-1$ と $4n+1$ の最大公約数は 1 であるから，$4n-1$ と $4n+1$ は互いに素である。

(3)　a と $ka+1$ の最大公約数を d とし，

$a=md$，$ka+1=nd$　(m，n は互いに素な自然数)

とする。

このとき　$kmd+1=nd$

すなわち　$(n-km)d=1$

$n-km$，d は自然数であるから，この等式を満たすのは，

$n-km=1$，$d=1$ の場合だけである。

したがって，a と $ka+1$ の最大公約数が 1 となるから，a と $ka+1$ は互いに素である。

1

解答　(1)　$11111101_{(2)}$　　(2)　$1111_{(2)}$

解説

(1)　$10111_{(2)}\times 1011_{(2)}$

$=11111101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ \times\quad 1011_{(2)} \\ \hline 10111_{(2)} \\ 10111_{(2)} \\ 10111_{(2)} \\ \hline 11111101_{(2)} \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 11 \\ \hline 23 \\ 23 \\ \hline 253 \end{array}$$

(2)　$11000011_{(2)}\div 1101_{(2)}$

$=1111_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1111_{(2)} \\ 1101_{(2)}\overline{)\,11000011_{(2)}} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 10110_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 10011_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 1101_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \hline 0_{(2)} \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 15 \\ 13\overline{)\,195} \\ 13 \\ \hline 65 \\ 65 \\ \hline 0 \end{array}$$

2

解答　500 個

解説

5 進法で表したとき，4 桁となる数は，○□□□$_{(5)}$ の ○ に 1，2，3，4 のどれかを入れ，3 個の □ のそれぞれに 0，1，2，3，4 のどれかを入れた数である。

このような数の個数は　$4\times 5^3=500$ (個)

3

解答　$64\leqq N<128$ のとき 7 桁，$128\leqq N<256$ のとき 8 桁，$256\leqq N\leqq 511$ のとき 9 桁

解説

8 進法で表すと 3 桁になる整数を N とする。

N のうち，最大の数は $777_{(8)}$，最小の数は $100_{(8)}$ である。

$777_{(8)}=7\cdot 8^2+7\cdot 8+7=511$

511 を 2 進法で表すと　$511=111111111_{(2)}$

よって，511 を 2 進法で表すと 9 桁の数である。

$100_{(8)}=1\cdot 8^2=64$

64 を 2 進法で表すと　$64=1000000_{(2)}$

よって，64 を 2 進法で表すと 7 桁の数である。

また，$2\times 64=128=10000000_{(2)}$，$2\times 128=256=100000000_{(2)}$

したがって，N を 2 進法で表したときの桁数は

$64\leqq N<128$ のとき 7 桁，

$128 \leqq N < 256$ のとき 8 桁，
$256 \leqq N \leqq 511$ のとき 9 桁

$\boxed{4}$

解答　$n=8$

解説

条件から　$145=2\cdot n^2+2\cdot n^1+1\cdot n^0$

整理すると　$2n^2+2n-144=0$　すなわち　$2(n+9)(n-8)=0$

n は 3 以上の自然数であるから　$n=8$

$\boxed{5}$

解答　(1)　順に 288，184　(2)　順に $\mathrm{BB}_{(16)}$，$\mathrm{CD4}_{(16)}$

解説

(1)　$120_{(16)}=1\cdot 16^2+2\cdot 16^1+0\cdot 16^0=256+32=288$

$\mathrm{B8}_{(16)}=11\cdot 16^1+8\cdot 16^0=176+8=184$

(2)　$10111011_{(2)}=1\cdot 2^7+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$

$=2^4\cdot 2^3+2\cdot 2^4+1\cdot 2^4+2^3+2+1=(2^3+2+1)\cdot 2^4+8+2+1$

$=11\cdot 16^1+11\cdot 16^0=\mathrm{BB}_{(16)}$

$6324_{(8)}=6\cdot 8^3+3\cdot 8^2+2\cdot 8^1+4\cdot 8^0=6\cdot (2^3)^3+3\cdot (2^3)^2+2\cdot 2^3+4$

$=6\cdot 2^9+3\cdot 2^6+2^4+4=6\cdot (2^4)^2\cdot 2+3\cdot 2^2\cdot 2^4+2^4+4$

$=12\cdot 16^2+13\cdot 16+4=\mathrm{CD4}_{(16)}$

別解　それぞれの数を 10 進法で表し，16 進数に直す

(1)　$10111011_{(2)}=187$

$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 16 & 187 & \text{余り} \\ 16 & 11 & \cdots 11 \\ & 0 & \cdots 11 \end{array}$$

よって　$\mathrm{BB}_{(16)}$

(2)　$6324_{(8)}=3284$

$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 16 & 3284 & \text{余り} \\ 16 & 205 & \cdots\ 4 \\ 16 & 12 & \cdots 13 \\ & 0 & \cdots 12 \end{array}$$

よって　$\mathrm{CD4}_{(16)}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　7　(2)　18

解説

(1)　30! を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，30! を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 30 までの自然数のうち，

5 の倍数の個数は，30 を 5 で割った商で　6

5^2 の倍数の個数は，30 を 5^2 で割った商で　1

$30<5^3$ であるから，$5^n\ (n \geqq 3)$ の倍数はない。

よって，素因数 5 の個数は，全部で　$6+1=7$ (個)

ゆえに，0 は 7 個連続して現れるから　$m=7$

(2)　$2=10_{(2)}$ であるから，20! を 2 進法で表したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，20! が 2 で割り切れる回数に一致する。

また，20! が 2 で割り切れる回数は，20! を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。

1 から 20 までの自然数のうち，

2 の倍数の個数は，20 を 2 で割った商で　10

2^2 の倍数の個数は，20 を 2^2 で割った商で　5

2^3 の倍数の個数は，20 を 2^3 で割った商で　2

2^4 の倍数の個数は，20 を 2^4 で割った商で　1

$20<2^5$ であるから，$2^n\ (n \geqq 5)$ の倍数はない。

よって，素因数 2 の個数は，全部で　$10+5+2+1=18$ (個)

ゆえに，20! は 2 で 18 回割り切れるから　$n=18$

$\boxed{7}$

解答　略

解説

$\dfrac{2a+3b}{3a+4b}$ が既約分数でないと仮定すると，$2a+3b$ と $3a+4b$ に 1 以外の公約数が存在する。それを g とすると

$2a+3b=gh$　……①　$3a+4b=gk$　……②

と表される。ただし，h，k は自然数である。

①×3－②×2 から　$b=g(3h-2k)$　……③

②×3－①×4 から　$a=g(3k-4h)$　……④

③，④ において，$3h-2k$，$3k-4h$ はともに整数であるから，a，b は公約数 g をもつ。

これは，a，b が互いに素な自然数であることに矛盾する。

したがって，$\dfrac{2a+3b}{3a+4b}$ は既約分数である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

$M_p=a_n\cdot p^{n-1}+a_{n-1}\cdot p^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot p+a_1$　(a_1，a_2，……，a_n は 0 以上 $p-1$ 以下の整数) とすると　$m_p=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

また，以下では，k は自然数とする。

(1)　$M_{10}=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot 10+a_1$

10 を 9 で割ったときの余りは 1 であるから，10^k を 9 で割ったときの余りは 1^k すなわち 1 である。

よって　(M_{10} を 9 で割った余り)＝($a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1$ を 9 で割った余り)

＝(m_{10} を 9 で割った余り)

したがって，M_{10} と m_{10} をそれぞれ 9 で割ったときの余りは一致する。

また，10 を 3 で割ったときの余りは 1 であるから，10^k を 3 で割ったときの余りは 1 である。

よって　(M_{10} を 3 で割った余り)＝($a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1$ を 3 で割った余り)

＝(m_{10} を 3 で割った余り)

したがって，M_{10} と m_{10} をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致する。

(2)　[1]　p が偶数のとき

$a_n\cdot p^{n-1}$，$a_{n-1}\cdot p^{n-2}$，……，$a_2\cdot p$ はすべて偶数であるから，M_p が偶数であるための条件は，a_1 が偶数であること。

すなわち，M_p の一の位の数字が偶数であることである。

[2]　p が奇数のとき

p^k を 2 で割ったときの余りは 1 であるから，

(M_p を 2 で割った余り)＝($a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1$ を 2 で割った余り)

＝(m_p を 2 で割った余り)　である。

よって，M_p が偶数であるための条件は，m_p が偶数であることである。

以上により，題意は証明された。

参考　[剰余系で考える]　以下では，k は自然数とする。

(1)　$10\equiv 1 \pmod 9$ であるから　$10^k\equiv 1^k\equiv 1 \pmod 9$

よって　$a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot 10+a_1$

$\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1 \pmod 9$

したがって，M_{10} と m_{10} をそれぞれ 9 で割ったときの余りは一致する。

次に，$10\equiv 1 \pmod 3$ であるから　$10^k\equiv 1^k\equiv 1 \pmod 3$

よって　$a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot 10+a_1$

$\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1 \pmod 3$

したがって，M_{10} と m_{10} をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致する。

(2)　[1]　p が偶数のとき

$p\equiv 0 \pmod 2$ であるから　$p^k\equiv 0 \pmod 2$

よって　$a_n\cdot p^{n-1}+a_{n-1}\cdot p^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot p+a_1\equiv a_1 \pmod 2$

M_p が偶数であるための条件は，a_1 が偶数であること。

すなわち，M_p の一の位の数字が偶数であることである。

[2]　p が奇数のとき

$p\equiv 1 \pmod 2$ であるから　$p^k\equiv 1 \pmod 2$

したがって　　$a_k p^{k-1} \equiv a_k \pmod 2$

ゆえに　　$a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 \cdot p + a_1$

$\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots\cdots + a_2 + a_1 \pmod 2$

よって，M_p が偶数であるための条件は，m_p が偶数であることである。

2

解答　略

解説

$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$

$=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$

$n \geqq 2$ であるから　$n^2+2n+2=(n+1)^2+1 \geqq 3^2+1=10$

$n^2-2n+2=(n-1)^2+1 \geqq 1^2+1=2$

よって，n^4+4 は２以上の２つの自然数の積で表される。

したがって，n^4+4 は素数にならない。

3

解答　(1)　略　　(2)　５で割ると３余る自然数　　(3)　５で割ると２余る自然数

解説

(1)　$(n^2+1)-(n+2)(n-2)=5$ ……①　とする。

$n+2$ と n^2+1 の公約数を g とすると，①の左辺は g の倍数であり，右辺は５であるから，g は５の約数である。

よって，g すなわち $n+2$ と n^2+1 の公約数は１または５に限る。

(2)　$n+2$ と n^2+1 の１以外の公約数は，(1)より５のみであるから，$n+2=5k$（k は自然数）とおける。よって　　$n=5k-2$

このとき，①から n^2+1 も５を約数にもち，確かに１以外に公約数５をもつ。

したがって，n は，５で割ると３余る自然数である。

(3)　恒等式　$4(n^2+1)-(2n+1)(2n-1)=5$ ……②　が成り立つ。

よって，(1)と同様にして，$2n+1$ と n^2+1 の公約数は１または５に限る。

したがって，$2n+1$ と n^2+1 が１以外の公約数をもつとき，それは５に限るから，$2n+1=5m$（m は自然数）とおける。

このとき，②および４と５が互いに素であることから，n^2+1 も５を約数にもち，確かに１以外の公約数５をもつ。

ここで，$2n+1=5m$ において，$2n+1$ は奇数であるから，m は奇数である。

よって　　$2n+1=5(2l-1)$（l は自然数）　　　整理して　　$n=5l-3$

したがって，n は，５で割ると２余る自然数である。

4

解答　(1)　$f(2^k)=1$，$f(2^k-1)=k$　　(2)　(ア)　$1000101_{(2)}$　　(イ)　3

(3)　7，11，13，14　　(4)　57×2^{1999}

解説

(1)　$f(2^k)=f(2^{k-1})=\cdots\cdots=f(2)=f(1)=f(0)+1=1$

$f(2^k-1)=f\left(\dfrac{2^k-2}{2}\right)+1=f(2^{k-1}-1)+1$

よって　　$f(2^k-1)=f(2-1)+(k-1)=f(1)+k-1=k$

(2)　(ア)　$69=1\times 2^6+1\times 2^2+1=1000101_{(2)}$

(イ)　$f(69)=f(34)+1=f(17)+1=f(8)+2=1+2=3$

(3)　$f(n)$ は n を２進法で表した数に含まれる１の個数を表す。

したがって，$f(n)=3$ となる n を小さいものから順に４つ求めると

$111_{(2)}=7$，$1011_{(2)}=11$，$1101_{(2)}=13$，$1110_{(2)}=14$

(4)　(3)と同様に考えて，$f(n)=4$ となる n を大きい順に２進法で書いてみると

１番目　　$1111\underbrace{0\cdots\cdots0}_{0\text{が}2001\text{個}}{}_{(2)}$，

２番目　　$11101\underbrace{0\cdots\cdots0}_{0\text{が}2000\text{個}}{}_{(2)}$，

３番目　　$111001\underbrace{0\cdots\cdots0}_{0\text{が}1999\text{個}}{}_{(2)}$

したがって　　$1\times 2^{2004}+1\times 2^{2003}+1\times 2^{2002}+1\times 2^{1999}=(32+16+8+1)\times 2^{1999}$

$=57\times 2^{1999}$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{60}{7}$

解説

求める分数を $\dfrac{a}{b}$（a，b は互いに素である自然数）とする。

$\dfrac{14}{15}\times\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{21}{20}\times\dfrac{a}{b}$ が自然数であるから，

a は 15，20 の公倍数，　b は 14，21 の公約数

となる。$\dfrac{a}{b}$ は，このような数のうち最も小さいものであるから，

a は 15，20 の最小公倍数，　b は 14，21 の最大公約数

である。

よって　$a=60$，$b=7$　　したがって，求める分数は　$\dfrac{60}{7}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　1　　(2)　72　　(3)　555

解説

(1)　2017 と 225 に互除法の計算を行うと

$2017=225\cdot8+217$

$225=217\cdot1+8$

$217=8\cdot27+1$

$8=1\cdot8$

よって，2017 と 225 の最大公約数は　1

別解　2017 は素数であり，225 は 2017 の倍数でないから，2017 と 225 の最大公約数は　1

(2)　$225=15\cdot15$ であるから，225 との最大公約数が 15 となる自然数 x は

$x=15k$（k は 15 と互いに素な自然数）

と表される。

$x\leqq2017$ とすると，$15k\leqq2017$ から　$k\leqq134$

よって，134 以下の k のうち 15 と互いに素であるものの個数が，求める個数である。

U を 134 以下の自然数全体の集合として，U の要素のうち 3 の倍数であるもの全体の集合を A，5 の倍数であるもの全体の集合を B とすると，

$134=3\times44+2$，$134=5\times26+4$，$134=15\times8+14$

から　$n(A)=44$，$n(B)=26$，$n(A\cap B)=8$

U の要素のうち 15 と互いに素であるもの全体の集合は $\overline{A\cup B}$ で表され，その要素の個数は

$$\begin{aligned}n(\overline{A\cup B})&=n(U)-n(A\cup B)\\&=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}\\&=134-(44+26-8)=72\ (\text{個})\end{aligned}$$

(3)　$1998=111\cdot18$ であるから，1998 との最大公約数が 111 となる自然数 x は

$x=111l=3\cdot37l$（l は 18 と互いに素な自然数）　……①

と表される。また，225 と x の最大公約数が 15 であるとき，(2) と同様にして

$x=15m=3\cdot5m$（m は 15 と互いに素な自然数）　……②

と表される。

①，② から

$x=3\cdot5\cdot37n=555n$　（n は 2，3，5 のいずれとも互いに素な自然数）

と表される。

$555\cdot1=555<2017$，$555\cdot7=3885>2017$ であるから，求める自然数 x は

$x=555\cdot1=555$

$\boxed{3}$

解答　(1)　49923　　(2)　略

解説

(1)　□ に入る数を大きい位から順に a，b（a，b は整数，$0\leqq a\leqq9$，$0\leqq b\leqq9$）とする。

5 桁の自然数 $4a9b3$ が 9 の倍数となるのは，各位の数の和

$4+a+9+b+3=a+b+16$ が 9 の倍数となるときである。

$0\leqq a\leqq9$，$0\leqq b\leqq9$ より，$0\leqq a+b\leqq18$ であるから，$a+b+16$ が 9 の倍数となるのは，　$a+b=2$　または　$a+b=11$

のときである。

最大なものを求めるから，$a+b=11$ を満たす a，b の値の中で，a が最大となる場合を考えればよい。

それを求めて　$a=9$，$b=2$

したがって，求める自然数は　49923

(2)　$10000=11\cdot909+1$，$1000=11\cdot91-1$，$100=11\cdot9+1$，$10=11\cdot1-1$ であるから

$$\begin{aligned}abcba&=a\cdot10^4+b\cdot10^3+c\cdot10^2+b\cdot10+a\\&=a(11\cdot909+1)+b(11\cdot91-1)+c(11\cdot9+1)+b(11-1)+a\\&=11(909a+92b+9c)+2a-2b+c\end{aligned}$$

ここで，$11(909a+92b+9c)$ は 11 の倍数である。

よって，$abcba$ が 11 で割り切れるための必要十分条件は，$2a-2b+c$ が 11 で割り切れることである。

$\boxed{4}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

$b\mid a$ とは，b が a の約数（または a は b の倍数）であることを表す。

(1)　$b\mid a$ かつ $c\mid b$ ならば，$a=bk$ かつ $b=cl$ となる整数 k，l が存在する。

$b=cl$ を $a=bk$ に代入すると　$a=ckl$

k，l が整数であるとき，kl も整数である。

よって，$a=ckl$ となる整数 kl が存在するから　$c\mid a$

(2)　$c\mid a$ かつ $d\mid b$ ならば，$a=ck$ かつ $b=dl$ となる整数 k，l が存在し，この 2 式の辺々を掛けて　$ab=cdkl$

(1) と同様に考えて，$ab=cdkl$ となる整数 kl が存在することから　$cd\mid ab$

(3)　$b\mid a$ かつ $b\mid c$ ならば，$a=bk$ かつ $c=bl$ となる整数 k，l が存在するから

$ma+nc=mbk+nbl=b(mk+nl)$

$mk+nl$ は整数であるから，$ma+nc$ は b の倍数である。

したがって　$b\mid(ma+nc)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

k は整数とする。

(1)　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形で表される。

ここで　$n^9-n^3=n^3(n^6-1)=n^3(n^3+1)(n^3-1)$

[1]　$n=3k$ のとき　$n^3=3^3k^3=9\cdot3k^3$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n^3-1=(3k+1)^3-1=(27k^3+27k^2+9k+1)-1=9(3k^3+3k^2+k)$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n^3+1=(3k+2)^3+1=(27k^3+54k^2+36k+8)+1=9(3k^3+6k^2+4k+1)$

以上から，n^3，n^3-1，n^3+1 のいずれかが 9 の倍数となる。

したがって，n^9-n^3 は 9 の倍数である。

(2)　すべての整数 n は，$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ のいずれかの形で表される。

[1]　$n=5k$ のとき　$n^2=25k^2=5\cdot5k^2$

[2]　$n=5k+1$ のとき　$n^2=5(5k^2+2k)+1$

[3]　$n=5k+2$ のとき　$n^2=5(5k^2+4k)+4$

[4]　$n=5k+3$ のとき　$n^2=5(5k^2+6k)+9=5(5k^2+6k+1)+4$

[5]　$n=5k+4$ のとき　$n^2=5(5k^2+8k)+16=5(5k^2+8k+3)+1$

それぞれの場合について，n^2 を 5 で割った余りは，0，1，4，4，1 であるから，余りが 3 になることはない。

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略

解説

(1)　$2n^3-3n^2+n=n(2n^2-3n+1)=n(n-1)(2n-1)$

$$\begin{aligned}&=n(n-1)\{(n+1)+(n-2)\}\\&=(n-1)n(n+1)+(n-2)(n-1)n\end{aligned}$$

$(n-1)n(n+1)$，$(n-2)(n-1)n$ はともに連続する 3 つの整数の積であるから，6 の倍数である。

よって，その和 $2n^3-3n^2+n$ も 6 の倍数である。

(2)　$P=a^3+a^2-a-1$ とおくと

$P=a^2(a+1)-(a+1)=(a^2-1)(a+1)=(a+1)^2(a-1)$

a が奇数ならば，$a=2k+1$（k は整数）と表せて

$P=\{(2k+1)+1\}^2\{(2k+1)-1\}=(2k+2)^2\cdot2k=8k(k+1)^2$

k，$k+1$ のどちらか一方は 2 の倍数であるから，$k(k+1)^2$ は 2 の倍数である。

よって，P は 16 の倍数である。

(3)　$P=(a+b+c)^3-3(a^3+b^3+c^3)$ とおく。

a，b，c は連続する自然数であるから　$a=b-1$，$c=b+1$　とおける。

ゆえに　$(a+b+c)^3=(3b)^3=27b^3$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=(b-1)^3+b^3+(b+1)^3\\&=(b^3-3b^2+3b-1)+b^3+(b^3+3b^2+3b+1)\\&=3b^3+6b\end{aligned}$$

よって　$P=27b^3-3(3b^3+6b)=18(b^3-b)$

$=18b(b^2-1)=18(b-1)b(b+1)$

$(b-1)b(b+1)$ は連続する 3 整数の積であるから，6 の倍数である。

したがって，P は 18×6 すなわち 108 の倍数であり，108 で割り切れる。

(4)　整数は，n を整数として，

$6n$，$6n+1$，$6n+2$，$6n+3$，$6n+4$，$6n+5$

のいずれかで表される。

それぞれの 2 乗を計算すると

$(6n)^2=6\cdot 6n^2$

$(6n+1)^2=36n^2+12n+1=6(6n^2+2n)+1$

$(6n+2)^2=36n^2+24n+4=6(6n^2+4n)+4$

$(6n+3)^2=36n^2+36n+9=6(6n^2+6n+1)+3$

$(6n+4)^2=36n^2+48n+16=6(6n^2+8n+2)+4$

$(6n+5)^2=36n^2+60n+25=6(6n^2+10n+4)+1$

よって，整数の 2 乗を 6 で割った余りは 0，1，3，4 のいずれかとなり，2，5 にはならない。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$(m,\ n)=(2p-1,\ p-1),\ (p-2,\ p-1)$　　(2)　$n=5,\ 1$

解説

(1)　$m^2+2n^2=p+3mn$ から　　$m^2-3mn+2n^2=p$

ゆえに　　$(m-n)(m-2n)=p$

m，n が整数のとき，$m-n$，$m-2n$ も整数である。

$n\geqq 0$ より $m-n\geqq m-2n$ であり，p は素数であるから

$$\begin{cases} m-n=p \\ m-2n=1 \end{cases},\ \begin{cases} m-n=-1 \\ m-2n=-p \end{cases}$$

これを解くと　$\begin{cases} m=2p-1 \\ n=p-1 \end{cases},\ \begin{cases} m=p-2 \\ n=p-1 \end{cases}$

$p>2$ より $2p-1>0$，$p-1>0$，$p-2>0$ であるから，すべて $m\geqq 0$，$n\geqq 0$ を満たす。

したがって　　$(m,\ n)=(2p-1,\ p-1),\ (p-2,\ p-1)$

(2)　$\sqrt{4n^2+21}=m$ (m は自然数) とおくと　　$4n^2+21=m^2$

ゆえに　　$m^2-4n^2=21$

よって　　$(m+2n)(m-2n)=21$　……①

m，n は自然数であるから，$m+2n$ と $m-2n$ も自然数であり，21 の約数である。

① を満たす m，n の値は，$m+2n\geqq m-2n\geqq 1$ に注意して，

$\begin{cases} m+2n=21 \\ m-2n=1 \end{cases},\ \begin{cases} m+2n=7 \\ m-2n=3 \end{cases}$ を解くと　$\begin{cases} m=11 \\ n=5 \end{cases},\ \begin{cases} m=5 \\ n=1 \end{cases}$

したがって，求める n の値は　　$n=5,\ 1$

$\boxed{8}$

解答　$(k,\ l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$

解説

$k\leqq l\leqq m\leqq n$ であるから

$$klmn=k+l+m+n\leqq n+n+n+n=4n$$

よって　　$klmn\leqq 4n$

両辺を $n\ (>0)$ で割ると　　$klm\leqq 4$

$1\leqq k\leqq l\leqq m$ であるから　　$k\cdot k\cdot k\leqq klm\leqq 4$

よって　　$k^3\leqq 4$

k は自然数であるから　　$k=1$

また，$klm\leqq 4$ から　　$lm\leqq 4$

これを満たす自然数 l，m $(l\leqq m)$ の組は

$(l,\ m)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2)$

$klmn=k+l+m+n$ において

[1]　$(k,\ l,\ m)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$n=3+n$ となるから，これを満たす自然数 n は存在しない。

[2]　$(k,\ l,\ m)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき

$2n=4+n$ となるから　　$n=4$

このとき，$k\leqq l\leqq m\leqq n$ を満たしている。

[3]　$(k,\ l,\ m)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき

$3n=5+n$ となるから　　$n=\dfrac{5}{2}$

n は自然数であるから，この場合は不適である。

[4]　$(k,\ l,\ m)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき

$4n=6+n$ となるから　　$n=2$

このとき，$k\leqq l\leqq m\leqq n$ を満たさないから，この場合は不適である。

[5]　$(k,\ l,\ m)=(1,\ 2,\ 2)$ のとき

$4n=5+n$ となるから　　$n=\dfrac{5}{3}$

n は自然数であるから，この場合は不適である。

[1]～[5] から，求める $(k,\ l,\ m,\ n)$ の組は

$(k,\ l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{9}$

解答　略

解説

p と $p+1$ は連続する 2 つの整数であるから，どちらか一方は偶数である。

ここで，p は 3 より大きい素数であるから，p は偶数でない。

よって，$p+1$ が偶数になる。

p，$p+1$，$p+2$ は連続する 3 つの整数であるから，どれか 1 つは 3 の倍数である。

ここで，p と $p+2$ は 3 より大きい素数であるから，ともに 3 の倍数でない。

よって，$p+1$ が 3 の倍数になる。

以上から，$p+1$ は偶数かつ 3 の倍数となるから，6 の倍数である。

$\boxed{10}$

解答　(1)　$x<-3$，$-1<x<1-\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}<x$　　(2)　$n=-3,\ -1,\ 0$

解説

(1)　$|3x+2|<x^2+x+1$ から　　$-(x^2+x+1)<3x+2<x^2+x+1$

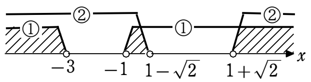
ゆえに　$\begin{cases} x^2+4x+3>0 & \cdots\cdots① \\ x^2-2x-1>0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

① から　　$(x+3)(x+1)>0$

よって　　$x<-3$　または　$-1<x$

② から　　$x<1-\sqrt{2}$　または　$1+\sqrt{2}<x$

したがって　$x<-3$，$-1<x<1-\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}<x$



(2)　$\dfrac{3n+2}{n^2+n+1}=m$ とおく。n が整数のとき，$m\fallingdotseq 0$ であるから，m が整数となるためには $|m|\geqq 1$，すなわち，$|3n+2|\geqq n^2+n+1$ が必要である。

(1) より $-3\leqq n\leqq -1$，$1-\sqrt{2}\leqq n\leqq 1+\sqrt{2}$ が必要で，これを満たす整数 n は

$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

[1]　$n=-3$ のとき　　$m=\dfrac{-9+2}{9-3+1}=\dfrac{-7}{7}=-1$

[2]　$n=-2$ のとき　　$m=\dfrac{-6+2}{4-2+1}=-\dfrac{4}{3}$ となり不適。

[3]　$n=-1$ のとき　　$m=\dfrac{-3+2}{1-1+1}=-1$

[4]　$n=0$ のとき　　$m=\dfrac{0+2}{0+0+1}=2$

[5]　$n=1$ のとき　　$m=\dfrac{3+2}{1+1+1}=\dfrac{5}{3}$ となり不適。

[6]　$n=2$ のとき　　$m=\dfrac{6+2}{4+2+1}=\dfrac{8}{7}$ となり不適。

[1]～[6] より　　$n=-3,\ -1,\ 0$

1

解答 (1) 60　(2) $(p,\ q)=(3,\ 13),\ (5,\ 7)$　(3) $2^k\cdot 3^{n-1}$

解説

(1) $77=7\cdot 11$ であり，7 と 11 は互いに素である。

$f(77)$ は 1 から 77 までの 77 個の自然数のうち，

$1\cdot 7,\ 2\cdot 7,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot 7,\ 11\cdot 7\ ;\ 1\cdot 11,\ 2\cdot 11,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot 11$

を除いたものの個数である。

よって　$f(77)=77-(11+7-1)=77-17=60$

(2) $p,\ q\ (p<q)$ は素数であるから　$f(pq)=(p-1)(q-1)$

$(p-1)(q-1)=24$ とすると，$1\leqq p-1<q-1$ であるから

$(p-1,\ q-1)=(1,\ 24),\ (2,\ 12),\ (3,\ 8),\ (4,\ 6)$

ゆえに　$(p,\ q)=(2,\ 25),\ (3,\ 13),\ (4,\ 9),\ (5,\ 7)$

$p,\ q$ がともに素数である組は　$(p,\ q)=(3,\ 13),\ (5,\ 7)$

(3) p は素数，k は自然数とするとき，$f(p^k)=p^k-p^{k-1}$ が成り立つから

$f(2^k)=2^k-2^{k-1}=2^{k-1}(2-1)=2^{k-1}$

$f(3^n)=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)=2\cdot 3^{n-1}$

2^k と 3^n は互いに素であるから

$f(2^k\cdot 3^n)=f(2^k)f(3^n)=2^{k-1}\cdot 2\cdot 3^{n-1}=2^k\cdot 3^{n-1}$

2

解答 (1) $b=4$　(2) $n=165$　(3) $n=42$

解説

(1) ${}_{100}\mathrm{C}_{50}=\dfrac{100!}{(100-50)!50!}=\dfrac{100!}{50!50!}$　……①

[ ] をガウス記号とすると

$\left[\dfrac{100}{3}\right]=33,\ \left[\dfrac{100}{3^2}\right]=11,\ \left[\dfrac{100}{3^3}\right]=3,\ \left[\dfrac{100}{3^4}\right]=1$

で，$3^5=243>100$

ゆえに，100! を素因数分解したとき，素因数 3 の個数は

$33+11+3+1=48$ (個)

また $\left[\dfrac{50}{3}\right]=16,\ \left[\dfrac{50}{3^2}\right]=5,\ \left[\dfrac{50}{3^3}\right]=1$ で，$3^4=81>50$

よって，50! を素因数分解したとき，素因数 3 の個数は

$16+5+1=22$ (個)

したがって，${}_{100}\mathrm{C}_{50}$ を素因数分解したとき，素因数 3 の個数は，

① から　$48-22\times 2=4$ (個)

すなわち　$b=4$

(2) $10=2\times 5$ であるから，$n!$ が 10 で 40 回割り切れるためには，$n!$ が 5 で 40 回割り切れなければならない。また，そのとき $n!$ は 2 で 40 回以上割り切れる。

$n!$ において

$n=5$ のとき　5 の倍数は　$5\div 5=1$ (個)

$n=5^2$ のとき　5 の倍数は　$5^2\div 5=5$ (個)

　5^2 の倍数は　$5^2\div 5^2=1$ (個)

$n=5^3$ のとき　5 の倍数は　$5^3\div 5=5^2=25$ (個)

　5^2 の倍数は　$5^3\div 5^2=5$ (個)

　5^3 の倍数は　$5^3\div 5^3=1$ (個)

ここで $1+(5+1)+(25+5+1)=38$ であるから，$n=5^3+5^2+5=155$ のとき $n!$ は 5 で 38 回割り切れる。

よって，$n!$ が 5 で 40 回割り切れる最小の n は

$n=155+5\times 2=165$

(3) $\dfrac{n}{6}=m$ (m は自然数) とおくと　$n=2\cdot 3m$

ゆえに　$\dfrac{n^2}{196}=\dfrac{2^2\cdot 3^2m^2}{2^2\cdot 7^2}=\dfrac{3^2m^2}{7^2}=\left(\dfrac{3m}{7}\right)^2$

これが自然数となるのは，m が 7 の倍数のときであるから，$m=7k$ (k は自然数) とおくと　$n=2\cdot 3\cdot 7k$　……①

よって　$\dfrac{n^3}{441}=\dfrac{2^3\cdot 3^3\cdot 7^3k^3}{3^2\cdot 7^2}=2^3\cdot 3\cdot 7k^3$

これが自然数となるもので最小のものは，$k=1$ のときであるから，① に $k=1$ を代入して　$n=42$

3

解答 (1) 略　(2) 略

解説

(1) [1] n が素数であるとき

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ は，すべて n と互いに素である。

よって，$(n-1)!$ は素因数に n をもたない。

したがって，$(n-1)!$ は n で割り切れない。

[2] $n=4$ のとき

$(4-1)!=3!=6$ であるから，$(n-1)!$ は n で割り切れない。

[1], [2] より，n が素数または 4 であるとき，$(n-1)!$ は n で割り切れない。

(2) n は素数ではないから，2 以上 $n-1$ 以下の 2 つの自然数 $a,\ b$ を用いて $n=ab$ と表せる。

[1] $a\neq b$ のとき

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ の中に a と b が含まれるからで，$(n-1)!$ は $ab=n$ の倍数である。

よって，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

[2] $a=b$ のとき

$n=a^2$ であり，$n\neq 4$ より　$a\geqq 3$

$n=a^2\geqq 3a>2a>a$ から，$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ の中に a と $2a$ が含まれる。

よって，$(n-1)!$ は $a\times 2a=2a^2=2n$ の倍数であるから，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

[1], [2] から，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

4

解答 (1) 略　(2) 略

解説

(1) $f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0$ であるから

$a_0\beta^n+a_1\alpha\beta^{n-1}+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+a_n\alpha^n=0$

よって

$a_0\beta^n=-\alpha(a_1\beta^{n-1}+a_2\alpha\beta^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta+a_n\alpha^{n-1})$　……①

$a_n\alpha^n=-\beta(a_0\beta^{n-1}+a_1\alpha\beta^{n-2}+a_2\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1})$　……②

$a_0,\ a_1,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \alpha,\ \beta$ は整数で，α と β は互いに素であるから，① より α は a_0 の約数であり，② より β は a_n の約数である。

(2) $x^3+2x^2+2=0$ を満たす有理数 $x=\alpha$ が存在すると仮定する。

このとき，(1) から α は整数である。

また $\alpha^3+2\alpha^2+2=0$ から　$\alpha^3+2\alpha^2=-2$　すなわち　$\alpha^2(\alpha+2)=-2$

α は整数であるから，$\alpha^2,\ \alpha+2$ も整数であり，$\alpha^2\geqq 0$ から

$\alpha^2=1,\ \alpha+2=-2$　または　$\alpha^2=2,\ \alpha+2=-1$

しかし，これらを満たす整数 α は存在しないから矛盾。

したがって，x が有理数のとき x^3+2x^2+2 は 0 になり得ない。

5

解答 略

解説

整数は，n を整数として，$3n,\ 3n+1,\ 3n+2$ のいずれかで表される。

それぞれの 2 乗を計算すると

$(3n)^2=3\cdot 3n^2,\ (3n+1)^2=3(3n^2+2n)+1,\ (3n+2)^2=3(3n^2+4n+1)+1$

よって，3 の倍数の 2 乗は 3 で割り切れる。　……①

また，3 の倍数でない整数の 2 乗を 3 で割った余りは 1 である。　……②

ゆえに，d が 3 の倍数でないとき，d^2 を 3 で割った余りは 1 である。　……③

次に，$a,\ b,\ c$ の中に含まれる 3 の倍数の個数が 2 でないと仮定する。

[1] $a,\ b,\ c$ がすべて 3 の倍数のとき

① から，$a^2+b^2+c^2$ は 3 の倍数である。

これと ③ は，$a^2+b^2+c^2=d^2$ であることに矛盾する。

[2] $a,\ b,\ c$ のうち 1 つが 3 の倍数で，他の 2 つが 3 の倍数でないとき

①, ② から，$a^2+b^2+c^2$ を 3 で割った余りは 2 である。

これと ③ は，$a^2+b^2+c^2=d^2$ であることに矛盾する。

[3] $a,\ b,\ c$ のすべてが 3 の倍数でないとき

② から，$a^2+b^2+c^2$ は 3 で割り切れる。

これと ③ は，$a^2+b^2+c^2=d^2$ であることに矛盾する。

[1]～[3] から，いずれの場合も矛盾が生じる。

したがって，d が 3 の倍数でないならば，$a,\ b,\ c$ の中に 3 の倍数がちょうど 2 つある。

6

解答 (1) 略

(2) m は負でない整数とする。

$n=6m$ のとき 1,　$n=6m+1$ のとき 5,　$n=6m+2$ のとき 4,

$n=6m+3$ のとき 6,　$n=6m+4$ のとき 2,　$n=6m+5$ のとき 3

(3) 2

解説

(1) $5^3=125=7\times 17+6$　ゆえに，5^3 を 7 で割った余りは 6

よって，$5^6=5^3\times 5^3$ を7で割った余りは 6×6 を7で割った余り 1 に等しい。

したがって，k を整数として $5^6=7k+1$ と表されるから

$5^{n+6}=(7k+1)5^n=7k\times 5^n+5^n$

すなわち，$\overline{5^{n+6}}=\overline{5^n}$ が成り立つ。

(2) m は負でない整数とする。

[1]　$n=6m$ のとき

(1) から　$\overline{5^n}=\overline{5^{6m}}=\overline{5^0}=\overline{1}=1$

[2]　$n=6m+1$ のとき

$\overline{5^n}=\overline{5^{6m+1}}=\overline{5^1}=5$

[3]　$n=6m+2$ のとき

$\overline{5^n}=\overline{5^{6m+2}}=\overline{5^2}=\overline{25}=\overline{7\times3+4}=4$

[4]　$n=6m+3$ のとき

$\overline{5^n}=\overline{5^{6m+3}}=\overline{5^3}=\overline{125}=\overline{7\times17+6}=6$

[5]　$n=6m+4$ のとき

$\overline{5^n}=\overline{5^{6m+4}}=\overline{5^4}=\overline{625}=\overline{7\times89+2}=2$

[6]　$n=6m+5$ のとき

$\overline{5^n}=\overline{5^{6m+5}}=\overline{5^5}=\overline{3125}=\overline{7\times446+3}=3$

(3)　$12192=7\times1741+5$ であるから 12192^4 を 7 で割った余りは 5^4 を 7 で割った余りに等しい。

よって，(2) から　$\overline{12192^4}=\overline{5^4}=2$

7

解答　$(x,\ y)=(3,\ 36),\ (3,\ -42),\ (-3,\ 42),\ (-3,\ -36)$

解説

$55x^2+2xy+y^2=2007$ から　$54x^2+(x+y)^2=2007$

よって　$(x+y)^2=2007-54x^2=9(223-6x^2)$　……①

$(x+y)^2\geqq0$ であるから　$223-6x^2\geqq0$　　ゆえに　$x^2\leqq\dfrac{223}{6}=37.1\cdots\cdots$

x は整数であるから　$x^2=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$

ここで，① より $223-6x^2$ は整数の 2 乗となるが，そのような x^2 の値は $x^2=9$ のみである。

このとき，$x=\pm3$ で　$223-6x^2=169=13^2$

よって，① から　$(x+y)^2=3^2\cdot13^2$　すなわち　$(x+y)^2=39^2$

したがって　$x+y=\pm39$

よって　$(x,\ x+y)=(3,\ 39),\ (3,\ -39),\ (-3,\ 39),\ (-3,\ -39)$

ゆえに　$(x,\ y)=(3,\ 36),\ (3,\ -42),\ (-3,\ 42),\ (-3,\ -36)$

8

解答　(1)　(ア)　2　　(イ)　-6　　(2)　$n=-6,\ -4,\ 0,\ 2$

解説

(1)　方程式 ① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=n^2-(2n^2+4n-16)=-n^2-4n+16$

方程式 ① が実数解をもつための条件は　$D\geqq0$

ゆえに　$-n^2-4n+16\geqq0$　　よって　$n^2+4n-16\leqq0$

これを解いて　$-2-2\sqrt{5}\leqq n\leqq-2+2\sqrt{5}$

ゆえに，最大の整数 n は ${}^{ア}2$,　最小の整数 n は ${}^{イ}-6$

(2)　方程式 ① の解は　$x=-n\pm\sqrt{\dfrac{D}{4}}$ …… ②

よって，方程式 ① が整数解をもつための条件は，$\dfrac{D}{4}$ が平方数となることである。

(1) の結果より，整数 n は $-6\leqq n\leqq2$ の範囲にあり，$\dfrac{D}{4}=-(n+2)^2+20$ であるから

$n=-2$ のとき　$\dfrac{D}{4}=20$　　$n=-3,\ -1$ のとき　$\dfrac{D}{4}=19$

$n=-4,\ 0$ のとき　$\dfrac{D}{4}=16$　　$n=-5,\ 1$ のとき　$\dfrac{D}{4}=11$

$n=-6,\ 2$ のとき　$\dfrac{D}{4}=4$

したがって，$\dfrac{D}{4}$ が平方数となるような n の値は　$n=-6,\ -4,\ 0,\ 2$

9

解答　(1)　$m=12,\ n=9$　　(2)　$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

解説

(1)　$m^3+1^3=n^3+10^3$ から　$m^3-n^3=999$

よって　$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\times37$　…… ①

$m^2+mn+n^2>0$，$3^3\times37>0$ から　$m-n>0$

$m^2+mn+n^2-(m-n)=m(m-1)+mn+n^2+n>0$

よって，$0<m-n<m^2+mn+n^2$ であり，① から

$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$

[1]　$m-n=1$，$m^2+mn+n^2=999$ のとき

$m=n+1$ を $m^2+mn+n^2=999$ に代入して

$(n+1)^2+(n+1)n+n^2=999$

整理すると　$3n^2+3n=998$

左辺は 3 で割り切れ，右辺は 3 で割り切れないから，この等式を満たす整数 n は存在しない。

[2]　$m-n=3$，$m^2+mn+n^2=333$ のとき

$(n+3)^2+(n+3)n+n^2=333$

整理すると　$n^2+3n-108=0$

$(n-9)(n+12)=0$

$n\geqq2$ であるから　$n=9$　　このとき　$m=n+3=9+3=12$

[3]　$m-n=9$，$m^2+mn+n^2=111$ のとき

$(n+9)^2+(n+9)n+n^2=111$

整理すると　$n^2+9n-10=0$

$(n-1)(n+10)=0$

この等式を満たす 2 以上の整数 n は存在しない。

[4]　$m-n=27$，$m^2+mn+n^2=37$ のとき

$(n+27)^2+(n+27)n+n^2=37$

整理すると　$3n^2+81n+729=37$

左辺は 3 で割り切れ，右辺は 3 で割り切れないから，この等式を満たす整数 n は存在しない。

以上から　$m=12,\ n=9$

(2)　$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=3(p^3+q^3)-pq(p+q)$

$=3(p+q)(p^2-pq+q^2)-pq(p+q)=(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)$

よって，与式は　$(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)=3\cdot11\cdot61$　…… ①

ここで，$p,\ q$ が正の整数であるとき

$3p^2-4pq+3q^2=2(p-q)^2+p^2+q^2\geqq p+q$

であるから　$p+q=3,\ 11,\ 33$

[1]　$p+q=3$ のとき

$(p,\ q)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ となるが，このとき $3p^2-4pq+3q^2=7$ となり，① を満たさない。

[2]　$p+q=11$ のとき

① から　$3p^2-4pq+3q^2=183$　　よって　$3(p+q)^2-10pq=183$

$p+q=11$ を代入して　$3\cdot11^2-10pq=183$　　ゆえに　$pq=18$

$p+q=11$，$pq=18$ から　$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

[3]　$p+q=33$ のとき

① から　$3p^2-4pq+3q^2=61$　　よって　$3(p+q)^2-10pq=61$

$p+q=33$ を代入して　$3\cdot33^2-10pq=61$　　ゆえに　$10pq=3206$

これを満たす正の整数 $p,\ q$ の組は存在しない。

以上から　$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

10

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　[1]　$a=3k$ (k は 1 以上の整数) のとき

$a^2=(3k)^2=3(3k^2)$

[2]　$a=3k+1$ (k は 0 以上の整数) のとき

$a^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$

[3]　$a=3k+2$ (k は 0 以上の整数) のとき

$a^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$

以上から，任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

別解　2 つの整数 $a,\ b$ について，$a-b$ が 3 の倍数であるとき，$a\equiv b \pmod 3$ とかく。

自然数 a に対して

[1]　$a\equiv0 \pmod 3$ のとき　$a^2\equiv0 \pmod 3$

[2]　$a\equiv1 \pmod 3$ のとき　$a^2\equiv1 \pmod 3$

[3]　$a\equiv2 \pmod 3$ のとき　$a^2\equiv2^2\equiv4\equiv1 \pmod 3$

以上から，任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

(2)　$a^2+b^2=3c^2$ …… ① とする。

① が成り立つとすると，a^2+b^2 は 3 で割り切れる。

ここで，a が 3 で割り切れないとすると，(1) より，a^2 を 3 で割った余りは 1 である。

a^2+b^2 が 3 で割り切れることから，b^2 を 3 で割った余りは 2 となるが，これは (1) に矛盾する。

したがって，a は 3 で割り切れる。

このとき，a^2+b^2 が 3 で割り切れることから，b^2 も 3 で割り切れる。

よって，b も 3 で割り切れる。

ここで，$a=3k,\ b=3l$ ($k,\ l$ は自然数) として ① に代入すると　$(3k)^2+(3l)^2=3c^2$

すなわち　$9k^2+9l^2=3c^2$　　したがって　$c^2=3(k^2+l^2)$

よって，c も 3 の倍数である。

ゆえに，自然数 $a,\ b,\ c$ が ① を満たすとすると，$a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　① を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定する。

① を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ の組のうち，a が最小となるような組を $a_1,\ b_1,\ c_1$ とする。

このとき，(2) より，a_1，b_1，c_1 はすべて 3 で割り切れるから

$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ (a_2，b_2，c_2 は自然数)

と表すことができる。

これらを ① に代入すると　$(3a_2)^2+(3b_2)^2=3(3c_2)^2$

ゆえに　$a_2{}^2+b_2{}^2=3c_2{}^2$

したがって，a_2，b_2，c_2 は ① を満たす。

しかし，$a_2<a_1$ となり，これは a_1 が最小であることに矛盾する。

よって，① を満たす自然数 a，b，c は存在しない。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$p=f(-1)$，$q=f(0)$，$r=f(1)$ とおくと

$p=-1+a-b+c$，$q=c$，$r=1+a+b+c$

ゆえに　$a=\dfrac{p+r}{2}-q$，$b=\dfrac{r-p}{2}-1$，$c=q$

よって　$f(x)=x^3+\left(\dfrac{p+r}{2}-q\right)x^2+\left(\dfrac{r-p}{2}-1\right)x+q$

$=\dfrac{1}{2}p(x^2-x)+\dfrac{1}{2}r(x^2+x)+x^3-qx^2-x+q$

$=\dfrac{1}{2}px(x-1)+\dfrac{1}{2}rx(x+1)+x^3-qx^2-x+q$

ここで，n を整数とすると，$n(n-1)$，$n(n+1)$ はともに連続する 2 整数の積であるから，どちらも偶数であり，$\dfrac{n(n-1)}{2}$，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ は整数である。

また，n^3-qn^2-n+q は整数である。

したがって，$f(n)=p\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+r\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+n^3-qn^2-n+q$ は整数である。

(2)　$g(x)=f(x+2014)$ とすると，$g(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ (A，B，C は実数) と表される。

ここで，$g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ は整数であるから，(1) より，すべての整数 n について $g(n)$ は整数である。

$f(n)=g(n-2014)$ であるから，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である。

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$a=1125$

解説

(1)　$3a=b^3$ より，b^3 は 3 の倍数であるから，b は 3 の倍数である。

$b=3k$ (k は自然数) とおくと　$3a=(3k)^3$

よって，$a=9k^3$ となるから，a は 3 の倍数である。

同様にして，$5a=c^2$ より a は 5 の倍数である。

したがって，a は 3 と 5 で割り切れる。

(2)　a が 3 と 5 以外の素因数 p をもつと仮定し，a に含まれる素因数 p の個数を A とすると　$a=p^Aa'$ (p と a' は互いに素)　と表される。

このとき，$b^3=3a=3p^Aa'$ であるから，b^3 は p の倍数であり，b は p の倍数である。ゆえに，B を自然数として $b=p^Bb'$ (p と b' は互いに素) と表されるから

$3a=b^3=p^{3B}(b')^3$　……①

同様にして，C を自然数として $c=p^Cc'$ (p と c' は互いに素) と表されるから

$5a=c^2=p^{2C}(c')^2$　……②

p は 3，5，b'，c' とそれぞれ互いに素であるから，①，②より

$p^{3B}=p^{2C}$

したがって，a は p^{6m} (m は自然数) の倍数である。

これは，「d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限る」ことに矛盾する。

以上から，a の素因数は 3 と 5 以外にない。

(3)　(2) から，$a=3^x\times5^y$ (x，y は自然数) とおける。

d^6 が a を割り切るのは $d=1$ に限るから，$1\leqq x\leqq5$，$1\leqq y\leqq5$ となる。

このとき，$b^3=3a=3^{x+1}\times5^y$ であるから，$x+1$，y はともに 3 の倍数である。

よって　$(x+1,\ y)=(3,\ 3),\ (6,\ 3)$

したがって　$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (5,\ 3)$

また，$c^2=5a=3^x\times5^{y+1}$ であるから，x，$y+1$ はともに偶数である。

よって　$(x,\ y)=(2,\ 3)$

このとき　$a=3^2\times5^3=9\times125=1125$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

解説

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$　……① とする。

[1]　$x=2$ のとき，$1<x<y$ から　$y\geqq3$

① から　$\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$　　これを解くと　$y=9$　($y\geqq3$ を満たす)

[2]　$x=3$ のとき，$1<x<y$ から　$y\geqq4$

① から　$\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$　　これを解くと　$y=4$　($y\geqq4$ を満たす)

[3]　$x\geqq4$ のとき，$1<x<y$ から　$y\geqq5$

よって，$\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{5}$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\leqq\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$$

したがって，① を満たす x，y はない。

[1]，[2]，[3] から，求める x，y の組は　$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

別解　① の両辺に $3xy$ を掛けると　$3(x+1)(y+1)=5xy$

∴　$2xy-3x-3y=3$

ゆえに　$(2x-3)(2y-3)=15$

$1<x<y$ より $-1<2x-3<2y-3$ であるから

$(2x-3,\ 2y-3)=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$

(2)　$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$　……② とする。

[1]　$x=2$，$y=3$ のとき，$1<x<y<z$ から　$z\geqq4$

よって，② から　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$

これを解くと　$z=5$　($z\geqq4$ を満たす)

[2]　$x\geqq2$，$y\geqq4$ のとき，$1<x<y<z$ から　$z\geqq5$

よって，$\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{5}$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\leqq\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{9}{4}<\frac{12}{5}$$

したがって，② を満たす x，y，z はない。

[1]，[2] から，求める x，y，z の組は　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$

$\boxed{4}$

解答　$a=\dfrac{p+1}{2}$，$b=\dfrac{p-1}{2}$，$c=\dfrac{1-p}{2}$，$d=-\dfrac{p+1}{2}$

解説

$a+b+c+d=0$　……①，$ad-bc+p=0$　……②，$a\geqq b\geqq c\geqq d$　……③ とする。

① から　　$d=-a-b-c$

これを ② に代入して　　$a(-a-b-c)-bc+p=0$

すなわち　　$a^2+(b+c)a+bc=p$

変形すると　　$(a+b)(a+c)=p$　……④

③ から　　$a+b\geqq c+d$　　　　これと ① から　　$a+b\geqq 0$

ゆえに，③ と ④ より，$a+b\geqq a+c>0$ であり，p は正の素数であるから

$$a+b=p,\ a+c=1$$

よって，$b=p-a$，$c=1-a$ となり，① より

$$d=-a-(p-a)-(1-a)=a-p-1$$

これらを ③ に代入すると

$$a\geqq p-a\geqq 1-a\geqq a-p-1$$

$a\geqq p-a$ から　　$p\leqq 2a$　　　　$1-a\geqq a-p-1$ から　　$p\geqq 2a-2$

ゆえに　　$2a-2\leqq p\leqq 2a$

p は 3 以上の素数であるから，奇数である。

よって　　$p=2a-1$

したがって，$a=\dfrac{p+1}{2}$ であり

$$b=p-a=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}$$

$$c=1-a=1-\frac{p+1}{2}=\frac{1-p}{2}$$

$$d=a-p-1=\frac{p+1}{2}-p-1=-\frac{p+1}{2}$$

$\boxed{5}$

解答　$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 2),\ (23,\ 13,\ 3)$

解説

[1]　a，b，c に 2 を含む場合

$a-b-8>0$，$b-c-8>0$ であるから

$a>b+8>8$，　$b>c+8>8$

よって，a，b は 2 ではないから　　$c=2$

a，b は 2 でない素数であるから奇数である。

ゆえに，$a-b-8$ は偶数の素数となるから

$a-b-8=2$　　すなわち　　$a=b+10$　……①

$d=b-c-8$ とすると，$c=2$ から

$b=d+10$　……②

② を ① に代入して　　$a=d+20$

$a=d+3\cdot 6+2$，$b=d+3\cdot 3+1$ であるから，a，b，d のいずれか 1 つは 3 の倍数である。

3 の倍数の素数は 3 に限られ，①，② より $a>10$，$b>10$ であるから　　$d=3$

このとき　　$a=23$，$b=13$

これらは条件を満たす。

[2]　a，b，c に 2 を含まない場合

a，b，c はすべて奇数であるから，$a-b-8$，$b-c-8$ は偶数の素数となる。

よって　　$a-b-8=2$，$b-c-8=2$

ゆえに　　$a=b+10$，$b=c+10$

[1] と同様に考えると，$c=3$ が得られるから

$a=23$，$b=13$

これらは条件を満たす。

[1]，[2] から

$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 2),\ (23,\ 13,\ 3)$

$\boxed{6}$

解答　625

解説

$a^2-a=a(a-1)$ であり，a と $a-1$ は互いに素である。

また　　$10000=5^4\cdot 2^4=625\cdot 16$

ここで，a は奇数 $(3\leqq a\leqq 9999)$ であるから $a-1$ は偶数である。

ゆえに，a^2-a が 10000 で割り切れるとき，a は奇数の 625 の倍数，$a-1$ は 16 の倍数である。よって，a，$a-1$ は次のように表される。

$a=625k$ (k は正の奇数)，　　$a-1=16l$ (l は整数)

この 2 式から a を消去して　　$625k-1=16l$

$625=16\cdot 39+1$ であるから　　$(16\cdot 39+1)k-1=16l$

したがって　　$k-1=16(l-39k)$

すなわち，$k-1$ は 16 の倍数であるから，$k-1=16m$ (m は整数) と表される。

$k=16m+1$ を $a=625k$ に代入すると

$a=625(16m+1)=10000m+625$　……①

$3\leqq a\leqq 9999$ から　　$3\leqq 10000m+625\leqq 9999$

この不等式を満たす整数 m は，$m=0$ のみである。

したがって，①から　　$a=625$

$\boxed{7}$

解答　略

解説

x^2 を $2p$ で割ったときの余りを r_1，y^2 を $2p$ で割ったときの余りを r_2 とすると

$x^2=2p\cdot q_1+r_1$，$y^2=2p\cdot q_2+r_2$　(q_1，q_2 は整数)

ゆえに　　$x^2-y^2=2p(q_1-q_2)+r_1-r_2$

$r_1=r_2$ のとき $r_1-r_2=0$ であるから　　$x^2-y^2=2p(q_1-q_2)$　……①

よって，$r_1=r_2$ ならば，x^2-y^2 は $2p$ の倍数である。

① から　　$(x+y)(x-y)=2p(q_1-q_2)$　……①′

ここで，$x+y$ と $x-y=x+y-2y$ とは偶奇が一致することに注意すると，①′ の右辺は偶数であるから，$x+y$ と $x-y$ はともに偶数である。

また，p は 3 以上の素数であるから，$x+y$ または $x-y$ は $2p$ の倍数である。

$0\leqq x\leqq p$，$0\leqq y\leqq p$ であるから

$0\leqq x+y\leqq 2p$ ……②，$-p\leqq x-y\leqq p$ ……③

[1]　$x+y$ が $2p$ の倍数の場合

② から　　$x+y=0$　または　$x+y=2p$

(i)　$x+y=0$ のとき　　$y=-x$

$0\leqq y\leqq p$ に代入して　　$0\leqq -x\leqq p$　すなわち　$-p\leqq x\leqq 0$

$0\leqq x\leqq p$ との共通範囲を考えると，$x=y=0$ が得られる。

(ii)　$x+y=2p$ のとき　　$y=2p-x$

$0\leqq y\leqq p$ に代入して　　$0\leqq 2p-x\leqq p$　すなわち　$p\leqq x\leqq 2p$

$0\leqq x\leqq p$ との共通範囲を考えると，$x=y=p$ が得られる。

[2]　$x-y$ が $2p$ の倍数の場合

③ から　　$x-y=0$　　すなわち，$x=y$ である。

以上から，x^2 を $2p$ で割ったときの余りと，y^2 を $2p$ で割ったときの余りが等しければ，$x=y$ である。

$\boxed{8}$

解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　　(2)　略

解説

(1)　$n=1$ のとき，① から　$x+y+z=xyz$ ……②

$0<x\leqq y\leqq z$ であるから　　$x+y+z\leqq z+z+z=3z$

よって　　$xyz\leqq 3z$

$z>0$ であるから　　$xy\leqq 3$

x，y は $0<x\leqq y$ を満たす自然数であるから

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$

[1]　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき，② から　　$2+z=z$

これは成り立たないから不適。

[2]　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき，② から　　$3+z=2z$

よって　　$z=3$　　　この x，y，z は $x\leqq y\leqq z$ を満たす。

[3]　$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき，② から　　$4+z=3z$

よって　　$z=2$　　この x，y，z は $x\leqq y\leqq z$ を満たさないから不適。

したがって　　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

(2)　$n=3$ のとき，① は　　$x^3+y^3+z^3=xyz$

この方程式を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が存在すると仮定する。

$0<x\leqq y\leqq z$ としても一般性は失われない。

このとき　　$xyz\leqq zzz=z^3$

ゆえに　　$x^3+y^3+z^3\leqq z^3$　　　よって　　$x^3+y^3\leqq 0$　……③

一方，$x>0$，$y>0$ であるから　　$x^3+y^3>0$　……④

③ と ④ は矛盾する。

したがって，① を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しない。

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　ni，nj $(i>j,\ i\in A,\ j\in A)$ を p で割った余りが一致すると仮定すると

$r_i=r_j$　　すなわち　　$n(i-j)=pm$ (m は正の整数)　……①

と表せる。

ここで，p は素数，n は p で割り切れないから，n と p は互いに素である。

また，$1\leqq i-j\leqq p-2$ で，p は素数であるから，$i-j$ と p も互いに素である。

ゆえに，$n(i-j)$ は p を約数にもたないから，① は矛盾。

よって　　$r_i\neq r_j$

また，r_k は $1\leqq r_k\leqq p-1$ なる自然数であるから，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1$ に対して，それぞれ相異なる $p-1$ 個の値をとる。

したがって，集合 $\{r_k \mid k\in A\}$ は A と一致する。

(2)　任意の $k\in A$ に対して，$nk=a_kp+r_k$ とおくと

$$1\cdot n\times 2n\times\cdots\cdots\times(p-1)n=(a_1p+r_1)(a_2p+r_2)\times\cdots\cdots\times(a_{p-1}p+r_{p-1})\quad\cdots\cdots②$$

(② の左辺)$=n^{p-1}\cdot 1\cdot 2\cdots\cdots(p-1)$

(② の右辺)$=Np+r_1r_2\cdots\cdots r_{p-1}$　(N は自然数)

よって　　$n^{p-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(p-1)=Np+r_1r_2\cdots\cdots r_{p-1}$

(1) より，$r_1r_2\cdots\cdots r_{p-1}=1\cdot2\cdot\cdots\cdots(p-1)$ であるから

$$n^{p-1}\cdot1\cdot2\cdots\cdots(p-1)-1\cdot2\cdots\cdots(p-1)=Np$$

よって　$(n^{p-1}-1)\cdot1\cdot2\cdots\cdots(p-1)=Np$

p は素数であるから，$1\cdot2\cdots\cdots(p-1)$ と p は互いに素である。

したがって，$n^{p-1}-1$ は p で割り切れる。

$\boxed{10}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$　……① とする。

$x=6k$ (kは整数) とすると　$y=\dfrac{1}{3}\cdot(6k)^2+\dfrac{1}{2}\cdot6k=12k^2+3k$

kは整数であるから，yも整数となる。

よって，点 $(6k,\ 12k^2+3k)$ は ① のグラフ上の格子点であり，整数 kは無限に存在するから，① のグラフ上に無限個の格子点が存在する。

(2)　$y=ax^2+bx$　……② のグラフ上に格子点

$$(p_1,\ q_1),\ (p_2,\ q_2)\ (p_1\neq0,\ p_2\neq0,\ p_1\neq p_2)$$

が存在すると仮定する。

このとき，次の等式が成り立つ。

$$a{p_1}^2+bp_1=q_1\quad\cdots\cdots③,\qquad a{p_2}^2+bp_2=q_2\quad\cdots\cdots④$$

③ と ④ を連立して解くと，$p_1p_2(p_1-p_2)\neq0$ であるから

$$a=\frac{p_2q_1-p_1q_2}{p_1p_2(p_1-p_2)},\quad b=\frac{{p_1}^2q_2-{p_2}^2q_1}{p_1p_2(p_1-p_2)}$$

p_1，q_1，p_2，q_2 は整数であるから，a，b はともに有理数である。

ここで，$a=\dfrac{m}{l}$ (l と m はともに 0 でない整数)，$b=\dfrac{q}{p}$ (p，q は整数，$p\neq0$) とおくと，② は $y=\dfrac{m}{l}x^2+\dfrac{q}{p}x$ となる。

よって，$x=lpk$ (kは整数) とすると x は整数であり，$y=lmp^2k^2+lqk$ から，yも整数となる。

整数 k は無限に存在するから，$y=ax^2+bx$ のグラフ上に無限個の格子点が存在する。

$\boxed{11}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$x=a^2+b^2$，$y=c^2+d^2$ (a，b，c，d は整数) とおくと

$$xy=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$ac+bd$，$ad-bc$ は整数であるから，A に属する整数 x，y の積 xy は A に属する。

(2)　$p=5a+1$，$q=5b+2$ (a，b は整数) とおくと

$$\frac{p^2+q^2}{5}=\frac{(5a+1)^2+(5b+2)^2}{5}=5a^2+5b^2+2(a+2b)+1$$

$5a^2+5b^2=(2a-b)^2+(a+2b)^2$ であるから

$$\frac{p^2+q^2}{5}=(2a-b)^2+(a+2b)^2+2(a+2b)+1$$
$$=(2a-b)^2+(a+2b+1)^2$$

$2a-b$，$a+2b+1$ は整数であるから，$\dfrac{p^2+q^2}{5}$ は A に属する。

(3)　すべての整数は $5m$，$5m\pm1$，$5m\pm2$ (m は整数) のいずれかで表されて

$$(5m)^2=(5\text{の倍数})+0,\qquad (5m\pm1)^2=(5\text{の倍数})+1$$
$$(5m\pm2)^2=(5\text{の倍数})+4$$

よって，$n=p^2+q^2$ (p，qは整数) とおくと，n が 5 の倍数になるのは a，b を整数として

$$(p,\ q)=(5a,\ 5b),\ (5a\pm1,\ 5b\pm2),\ (5a\pm2,\ 5b\pm1)$$

の場合である。

[1]　$(p,\ q)=(5a,\ 5b)$ のとき

$$\frac{n}{5}=\frac{(5a)^2+(5b)^2}{5}=5a^2+5b^2=(2a-b)^2+(a+2b)^2$$

$2a-b$，$a+2b$ は整数であるから，A に属する。

[2]　$(p,\ q)=(5a\pm1,\ 5b\pm2)$ (複号同順) のとき

$$\frac{n}{5}=\frac{(5a\pm1)^2+(5b\pm2)^2}{5}=5a^2+5b^2\pm2(a+2b)+1=(2a-b)^2+(a+2b\pm1)^2$$

$2a-b$，$a+2b\pm1$ は整数であるから，A に属する。

[3]　$(p,\ q)=(5a\pm1,\ 5b\mp2)$ (複号同順) のとき

$$\frac{n}{5}=\frac{(5a\pm1)^2+(5b\mp2)^2}{5}=5a^2+5b^2\pm2(a-2b)+1$$
$$=(2a+b)^2+(a-2b)^2\pm2(a-2b)+1$$
$$=(2a+b)^2+(a-2b\pm1)^2$$

$2a+b$，$a-2b\pm1$ は整数であるから，A に属する。

[4]　$(p,\ q)=(5a\pm2,\ 5b\pm1)$ (複号任意) のとき

[2]，[3] と同様に，$\dfrac{n}{5}$ は A に属する。

以上から，A に属する自然数 n が 5 の倍数であるとき，$\dfrac{n}{5}$ も A に属する。

$\boxed{12}$

解答　298 個

解説

$[\sqrt{n}]=k$ とおくと，k は正の整数であり

$$k\leqq\sqrt{n}<k+1\qquad\text{よって}\qquad k^2\leqq n<k^2+2k+1$$

すなわち　$n=k^2,\ k^2+1,\ \cdots\cdots,\ k^2+2k$

このうち，k の倍数となるような n は，小さい順に

$$k\cdot k=k^2,\qquad k\cdot(k+1)=k^2+k,\qquad k\cdot(k+2)=k^2+2k$$

の 3 個である。

$\sqrt{1}=1$，$\sqrt{10000}=100$ であるから　$1\leqq k\leqq100$

$1\leqq k\leqq99$ のとき　$k^2+2k<10000$

よって，k^2，k^2+k，k^2+2k の 3 つとも 10000 を超えないから，k が n の約数となる整数 n は各 k について 3 個ずつある。

$k=100$ のとき　$k^2=10000$

よって，10000 を超えないのは k^2 のみであるから，k が n の約数となる整数 n は 1 個である。

異なる k の値に対して，n の値も異なるから，求める個数は

$$99\times3+1=298\ (\text{個})$$