

第3章～図形と方程式～ 第1講 例題

1

解答 (1) (2, 5) (2) (-1, 17) (3) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) (2, 2)

解説

(1) $(\frac{1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3}{4+1}, \frac{1 \cdot (-3) + 4 \cdot 7}{4+1})$ よって (2, 5)

(2) $(\frac{-3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{2-3}, \frac{-3 \cdot 7 + 2 \cdot 2}{2-3})$ よって (-1, 17)

(3) $(\frac{5-2}{2}, \frac{2-3}{2})$ よって $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

(4) $(\frac{-2+3+5}{3}, \frac{-3+7+2}{3})$ よって (2, 2)

2

解答 (1) $5\sqrt{5}$ (2) $P(0, \frac{15}{4})$

解説

(1) $AB = \sqrt{6 - (-4)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

(2) $P(0, y)$ とおくと, $AP = BP$ すなわち $AP^2 = BP^2$ から
 $(0 - 3)^2 + [y - (-4)]^2 = (0 - 8)^2 + (y - 6)^2$

ゆえに $9 + (y + 4)^2 = 64 + (y - 6)^2$ 整理して $4y = 15$

これを解いて $y = \frac{15}{4}$

よって $P(0, \frac{15}{4})$

3

解答 略

解説

直線 BC を x 軸に, 辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると, 線分 BC の中点は原点 O になる。

$A(3a, 3b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ とすると, G は重心であるから, $G(a, b)$ と表すことができる。

このとき

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = \{(-c - 3a)^2 + (-3b)^2\} + \{c - (-c)\}^2 + \{(3a - c)^2 + (3b)^2\}$$

$$= 3(6a^2 + 6b^2 + 2c^2) \dots\dots ①$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \{(3a - a)^2 + (3b - b)^2\} + \{(-c - a)^2 + (-b)^2\} + \{(c - a)^2 + (-b)^2\}$$

$$= 6a^2 + 6b^2 + 2c^2 \dots\dots ②$$

①, ② から $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

4

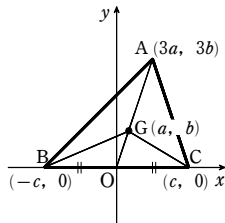
解答 (1) $y = -2x - 2$ (2) $y = 3x - 7$

(3) 平行 $3x + 2y + 5 = 0$, 垂直 $2x - 3y - 14 = 0$

解説

(1) $y - (-4) = -2(x - 1)$ よって $y = -2x - 2$

(2) $y - (-4) = \frac{2 - (-4)}{3 - 1}(x - 1)$ よって $y = 3x - 7$



(3) 直線 $3x + 2y + 1 = 0$ の傾きは $-\frac{3}{2}$

[1] 平行な直線の方程式は

$$y - (-4) = -\frac{3}{2}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad 3x + 2y + 5 = 0$$

[2] 垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2} \times m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = \frac{2}{3}$$

よって, 垂直な直線の方程式は

$$y - (-4) = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad 2x - 3y - 14 = 0$$

例題 点 (x_1, y_1) を通り, 直線 $ax + by + c = 0$ に平行な直線, 垂直な直線が, それぞれ

平行 $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ 垂直 $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$

と表されることを利用する。

[1] 平行な直線の方程式は

$$3(x - 1) + 2(y + 4) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x + 2y + 5 = 0$$

[2] 垂直な直線の方程式は

$$2(x - 1) - 3(y + 4) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x - 3y - 14 = 0$$

5

解答 $(-1, -2)$

解説

点 B の座標を (p, q) とする。

ℓ の傾きは $-\frac{2}{3}$ であり, 直線 AB は ℓ に垂直である

から $(-\frac{2}{3}) \cdot \frac{q - 4}{p - 3} = -1$

よって $3p - 2q = 1 \dots\dots ①$

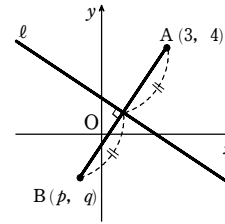
また, 線分 AB の中点 $(\frac{p+3}{2}, \frac{q+4}{2})$ は ℓ 上にある

から $2 \cdot \frac{p+3}{2} + 3 \cdot \frac{q+4}{2} - 5 = 0$

よって $2p + 3q = -8 \dots\dots ②$

①, ② を連立して解くと $p = -1, q = -2$

したがって, 点 B の座標は $(-1, -2)$



6

解答 (1, 2)

解説

直線の方程式を k について整理すると

$$(x + 2y - 5)k + (2x - 3y + 4) = 0$$

この等式が k の値に関係なく成り立つための必要十分条件は

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \text{かつ} \quad 2x - 3y + 4 = 0$$

連立方程式 $x + 2y - 5 = 0, 2x - 3y + 4 = 0$ を解くと $x = 1, y = 2$

よって, 求める定点の座標は (1, 2)

7

解答 $4x - 27y + 43 = 0$

解説

k を定数として, 方程式

$$k(8x + 7y - 19) + (3x - 5y + 6) = 0 \quad \dots\dots ①$$

を考えると, ① は 2 直線 $8x + 7y - 19 = 0, 3x - 5y + 6 = 0$ の交点を通る直線を表す。直線 ① が点 $(-4, 1)$ を通るとき

$$k[8 \cdot (-4) + 7 \cdot 1 - 19] + 3 \cdot (-4) - 5 \cdot 1 + 6 = 0 \quad \text{よって} \quad k = -\frac{1}{4}$$

この k の値を ① に代入して整理すると $4x - 27y + 43 = 0$

8

解答 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

解説

(1) $\frac{|1 - 2 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

(2) $y = 3x + 1$ から $3x - y + 1 = 0$

よって, 求める距離は $\frac{|3 \cdot (-2) - 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

第1講 例題演習

1

解答 (1) (3, 3) (2) (-8, -11) (3) (2, -1) (4) (-1, -3)

解説

(1) 点Pの座標は、 $\left(\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 1}{3+2}, \frac{2 \cdot (-3) + 3 \cdot 7}{3+2}\right)$ から (3, 3)

(2) 点Qの座標は、 $\left(\frac{-2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{3-2}, \frac{-2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{3-2}\right)$ から (-8, -11)

(3) 点Rの座標は、 $\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ から (2, -1)

(4) (1)~(3)の結果により、 $\triangle PQR$ の重心Gの座標は
 $\left(\frac{3-8+2}{3}, \frac{3-11-1}{3}\right)$ から (-1, -3)

2

解答 (1) $AB=4\sqrt{5}$ (2) $P\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

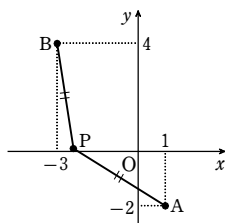
解説

(1) $AB = \sqrt{(-1-3)^2 + [3-(-5)]^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

(2) $P(x, 0)$ とすると、 $AP=BP$ すなわち $AP^2=BP^2$
 から $(x-1)^2 + [0-(-2)]^2 = [x-(-3)]^2 + (0-4)^2$
 ゆえに $x^2 - 2x + 1 + 4 = x^2 + 6x + 9 + 16$

これを解いて $x = -\frac{5}{2}$

よって $P\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$



3

解答 略

解説

直線BCをx軸に、辺BCの垂直二等分線をy軸にとると、3頂点は

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$

と表すことができる。

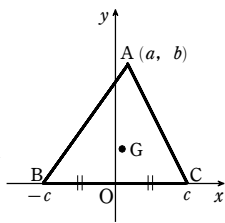
このとき

$$AB^2 + AC^2 = \{(-c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(c-a)^2 + (0-b)^2\} \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

また、 $\triangle ABC$ の重心Gの座標は

$$\left(\frac{a+(-c)+c}{3}, \frac{b+0+0}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

$$\text{よって} \quad BG^2 + CG^2 + 4AG^2 = \left\{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}-0\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}-0\right)^2\right\} \\ + 4\left\{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2 + \left(\frac{b}{3}-b\right)^2\right\} \\ = \left(\frac{a^2}{9} + \frac{2}{3}ca + c^2 + \frac{b^2}{9}\right) + \left(\frac{a^2}{9} - \frac{2}{3}ca + c^2 + \frac{b^2}{9}\right) \\ + 4\left(\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2\right) \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$



したがって $AB^2 + AC^2 = BG^2 + CG^2 + 4AG^2$

4

解答 (1) $y = -2x + 2$ (2) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$

(3) $l: 3x - 4y + 17 = 0$, $l': 4x + 3y + 6 = 0$

解説

(1) $y - (-4) = -2(x - 3)$ すなわち $y = -2x + 2$

(2) $y - 3 = \frac{-3-3}{6-(-4)}(x - (-4))$ すなわち $y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$

(3) 直線 $3x - 4y - 6 = 0$ の傾きは $\frac{3}{4}$ である。

よって、直線 l の傾きは $\frac{3}{4}$ であり、その方程式は

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - (-3)) \quad \text{すなわち} \quad 3x - 4y + 17 = 0$$

次に、直線 l' の傾きを m とすると、 $\frac{3}{4}m = -1$ から $m = -\frac{4}{3}$

よって、直線 l' の方程式は

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - (-3)) \quad \text{すなわち} \quad 4x + 3y + 6 = 0$$

5

解答 (1) (5, -3) (2) $\left(\frac{3}{13}, \frac{37}{13}\right)$

解説

求める点の座標を $B(p, q)$ とする。

(1) 直線 $y = x$ を l とする。

直線 l の傾きは1であり、直線 AB は l に垂直であるから

$$1 \cdot \frac{q-5}{p+3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad p+q-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、線分 AB の中点 $\left(\frac{p-3}{2}, \frac{q+5}{2}\right)$ は直線 l 上にあるから

$$\frac{q+5}{2} = \frac{p-3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad p-q-8=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

方程式 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を連立させて解くと $p=5, q=-3$

したがって、求める点の座標は (5, -3)

(2) 直線 $3x - 2y + 12 = 0$ を l とする。

直線 l の傾きは $\frac{3}{2}$ であり、直線 AB は l に垂直であるから

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{q-5}{p+3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad 2p+3q-9=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

また、線分 AB の中点 $\left(\frac{p-3}{2}, \frac{q+5}{2}\right)$ は直線 l 上にあるから

$$3 \cdot \frac{p-3}{2} - 2 \cdot \frac{q+5}{2} + 12 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3p-2q+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

方程式 $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ を連立させて解くと $p = \frac{3}{13}, q = \frac{37}{13}$

したがって、求める点の座標は $\left(\frac{3}{13}, \frac{37}{13}\right)$

6

解答 (2, -3)

解説

$(k+3)x - (2k-1)y - 8k - 3 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$ とする。

$\textcircled{1}$ を k について整理すると

$$k(x-2y-8) + 3x + y - 3 = 0$$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x-2y-8=0, \quad 3x+y-3=0$$

この連立方程式を解いて $x=2, y=-3$

よって、求める定点Aの座標は (2, -3)

別解 k の値に関係なく $\textcircled{1}$ が成り立つから、 $k=-3, \frac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$$k=-3 \text{ のとき} \quad 0 \cdot x - \{2 \cdot (-3) - 1\}y - 8 \cdot (-3) - 3 = 0$$

$$\text{整理して} \quad 7y + 21 = 0 \quad \text{よって} \quad y = -3$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \left(\frac{1}{2} + 3\right)x - 0 \cdot y - 8 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0$$

$$\text{整理して} \quad \frac{7}{2}x - 7 = 0 \quad \text{よって} \quad x = 2$$

逆に、 $x=2, y=-3$ を $\textcircled{1}$ の左辺に代入すると

$$(k+3) \cdot 2 - (2k-1) \cdot (-3) - 8k - 3 = 0$$

となり、 $\textcircled{1}$ は k の値に関係なく成り立つ。

したがって $x=2, y=-3$

よって、求める定点Aの座標は (2, -3)

7

解答 (1) $x + 3y - 23 = 0$ (2) $2x + 5y - 33 = 0$

解説

解1) k を定数として、方程式

$$k(x+2y-10) + (2x+3y-7) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を考えると、 $\textcircled{1}$ は直線を表し、その直線は2直線 $x+2y-10=0, 2x+3y-7=0$ の交点を通る。

(1) 直線 $\textcircled{1}$ が点(5, 6)を通るとき $k(5+2 \cdot 6-10) + (2 \cdot 5+3 \cdot 6-7) = 0$

$$\text{よって} \quad k = -3$$

この値を $\textcircled{1}$ に代入して整理すると $x+3y-23=0$

(2) $\textcircled{1}$ を変形すると $(k+2)x + (2k+3)y - 10k - 7 = 0 \dots\dots \textcircled{2}$

よって、直線 $\textcircled{2}$ が直線 $2x+5y=0$ に平行であるための必要十分条件は

$$(k+2) \cdot 5 - (2k+3) \cdot 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -4$$

この値を $\textcircled{2}$ に代入して整理すると $2x+5y-33=0$

解2) 連立方程式 $\begin{cases} x+2y-10=0 \\ 2x+3y-7=0 \end{cases}$ を解くと $x=-16, y=13$

よって、2直線の交点の座標は (-16, 13)

(1) 求める直線は、2点(-16, 13), (5, 6)を通るから、その方程式は

$$y - 13 = \frac{6-13}{5-(-16)}(x - (-16)) \quad \text{すなわち} \quad x + 3y - 23 = 0$$

(2) 直線 $2x+5y=0$ の傾きは $-\frac{2}{5}$

よって、求める直線は、傾きが $-\frac{2}{5}$ で、点 $(-16, 13)$ を通るから、その方程式は

$$y-13 = -\frac{2}{5}(x-(-16)) \quad \text{すなわち} \quad 2x+5y-33=0$$

8

解答 (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

解説

(1) $y = -3x + 4$ から $3x + y - 4 = 0$ よって $\frac{|3 \cdot 2 - 3 \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

(2) $\frac{|2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

1

解答 (6, -1)

解説

頂点 C の座標を (x, y) とする。

$\triangle ABC$ の重心が $G(3, 2)$ であるから

$$\frac{-1+4+x}{3} = 3, \quad \frac{2+5+y}{3} = 2 \quad \text{よって} \quad x=6, y=-1$$

ゆえに、頂点 C の座標は (6, -1)

2

解答 $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形

解説

$$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5+2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(1-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

よって $AB = CA$

また、 $AB^2 + CA^2 = BC^2$ であるから $\angle A = 90^\circ$

したがって、 $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

3

解答 (1) (9, 0) (2) $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ (3) $(0, \frac{4}{3}), (0, \frac{14}{3}), (0, 2), (0, 3)$

解説

(1) 点 P の座標を $(x, 0)$ とする。

$$AP = BP \text{ であるから } AP^2 = BP^2$$

$$\text{よって } (x-1)^2 + (0-1)^2 = (x-2)^2 + (0-4)^2$$

$$\text{ゆえに } x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 20 \quad \text{これを解いて } x=9$$

よって、点 P の座標は (9, 0)

(2) 点 P の座標を $(x, -3x-1)$ とする。

$$AP = BP \text{ であるから } AP^2 = BP^2$$

$$\text{よって } (x-1)^2 + (-3x-2)^2 = (x-2)^2 + (-3x-5)^2$$

$$\text{ゆえに } 10x^2 + 10x + 5 = 10x^2 + 26x + 29 \quad \text{これを解いて } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{このとき } -3x-1 = -3(-\frac{3}{2})-1 = \frac{7}{2}$$

$$\text{よって、点 P の座標は } (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$$

(3) 点 P の座標を $(0, y)$ とする。

$$AP^2 = (0-1)^2 + (y-1)^2 = y^2 - 2y + 2$$

$$BP^2 = (0-2)^2 + (y-4)^2 = y^2 - 8y + 20$$

$$AB^2 = (2-1)^2 + (4-1)^2 = 10$$

[1] $\angle A = 90^\circ$ のとき 三平方の定理より、 $AP^2 + AB^2 = BP^2$ であるから

$$y^2 - 2y + 2 + 10 = y^2 - 8y + 20$$

$$\text{これを解いて } y = \frac{4}{3}$$

[2] $\angle B = 90^\circ$ のとき $BP^2 + AB^2 = AP^2$

$$\text{よって } y^2 - 8y + 20 + 10 = y^2 - 2y + 2 \quad \text{これを解いて } y = \frac{14}{3}$$

[3] $\angle P = 90^\circ$ のとき $AP^2 + BP^2 = AB^2$

$$\text{よって } y^2 - 2y + 2 + y^2 - 8y + 20 = 10$$

$$\text{ゆえに } 2(y^2 - 5y + 6) = 0 \quad \text{これを解いて } y = 2, 3$$

したがって、点 P の座標は $(0, \frac{4}{3}), (0, \frac{14}{3}), (0, 2), (0, 3)$

4

解答 (1) $y = -3x - 2$ (2) $x = 5$ (3) $y = -7$ (4) $y = -\frac{7}{10}x - \frac{29}{10}$

(5) $y = 3$ (6) $3x - 8y = -6$

解説

(1) $y - 4 = -3(x - (-2))$ すなわち $y = -3x - 2$

(2) y 軸に平行な直線は、x 軸に垂直である。

通る点の x 座標が 5 であるから $x = 5$

(3) y 軸に垂直な直線の傾きは 0 であるから

$$y - (-7) = 0 \cdot (x - 8) \quad \text{すなわち } y = -7$$

(4) $y - (-5) = \frac{2 - (-5)}{-7 - 3}(x - 3)$ すなわち $y = -\frac{7}{10}x - \frac{29}{10}$

(5) 通る 2 点の y 座標がともに 3 であるから $y = 3$

(6) x 切片が -2, y 切片が $\frac{3}{4}$ であるから $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$

$$\text{よって } -\frac{x}{2} + \frac{4}{3}y = 1 \quad \text{すなわち } 3x - 8y = -6$$

5

解答 (1) $a = -5$ (2) $a = -1, 5$

解説

(1) (解1) 直線 AB の方程式は

$$y - 4 = \frac{7-4}{3-1}(x-1) \quad \text{すなわち } 3x - 2y + 5 = 0$$

点 C $(-5, a)$ がこの直線上にあるから $3 \cdot (-5) - 2 \cdot a + 5 = 0$

これを解いて $a = -5$

(解2) 直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから $\frac{7-4}{3-1} = \frac{a-4}{-5-1}$

これを解いて $a = -5$

(2) (解1) 直線 AB の方程式は $y - (-1) = \frac{-a - (-1)}{7-3}(x-3)$

$$\text{すなわち } (a-1)x + 4y - 3a + 7 = 0$$

点 C $(a, -3)$ がこの直線上にあるから $(a-1) \cdot a + 4 \cdot (-3) - 3a + 7 = 0$

$$\text{よって } a^2 - 4a - 5 = 0 \quad \text{ゆえに } (a+1)(a-5) = 0$$

したがって $a = -1, 5$

(解2) 直線 AB と直線 AC の傾きが等しいから

$$\frac{-a - (-1)}{7-3} = \frac{-3 - (-1)}{a-3} \quad (\text{ただし } a \neq 3)$$

$$\text{分母を払って } (-a+1)(a-3) = -8 \quad \text{整理して } a^2 - 4a - 5 = 0$$

これを解いて $a = -1, 5$ ($a \neq 3$ を満たす)

$a = 3$ のとき、直線 AC の方程式は $x = 3$ となり、点 B はこの直線上にないから不適。

したがって $a = -1, 5$

6

【解答】 (1) $a = -1, 2$ (2) $a = \frac{2}{3}$

【解説】

$ax+2y=1$ ……①, $x+(a-1)y=3$ ……② とする。

直線①の傾きは $-\frac{a}{2}$

直線②の傾きは、 $a \neq 1$ のとき $-\frac{1}{a-1}$

(1) [1] $a \neq 1$ のとき

2直線①, ②が平行であるための必要十分条件は $-\frac{a}{2} = -\frac{1}{a-1}$

分母を払って $a(a-1)=2$ よって $a^2-a-2=0$

ゆえに $(a+1)(a-2)=0$

したがって $a = -1, 2$ これは $a \neq 1$ を満たす。

[2] $a = 1$ のとき

①は $x+2y=1$, ②は $x=3$ となるが、この2直線は平行でない。

以上から $a = -1, 2$

(2) [1] $a \neq 1$ のとき

2直線①, ②が垂直であるための必要十分条件は $-\frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{a-1}\right) = -1$

分母を払って $a = -2(a-1)$

これを解いて $a = \frac{2}{3}$ これは $a \neq 1$ を満たす。

[2] $a = 1$ のとき 2直線は垂直でない。

以上から $a = \frac{2}{3}$

【別解】 2直線 $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ について、

平行 $\Leftrightarrow ab'-ba'=0$ 垂直 $\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

であることを利用する。

(1) 2直線①, ②が平行であるための必要十分条件は $a(a-1)-2 \cdot 1=0$

よって $a^2-a-2=0$ これを解いて $a = -1, 2$

(2) 2直線①, ②が垂直であるための必要十分条件は $a \cdot 1 + 2 \cdot (a-1) = 0$

これを解いて $a = \frac{2}{3}$

7

【解答】 (1) $3x+2y-19=0$ (2) $\sqrt{13}$ (3) $\frac{14}{\sqrt{13}}$ (4) 7

【解説】

(1) 直線 BC の方程式は

$$y-5 = \frac{2-5}{5-3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad 3x+2y-19=0$$

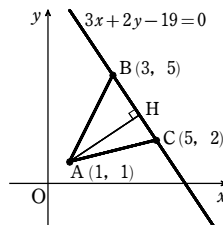
(2) $BC = \sqrt{(5-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

(3) 点 A と直線 BC の距離、すなわち、点 A から BC に下ろした垂線 AH の長さは

$$AH = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 19|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$

(4) (2), (3) から

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{14}{\sqrt{13}} = 7$$



1

【解答】 略

【解説】

直線 BC を x 軸に、辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると、中点 M は原点 O になり、 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ と表すことができる。

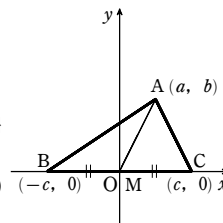
このとき $AB^2 + AC^2$

$$\begin{aligned} &= \{(-c-a)^2 + (0-b)^2\} + \{(c-a)^2 + (0-b)^2\} \\ &= \{(c+a)^2 + b^2\} + \{(c-a)^2 + b^2\} \\ &= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

また $AM^2 + BM^2 = \{(-a)^2 + (-b)^2\} + c^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2 \quad \dots\dots ②$$

①, ② から $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



2

【解答】 $a = 2$

【解説】

$x+y=6$ ……①, $2x-y=a+1$ ……②, $x-ay=1-2a$ ……③ とする。

①+② から $3x=a+7$ よって $x = \frac{a+7}{3}$

これを①に代入して y の値を求めると $y = \frac{-a+11}{3}$

ゆえに、2直線①, ②の交点の座標は $\left(\frac{a+7}{3}, \frac{-a+11}{3}\right)$

この点が直線③上にもあるとき $\frac{a+7}{3} - a \cdot \frac{-a+11}{3} = 1-2a$

整理すると $a^2 - 4a + 4 = 0$ よって $(a-2)^2 = 0$ ゆえに $a = 2$

3

【解答】 略

【解説】

直線 AB の傾きは $\frac{0-5}{6-2} = -\frac{5}{4}$

よって、頂点 O から対辺 AB に下ろした垂線 OC の

方程式は $y = \frac{4}{5}x$ ……①

また、直線 OA の傾きは $\frac{5}{2}$

よって、頂点 B から対辺 OA に下ろした垂線 BD の方程式は

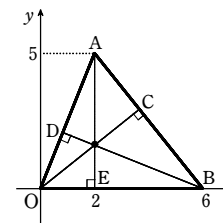
$$y-0 = -\frac{2}{5}(x-6) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5} \quad \dots\dots ②$$

頂点 A から対辺 OB に下ろした垂線 AE の方程式は $x=2$ ……③

①に $x=2$ を代入すると $y = \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8}{5}$

②に $x=2$ を代入すると $y = -\frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$

ゆえに、3直線①, ②, ③は1点 $\left(2, \frac{8}{5}\right)$ で交わる。



第1講 レベルB

したがって、△OABの各頂点から対辺に下ろした3つの垂線は1点で交わる。

4

解答 (23-10√5, 10√5-20)

解説

$$AB = \sqrt{\{-3-(-2)\}^2 + \{-2-5\}^2} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{\{3-(-3)\}^2 + \{0-(-2)\}^2} = 2\sqrt{10}$$

直線BPは∠ABCの二等分線であるから

$$AP : PC = AB : BC = 5\sqrt{2} : 2\sqrt{10} = 5 : 2\sqrt{5}$$

よって、点Pは線分ACを5:2√5に内分する点であるから、点Pの座標を(x, y)とすると

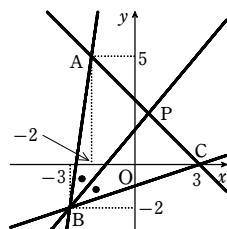
$$x = \frac{2\sqrt{5} \cdot (-2) + 5 \cdot 3}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{15 - 4\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(15 - 4\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})}{(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{115 - 50\sqrt{5}}{5}$$

$$= 23 - 10\sqrt{5}$$

$$y = \frac{2\sqrt{5} \cdot 5 + 5 \cdot 0}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}(5 - 2\sqrt{5})}{(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{50\sqrt{5} - 100}{5} = 10\sqrt{5} - 20$$

よって、点Pの座標は (23-10√5, 10√5-20)



第2講 例題

1

解答 (1) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ (2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
(3) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 5$ (4) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

解説

(1) 中心と原点の距離は $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

これが半径に等しいから、求める円の方程式は $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

(2) 中心とx軸の距離2が半径に等しいから、求める円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

(3) 2点(1, 4), (5, 6)を結ぶ線分の中点が円の中心となる。

その座標は $(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2})$ すなわち (3, 5)

半径は、中心(3, 5)と点(1, 4)の距離であるから $\sqrt{(1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$

よって、求める円の方程式は $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 5$

(4) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

点(4, -1)を通るから $4^2 + (-1)^2 + 4l - m + n = 0$

整理すると $4l - m + n + 17 = 0$ ……①

点(6, 3)を通るから $6^2 + 3^2 + 6l + 3m + n = 0$

整理すると $6l + 3m + n + 45 = 0$ ……②

点(-3, 0)を通るから $(-3)^2 + 0^2 - 3l + 0 \cdot m + n = 0$

整理すると $-3l + n + 9 = 0$ ……③

③から $n = 3l - 9$ ……④

④を①に代入して整理すると $7l - m + 8 = 0$

よって $m = 7l + 8$ ……⑤

④, ⑤を②に代入して整理すると

$$30l + 60 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad l = -2$$

このとき、⑤から $m = -6$ ④から $n = -15$

よって、求める円の方程式は $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

2

解答 (1) 中心(-3, 4), 半径4の円 (2) $p < -2, 2 < p$

解説

(1) $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16 - 9$

ゆえに $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$

よって、中心(-3, 4), 半径4の円を表す。

(2) $(x^2 + 2px + p^2) + (y^2 + 3py + (\frac{3}{2}p)^2) = p^2 + (\frac{3}{2}p)^2 - 13$

ゆえに $(x+p)^2 + (y + \frac{3}{2}p)^2 = \frac{13}{4}p^2 - 13$

この方程式が円を表すための条件は $\frac{13}{4}p^2 - 13 > 0$

よって $p^2 - 4 > 0$ したがって $p < -2, 2 < p$

3

解答 (1) 異なる2点で交わる; (0, -1), (1, 0) (2) 接する, (-2, 0)

解説

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \dots\dots ① \\ x - y = 1 & \dots\dots ② \end{cases}$

②から $y = x - 1$ ……③

これを①に代入して $x^2 + (x-1)^2 = 1$

整理すると $x^2 - x = 0$ これを解いて $x = 0, 1$

③から $x = 0$ のとき $y = -1$, $x = 1$ のとき $y = 0$

よって、円①と直線②は異なる2点(0, -1), (1, 0)で交わる。

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 & \dots\dots ① \\ x + 2y + 2 = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$

②から $x = -2y - 2$ ……③

これを①に代入して $(-2y-2)^2 + y^2 + 2(-2y-2) - 4y = 0$

整理すると $y^2 = 0$ したがって $y = 0$

③から $y = 0$ のとき $x = -2$

よって、円①と直線②は点(-2, 0)で接する。

4

解答 $2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$

解説

[解法1] $y = ax + 5$ を円の方程式に代入して

$$(x+2)^2 + (ax+2)^2 = 2$$

整理すると $(a^2+1)x^2 + 4(a+1)x + 6 = 0$

判別式をDとすると

$$\frac{D}{4} = (2(a+1))^2 - 6(a^2+1)$$

$$= -2a^2 + 8a - 2 = -2(a^2 - 4a + 1)$$

円と直線が異なる2点で交わるための条件は $D > 0$

ゆえに $a^2 - 4a + 1 < 0$

よって $2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$

[解法2] 円の半径は√2である。円の中心(-2, 3)と直線 $y = ax + 5$ の距離をdとすると、円と直線が異なる2点で交わるための条件は $d < \sqrt{2}$

$$d = \frac{|a \cdot (-2) - 3 + 5|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} \text{であるから} \quad \frac{|-2a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} < \sqrt{2}$$

両辺に正の数 $\sqrt{a^2 + 1}$ を掛けて $|-2a + 2| < \sqrt{2(a^2 + 1)}$

両辺は負でないから平方して $(-2a + 2)^2 < 2(a^2 + 1)$

整理して $a^2 - 4a + 1 < 0$

よって $2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$

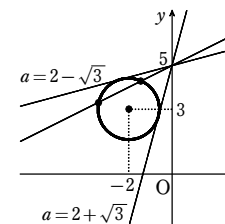
5

解答 (1) $x - \sqrt{3}y = 4$ (2) $x + 7y = 10, (\frac{1}{5}, \frac{7}{5}); x - y = 2, (1, -1)$

解説

(1) 点(1, -√3)は、円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点であるから、その点における接線の方程式は

$$1 \cdot x + (-\sqrt{3})y = 4 \quad \text{すなわち} \quad x - \sqrt{3}y = 4$$



第2講 例題

(2) 接点を $P(x_1, y_1)$ とすると

$$x_1^2 + y_1^2 = 2 \quad \dots\dots ①$$

また、点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 2$$

この直線が点 $(3, 1)$ を通るから

$$3x_1 + y_1 = 2 \quad \dots\dots ②$$

①, ② から y_1 を消去して整理すると

$$5x_1^2 - 6x_1 + 1 = 0$$

よって $(5x_1 - 1)(x_1 - 1) = 0$ ゆえに $x_1 = \frac{1}{5}, 1$

② に代入して $x_1 = \frac{1}{5}$ のとき $y_1 = \frac{7}{5}$, $x_1 = 1$ のとき $y_1 = -1$

したがって、求める接線の方程式と接点の座標は

$$x + 7y = 10, \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right); x - y = 2, (1, -1)$$

別解1 点 $(3, 1)$ を通る接線は、 x 軸に垂直でないから、求める接線の方程式は、傾きを m とすると次のようにおける。

$$y - 1 = m(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = mx - (3m - 1) \quad \dots\dots ③$$

③ を円の方程式に代入して整理すると

$$(m^2 + 1)x^2 - 2m(3m - 1)x + \{(3m - 1)^2 - 2\} = 0 \quad \dots\dots ④$$

$m^2 + 1 \neq 0$ であるから、2次方程式④の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-m(3m - 1)\}^2 - (m^2 + 1)\{(3m - 1)^2 - 2\}$$

$$= \{m^2 - (m^2 + 1)(3m - 1)^2 + 2(m^2 + 1)\}$$

$$= -7m^2 + 6m + 1 = -(7m + 1)(m - 1)$$

円と直線③が接するための条件は $D = 0$

よって $-(7m + 1)(m - 1) = 0$ ゆえに $m = -\frac{1}{7}, 1$

$m = -\frac{1}{7}$ のとき、④の重解は $x = \frac{m(3m - 1)}{m^2 + 1} = \frac{1}{5}$

$m = 1$ のとき、④の重解は $x = 1$

したがって、求める接線の方程式と接点の座標は

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}, \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right); y = x - 2, (1, -1)$$

別解2 (別解1と3行目まで同じ)

③ から $mx - y - 3m + 1 = 0 \quad \dots\dots ⑤$

円の中心 $(0, 0)$ と接線の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいから

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - 3m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

両辺に $\sqrt{m^2 + 1}$ を掛けて $|-3m + 1| = \sqrt{2(m^2 + 1)}$

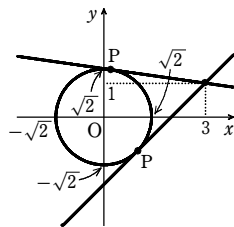
両辺を2乗して整理すると $7m^2 - 6m - 1 = 0$

よって $(7m + 1)(m - 1) = 0$ ゆえに $m = -\frac{1}{7}, 1$

$m = -\frac{1}{7}$ のとき、⑤は $x + 7y - 10 = 0 \quad \dots\dots ⑥$

直線 OP は $y = 7x$ と表されるから、⑥と連立させて解くと、接点の座標は

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$



$m = 1$ のとき、⑤は $x - y - 2 = 0 \quad \dots\dots ⑦$

直線 OP は $y = -x$ と表されるから、⑦と連立させて解くと、接点の座標は

$$(1, -1)$$

6

解答 4

解説

$2x - y + 5 = 0 \quad \dots\dots ①$, $x^2 + y^2 = 9 \quad \dots\dots ②$ とする。

円②の中心 $(0, 0)$ と直線①の距離 d は

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

円②の半径は3であるから、弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2 = 3^2 - d^2 = 9 - 5 = 4$$

$l > 0$ であるから $l = 2$

よって、弦の長さは $2l = 4$

別解 ① から $y = 2x + 5$

これを②に代入すると $x^2 + (2x + 5)^2 = 9$

よって $5x^2 + 20x + 16 = 0 \quad \dots\dots ③$

直線①と円②の交点の座標を $(\alpha, 2\alpha + 5)$, $(\beta, 2\beta + 5)$ とすると、 α, β は2次方程式③の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{20}{5} = -4, \quad \alpha\beta = \frac{16}{5}$$

求める弦の長さを L とすると

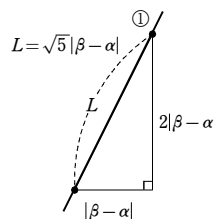
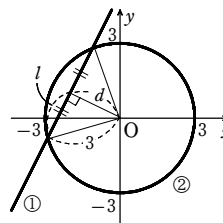
$$L^2 = (\beta - \alpha)^2 + \{(2\beta + 5) - (2\alpha + 5)\}^2 = 5(\beta - \alpha)^2$$

$$= 5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = 5\{(-4)^2 - 4 \cdot \frac{16}{5}\} = 16$$

$L > 0$ であるから $L = 4$

参考 ①の傾きが2であるから、右の図ようになる。

このことから、 $L = \sqrt{5}|\beta - \alpha|$ を導いてもよい。



7

解答 (1) 略 (2) $x + 2y - 3 = 0$ (3) 中心 $(\frac{5}{8}, \frac{5}{4})$, 半径 $\frac{\sqrt{205}}{8}$

解説

(1) 円 $x^2 + y^2 - 5 = 0$ の中心は $(0, 0)$, 半径は $\sqrt{5}$

円 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ について、方程式を変形すると

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

ゆえに、中心は $(1, 2)$, 半径は 2

よって、中心間の距離は $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5} - 2 < \sqrt{5} < 2 + \sqrt{5}$ であるから、2つの円は異なる2点で交わる。

(2) k を定数として、次の方程式を考える。

$$k(x^2 + y^2 - 5) + x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \quad \dots\dots [A]$$

[A] は、与えられた2つの円の交点を通る図形を表す。

$k = -1$ のとき、[A] は $-2x - 4y + 6 = 0$ すなわち $x + 2y - 3 = 0$

これは直線を表すから、求める直線の方程式である。

(3) [A] が点 $(1, 3)$ を通るとして、[A] に $x = 1, y = 3$ を代入すると $5k - 3 = 0$

ゆえに $k = \frac{3}{5}$

[A] に代入して整理すると $x^2 + y^2 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{2}y - \frac{5}{4} = 0$

すなわち $(x - \frac{5}{8})^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = \frac{205}{64}$

したがって 中心 $(\frac{5}{8}, \frac{5}{4})$, 半径 $\frac{\sqrt{205}}{8}$

第2講 例題演習

1

【解答】 (1) $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ (2) $(x+1)^2+y^2=29$ (3) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$
 (4) $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

【解説】

(1) 半径 r は中心 $(-2, 1)$ と点 $(1, -3)$ の距離で

$$r^2=(1+2)^2+(-3-1)^2=25$$

よって、求める円の方程式は

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25$$

(2) 中心は、2点 $(4, -2)$, $(-6, 2)$ を結ぶ線分の中点である。

その座標は

$$\left(\frac{4-6}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \text{ すなわち } (-1, 0)$$

半径 r は中心 $(-1, 0)$ と点 $(4, -2)$ の距離で

$$r^2=(4+1)^2+(-2-0)^2=29$$

よって、求める円の方程式は

$$(x+1)^2+y^2=29$$

(3) x 軸に接するとき、中心 $(3, 4)$ と x 軸の距離 4 が半径に等しい。

よって、求める円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-4)^2=16$$

(4) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 $(-3, 4)$ を通るから

$$(-3)^2+4^2-3l+4m+n=0$$

よって $3l-4m-n=25$ ……①

点 $(4, 5)$ を通るから

$$4^2+5^2+4l+5m+n=0$$

よって $4l+5m+n=-41$ ……②

点 $(1, -4)$ を通るから

$$1^2+(-4)^2+l-4m+n=0$$

よって $l-4m+n=-17$ ……③

①, ②, ③を解いて $l=-2, m=-2, n=-23$

したがって、求める円の方程式は $x^2+y^2-2x-2y-23=0$

2

【解答】 (1) 中心 $(5, -6)$, 半径 8 (2) $k < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < k$

【解説】

(1) 円の方程式を変形すると

$$(x^2-10x+5^2)+(y^2+12y+6^2)=3+5^2+6^2$$

すなわち $(x-5)^2+(y+6)^2=8^2$

よって 中心 $(5, -6)$, 半径 8

(2) 方程式を変形すると

$$(x^2+2kx+k^2)+\{y^2-4ky+(2k)^2\}=-4k^2-6+k^2+(2k)^2$$

すなわち $(x+k)^2+(y-2k)^2=k^2-6$

これが円を表すための必要十分条件は $k^2-6 > 0$

これを解いて $k < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < k$

3

【解答】 (1) 異なる2点 $(-1, 2)$, $(2, -1)$ で交わる (2) 共有点をもたない
 (3) 点 $(2, -1)$ で接する

【解説】

$$(1) \begin{cases} x^2+y^2=5 & \dots\dots ① \\ y=-x+1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②を①に代入して $x^2+(-x+1)^2=5$

よって $x^2-x-2=0$ これを解いて $x=-1, 2$

②から $x=-1$ のとき $y=2$, $x=2$ のとき $y=-1$

ゆえに、円①と直線②は異なる2点 $(-1, 2)$, $(2, -1)$ で交わる。

$$(2) \begin{cases} x^2+y^2=4 & \dots\dots ① \\ 2x+y=5 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②から $y=-2x+5$

これを①に代入して $x^2+(-2x+5)^2=4$ よって $5x^2-20x+21=0$

この2次方程式の判別式を D とすると $\frac{D}{4}=(-10)^2-5 \cdot 21=-5 < 0$

ゆえに、円①と直線②は共有点をもたない。

$$(3) \begin{cases} x^2+y^2-2x-1=0 & \dots\dots ① \\ y=x-3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②を①に代入して $x^2+(x-3)^2-2x-1=0$ よって $x^2-4x+4=0$

すなわち $(x-2)^2=0$ ゆえに $x=2$ (重解)

②から $x=2$ のとき $y=-1$

よって、円①と直線②は点 $(2, -1)$ で接する。

4

【解答】 $3-\sqrt{10} < m < 3+\sqrt{10}$

【解説】

円 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ の中心は $(-2, 1)$, 半径は $\sqrt{5}$

$y=x+m$ から $x-y+m=0$

円の中心 $(-2, 1)$ と直線の距離を d とすると

$$d=\frac{|-2-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}$$

円と直線が異なる2点で交わるための必要十分条件は

$$d < \sqrt{5} \text{ すなわち } \frac{|m-3|}{\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

よって $|m-3| < \sqrt{10}$ ゆえに $-\sqrt{10} < m-3 < \sqrt{10}$

したがって $3-\sqrt{10} < m < 3+\sqrt{10}$

【別解】 $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=5 & \dots\dots ① \\ y=x+m & \dots\dots ② \end{cases}$

②を①に代入して $(x+2)^2+(x+m-1)^2=5$

よって $2x^2+2(m+1)x+m^2-2m=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-2(m^2-2m)=-m^2+6m+1$$

円①と直線②が異なる2点で交わるための必要十分条件は

$$D > 0 \text{ すなわち } -m^2+6m+1 > 0$$

よって $m^2-6m-1 < 0$ これを解いて $3-\sqrt{10} < m < 3+\sqrt{10}$

5

【解答】 (1) $3x-\sqrt{7}y=16$

(2) $-3x+y=10, (-3, 1); x+3y=10, (1, 3)$

【解説】

(1) $3 \cdot x+(-\sqrt{7}) \cdot y=16$ すなわち $3x-\sqrt{7}y=16$

(2) 接点を $P(x_1, y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=10$ 上にあるから

$$x_1^2+y_1^2=10 \dots\dots ①$$

また、点 P におけるこの円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=10 \dots\dots ②$$

この直線が点 $(-2, 4)$ を通るから $-2x_1+4y_1=10$

よって $x_1=2y_1-5$ ……③

③を①に代入して

$$(2y_1-5)^2+y_1^2=10 \text{ ゆえに } y_1^2-4y_1+3=0$$

これを解いて $y_1=1, 3$

[1] $y_1=1$ のとき、③から $x_1=-3$

よって、接点の座標は $(-3, 1)$

接線の方程式は、②から

$$-3 \cdot x+1 \cdot y=10 \text{ すなわち } -3x+y=10$$

[2] $y_1=3$ のとき、③から $x_1=1$

よって、接点の座標は $(1, 3)$

接線の方程式は、②から

$$1 \cdot x+3 \cdot y=10 \text{ すなわち } x+3y=10$$

6

【解答】 $2\sqrt{3}$

【解説】

円と直線の交点を A, B とし、線分 AB の中点を M とする。

線分 OM の長さは、円の中心 $(0, 0)$ と直線 $y=x+2$ の距離に等しいから

$$OM=\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$OA=\sqrt{5}$ であるから

$$AB=2AM=2\sqrt{OA^2-OM^2}=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

【別解】 $y=x+2, x^2+y^2=5$ から y を消去して $x^2+(x+2)^2=5$

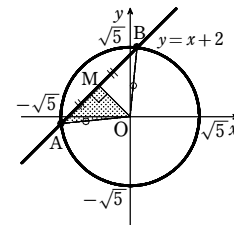
整理すると $2x^2+4x-1=0$ ……①

円と直線の交点の座標を $(\alpha, \alpha+2), (\beta, \beta+2)$ とすると、 α, β は2次方程式①の解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

求める線分の長さを l とすると

$$l^2=(\beta-\alpha)^2+((\beta+2)-(\alpha+2))^2=2(\beta-\alpha)^2$$



$$=2(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2\left[(-2)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=12$$

したがって、求める線分の長さは $l=2\sqrt{3}$

7

解答 (1) 略 (2) $x^2+y^2-6x-y=0$ (3) $2x+y-5=0$

解説

(1) $x^2+y^2-4x-5=0$ を変形すると $(x-2)^2+y^2=3^2$

この円の中心は点 $(2, 0)$ 、半径は 3

$x^2+y^2+2y-15=0$ を変形すると $x^2+(y+1)^2=4^2$

この円の中心は点 $(0, -1)$ 、半径は 4

よって、2円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{(0-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$

$4-3 < d < 4+3$ であるから、2円は2点で交わる。

(2) k を定数として、方程式

$$k(x^2+y^2-4x-5)+(x^2+y^2+2y-15)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考えると、①の表す図形は2円の2つの交点を通る。

図形①が原点を通るとき $-5k-15=0$ よって $k=-3$

これを①に代入して整理すると $x^2+y^2-6x-y=0$

これが求める円の方程式である。

(3) 図形①が直線であるとき、 x^2, y^2 の項の係数が0になるから $k=-1$

これを①に代入して整理すると $2x+y-5=0$

1

解答 $m < -\frac{3}{4}$ のとき 2個, $m = -\frac{3}{4}$ のとき 1個, $m > -\frac{3}{4}$ のとき 0個

解説

解法1] $y=mx+1$ を $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ に代入して

$$x^2+(mx+1)^2-2x+2(mx+1)+1=0$$

整理して $(m^2+1)x^2+2(2m-1)x+4=0$

$m^2+1 \neq 0$ であるから、この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2m-1)^2-4(m^2+1)=-4m-3$$

よって、求める共有点の個数は

$D > 0$ すなわち $m < -\frac{3}{4}$ のとき 2個,

$D = 0$ すなわち $m = -\frac{3}{4}$ のとき 1個,

$D < 0$ すなわち $m > -\frac{3}{4}$ のとき 0個

解法2] $y=mx+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x^2+y^2-2x+2y+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ とする。

②を変形すると $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

よって、円②の中心は $(1, -1)$ 、半径は1である。

また、①から $mx-y+1=0$

円②の中心と直線①の距離 d は

$$d=\frac{|m \cdot 1 - (-1) + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

[1] 直線①と円②が異なる2つの共有点をもつための条件は

$$d < 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} < 1$$

ゆえに $|m+2| < \sqrt{m^2+1}$

両辺は負でないから、2乗して $(m+2)^2 < m^2+1$

よって $4m < -3$ ゆえに $m < -\frac{3}{4}$

[2] 直線①と円②が1点で接するための条件は

$$d = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

同様に $m = -\frac{3}{4}$

[3] 直線①と円②が共有点をもたないための条件は

$$d > 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$$

同様に $m > -\frac{3}{4}$

よって、求める共有点の個数は

$m < -\frac{3}{4}$ のとき 2個, $m = -\frac{3}{4}$ のとき 1個, $m > -\frac{3}{4}$ のとき 0個

2

解答 (前半) $m \leq -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \leq m$

(後半) $m = \sqrt{3}$ のとき、接点 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $m = -\sqrt{3}$ のとき、接点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

解説

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y=mx+2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②を①に代入して $x^2+(mx+2)^2=1$

整理すると $(m^2+1)x^2+4mx+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

判別式を D とすると $\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1) \cdot 3=m^2-3$

円①と直線②が共有点をもつのは、 $D \geq 0$ のときである。

よって、 $m^2-3 \geq 0$ より $m \leq -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \leq m$

また、円①と直線②が接するのは、 $D=0$ のときである。

よって、 $m^2-3=0$ より $m = \pm\sqrt{3}$

③の重解は $x = -\frac{4m}{2(m^2+1)} = -\frac{2m}{m^2+1}$

このとき、②から $y = m \cdot \left(-\frac{2m}{m^2+1}\right) + 2 = \frac{2}{m^2+1}$

したがって、接点の座標は

$m = \sqrt{3}$ のとき $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $m = -\sqrt{3}$ のとき $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

3

解答 $k = \pm\sqrt{10}$

解説

円の中心を O 、弦を AB 、その中点を M とすると、 $\triangle OAM$ において

$$OM^2 + AM^2 = OA^2$$

すなわち $\left\{ \frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \right\}^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2$

よって $k = \pm\sqrt{10}$

別解 円と直線の方程式から y を消去して整理すると

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{4k}{5}, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 - 4}{5}$$

また、円と直線の交点の座標は、 $(\alpha, 2\alpha + k)$, $(\beta, 2\beta + k)$ と表されるから、条件より

$$(\beta - \alpha)^2 + \{(2\beta + k) - (2\alpha + k)\}^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \text{すなわち} \quad 5(\beta - \alpha)^2 = 8$$

ここで $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(-\frac{4k}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k^2 - 4}{5} = \frac{-4k^2 + 80}{25}$

$$5 \cdot \frac{-4k^2 + 80}{25} = 8 \quad \text{を解いて} \quad k = \pm\sqrt{10}$$

4

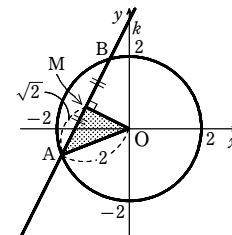
解答 与えられた2円を順に①, ②とする。

(1) 円①は円②の内部にある (2) 2つの円①, ②は2点で交わる

(3) 円②は円①に内接する

解説

(1)~(3)において、与えられた2円を順に①, ②とする。



第2講 レベルA

また、2円①、②の中心間の距離を d 、円①の半径を r_1 、円②の半径を r_2 とする。

(1) 円①の中心は 点(0, 0)

円②の中心は 点(1, 2)

よって $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

また、 $r_1 = 3$ 、 $r_2 = 6$ であるから

$r_2 - r_1 = 3$ ゆえに $d < r_2 - r_1$

したがって、円①は円②の内部にある。

(2) 円①の中心は 点(3, 0)

円②の方程式を変形すると

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

ゆえに、円②の中心は 点(1, -2)

よって $d = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

また、 $r_1 = 2$ 、 $r_2 = 1$ であるから

$r_1 - r_2 = 1$ 、 $r_1 + r_2 = 3$ ゆえに $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

したがって、2つの円①、②は2点で交わる。

(3) 円①の方程式を変形すると

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 90$$

円②の方程式を変形すると

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 40$$

ゆえに、円①の中心は 点(-1, 4)

円②の中心は 点(-2, 1)

よって $d = \sqrt{(-2+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$

また、 $r_1 = 3\sqrt{10}$ 、 $r_2 = 2\sqrt{10}$ であるから

$r_1 - r_2 = \sqrt{10}$ ゆえに $d = r_1 - r_2$

したがって、円②は円①に内接する。

5

解答 $r = 3, 7$

解説

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \dots\dots ①$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots\dots ② \text{ とする。}$$

円①の中心は点(-1, 2)、半径は2

円②の中心は点(3, -1)、半径は r

2円の中心間の距離は

$$\sqrt{(3+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2円が接するのは、次の[1]、[2]のどちらかの場合である。

[1] 2円が外接するとき

$$5 = 2 + r \quad \text{よって} \quad r = 3$$

[2] 円①が円②に内接するとき

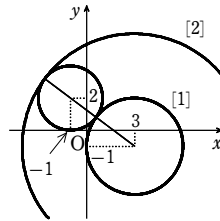
$$5 = r - 2 \quad \text{よって} \quad r = 7$$

したがって $r = 3, 7$

注意 円②の中心は、円①の外部にあるから、円②が円①に内接することはない。

6

解答 (1) $x^2 + y^2 - 5x + 5y - 20 = 0$ (2) $x - y + 3 = 0$ (3) (-1, 2), (-2, 1)



解説

k を定数として、方程式

$$k(x^2 + y^2 - 5) + (x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7) = 0 \quad \dots\dots ①$$

を考えると、①の表す図形は2円の2つの交点を通る。

(1) 図形①が点(4, 3)を通るとき $k(16 + 9 - 5) + (16 + 9 + 16 - 12 + 7) = 0$

$$\text{よって} \quad 20k + 36 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{9}{5}$$

これを①に代入して整理すると $x^2 + y^2 - 5x + 5y - 20 = 0$

(2) 図形①が直線であるとき、 x^2 、 y^2 の項の係数が0になるから $k = -1$

これを①に代入して整理すると $x - y + 3 = 0$

(3) 2円の交点は、円 $x^2 + y^2 = 5$ ……②と(2)で求めた直線 $x - y + 3 = 0$ ……③との交点である。

③から $y = x + 3$ ……④

④を②に代入して $x^2 + (x+3)^2 = 5$

よって $x^2 + 3x + 2 = 0$ これを解いて $x = -1, -2$

④から $x = -1$ のとき $y = 2$ 、 $x = -2$ のとき $y = 1$

したがって、求める交点の座標は (-1, 2), (-2, 1)

第2講 レベルB

1

解答 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $a = -\frac{1}{3}$

解説

(1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ を変形すると

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \quad \dots\dots ①$$

$a = -1$ のとき、直線の方程式は

$$x - y + 1 = 0 \quad \dots\dots ②$$

円①の中心(2, 1)と直線②の距離 d は

$$d = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

円①の半径は $\sqrt{5}$ であるから、弦 AB の長さを $2l$

とすると $l^2 = (\sqrt{5})^2 - d^2 = 5 - 2 = 3$

$l > 0$ であるから $l = \sqrt{3}$ よって $AB = 2l = 2\sqrt{3}$

別解 ②から $y = x + 1$

これを $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ に代入して $x^2 + (x+1)^2 - 4x - 2(x+1) = 0$

よって $2x^2 - 4x - 1 = 0$ ……③

円と直線の交点 A, B の座標を $(\alpha, \alpha+1)$ 、 $(\beta, \beta+1)$ とすると、 α, β は2次方程式

③の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{4}{2} = 2, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

よって $AB^2 = (\beta - \alpha)^2 + ((\beta + 1) - (\alpha + 1))^2 = 2(\beta - \alpha)^2 = 2((\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta)$

$$= 2\left\{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = 12$$

$AB > 0$ であるから $AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

(2) 弦 AB の長さが最大になるのは、弦 AB が円の直径になるときである。

このとき、直線 $ax + y + a = 0$ は円の中心(2, 1)を通るから

$$2 \cdot a + 1 + a = 0 \quad \text{よって} \quad a = -\frac{1}{3}$$

2

解答 $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 8 = 0$, $6, \frac{25}{2}\pi$

解説

$x + 3y - 7 = 0$ ……①, $x - 3y - 1 = 0$ ……②, $x - y + 1 = 0$ ……③ とする。

2直線①、②の交点の座標は (4, 1)

2直線②、③の交点の座標は (-2, -1)

2直線①、③の交点の座標は (1, 2)

求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とすると、この円が

点(4, 1)を通るから $4l + m + n + 17 = 0$ ……④

点(-2, -1)を通るから $-2l - m + n + 5 = 0$ ……⑤

点(1, 2)を通るから $l + 2m + n + 5 = 0$ ……⑥

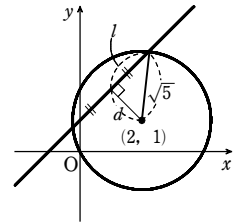
④-⑤)÷2 から $3l + m + 6 = 0$ ……⑦

⑥-⑤)÷3 から $l + m = 0$ ……⑧

⑦-⑧ から $2l + 6 = 0$ よって $l = -3$

これを⑧に代入して $m = -l = 3$

これらを⑤に代入して $n = 2l + m - 5 = -8$



第2講 レベルB

したがって、求める外接円の方程式は $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 8 = 0$

直線③上の2点(-2, -1), (1, 2)間の距離は

$$\sqrt{\{1-(-2)\}^2 + \{2-(-1)\}^2} = 3\sqrt{2}$$

また、点(4, 1)と直線③の距離は

$$\frac{|4-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

よって、求める三角形の面積は $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 6$

また、外接円の方程式を変形すると

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

ゆえに、この円の半径を r とすると $r^2 = \frac{25}{2}$

よって、外接円の面積は $\pi r^2 = \frac{25}{2}\pi$

3

解答 $2x + y = 2$

解説

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ とおく。

2点 P , Q における円の接線の方程式はそれぞれ $x_1x + y_1y = 4$, $x_2x + y_2y = 4$

この2直線はともに点(4, 2)を通るから $4x_1 + 2y_1 = 4$, $4x_2 + 2y_2 = 4$

すなわち $2x_1 + y_1 = 2$, $2x_2 + y_2 = 2$

これは、直線 $2x + y = 2$ が2点 P , Q を通ること、すなわち、2点 P , Q を通る直線の方程式が $2x + y = 2$ であることを示している。

よって、求める直線の方程式は $2x + y = 2$

第3講 例題

1

解答 (1) 直線 $2x - y - 6 = 0$ (2) 点(5, 0)を中心とする半径4の円

解説

(1) $P(x, y)$ とする。

$$AP = BP \text{ から } AP^2 = BP^2$$

$$\text{ゆえに } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y-1)^2$$

$$\text{整理して } 2x - y - 6 = 0 \text{ …… ①}$$

よって、点 P は直線①上にある。

逆に、直線①上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は 直線 $2x - y - 6 = 0$

(2) 点 P の座標を (x, y) とする。

P に関する条件は $AP : BP = 2 : 1$

$$\text{これより } AP = 2BP$$

$$\text{すなわち } AP^2 = 4BP^2$$

$$AP^2 = \{x - (-3)\}^2 + y^2 = (x+3)^2 + y^2,$$

$$BP^2 = (x-3)^2 + y^2 \text{ を代入すると}$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4\{(x-3)^2 + y^2\}$$

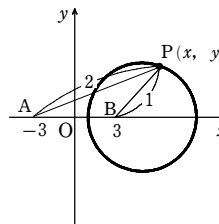
$$\text{整理すると } x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$$

$$\text{すなわち } (x-5)^2 + y^2 = 4^2$$

よって、点 P は円 $(x-5)^2 + y^2 = 4^2$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は 点(5, 0)を中心とする半径4の円



2

解答 中心 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 半径2の円

解説

点 Q の座標を (s, t) とし、線分 AQ を $2 : 1$ に内分する点を $P(x, y)$ とする。

Q は円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の点であるから $s^2 + t^2 = 9$ …… ①

P は線分 AQ を $2 : 1$ に内分する点であるから

$$x = \frac{1 \cdot 1 + 2s}{2+1} = \frac{1+2s}{3}, \quad y = \frac{1 \cdot 2 + 2t}{2+1} = \frac{2+2t}{3}$$

$$\text{よって } s = \frac{3x-1}{2}, \quad t = \frac{3y-2}{2}$$

$$\text{これを ① に代入すると } \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y-2}{2}\right)^2 = 9$$

$$\text{ゆえに } \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 9$$

$$\text{よって } \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 4 \text{ …… ②}$$

したがって、点 P は円②上にある。

逆に、円②上の任意の点は、条件を満たす。

以上から、求める軌跡は 中心 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 半径2の円

3

解答 放物線 $y = -(x-2)^2 + 1$

解説

放物線の方程式を変形すると

$$y = \{x + (a-2)\}^2 - a^2 + 1$$

放物線の頂点を $P(x, y)$ とすると

$$x = -a + 2 \text{ …… ①}$$

$$y = -a^2 + 1 \text{ …… ②}$$

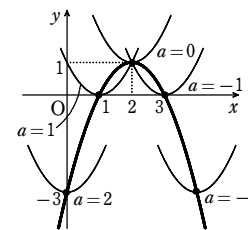
① から $a = -x + 2$

これを②に代入して

$$y = -(-x+2)^2 + 1$$

したがって、求める軌跡は

$$\text{放物線 } y = -(x-2)^2 + 1$$



4

解答 (1) $m < 0$, $4 < m$ (2) 放物線 $y = 2x^2 - 2x$ の $x < 0$, $2 < x$ の部分

解説

(1) $y = x^2$ …… ①, $y = m(x-1)$ …… ② とする。

①, ② から y を消去して整理すると $x^2 - mx + m = 0$ …… ③

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-m)^2 - 4m = m(m-4)$$

放物線①と直線②が異なる2点 P , Q で交わるための必要十分条件は

$$D > 0 \text{ すなわち } m(m-4) > 0$$

よって $m < 0$, $4 < m$ …… ④

(2) P , Q の x 座標を、それぞれ α , β ($\alpha \neq \beta$) とする。

α , β は③の異なる2つの実数解であるから、解と係数の関係により $\alpha + \beta = m$
線分 PQ の中点 M の座標を (X, Y) とすると

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m}{2} \text{ …… ⑤}$$

$$Y = m(X-1) \text{ …… ⑥}$$

⑤ から $m = 2X$ …… ⑦

これを⑥に代入して $Y = 2X(X-1)$ よって $Y = 2X^2 - 2X$

また、④, ⑦から $2X < 0$, $4 < 2X$ ゆえに $X < 0$, $2 < X$

よって、点 M は放物線 $y = 2x^2 - 2x$ の $x < 0$, $2 < x$ の部分にある。

逆に、この図形上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点 M の軌跡は 放物線 $y = 2x^2 - 2x$ の $x < 0$, $2 < x$ の部分

5

解答 原点を中心とし、半径が5の円 ただし、点(-5, 0)を除く

解説

2直線の方程式を変形して

$$y = m(x+5) \text{ …… ①} \quad -my = x-5 \text{ …… ②}$$

点 P の座標を (x, y) とすると、 (x, y) は①, ②を満たす。

$$[1] \quad y \neq 0 \text{ のとき, ② から } m = -\frac{x-5}{y}$$

$$\text{これを ① に代入して } y = -\frac{x-5}{y}(x+5)$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 = 25 \text{ …… ③}$$

③において $y = 0$ とすると $x = \pm 5$

ゆえに、 $y \neq 0$ のとき、点 P は、円③から2点(-5, 0), (5, 0)を除いた図形上にある。

[2] $y=0$ のとき, ② から $x=5$
 $x=5, y=0$ を ① に代入すると $m=0$
 よって, 点 $(5, 0)$ は, $m=0$ のときの2直線の交点である。

[1], [2] から, 点 P は, 原点を中心とし, 半径が5の円から点 $(-5, 0)$ を除いた図形上にある。
 逆に, この図形上の任意の点は, 条件を満たす。
 したがって, 点 P の軌跡は

原点を中心とし, 半径が5の円 ただし, 点 $(-5, 0)$ を除く

【参考】 ① から第1の直線は定点 $(-5, 0)$ を通り, ② から第2の直線は定点 $(5, 0)$ を通る。また, この2直線は垂直であるから, 点 P は2点 $(-5, 0), (5, 0)$ を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし, ① は直線 $x=-5$, ② は直線 $y=0$ を表さないから, 点 $(-5, 0)$ を除く。

1

【解答】 (1) 直線 $2x-4y+9=0$ (2) 中心 $(4, 0)$, 半径4の円

【解説】

(1) 点 P の座標を (x, y) とする。
 $AP=BP$ であるから $AP^2=BP^2$
 すなわち $(x-3)^2+y^2=x^2+(y-6)^2$ 整理すると $2x-4y+9=0$
 よって, 点 P は直線 $2x-4y+9=0$ 上にある。
 逆に, この直線上のすべての点 $P(x, y)$ は, 条件を満たす。
 したがって, 求める軌跡は 直線 $2x-4y+9=0$

(2) 点 P の座標を (x, y) とする。
 P の満たす条件は $AP:BP=2:1$
 ゆえに $AP=2BP$ すなわち $AP^2=4BP^2$
 したがって $(x+4)^2+y^2=4[(x-2)^2+y^2]$
 整理すると $x^2-8x+y^2=0$
 すなわち $(x-4)^2+y^2=4^2$
 ゆえに, 点 P は円 $(x-4)^2+y^2=4^2$ 上にある。
 逆に, この円上の任意の点 P は, 与えられた条件を満たす。
 よって, 点 P の軌跡は 中心 $(4, 0)$, 半径4の円

2

【解答】 (1) 直線 $x-2y=-2$ (2) 放物線 $y=3x^2-8x+4$
 (3) 中心が点 $(2, 1)$, 半径が $\frac{1}{3}$ の円

【解説】

点 P の座標を (x, y) , 点 Q の座標を (s, t) とする。

(1) 点 Q は直線 $x-2y=1$ 上にあるから
 $s-2t=1$ …… ①
 点 P は線分 AQ の中点であるから
 $x=\frac{1+s}{2}, y=\frac{3+t}{2}$ ゆえに $s=2x-1, t=2y-3$

これを ① に代入して $(2x-1)-2(2y-3)=1$ すなわち $x-2y=-2$
 よって, 点 P は, 直線 $x-2y=-2$ 上にある。
 逆に, この直線上の任意の点は, 条件を満たす。
 したがって, 点 P の軌跡は 直線 $x-2y=-2$

(2) 点 Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから
 $t=s^2$ …… ①
 点 P は線分 AQ を1:2に内分するから
 $x=\frac{2\cdot 2+1\cdot s}{1+2}, y=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot t}{1+2}$ ゆえに $s=3x-4, t=3y+4$

これを ① に代入して $3y+4=(3x-4)^2$ すなわち $y=3x^2-8x+4$
 よって, 点 P は, 放物線 $y=3x^2-8x+4$ 上にある。
 逆に, この放物線上の任意の点は, 条件を満たす。
 したがって, 点 P の軌跡は 放物線 $y=3x^2-8x+4$

(3) 点 Q は直線 AB 上にないから, 図形 ABQ は常に三角形になる。

点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから

$$s^2+t^2=1 \quad \dots\dots ①$$

点 P は三角形 ABQ の重心であるから

$$x=\frac{4+2+s}{3}, y=\frac{0+3+t}{3}$$

ゆえに $s=3x-6, t=3y-3$

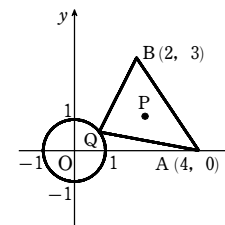
これを ① に代入して

$$(3x-6)^2+(3y-3)^2=1 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{9}$$

よって, 点 P は, 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{9}$ 上にある。

逆に, この円上の任意の点は, 条件を満たす。

したがって, 点 P の軌跡は, 中心が点 $(2, 1)$, 半径が $\frac{1}{3}$ の円である。



3

【解答】 放物線 $y=\frac{4}{9}x^2$

【解説】

方程式を変形して $(x+\frac{3}{2}a)^2+(y-a^2)=\frac{1}{4}a^2+1$

$\frac{1}{4}a^2+1>0$ であるから, a がすべての実数値をとって変化するとき, 与えられた方程式は円を表す。

円の中心の座標を (x, y) とすると $x=-\frac{3}{2}a, y=a^2$

$a=-\frac{2}{3}x$ であるから, $y=a^2$ に代入して $y=(-\frac{2}{3}x)^2=\frac{4}{9}x^2$

したがって, 求める軌跡は 放物線 $y=\frac{4}{9}x^2$

4

【解答】 (1) $m<1, 9<m$ (2) 放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2, 6<x$ の部分

【解説】

(1) $y=x^2-3x$ …… ①, $y=m(x-4)$ …… ② とする。

①, ② から y を消去して整理すると $x^2-(m+3)x+4m=0$ …… ③

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(m+3)^2-4\cdot 1\cdot 4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$$

放物線 ① と直線 ② が異なる2点 A, B で交わるための必要十分条件は

$$D>0 \quad \text{すなわち} \quad (m-1)(m-9)>0$$

よって $m<1, 9<m$ …… ④

(2) A, B の x 座標を, それぞれ α, β ($\alpha \neq \beta$) とする。

α, β は ③ の異なる2つの実数解であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=m+3$$

線分 AB の中点 P の座標を (X, Y) とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+3}{2} \quad \dots\dots ⑤ \quad Y=m(X-4) \quad \dots\dots ⑥$$

⑤ から $m=2X-3$ …… ⑦

これを⑥に代入して $Y=(2X-3)(X-4)$
 よって $Y=2X^2-11X+12$
 また、④、⑦から $2X-3<1, 9<2X-3$ ゆえに $X<2, 6<X$
 よって、点Pは放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2, 6<x$ の部分にある。
 逆に、この図形上の任意の点は、条件を満たす。
 したがって、点Pの軌跡は 放物線 $y=2x^2-11x+12$ の $x<2, 6<x$ の部分

5

解答 中心が原点、半径が2の円。ただし、点(-2, 0)を除く

解説

$y=t(x+2) \dots\dots ①, \quad t y=2-x \dots\dots ②$
 点Pの座標を(x, y)とすると、(x, y)は①、②を満たす。

[1] $y \neq 0$ のとき、②から $t = \frac{2-x}{y}$

これを①に代入して $y = \frac{2-x}{y}(x+2)$

よって $x^2 + y^2 = 4 \dots\dots ③$

③で $y=0$ とすると $x = \pm 2$

ゆえに、 $y \neq 0$ のとき、点P(x, y)は円③から2点(-2, 0), (2, 0)を除いた図形上にある。

[2] $y=0$ のとき、②から $x=2$

$x=2, y=0$ を①に代入すると $t=0$

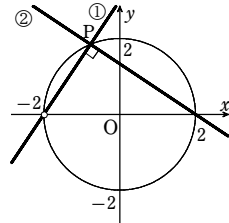
よって、点(2, 0)は、 $t=0$ のときの2直線の交点である。

[1], [2]から、点Pは円③から点(-2, 0)を除いた図形上にある。

逆に、この図形上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点Pの軌跡は、原点を中心とし、半径が2の円である。ただし、点(-2, 0)を除く。

参考 直線①は定点(-2, 0)を通り、直線②は定点(2, 0)を通る。また、2直線①、②は垂直に交わる(傾きに着目)から、点Pは2点(-2, 0), (2, 0)を直径の両端とする円周上にあることがわかる。ただし、①は直線 $x=-2$ 、②は直線 $y=0$ を表さないから、点(-2, 0)を除く。



1

解答 (1) 円 $(x-1)^2 + y^2 = 6$ (2) 直線 $x + y - 2 = 0$

解説

点Pの座標を(x, y)とする。

(1) $AP^2 + BP^2 = 30$ から $(x+2)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 30$

整理すると $x^2 - 2x + y^2 = 5$

よって $(x-1)^2 + y^2 = 6$

ゆえに、点Pの軌跡は 円 $(x-1)^2 + y^2 = 6$

(2) $2AP^2 = BP^2 + CP^2$ から $2(x^2 + y^2) = (x-2)^2 + y^2 + x^2 + (y-2)^2$

整理すると $x + y - 2 = 0$

よって、点Pの軌跡は 直線 $x + y - 2 = 0$

2

解答 中心が点 $(\frac{1}{3}, 0)$ 、半径が1の円。ただし、2点 $(-\frac{2}{3}, 0), (\frac{4}{3}, 0)$ を除く。

解説

点Pの座標を(x, y)、点Qの座標を(s, t)とする。

Qがx軸上にあるとき、図形OAQは三角形にならないから $t \neq 0 \dots\dots ①$

Qは円 $x^2 + y^2 = 9$ 上にあるから

$s^2 + t^2 = 9 \dots\dots ②$

Pは△OAQの重心であるから

$x = \frac{0+1+s}{3}, y = \frac{0+0+t}{3}$

よって $s = 3x - 1, t = 3y$

これを①、②に代入して $(3x-1)^2 + (3y)^2 = 9, 3y \neq 0$

すなわち $(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = 1, y \neq 0 \dots\dots ③$

ゆえに、点Pは図形③上にある。

逆に、図形③上の任意の点は、条件を満たす。

$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = 1$ で、 $y=0$ とすると $(x - \frac{1}{3})^2 = 1$

これを解くと $x = -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

よって、求める軌跡は、中心が点 $(\frac{1}{3}, 0)$ 、半径が1の円である。

ただし、2点 $(-\frac{2}{3}, 0), (\frac{4}{3}, 0)$ を除く。

3

解答 (1) $0 < k < 2$ (2) 直線 $y = -\frac{3}{2}x + 1 (0 < x < 4)$

解説

(1) 方程式を変形して

$(x-2k)^2 + (y+(3k-1))^2 = -k^2 + 2k$

これが円を表すための条件は $-k^2 + 2k > 0$

よって $k(k-2) < 0$ したがって $0 < k < 2$

(2) 円の中心の座標を(x, y)とすると

$x=2k, y=-3k+1 (0 < k < 2)$

kを消去すると $y = -\frac{3}{2}x + 1$

また、 $0 < k < 2$ であるから $0 < 2k < 4$ すなわち $0 < x < 4$

よって、求める軌跡は 直線 $y = -\frac{3}{2}x + 1 (0 < x < 4)$

4

解答 (1) $-1 < k < 1$ (2) 円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ の $1 < x \leq 2$ の部分

解説

(1) $y=kx$ を $(x-2)^2 + y^2 = 2$ に代入して $(x-2)^2 + (kx)^2 = 2$

整理すると $(k^2+1)x^2 - 4x + 2 = 0 \dots\dots ①$

円Cと直線ℓが異なる2点で交わるための条件は、2次方程式①の判別式をDとすると

$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2(k^2+1) = -2(k^2-1) > 0$

ゆえに $k^2-1 < 0$ よって $-1 < k < 1$

(2) P(x, y)とすると、Pは直線ℓ上の点であるから $y=kx$

2次方程式①の2つの解をα, βとすると、Pは線分ABの中点であり、解と係数の

関係から $x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k^2+1}$

よって $x = \frac{2}{k^2+1} \dots\dots ②$

$x \neq 0$ であるから、 $y=kx$ より $k = \frac{y}{x}$

②に代入して $x = \frac{2}{(\frac{y}{x})^2 + 1}$

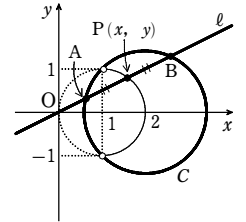
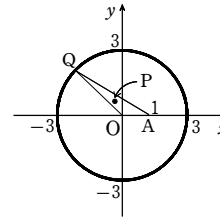
よって $x^2 + y^2 = 2x$

(1)の結果から $0 \leq k^2 < 1$

ゆえに、②から $1 < x \leq 2$

したがって、求める軌跡は

円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ の $1 < x \leq 2$ の部分



1

【解答】 (1) $2x+2y+5=0, 2x-2y-1=0$ (2) $x+7y-23=0$

【解説】

(1) 2直線のなす角の二等分線上の点をP(x, y)とする。

点Pは2直線 $x-2y-2=0, 4x-2y+1=0$ から等距離にあるから

$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|4x-2y+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

よって $2|x-2y-2|=|4x-2y+1|$

すなわち $2(x-2y-2)=\pm(4x-2y+1)$

したがって、求める直線の方程式は $2x+2y+5=0, 2x-2y-1=0$

(2) 直線 $2x-y+4=0$ に関して、直線 $x+y-3=0$

上を動く点Q(s, t)と対称な点をP(x, y) ($x \neq s$)

とする。

直線PQが直線 $2x-y+4=0$ に垂直であるから、

その傾きについて

$$2 \cdot \frac{y-t}{x-s} = -1$$

よって $s+2t=x+2y$ ……①

また、線分PQの中点 $(\frac{x+s}{2}, \frac{y+t}{2})$ が直線

$2x-y+4=0$ 上にあるから

$$2 \cdot \frac{x+s}{2} - \frac{y+t}{2} + 4 = 0$$

よって $2s-t=-2x+y-8$ ……②

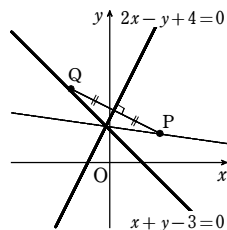
①, ②から $s = \frac{-3x+4y-16}{5}$ ……③, $t = \frac{4x+3y+8}{5}$ ……④

また、点Qは直線 $x+y-3=0$ 上にあるから $s+t-3=0$ ……⑤

③, ④を⑤に代入して $\frac{-3x+4y-16}{5} + \frac{4x+3y+8}{5} - 3 = 0$

したがって、点Pの軌跡の方程式は $x+7y-23=0$

これが求める直線の方程式である。



2

【解答】 放物線 $y = \frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$

【解説】

Pの座標を(x, y)とする。

第1象限内の円Cに外接し、x軸に接する円の半径はyである。

2つの円が外接するから

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = y+1$$

両辺は正であるから2乗して

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (y+1)^2$$

整理して $y = \frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$

したがって、求める軌跡は

放物線 $y = \frac{1}{6}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$

3

【解答】 (1) $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ (2) 直線 $2x+2y-1=0$

(3) 円 $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 1$

【解説】

(1) Qの座標を(X, Y)とし、kは実数とする。

条件(A)から $X=kx, Y=ky$ ……①, $k>0$

条件(B)から $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}=1$

よって $k(x^2+y^2)=1$ ……②

$x^2+y^2 \neq 0$ であるから $k = \frac{1}{x^2+y^2}$

したがって、①から $Q(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$

(2) ①から $x = \frac{X}{k}, y = \frac{Y}{k}$ ②に代入して $\frac{X^2+Y^2}{k} = 1$

よって $x = \frac{X}{X^2+Y^2}, y = \frac{Y}{X^2+Y^2}$ ……③

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ から $x^2+y^2-2x-2y=0$

③を代入して $\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{2X}{X^2+Y^2} - \frac{2Y}{X^2+Y^2} = 0$

ゆえに $\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{2(X+Y)}{X^2+Y^2} = 0$

$X^2+Y^2 \neq 0$ であるから $1-2(X+Y)=0$

したがって、Qの軌跡は 直線 $2x+2y-1=0$

(3) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ から $x^2+y^2-2x-2y=2$

③を代入して $\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2} + \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{2X}{X^2+Y^2} - \frac{2Y}{X^2+Y^2} = 2$

ゆえに $\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{2(X+Y)}{X^2+Y^2} = 2$

$X^2+Y^2 \neq 0$ であるから $1-2(X+Y)=2(X^2+Y^2)$

よって $X^2+Y^2+X+Y-\frac{1}{2}=0$

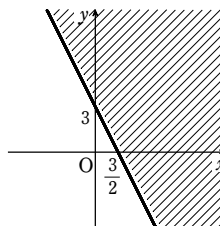
したがって、Qの軌跡は 円 $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 1$

1

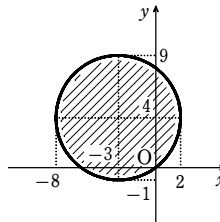
【解答】 (1) [図] 境界線を含まない (2) [図] 境界線を含む

(3) [図] 境界線を含まない (4) [図] 境界線を含む

(1)

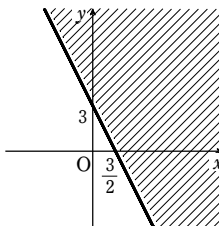


(3)



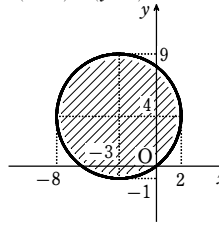
【解説】

(1)



境界線を含まない

(3) $(x+3)^2 + (y-4)^2 < 25$



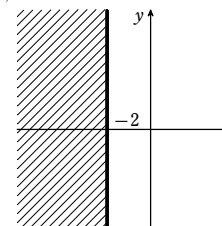
境界線を含まない

2

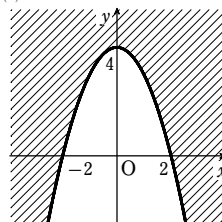
【解答】 (1) [図] 境界線を含む

(1)

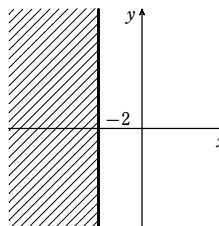
(2)



(4)

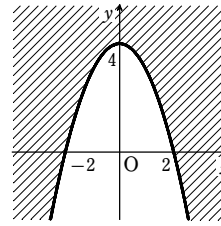


(2)



境界線を含む

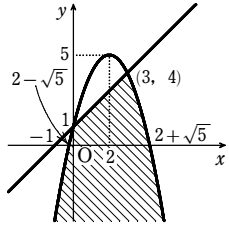
(4)



境界線を含む

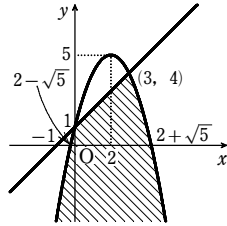
(2) [図] 境界線を含む

(2)



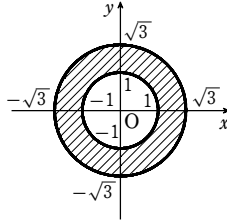
解説

(1) $y \leq -x^2 + 4x + 1$ から $y \leq -(x-2)^2 + 5$
 求める領域は、放物線 $y = -(x-2)^2 + 5$ および
 その下側と、直線 $y = x + 1$ およびその下側の共
 通部分で、図の斜線部分。
 ただし、境界線を含む。



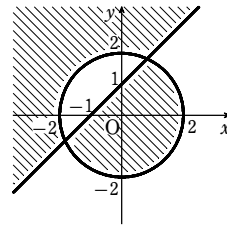
(2) 与式は $\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 3 \end{cases}$ と同値。

求める領域は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の周および外部と、
 円 $x^2 + y^2 = 3$ の周および内部の共通部分で、図の
 斜線部分。
 ただし、境界線を含む。



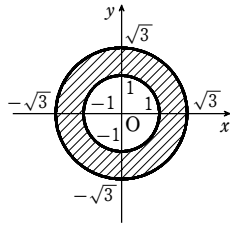
3 ★★★☆

解答 図 境界線を含まない



解説

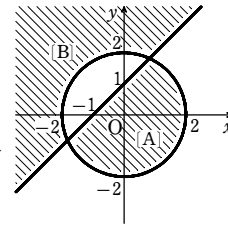
$(x-y+1)(x^2+y^2-4) < 0$ を連立不等式で表すと
 $\begin{cases} x-y+1 > 0 \\ x^2+y^2-4 < 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x-y+1 < 0 \\ x^2+y^2-4 > 0 \end{cases}$



すなわち

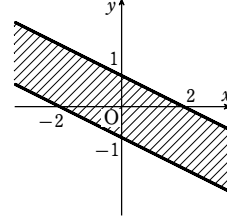
$$\begin{cases} y < x+1 \\ x^2 + y^2 < 2^2 \end{cases} \dots [A] \quad \text{または} \\ \begin{cases} y > x+1 \\ x^2 + y^2 > 2^2 \end{cases} \dots [B]$$

求める領域は、[A]の表す領域と[B]の表す領域の和集合
 である。
 よって、求める領域は、右の図の斜線部分。
 ただし、境界線を含まない。



4 ★★★☆

解答 図 境界線を含む

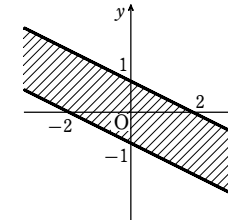


解説

$|x+2y| \leq 2$ から $-2 \leq x+2y \leq 2$

よって $\begin{cases} x+2y \geq -2 \\ x+2y \leq 2 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x-1 \\ y \leq \frac{1}{2}x+1 \end{cases}$

したがって、求める領域は、右の図の斜線部分である。
 ただし、境界線を含む。



5

解答 $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$, $x = 2, y = 0$ のとき最小値 -2

解説

連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ の表す領域を A とする
 と、A は右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含
 む。

$-x + y = k$ …… ① とおくと、① は傾きが 1, y 切片
 が k の直線を表す。

図から、直線 ① が領域 A 上で円 $x^2 + y^2 = 4$ に接する
 とき、k の値は最大となる。

① から $y = x + k$ …… ②

これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入して $x^2 + (x+k)^2 = 4$

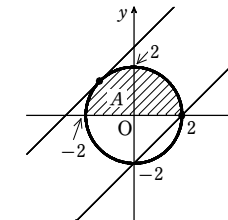
整理すると $2x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$ …… ③

この方程式の判別式を D とすると $\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 4) = -k^2 + 8$

直線 ① と円が接するとき、 $D = 0$ であるから

$-k^2 + 8 = 0$ よって $k = \pm 2\sqrt{2}$

接点が領域 A 上にあるとき $k = 2\sqrt{2}$



このとき、③ から $x = -\frac{k}{2} = -\sqrt{2}$

② から $y = -\sqrt{2} + k = \sqrt{2}$

また、直線 ① が点 (2, 0) を通るとき、k の値は最小となる。

このとき $k = -2 + 0 = -2$

したがって、 $-x + y$ は $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

$x = 2, y = 0$ のとき最小値 -2 をとる。

6

解答 最大値 $\frac{41}{9}$, 最小値 $\frac{1}{2}$

解説

領域 D は、右の図のような、3 直線

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \dots \text{①}, \\ 2x - y - 2 = 0 \dots \text{②}, \\ x + y - 1 = 0 \dots \text{③} \end{cases}$$

で囲まれた部分である。

ただし、境界線を含む。

$x^2 + y^2 = k$ とおくと、 $k > 0$ のとき、これは
 中心が原点で半径が \sqrt{k} の円を表す。

この円を C とおく。

点 (x, y) が領域 D 内を動くとき、k が最大

となるのは、右上の図より、円 C が 2 直線

①, ② の交点を通るときである。

①, ② を連立させて解くと $x = \frac{5}{3}, y = \frac{4}{3}$

よって、このとき k の値は $k = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{41}{9}$

また、点 (x, y) が領域 D 内を動くとき、k

が最小となるのは、右の図より、円 C が直

線 ③ に接するときである。

よって $\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{k}$

ゆえに $\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $k = \frac{1}{2}$

以上から 最大値 $\frac{41}{9}$, 最小値 $\frac{1}{2}$

参考 (接点の座標)

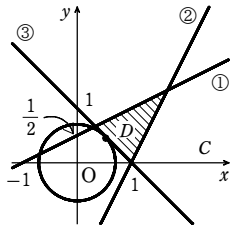
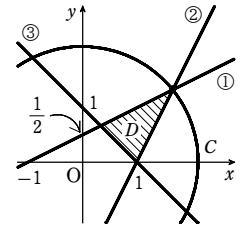
$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ と ③ を連立させて解くと $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

よって、接点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2 直線 ①, ③ の交点の座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ であり、

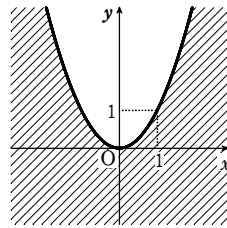
2 直線 ②, ③ の交点の座標は (1, 0) であるから、

$k = \frac{1}{2}$ のとき円 C は確かに領域 D と共有点をもつ。



7

解答 (1) $k=2, -4$ (2) [図] 境界線を含む



解説

(1) 直線①が点(1, -8)を通るとき

$$2k \cdot 1 + (-8) + k^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$\text{よって} \quad (k-2)(k+4) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 2, -4$$

(2) ①を k について整理すると $k^2 + 2xk + y = 0$ ……②

直線①が点 (x, y) を通る条件は、②を満たす実数 k が存在することである。

よって、 k の2次方程式②の判別式 D について

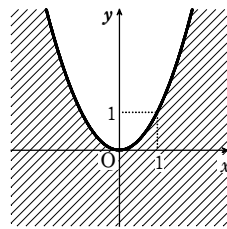
$$\frac{D}{4} = x^2 - y \geq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad y \leq x^2$$

したがって、直線①が通る範囲は、放物線 $y = x^2$

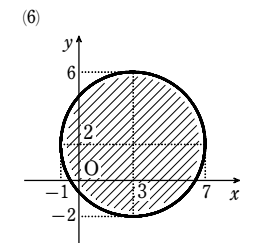
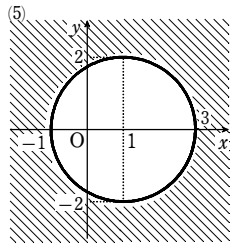
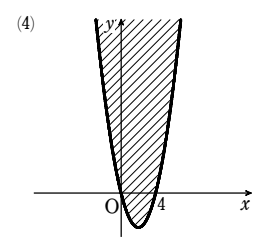
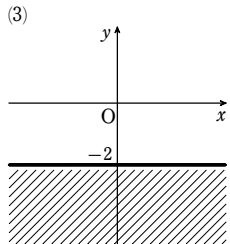
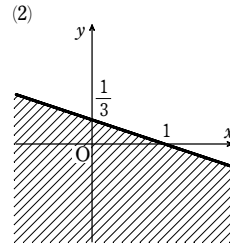
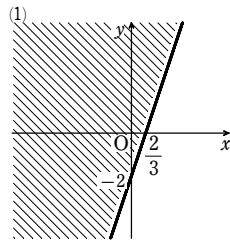
およびその下側の部分で、図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。



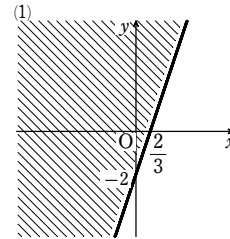
1

解答 (1) [図] 境界線を含まない (2) [図] 境界線を含む
 (3) [図] 境界線を含まない (4) [図] 境界線を含む
 (5) [図] 境界線を含まない (6) [図] 境界線を含まない



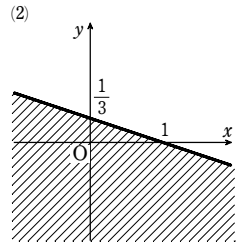
解説

(1) 図の斜線部分。ただし、境界線を含まない。



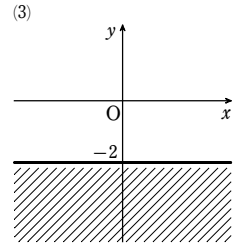
(2) $x + 3y \leq 1$ から $y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

図の斜線部分。ただし、境界線を含む。

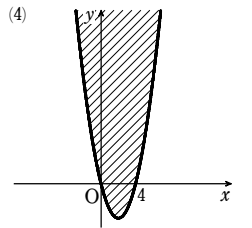


(3) $y + 2 < 0$ から $y < -2$

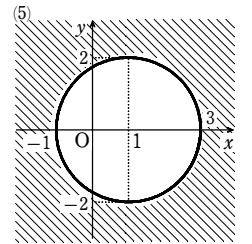
図の斜線部分。ただし、境界線を含まない。



(4) 図の斜線部分。ただし、境界線を含む。



(5) 図の斜線部分。ただし、境界線を含まない。

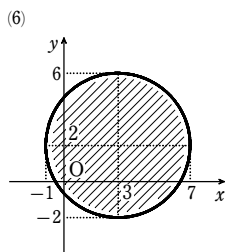


(6) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 < 0$ から $(x-3)^2 + (y-2)^2 < 16$

よって、求める領域は、円 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ の内部で、[図]の斜線部分である。

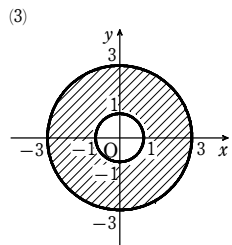
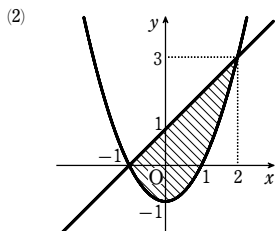
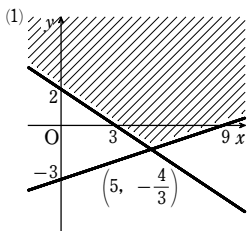
第4講 例題演習

ただし、境界線を含まない。



2

- 解答 (1) [図] 境界線を含まない (2) [図] 境界線を含む
 (3) [図] 円 $x^2 + y^2 = 1$ は含まない、他は含む



解説

(1) 不等式を変形すると

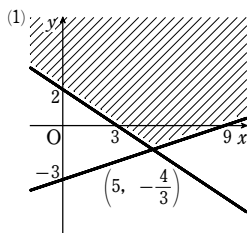
$$y > \frac{1}{3}x - 3, y > -\frac{2}{3}x + 2$$

求める領域は、直線 $y = \frac{1}{3}x - 3$ の上側と、

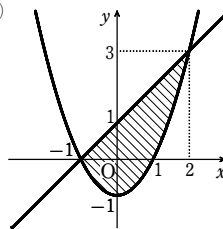
直線 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ の上側の共通部分で、

右の図の斜線部分。

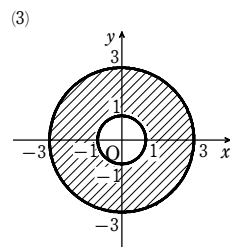
ただし、境界線を含まない。



(2) 求める領域は、直線 $y = x + 1$ およびその下側と、
 放物線 $y = x^2 - 1$ およびその上側の共通部分で、
 右の図の斜線部分。
 ただし、境界線を含む。

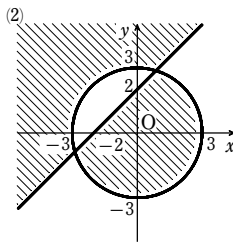
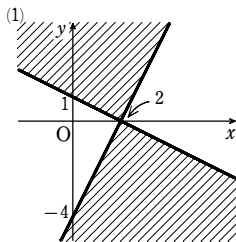


(3) $1 < x^2 + y^2 \leq 9$ から
 $x^2 + y^2 > 1$ かつ $x^2 + y^2 \leq 9$
 よって、求める領域は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の外部と
 円 $x^2 + y^2 = 9$ およびその内部の共通部分で、[図]
 の斜線部分である。
 ただし、境界線は、円 $x^2 + y^2 = 1$ は含まないで、
 他は含む。



3

解答 (1) [図] 境界線を含む (2) [図] 境界線を含まない



解説

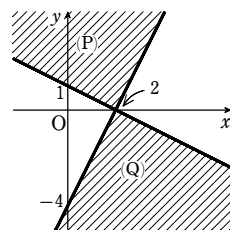
(1) 与えられた不等式は、次のように表される。

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \geq 0 & \dots (P) \\ 2x - y - 4 \leq 0 & \dots (Q) \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \leq 0 & \dots (P) \\ 2x - y - 4 \geq 0 & \dots (Q) \end{cases}$$

求める領域は、(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和
 集合で、右の図の斜線部分である。
 ただし、境界線を含む。



(2) 与えられた不等式は、次のように表される。

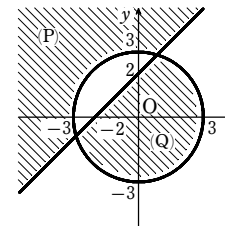
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 > 0 & \dots (P) \\ y - x - 2 > 0 & \dots (Q) \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 < 0 & \dots (Q) \\ y - x - 2 < 0 & \dots (P) \end{cases}$$

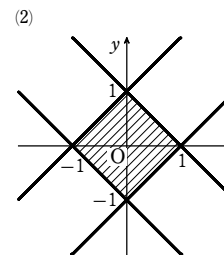
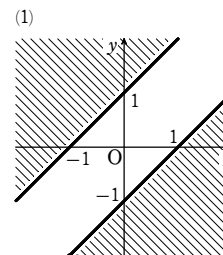
求める領域は、(P) の表す領域と (Q) の表す領域の和
 集合で、右の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。



4

解答 (1) [図] 境界線を含まない (2) [図] 境界線を含む



解説

(1) $|x - y| > 1$ から $x - y < -1$ または $1 < x - y$

すなわち $y > x + 1$ または $y < x - 1$

よって、求める領域は [図] の斜線部分。ただし、境界線を含まない。

(2) $|x| + |y| \leq 1$ ①

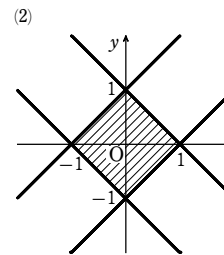
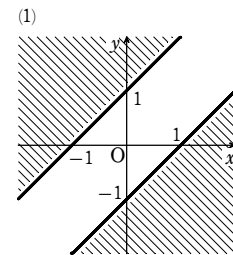
$x \geq 0, y \geq 0$ のとき、①は $x + y \leq 1$ よって $y \leq -x + 1$

$x \geq 0, y < 0$ のとき、①は $x - y \leq 1$ よって $y \geq x - 1$

$x < 0, y \geq 0$ のとき、①は $-x + y \leq 1$ よって $y \leq x + 1$

$x < 0, y < 0$ のとき、①は $-x - y \leq 1$ よって $y \geq -x - 1$

ゆえに、求める領域は [図] の斜線部分。ただし、境界線を含む。



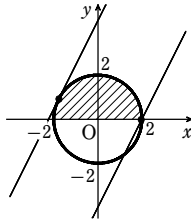
5

解答 $x = 2, y = 0$ のとき最大値 4; $x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}, y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

解説

第4講 例題演習

連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ を満たす点 (x, y) の存在する領域は右図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



$2x - y = k$ …… ①

とおくと、①は傾きが2、y切片が $-k$ の直線を表す。図から、直線①が点(2, 0)を通るとき $-k$ の値は最小となる。すなわち、 k の値は最大となる。

このとき $k = 2 \cdot 2 - 0 = 4$

また、領域上で直線①が円 $x^2 + y^2 = 4$ に接するとき $-k$ の値は最大となる。すなわち、 k の値は最小となる。

①から $y = 2x - k$ …… ②

これを $x^2 + y^2 = 4$ に代入して

$x^2 + (2x - k)^2 = 4$ よって $5x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$ …… ③

この2次方程式の判別式を D とすると

$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5(k^2 - 4) = -k^2 + 20$

直線①が円に接するとき、 $D = 0$ であるから

$-k^2 + 20 = 0$ よって $k = \pm 2\sqrt{5}$

接点が領域上にあるとき、接線②のy切片は正であるから $k = -2\sqrt{5}$

このとき、③から $x = \frac{2k}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

②から $y = 2\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right) - k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

よって、 $2x - y$ は

$x = 2, y = 0$ のとき最大値4,

$x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}, y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

をとる。

6

解答 $x = \frac{3}{2}, y = 3$ のとき最大値 $\frac{45}{4}$; $x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}$ のとき最小値 $\frac{16}{5}$

解説

与えられた連立不等式の表す領域 D は、3点 $A(2, 1)$,

$B(0, 2)$, $C\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x^2 + y^2 = k$ ($k > 0$) …… ①とおくと、①は原点を中心とし、半径 \sqrt{k} の円を表す。この円①が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から、円①が $C\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ を通るとき、 k は最大で

$k = OC^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{45}{4}$

また、図から円①が直線 $AB: x + 2y - 4 = 0$ …… ②に接するとき、 k が最小になる。

接点の座標は、原点を通り直線②に垂直な直線 $2x - y = 0$ と、直線②の交点であるから

$(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

円①がこの点を通るとき、 k は最小で

$k = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

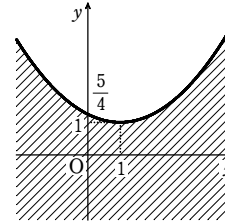
よって、 $x^2 + y^2$ は $x = \frac{3}{2}, y = 3$ のとき最大値 $\frac{45}{4}$ をとり、

$x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}$ のとき最小値 $\frac{16}{5}$ をとる。

7

解答 (1) $k = 0, 1$

(2) $y \leq \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$; [図] 境界線を含む。



解説

(1) $x = 2, y = 1$ を L の式に代入して

$1 = k \cdot 2 + 1 - k - k^2$

すなわち $k^2 - k = 0$ よって $k(k-1) = 0$

ゆえに $k = 0, 1$

(2) L の式を k について整理すると

$k^2 - (x-1)k + y - 1 = 0$ …… ①

直線 L が点 (x, y) を通るとき、①を満たす実数 k が存在する。

よって、 k の2次方程式①の判別式を D とすると

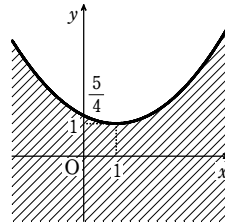
$D = -(x-1)^2 - 4(y-1) \geq 0$

すなわち $y - 1 \leq \frac{1}{4}(x-1)^2$

ゆえに $y \leq \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$

よって、直線 L が通る範囲は、右の図の斜線部分である。

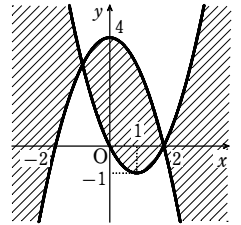
ただし、境界線を含む。



第4講 レベルA

1

解答 [図]、境界線を含む



解説

与えられた不等式は

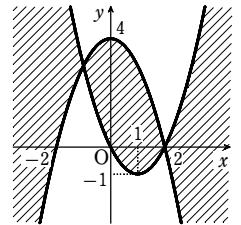
$\begin{cases} x^2 - 2x - y \geq 0 \\ x^2 + y - 4 \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^2 - 2x - y \leq 0 \\ x^2 + y - 4 \leq 0 \end{cases}$

すなわち

$\begin{cases} y \leq x^2 - 2x \\ y \geq -x^2 + 4 \end{cases}$ または $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x \\ y \leq -x^2 + 4 \end{cases}$

よって、求める領域は右の図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。



2

解答 (1) $x^2 + y^2 > 4, (x-2)^2 + y^2 < 1, y > 0$ (2) $(x^2 - y - 1)(x^2 + y - 1) < 0$

解説

(1) 円 $x^2 + y^2 = 2^2$ の外部を領域 A ,

円 $(x-2)^2 + y^2 = 1^2$ の内部を領域 B ,

x 軸の上側を領域 C

とすると、与えられた図の斜線部分は $A \cap B \cap C$ であるから、求める不等式は

$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ (x-2)^2 + y^2 < 1 \\ y > 0 \end{cases}$

(2) 放物線 $y = x^2 - 1$ の上側を領域 A , 下側を領域 B ,

放物線 $y = -x^2 + 1$ の上側を領域 C , 下側を領域 D

とすると、与えられた図の斜線部分は $(A \cap C) \cup (B \cap D)$ であるから、求める不等式は

$\begin{cases} y > x^2 - 1 \\ y > -x^2 + 1 \end{cases}$ または $\begin{cases} y < x^2 - 1 \\ y < -x^2 + 1 \end{cases}$

すなわち

$\begin{cases} x^2 - y - 1 < 0 \\ x^2 + y - 1 > 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^2 - y - 1 > 0 \\ x^2 + y - 1 < 0 \end{cases}$

よって $(x^2 - y - 1)(x^2 + y - 1) < 0$

3

解答 $(-1, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$

解説

$x^2 + y^2 - 2x - 4 < 0$ から $(x-1)^2 + y^2 < 5$ …… ①

$x - 2y - 3 < 0$ から $y > \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ …… ②

第4講 レベルA

よって、与えられた不等式の表す領域は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

図から $1-\sqrt{5} < x < 1+\sqrt{5}$

これを満たす整数 x は $x = -1, 0, 1, 2, 3$

$x = -1$ のとき、①, ②から $y^2 < 1, y > -2$

これを満たす整数 y は $y = 0$

$x = 0$ のとき、①, ②から $y^2 < 4, y > -\frac{3}{2}$

これを満たす整数 y は $y = -1, 0, 1$

$x = 1$ のとき、①, ②から $y^2 < 5, y > -1$

これを満たす整数 y は $y = 0, 1, 2$

$x = 2$ のとき、①, ②から $y^2 < 4, y > -\frac{1}{2}$

これを満たす整数 y は $y = 0, 1$

$x = 3$ のとき、①, ②から $y^2 < 1, y > 0$

これを満たす整数 y は存在しない。

よって、求める整数 (x, y) の組は

$(-1, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$

4

【解答】 $x = 3, y = 3$ のとき最大値 9; $x = 0, y = 2$ のとき最小値 2

【解説】

与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は 3 点 $(4, 0), (3, 3), (0, 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$$2x + y = k \quad \dots\dots ①$$

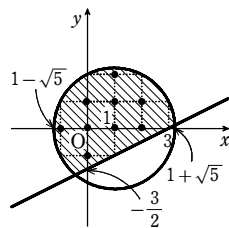
とおくと、これは傾きが $-2, y$ 切片が k である直線を表す。

領域 A においては、直線 ①が

点 $(3, 3)$ を通るとき k は最大で、そのとき $k = 9$

点 $(0, 2)$ を通るとき k は最小で、そのとき $k = 2$

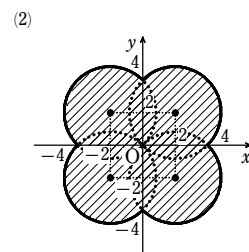
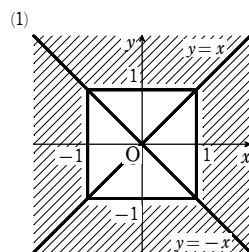
よって $x = 3, y = 3$ のとき最大値 9; $x = 0, y = 2$ のとき最小値 2



1

【解答】 (1) [図] 境界線を含まない

(2) [図] 境界線を含む



【解説】

(1) $y \leq x$ かつ $y \geq -x$ のとき

$$|x - y| + |x + y| = (x - y) + (x + y) = 2x$$

$$\text{よって } 2x > 2 \quad \text{ゆえに } x > 1$$

$y \leq x$ かつ $y < -x$ のとき

$$|x - y| + |x + y| = (x - y) - (x + y) = -2y$$

$$\text{よって } -2y > 2 \quad \text{ゆえに } y < -1$$

$y > x$ かつ $y \geq -x$ のとき

$$|x - y| + |x + y| = -(x - y) + (x + y) = 2y$$

$$\text{よって } 2y > 2 \quad \text{ゆえに } y > 1$$

$y > x$ かつ $y < -x$ のとき

$$|x - y| + |x + y| = -(x - y) - (x + y) = -2x$$

$$\text{よって } -2x > 2 \quad \text{ゆえに } x < -1$$

したがって、求める領域は、図の斜線部分。

ただし、境界線を含まない。

(2) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき

$$x^2 + y^2 \leq 4x + 4y$$

$$\text{よって } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$$

$x \geq 0, y < 0$ のとき

$$x^2 + y^2 \leq 4x - 4y$$

$$\text{よって } (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 8$$

$x < 0, y \geq 0$ のとき

$$x^2 + y^2 \leq -4x + 4y$$

$$\text{よって } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8$$

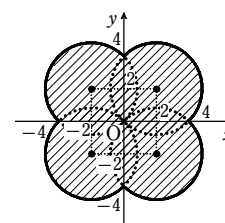
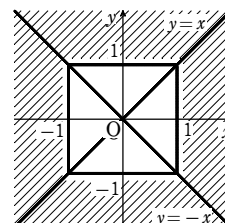
$x < 0, y < 0$ のとき

$$x^2 + y^2 \leq -4x - 4y$$

$$\text{よって } (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 8$$

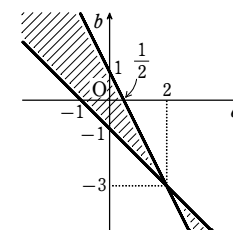
したがって、求める領域は、図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。



2

【解答】 [図] 境界線を含まない



【解説】

条件を満たすのは、2 点 P, Q のうち、一方が直線 $y = ax + b$ の上側、他方が下側にあるときである。

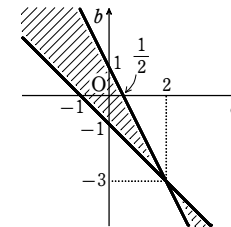
$$\text{よって } (-1 > a \cdot 1 + b \text{ かつ } 1 < a \cdot 2 + b)$$

$$\text{または } (-1 < a \cdot 1 + b \text{ かつ } 1 > a \cdot 2 + b)$$

$$\text{ゆえに } \begin{cases} a + b + 1 < 0 \\ 2a + b - 1 > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a + b + 1 > 0 \\ 2a + b - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{すなわち } \begin{cases} b < -a - 1 \\ b > -2a + 1 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} b > -a - 1 \\ b < -2a + 1 \end{cases}$$

したがって、点 (a, b) の存在範囲は [図] の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



【参考】 $f(x, y) = ax - y + b$ とおく。

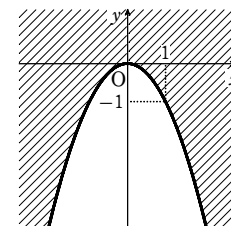
直線 $y = ax + b$ すなわち $f(x, y) = 0$ により座標平面は 2 つの領域 $f(x, y) > 0, f(x, y) < 0$ に分けられる。

P, Q がそれぞれ別の領域に属すればよから

$$\begin{cases} f(1, -1) < 0 \\ f(2, 1) > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} f(1, -1) > 0 \\ f(2, 1) < 0 \end{cases}$$

3

【解答】 (1) $y = -x^2$ (2) [図] 境界線を含む



【解説】

(1) $P(p, q)$ とする。

$$\text{直線 } \ell_t \text{ が点 } P \text{ を通るとき } q = 2tp + t^2$$

$$\text{すなわち } t^2 + 2pt - q = 0 \quad \dots\dots ①$$

点 P を通る直線 ℓ_t がただ 1 つであるための条件は、① を満たす実数 t がただ 1 つ存在することである。

よって、 t の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = p^2 + q = 0 \quad \text{ゆえに } q = -p^2$$

第4講 レベルB

したがって、点Pの軌跡の方程式は $y = -x^2$

(2) $y = 2tx + t^2$ から $t^2 + 2xt - y = 0$ …… ②

直線 l_t が点 (x, y) を通る条件は、②を満たす実数 t が存在することである。

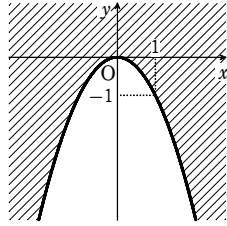
よって、 t の2次方程式②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = x^2 + y \geq 0$$

ゆえに $y \geq -x^2$

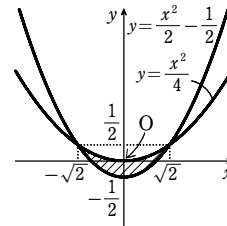
したがって、直線 l_t が通る範囲は図の斜線部分。

ただし、境界線を含む。



4 [東京工業大]

【解答】 [図], 境界線を含む



【解説】

$x + y = X, xy = Y$ とおく。

$x^2 + y^2 \leq 1$ から $(x + y)^2 - 2xy \leq 1$ すなわち $X^2 - 2Y \leq 1$

したがって $Y \geq \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}$ …… ①

また、 x, y は2次方程式 $t^2 - (x + y)t + xy = 0$ すなわち

$t^2 - Xt + Y = 0$ の2つの実数解であるから、判別式 D について

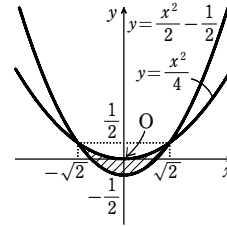
$D = X^2 - 4Y \geq 0$ より $Y \leq \frac{X^2}{4}$ …… ②

①, ② から $\frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{X^2}{4}$

変数を x, y におき換えて

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{x^2}{4}$$

したがって、求める領域は、右の図の斜線部分。ただし、境界線を含む。



章末問題A

1

【解答】 P(-17, 1), Q(-5, -12), R(22, 11), 重心(0, 0)

【解説】

点Pは辺ABを2:3に外分するから、その座標は

$$\left(\frac{-3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1}{2-3}, \frac{-3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)}{2-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-17, 1)$$

点Qは辺BCを2:3に外分するから、その座標は

$$\left(\frac{-3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2-3}, \frac{-3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{2-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-5, -12)$$

点Rは辺CAを2:3に外分するから、その座標は

$$\left(\frac{-3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5)}{2-3}, \frac{-3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{2-3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (22, 11)$$

よって、△PQRの重心の座標は

$$\left(\frac{-17 + (-5) + 22}{3}, \frac{1 + (-12) + 11}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0, 0)$$

2

【解答】 A(1, 8), B(-1, -2), C(3, 4)

【解説】

A(x₁, y₁), B(x₂, y₂), C(x₃, y₃)とすると、x座標について

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 1, \quad \frac{x_3 + x_1}{2} = 2, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$$

よって x₂ + x₃ = 2, x₃ + x₁ = 4, x₁ + x₂ = 0 ……①

辺々加えると 2(x₁ + x₂ + x₃) = 6 　ゆえに x₁ + x₂ + x₃ = 3

これと①から x₁ = 1, x₂ = -1, x₃ = 3

また、y座標について $\frac{y_2 + y_3}{2} = 1, \quad \frac{y_3 + y_1}{2} = 6, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = 3$

よって y₂ + y₃ = 2, y₃ + y₁ = 12, y₁ + y₂ = 6 ……②

辺々加えると 2(y₁ + y₂ + y₃) = 20 　ゆえに y₁ + y₂ + y₃ = 10

これと②から y₁ = 8, y₂ = -2, y₃ = 4

したがって A(1, 8), B(-1, -2), C(3, 4)

3

【解答】 (1) 平行な直線の方程式は $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, 垂直な直線の方程式は $y = 2x - 4$

(2) $y = 2x - \frac{5}{2}$

【解説】

(1) 2点(-3, 4), (7, -1)を通る直線をℓとする。

直線ℓの傾きは $\frac{-1-4}{7-(-3)} = -\frac{1}{2}$

点(1, -2)を通り、直線ℓに平行な直線の方程式は

$$y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

直線ℓに垂直な直線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{これを解いて} \quad m = 2$$

したがって、点(1, -2)を通り、直線ℓに垂直な直線の方程式は

$$y - (-2) = 2(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 4$$

【別解】 2点(-3, 4), (7, -1)を通る直線の方程式は

$$y - 4 = \frac{-1-4}{7-(-3)}\{x - (-3)\} \quad \text{すなわち} \quad x + 2y - 5 = 0$$

点(1, -2)を通り、直線 $x + 2y - 5 = 0$ に平行、垂直な直線の方程式は、それぞれ

$$1 \cdot (x - 1) + 2\{y - (-2)\} = 0, \quad 2(x - 1) - 1 \cdot \{y - (-2)\} = 0$$

すなわち $x + 2y + 3 = 0, \quad 2x - y - 4 = 0$

(2) 線分ABの中点Mの座標は $M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

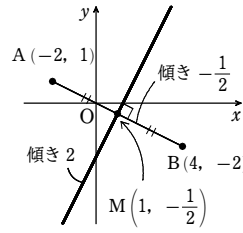
線分ABの傾きは $\frac{-2-1}{4-(-2)} = -\frac{1}{2}$

線分ABの垂直二等分線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{これを解いて} \quad m = 2$$

よって、求める直線の方程式は、点Mを通るから

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - \frac{5}{2}$$



4

【解答】 (1) C(3, 0) (2) P(4, 3)

【解説】

(1) Cの座標を(p, q)とする。

対称の条件から

[1] 線分ACの中点がℓ上にある

[2] AC ⊥ ℓ

$$\text{よって} \quad \frac{q+4}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} + 1, \quad \frac{q-4}{p-1} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

ゆえに $p - 2q = 3, \quad 2p + q = 6$

これを解いて $p = 3, \quad q = 0$

よって C(3, 0)

(2) AP = CP から AP + PB = CP + PB ≥ BC

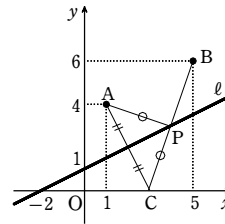
よって、AP + PBは、Pが直線BCと直線ℓとの交点のとき最小となる。

直線BCの方程式は $y - 0 = \frac{6-0}{5-3}(x-3)$

すなわち $y = 3x - 9$ ……①

①とℓ: $y = \frac{1}{2}x + 1$ から $x = 4, \quad y = 3$

よって、AP + PBを最小にするものは P(4, 3)



5

【解答】 (1) $\left(26, \frac{20}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{63}{2}, -8\right)$ (3) (18, 9) (4) (15, 36)

【解説】

(1) $\left(\frac{0+63+15}{3}, \frac{0+0+20}{3}\right)$ 　すなわち $\left(26, \frac{20}{3}\right)$

(2) 線分OAの垂直二等分線 $x = \frac{63}{2}$ と線分OBの垂直二等分線 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{125}{8}$ との

交点であるから $\left(\frac{63}{2}, -8\right)$

(3) 内心の座標を(a, b)とすると、この点は、3直線

$$OA: y = 0, \quad OB: 4x - 3y = 0, \quad AB: 5x + 12y - 315 = 0$$

から等距離にある。

ゆえに $|b| = \frac{|4a-3b|}{5} = \frac{|5a+12b-315|}{13}$

内心は△OABの内部にあるから $b > 0, \quad 4a - 3b > 0, \quad 5a + 12b - 315 < 0$

よって $b = \frac{4a-3b}{5} = -\frac{5a+12b-315}{13}$

したがって (a, b) = (18, 9)

【別解】 BO = 25, AB = 52

また、内心をI, BIの延長がOAと交わる点をD

とすると OD : DA = BO : AB = 25 : 52

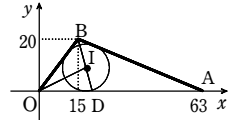
よって $D\left(\frac{52 \cdot 0 + 25 \cdot 63}{25 + 52}, \frac{52 \cdot 0 + 25 \cdot 0}{25 + 52}\right)$

すなわち $D\left(\frac{225}{11}, 0\right)$

また DI : IB = OD : OB = $\frac{225}{11} : 25 = 9 : 11$

ゆえに $I\left(\frac{11 \cdot \frac{225}{11} + 9 \cdot 15}{9 + 11}, \frac{11 \cdot 0 + 9 \cdot 20}{9 + 11}\right)$

すなわち I(18, 9)



(4) OからABに下ろした垂線の方程式は、ABの傾きが $-\frac{5}{12}$ であるから $y = \frac{12}{5}x$

これと、直線 $x = 15$ との交点が垂心であるから、その座標は (15, 36)

6

【解答】 (1) $y = -\frac{7}{4}x + \frac{15}{2}$ (2) $y = -8x + 10$

【解説】

(1) 点B(-2, 11)を通り、△OABの面積を2等分する直線は、線分OAの中点(2, 4)を通る。

よって、その方程式は

$$y - 4 = \frac{11-4}{-2-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{7}{4}x + \frac{15}{2}$$

(2) 点P(1, 2)は、線分OAを1:3に内分する点である。

よって AP = $\frac{3}{4}$ OA ……①

求める直線と線分ABとの交点をQ, ∠OAB = θとすると、条件より △OAB : △PAQ = 2 : 1 であるから

$$\frac{1}{2}OA \cdot AB \sin \theta = 2 \times \frac{1}{2}AP \cdot AQ \sin \theta \quad \text{……②}$$

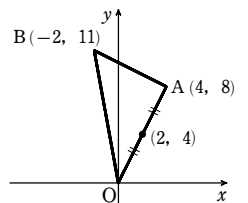
①, ②から $\frac{AQ}{AB} = \frac{OA}{2AP} = \frac{2}{3}$

したがって、点Qは線分ABを2:1に内分する。その座標は

$$\left(\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{2+1}, \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 11}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad (0, 10)$$

よって、求める直線の方程式は

$$y - 10 = \frac{2-10}{1-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y = -8x + 10$$



7

【解答】 $0 < m \leq 2a$

章末問題A

解説

$a > 0$ であるから、 P は下に凸の放物線である。また、 $m > 0$ であるから、円 C の中心の y 座標は正である。よって、円 C と放物線 P が 1 点のみを共有するときの共有点は、点 $(0, 0)$ である。

したがって、円 C の方程式は、次のように表される。

$$x^2 + (y - m)^2 = m^2 \dots\dots ①$$

円 C と放物線 P の共有点の y 座標は、① と $y = \frac{1}{4a}x^2$

すなわち $x^2 = 4ay$ から x^2 を消去して

$$4ay + (y - m)^2 = m^2$$

ゆえに $y^2 - 2(m - 2a)y = 0$

よって $y(y - 2(m - 2a)) = 0$

ゆえに $y = 0, 2(m - 2a)$

円 C と放物線 P が 1 点のみを共有するのは、

$$2(m - 2a) \leq 0 \text{ または } 2(m - 2a) \geq 2m$$

のときである。

$$2(m - 2a) \leq 0 \text{ から } m \leq 2a$$

$$2(m - 2a) \geq 2m \text{ から } a \leq 0 \text{ これは } a > 0 \text{ に反する。}$$

$$\text{したがって } 0 < m \leq 2a$$

8

解答 (1) $\sqrt{85} - 2$ (2) $\frac{1}{4}$

解説

(1) 円の中心を C とする。

点 A は円の外側にあるから $AP + CP \geq AC$
等号が成り立つのは、線分 AC 上に点 P があるときである。

$$CP = 2 \text{ (円の半径),}$$

$$AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{85}$$

であるから

$$AP \geq AC - CP = \sqrt{85} - 2$$

よって、求める最短距離は $\sqrt{85} - 2$

(2) 円の中心を O とする。

与えられた円と直線は共有点をもたないから、点 Q

は円の外側にあり $OP + PQ \geq OQ$

$OP = 1$ であるから $PQ \geq OQ - 1$

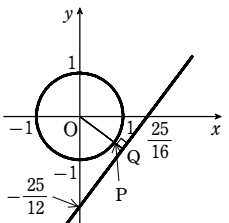
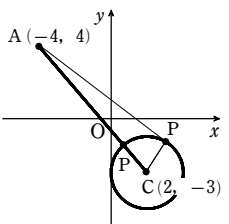
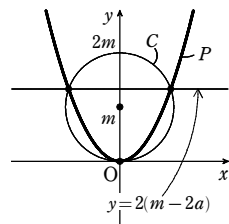
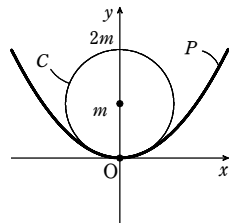
よって、線分 PQ の長さが最小となるのは、線分 OQ の長さが最小となるときである。

点 O と直線 $16x - 12y = 25$ の距離を d とすると

$$d = \frac{|-25|}{\sqrt{16^2 + (-12)^2}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

よって、求める距離 PQ の最小値は

$$d - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$



9

解答 弦の長さ $\sqrt{14}$, 弦の中点の座標 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

解説

円 ② の中心 $(0, 0)$ と直線 ① の距離を d とすると

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

円 ② の半径は 2 であるから、弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2 = 2^2 - d^2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

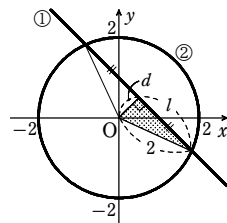
$$l > 0 \text{ であるから } l = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

よって、弦の長さは $2l = \sqrt{14}$

また、弦の中点は、円 ② の中心 $(0, 0)$ から直線 ① に下ろした垂線と、直線 ① との交点である。

この垂線の方程式は $y = x \dots\dots ③$ ①, ③ を解くと $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

よって、弦の中点の座標は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



10

解答 (1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

(2) $x=1, x+2\sqrt{2}y-5-2\sqrt{2}=0, x-2\sqrt{2}y-5+2\sqrt{2}=0$

解説

(1) 円 C の方程式を変形すると $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

よって、円 C の中心は $(2, 1)$, 半径は 1

2 円 C, D の中心間の距離 d は

$$d = |2 - (-1)| = 3$$

円 D の半径を r とすると、円 C と円 D が外接するための条件は $d = 1 + r$

$$\text{よって } r = d - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{したがって、円 } D \text{ の方程式は } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

(2) 円 C 上の接点の座標を (x_1, y_1) とすると $(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 1 \dots\dots ①$

$$\text{接線の方程式は } (x_1 - 2)(x - 2) + (y_1 - 1)(y - 1) = 1 \dots\dots ②$$

$$\text{ゆえに } (x_1 - 2)x + (y_1 - 1)y - 2x_1 - y_1 + 4 = 0 \dots\dots ②'$$

直線 ② が円 D に接するための条件は、円 D の中心 $(-1, 1)$ と直線 ②' の距離が、

円 D の半径 2 に等しいことである。

$$\text{よって } \frac{|-(x_1 - 2) + (y_1 - 1) - 2x_1 - y_1 + 4|}{\sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2}} = 2$$

$$\text{① を代入して整理すると } |-3x_1 + 5| = 2$$

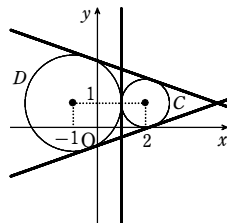
$$\text{すなわち } -3x_1 + 5 = 2 \text{ または } -3x_1 + 5 = -2$$

$$\text{これを解くと } x_1 = 1 \text{ または } x_1 = \frac{7}{3}$$

$$x_1 = 1 \text{ のとき、① から } (y_1 - 1)^2 = 0 \text{ したがって } y_1 = 1$$

$$x_1 = 1, y_1 = 1 \text{ を② に代入して } x = 1$$

$$x_1 = \frac{7}{3} \text{ のとき、① から } \frac{1}{9} + (y_1 - 1)^2 = 1$$



ゆえに $(y_1 - 1)^2 = \frac{8}{9}$ よって $y_1 - 1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$x_1 = \frac{7}{3}, y_1 - 1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ を② に代入して

$$\frac{1}{3}(x - 2) \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}(y - 1) = 1$$

すなわち $x - 2 \pm 2\sqrt{2}(y - 1) = 3$ (複号同順)

以上から、求める共通接線の方程式は

$$x = 1, x + 2\sqrt{2}y - 5 - 2\sqrt{2} = 0, x - 2\sqrt{2}y - 5 + 2\sqrt{2} = 0$$

11

解答 (1) $x^2 + y^2 - 15x - 5y + 50 = 0$

(2) $(2, 4), (-3, -1)$

解説

(1) $k(3x + y - 20) + x^2 + y^2 - 50 = 0$ (k は定数) $\dots\dots ①$

とすると、① は、与えられた円と直線の交点を通る図形を表す。① が点 $(10, 0)$ を通るとして、① に $x = 10, y = 0$ を代入すると

$$10k + 50 = 0 \text{ ゆえに } k = -5$$

$$\text{① に代入して } -5(3x + y - 20) + x^2 + y^2 - 50 = 0$$

$$\text{整理すると } x^2 + y^2 - 15x - 5y + 50 = 0$$

これは円を表すから、求める方程式である。

(2) 円の方程式を k について整理すると

$$(x - y + 2)k + x^2 + y^2 - 2x - 16 = 0$$

この等式が k の恒等式となるための条件は

$$x - y + 2 = 0 \dots\dots ①, x^2 + y^2 - 2x - 16 = 0 \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② から } y \text{ を消去して } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{よって } (x - 2)(x + 3) = 0 \text{ ゆえに } x = 2, -3$$

$$\text{① から } x = 2 \text{ のとき } y = 4,$$

$$x = -3 \text{ のとき } y = -1$$

よって、求める 2 点の座標は $(2, 4), (-3, -1)$

12

$$\text{解答 } \begin{cases} 4x + 5y - 8 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x - 5y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x + 3 \geq 0$$

$$x - 5y - 2 \leq 0$$

解説

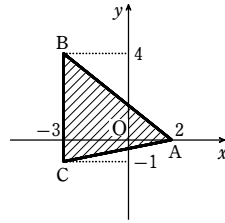
直線 AB の方程式は $y = \frac{4-0}{-3-2}(x-2)$ すなわち $y = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}$

直線 BC の方程式は $x = -3$

直線 CA の方程式は $y = \frac{-1-0}{-3-2}(x-2)$ すなわち $y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

章末問題A

A, B, C を頂点とする三角形の内部および周上は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。この斜線部分は、



直線 AB の下側、 直線 BC の右側、
直線 CA の上側、
の共通部分である。
よって、求める連立不等式は

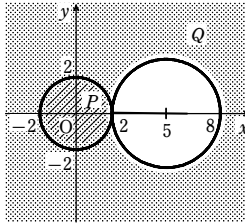
$$\begin{cases} y \leq -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5} \\ x \geq -3 \\ y \geq \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 4x + 5y - 8 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x - 5y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

13

解答 略

解説

$x^2 + y^2 < 4$ の表す領域を P,
 $x^2 + y^2 > 10x - 16$ の表す領域を Q とする。
 $x^2 + y^2 > 10x - 16$ から $(x-5)^2 + y^2 > 9$
P は円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部であり、Q は円
 $(x-5)^2 + y^2 = 9$ の外部である。
よって、P, Q は右の図のようになり、



$P \subset Q$

が成り立つ。

したがって、 $x^2 + y^2 < 4$ ならば $x^2 + y^2 > 10x - 16$ である。

章末問題B

1

解答 P, Q の座標は $(-2-2\sqrt{2}, -8-8\sqrt{2}), (-2+2\sqrt{2}, -8+8\sqrt{2})$
R の座標は $(-2, 0)$

解説

$y = -x^2 + 4, y = 4x$ から y を消去して
 $-x^2 + 4 = 4x$ すなわち $x^2 + 4x - 4 = 0$
これを解くと $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$x = -2 - 2\sqrt{2}$ のとき $y = -8 - 8\sqrt{2}$
 $x = -2 + 2\sqrt{2}$ のとき $y = -8 + 8\sqrt{2}$
したがって、2点 P, Q の座標は

$$(-2-2\sqrt{2}, -8-8\sqrt{2}), (-2+2\sqrt{2}, -8+8\sqrt{2})$$

$\triangle PQR$ の面積が最大になるのは、点 R から直線 PQ までの距離 d が最大になるときである。

直線 PQ の方程式は $y = 4x$ すなわち $4x - y = 0$

$R(t, -t^2 + 4)$ ($-2-2\sqrt{2} < t < -2+2\sqrt{2}$) とすると

$$d = \frac{|4t - (-t^2 + 4)|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|t^2 + 4t - 4|}{\sqrt{17}} = \frac{|(t+2)^2 - 8|}{\sqrt{17}}$$

よって、 d は $t = -2$ のとき最大になる。

このときの点 R の座標は $(-2, 0)$

2

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 3つの中線を AL, BM, CN とする。

また、L を原点に、直線 BC を x 軸にとると、各頂点の座標は

$$A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$$

と表すことができる。このとき

$$L(0, 0), M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right), N\left(\frac{a-c}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

よって、中線 AL, BM, CN を 2:1 に内分する点の座標はそれぞれ

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right), \left(\frac{-c+(a+c)}{2+1}, \frac{0+b}{2+1}\right),$$

$$\left(\frac{c+(a-c)}{2+1}, \frac{0+b}{2+1}\right) \quad \text{となり、一致する。}$$

すなわち、 $\triangle ABC$ の3つの中線は1点で交わる。

(2) 直線 AB を x 軸にとり、C を y 軸上にとると、各頂点の座標は、 $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$ と表すことができる。

ただし、 a, b は同時に 0 になることはなく、 $c \neq 0$ とする。

このとき $(2+AC^2)(2+BC^2) - 2AB^2$

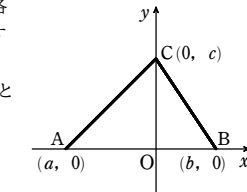
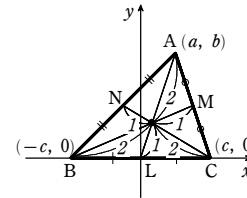
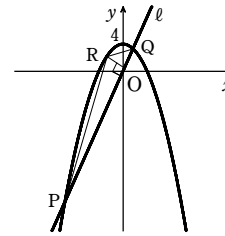
$$= (2+a^2+c^2)(2+b^2+c^2) - 2(a-b)^2$$

$$= c^4 + (a^2+b^2+4)c^2 + (a^2+2)(b^2+2) - 2(a-b)^2$$

$$= c^4 + (a^2+b^2+4)c^2 + a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 + 4 - 2(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= c^4 + (a^2+b^2+4)c^2 + a^2b^2 + 4ab + 4$$

$$= c^4 + (a^2+b^2+4)c^2 + (ab+2)^2$$



$c^4 > 0, (a^2+b^2+4)c^2 > 0, (ab+2)^2 \geq 0$ であるから

$$(2+AC^2)(2+BC^2) - 2AB^2 > 0$$

すなわち $2AB^2 < (2+AC^2)(2+BC^2)$

3

解答 (1) 順に $p \neq \frac{9}{2}, p = \frac{9}{2}$ かつ $q \neq -\frac{3}{2}, p = \frac{9}{2}$ かつ $q = -\frac{3}{2}$

(2) (ア) $a \neq 1$ (イ) $a = 1$ かつ $b \neq 1$ (ウ) $a = 1$ かつ $b = 1$

解説

(1) 連立方程式がただ1組の解をもつ条件は、方程式が表す2直線が平行でないことである。

$$\text{よって} \quad 2 \cdot p - 3 \cdot 3 \neq 0$$

$$\text{したがって} \quad p \neq \frac{9}{2}$$

また、連立方程式が解をもたない条件は、方程式が表す2直線が平行であり、かつ一致しないことである。

$$p = \frac{9}{2} \text{ のとき、2直線は } 2x + 3y = -1, 2x + 3y = \frac{2q}{3}$$

$$\text{よって} \quad -1 \neq \frac{2q}{3} \quad \text{すなわち} \quad q \neq -\frac{3}{2}$$

$$\text{したがって、求める条件は} \quad p = \frac{9}{2} \text{ かつ } q \neq -\frac{3}{2}$$

更に、連立方程式が無数の解をもつ条件は、方程式が表す2直線が一致することである。

$$\text{ゆえに、} p = \frac{9}{2} \text{ のとき} \quad -1 = \frac{2q}{3} \quad \text{すなわち} \quad q = -\frac{3}{2}$$

$$\text{したがって、求める条件は} \quad p = \frac{9}{2} \text{ かつ } q = -\frac{3}{2}$$

(2) 2直線がただ1つの共有点をもつための必要十分条件は、2直線が平行でないことである。

$$\text{したがって} \quad a(a-2) - 1 \cdot (-1) \neq 0$$

$$\text{よって} \quad a^2 - 2a + 1 \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad (a-1)^2 \neq 0$$

$$\text{したがって} \quad a \neq 1$$

また、2直線が共有点をもたないための必要十分条件は、2直線が平行であり、かつ一致しないことである。

$$a = 1 \text{ のとき、2直線は } x - y = 2b, x - y = b + 1$$

$$\text{よって} \quad 2b \neq b + 1 \quad \text{すなわち} \quad b \neq 1$$

$$\text{したがって} \quad a = 1 \text{ かつ } b \neq 1$$

更に、2直線が2つ以上の共有点をもつための必要十分条件は、2直線が一致することである。

$$\text{したがって} \quad a = 1 \text{ かつ } b = 1$$

4

解答 略

解説

章末問題B

点 $(b, \sqrt{a^2-b^2})$ における接線の方程式は

$$bx + \sqrt{a^2-b^2}y = a^2$$

この式で $y=0$ とすると、 $b \neq 0$ であるから

$$x = \frac{a^2}{b}$$

よって $P(\frac{a^2}{b}, 0)$

また、 $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$ とすると、

点 Q, R における接線の方程式は、それぞれ

$$x_1x + y_1y = a^2, x_2x + y_2y = a^2$$

点 (b, c) を通るから、それぞれ $bx_1 + cy_1 = a^2, bx_2 + cy_2 = a^2$

を満たし、これは2点 Q, R が直線 $bx + cy = a^2$ 上にあることを示している。

$bx + cy = a^2$ で $y=0$ とすると $x = \frac{a^2}{b}$

したがって、2点 Q, R を通る直線は点 P を通る。

5

解答 (1) $S(a) = \frac{\sqrt{2a(1-a)}}{a^2+1}$ (2) $a = 2 - \sqrt{3}$

解説

(1) 点 $P(0, 1)$ と直線 $y = a(x+1)$ すなわち $-ax + y - a = 0$ の距離を d とすると、 $0 < a < 1$ であるから

$$d = \frac{|-a \cdot 0 + 1 - a|}{\sqrt{(-a)^2 + 1^2}} = \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } QR &= 2\sqrt{1-d^2} = 2\sqrt{1 - \frac{(1-a)^2}{a^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } S(a) = \frac{1}{2} QR \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

(2) $\angle QPR = \theta$ とすると、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ であり

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

よって、 $\theta = 90^\circ$ のとき $S(a)$ は最大になる。

このとき、 $\triangle PQR$ は直角二等辺三角形になるから $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{したがって } \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } \sqrt{2}(1-a) = \sqrt{a^2+1}$$

$0 < a < 1$ より、両辺を2乗しても同値である。

$$2(1-2a+a^2) = a^2+1$$

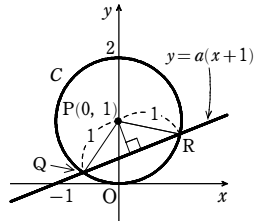
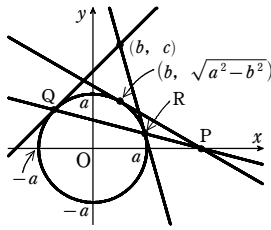
ゆえに $a^2 - 4a + 1 = 0$

$0 < a < 1$ であるから $a = 2 - \sqrt{3}$

6

解答 (1) 7 (2) $14 + 2\sqrt{13}$ (3) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ (4) 64

解説



不等式 $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ の表す領域 D は、中心が $(3, 2)$ で半径が1の円 C およびその内部である。

(1) $2x-1 = k$ とおくと $x = \frac{k+1}{2}$ ……①

x 軸に垂直な直線①が領域 D と共有点をもつとき、 x 軸との交点の x 座標 $\frac{k+1}{2}$ が最大となるのは、直線①が円 C に図のように接するときである。このとき、 k も最大となるから

$$\frac{k+1}{2} = 4 \quad \text{すなわち } k = 7$$

よって、求める最大値は 7

(2) $x^2 + y^2 = R$ ($R > 0$) ……②とおく。

原点を中心とする円②が領域 D と共有点をもつとき、円②の半径 \sqrt{R} が最大となるのは、円 C が円②に図のように内接するときである。このとき (円②の半径) = (中心間の距離) + (円 C の半径)

$$\text{よって } \sqrt{R} = \sqrt{3^2 + 2^2} + 1 = \sqrt{13} + 1$$

$$\text{ゆえに } R = (\sqrt{13} + 1)^2 = 14 + 2\sqrt{13}$$

このとき R も最大であるから、求める最大値は $14 + 2\sqrt{13}$

(3) $\frac{y}{x} = m$ とおくと $y = mx$ ……③

原点を通る直線③が領域 D と共有点をもつとき、傾き m が最大となるのは、直線③が円 C に図のように接するときである。このとき、円 C の中心 $(3, 2)$ と直線③の距離が円 C の半径1と一致するから

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\text{すなわち } |3m-2| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\text{両辺を2乗して } (3m-2)^2 = m^2+1$$

$$\text{整理して } 8m^2 - 12m + 3 = 0$$

$$\text{これを解いて } m = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 8 \cdot 3}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{よって、求める最大値は } \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

(4) $10x + 10y = n$ とおくと $y = -x + \frac{n}{10}$ ……④

傾き -1 の直線④が領域 D と共有点をもつとき、円 C の中心 $(3, 2)$ と直線④の距離は円 C の半径1以下であるから

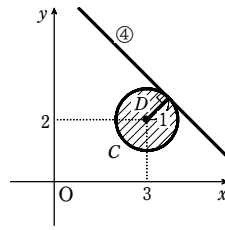
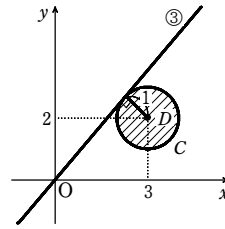
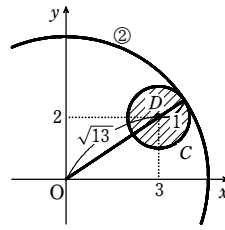
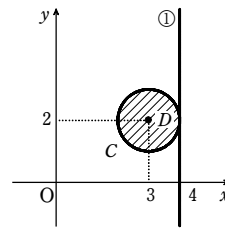
$$\frac{|10 \cdot 3 + 10 \cdot 2 - n|}{\sqrt{10^2 + 10^2}} \leq 1$$

$$\text{よって } |50 - n| \leq 10\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに } -10\sqrt{2} \leq 50 - n \leq 10\sqrt{2}$$

$$\text{すなわち } 50 - 10\sqrt{2} \leq n \leq 50 + 10\sqrt{2}$$

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ であるから、これを満たす最大の整数値は



$$n = 50 + 10 \cdot 1.4 = 64$$

7

解答 (1) [図] 境界線を含む

$$(2) x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5} \text{ のとき最小値 } \frac{4}{5}$$

解説

$$(1) 3x^2 + 7xy + 2y^2 - 9x - 8y + 6$$

$$= 2y^2 + (7x-8)y + 3(x-1)(x-2)$$

$$= \{y + 3(x-1)\}(2y + x - 2)$$

ゆえに、不等式は $(y + 3x - 3)(2y + x - 2) \leq 0$

$$\text{よって } \begin{cases} y \leq -3x + 3 \\ y \geq -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y \geq -3x + 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

したがって、領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

注意 図の円は、(2)のためのもので、(1)の答えには関係ない。

(2) $x^2 + y^2 = k$ ……①とおくと、 $k > 0$ のとき、①は、原点を中心とする半径 \sqrt{k} の円を表す。

$x^2 + y^2$ の値の範囲は、円①が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から、 k の値が最小となるのは、円①が直線 $3x + y - 3 = 0$ ……②、

$x + 2y - 2 = 0$ ……③のいずれかと接するときである。

$$\text{原点と直線②の距離は } \frac{|-3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{原点と直線③の距離は } \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 > \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \text{ であるから } \frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ゆえに、円①と直線③が接するとき、 k の値は最小となる。

直線③に垂直で原点を通る直線の方程式は $y = 2x$ ……④

$$\text{③, ④を連立して解くと } (x, y) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{よって } x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5} \text{ のとき最小値 } \frac{4}{5}$$

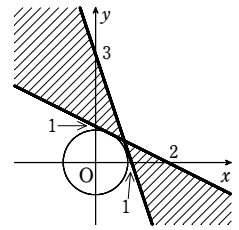
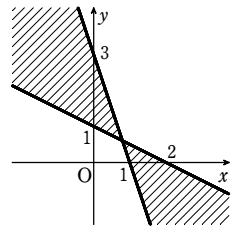
8

$$\text{解答 } 0 < c \leq \frac{3}{2}$$

解説

$$x^2 + y^2 - cy < 0 \text{ から } x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 < \frac{c^2}{4}$$

$$P = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 < \frac{c^2}{4} \right\}, Q = \{ (x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 < 4 \}$$



章末問題B

$x^2 + y^2 - cy < 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 < 4$ が成り立つための条件は、 $P \subset Q$ である。

$c > 0$ であるから、 $x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$ は円を表す。

求める条件は、円 $x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$ が、円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ の内部にあるか、または外接することである。

ゆえに、(中心間の距離) \leq (半径の差) により

$$\sqrt{(1-0)^2 + \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2} \leq \left|2 - \frac{c}{2}\right|$$

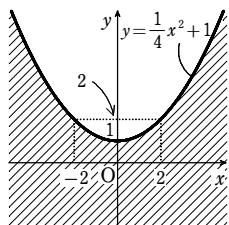
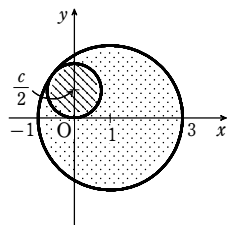
両辺は負でないから平方して $1 + \frac{c^2}{4} \leq \left(2 - \frac{c}{2}\right)^2$

これを解いて $c \leq \frac{3}{2}$

$c > 0$ であるから $0 < c \leq \frac{3}{2}$

9

- 〔解答〕 (1) $2tx - 4y - t^2 + 4 = 0$
 (2) 〔図〕 境界線を含む



〔解説〕

(1) $t = 0$ のとき、線分 PQ の垂直二等分線の方程式は $y = 1$

$t \neq 0$ のとき、直線 PQ の傾きは $-\frac{2}{t}$

また、線分 PQ の中点の座標は $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$

よって、線分 PQ の垂直二等分線の方程式は $y - 1 = \frac{t}{2}\left(x - \frac{t}{2}\right)$

すなわち $2tx - 4y - t^2 + 4 = 0 \dots\dots ①$

①に $t = 0$ を代入すると、 $y = 1$ が得られる。

よって、求める線分 PQ の垂直二等分線の方程式は $2tx - 4y - t^2 + 4 = 0$

〔別解〕 線分 PQ の垂直二等分線上の点を R(x, y) とする。

線分 PQ の垂直二等分線は、 $PR^2 = QR^2$ を満たす点 R の軌跡である。

よって、線分 PQ の垂直二等分線の方程式は $(x-t)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2$

整理すると $2tx - 4y - t^2 + 4 = 0$

(2) t について整理すると $t^2 - 2xt + 4y - 4 = 0 \dots\dots ②$

よって、線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域は、②を満たす実数 t が存在するような点(x, y)全体である。

②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-x)^2 - (4y-4) = x^2 - 4y + 4 \geq 0$$

から $y \leq \frac{1}{4}x^2 + 1$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。

10

- 〔解答〕 (1) 〔図〕 境界線を含む
 (2) $a = 2, b = 1$ のとき最大値 4,
 $a = 0, b = -1$ のとき最小値 -2

〔解説〕

(1) $f(x) = x^2 + ax + b$ とすると、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸で、軸は直線 $x = -\frac{a}{2}$ である。

よって、方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもち、すべての解の絶対値が1以下となるための条件は、その判別式を D とすると、次の4つが同時に成り立つことである。

$$D = a^2 - 4b \geq 0 \dots\dots ①$$

$$f(-1) = 1 - a + b \geq 0 \dots\dots ②$$

$$f(1) = 1 + a + b \geq 0 \dots\dots ③$$

$$\text{軸について } -1 \leq -\frac{a}{2} \leq 1 \dots\dots ④$$

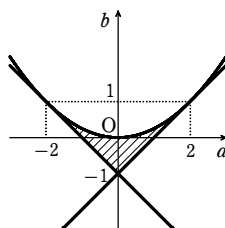
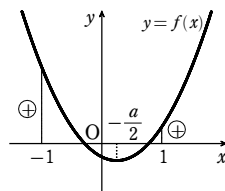
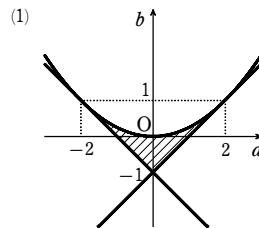
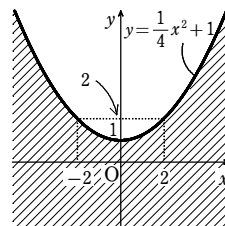
①から $b \leq \frac{a^2}{4}$ ②から $b \geq a - 1$

③から $b \geq -a - 1$ ④から $-2 \leq a \leq 2$

これらを同時に満たす点(a, b)全体を图示すると、右の図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。

(2) $a + 2b = k$ とおくと $b = -\frac{1}{2}a + \frac{k}{2} \dots\dots ⑤$



これは傾きが $-\frac{1}{2}$ 、 b 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線⑤が(1)で求めた領域と共有点をもつような k の最大値と最小値を求めればよい。

図から、直線⑤が点(2, 1)を通るとき、 k は最大で

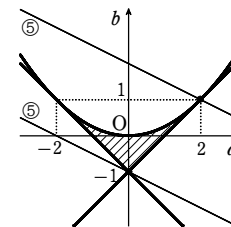
$$k = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

また、点(0, -1)を通るとき、 k は最小で

$$k = 0 + 2 \cdot (-1) = -2$$

したがって $a = 2, b = 1$ のとき最大値 4

$a = 0, b = -1$ のとき最小値 -2



11

〔解答〕 (1) $Q\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right), R\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$ (2) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$

〔解説〕

(1) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \dots\dots ①,$

$y = -3x + 8 \dots\dots ②, y = -2x - 4 \dots\dots ③,$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4} \dots\dots ④$ とする。

領域 D を图示すると、右図の斜線部分になる。ただし、境界線を含む。

$x + y = k$ とおくと、これは傾きが -1 、 y 切片が k の直線を表す。

$-3 < -1 < -\frac{1}{2}$ から、 $x = \frac{11}{5}, y = \frac{7}{5}$ のとき、 k は最大値 $\frac{18}{5}$ をとる。

$-2 < -1 < -\frac{1}{4}$ から、 $x = -\frac{9}{7}, y = -\frac{10}{7}$ のとき、 k は最小値 $-\frac{19}{7}$ をとる。

よって $Q\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right), R\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$

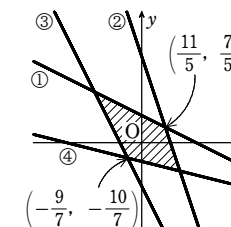
(2) $ax + by = k$ とおくと、これは傾きが $-\frac{a}{b} (< 0)$ 、 y 切片が $\frac{k}{b}$ の直線を表す。

また、 $b > 0$ であるから、 k が最大のとき $\frac{k}{b}$ も最大であり、 k が最小のとき $\frac{k}{b}$ も最小である。

点 Q でのみ最大値をとるから、 $-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 3 \dots\dots ⑤$

点 R でのみ最小値をとるから、 $-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4}$ より $\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2 \dots\dots ⑥$

⑤, ⑥から $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$



章末問題C

1

解答 $\frac{\sqrt{2}}{4}k$

解説

直線 AB の方程式は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

点 P(a, b) と直線 AB の距離を d とすると

$$d = \frac{\left| \frac{1}{a} \cdot a + \frac{1}{b} \cdot b - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

ここで、 $\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ であるから、

(相加平均) ≥ (相乗平均) により

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}} = \frac{2}{ab} \quad \dots\dots ①$$

また、 $a > 0, b > 0$ であるから、(相加平均) ≥ (相乗平均) により

$$k = a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

よって $k^2 \geq 4ab$ ゆえに $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{k^2} \quad \dots\dots ②$

したがって、①、②から $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{4}{k^2} = \frac{8}{k^2} \quad \dots\dots ③$

①の等号が成立するのは $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$ すなわち $a = b$ のときであり、②の等号が成立する

のは $a = b = \frac{k}{2}$ のときである。

よって、③の等号が成立するのも $a = b = \frac{k}{2}$ のときである。

したがって、 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ は $a = b = \frac{k}{2}$ のとき最小値 $\frac{8}{k^2}$ をとる。

このとき、d は最大となり、その最大値は $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{k^2}}} = \frac{k}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}k$

別解 直線 AB の方程式は $y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$

すなわち $bx + ay - ab = 0$

点 P(a, b) と直線 AB の距離を d とすると

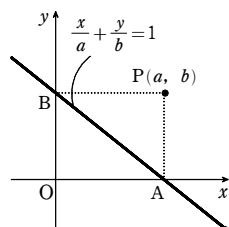
$$d = \frac{|b \cdot a + a \cdot b - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}} = \frac{ab}{\sqrt{k^2 - 2ab}}$$

k は定数であるから、ab が最大となるとき d は最大となる。

ここで $ab = a(k - a) = -a^2 + ak = -\left(a - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4}$

$0 < a < k$ であるから、ab は $a = b = \frac{k}{2}$ のとき最大値 $\frac{k^2}{4}$ をとる。

このとき、d は最大となり、その最大値は $d = \frac{\frac{k^2}{4}}{\sqrt{k^2 - 2 \cdot \frac{k^2}{4}}} = \frac{\frac{k^2}{4}}{4\sqrt{\frac{k^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}k$



2

解答 (前半) 略 (後半) 略

解説

(前半) 直線 BC の傾きは $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{bc}$

よって、A を通り直線 BC に垂直な直線 ℓ の方程式は $y - \frac{1}{a} = bc(x - a)$

すなわち $y = bcx - abc + \frac{1}{a} \quad \dots\dots ①$

同様に、B を通り直線 CA に垂直な直線 m の方程式は

$$y = cax - abc + \frac{1}{b} \quad \dots\dots ②$$

①、②から y を消去すると $bcx - abc + \frac{1}{a} = cax - abc + \frac{1}{b}$

よって $(a - b)cx = -\frac{a - b}{ab}$ $a \neq b$ であるから $x = -\frac{1}{abc}$

①に代入すると $y = bc\left(-\frac{1}{abc}\right) - abc + \frac{1}{a}$ よって $y = -abc$

ゆえに、垂心 H の座標は $\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$

$-abc = \frac{1}{-\frac{1}{abc}}$ であるから、垂心 H は曲線 K 上にある。

(後半) $-\frac{1}{abc} = h$ とおくと $H\left(h, \frac{1}{h}\right)$

(1) から、 $\triangle ABH$ の垂心の座標は $\left(-\frac{1}{abh}, -abh\right)$

h に $-\frac{1}{abc}$ を代入すると $\left(-\frac{1}{ab\left(-\frac{1}{abc}\right)}, -ab\left(-\frac{1}{abc}\right)\right)$

すなわち $\left(c, \frac{1}{c}\right)$

したがって、 $\triangle ABH$ の垂心は点 C に一致する。

3

解答 $m = \frac{3 - 2\sqrt{5}}{11}$

解説

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

また、直線 OB の方程式は $y = x$ 、直線 AB の方程式は $y = -x + 4$ であるから、直線 OB と直線 AB は垂直に交わる。

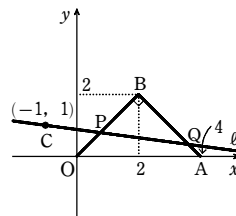
よって $\angle OBA = 90^\circ$

ℓ の方程式を変形すると $y = m(x + 1) + 1$

ゆえに、 ℓ は点 (-1, 1) を通り、傾きが m の直線である。

ここで、点 (-1, 1) を C とすると

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2 = \frac{1}{2} \triangle OAB$$



このことから、 ℓ が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分するとき、 ℓ は辺 AB と交わることがわかる。

ℓ が点 A を通るとき $0 = 4m + m + 1$ よって $m = -\frac{1}{5}$

ℓ が点 B を通るとき $2 = 2m + m + 1$ よって $m = \frac{1}{3}$

ゆえに $-\frac{1}{5} < m < \frac{1}{3} \quad \dots\dots ①$

①のとき、 ℓ と辺 OB の交点を P とし、 ℓ と辺 AB の交点を Q とする。

点 P の x 座標は、 $x = mx + m + 1$ を解いて $x = \frac{m+1}{1-m}$

点 Q の x 座標は、 $-x + 4 = mx + m + 1$ を解いて $x = \frac{3-m}{m+1}$

直線 OB の傾きは 1 であるから $BP = \sqrt{2} \left(2 - \frac{m+1}{1-m}\right) = \frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}$

直線 AB の傾きは -1 であるから $BQ = \sqrt{2} \left(\frac{3-m}{m+1} - 2\right) = \frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1}$

したがって $\triangle BPQ = \frac{1}{2} BP \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m} \cdot \frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1} = \frac{(1-3m)^2}{1-m^2}$

ℓ が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分するとき、 $\triangle BPQ = 2$ となるから $\frac{(1-3m)^2}{1-m^2} = 2$

分母を払って $(1-3m)^2 = 2(1-m^2)$

整理すると $11m^2 - 6m - 1 = 0$ これを解いて $m = \frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{11}$

①を満たすのは $m = \frac{3 - 2\sqrt{5}}{11}$

別解 [P, Q の x 座標を求めるところまでは同じ]

点 P, Q の x 座標を、それぞれ p, q とすると

$$BP : BO = (2 - p) : 2, \quad BQ : BA = (q - 2) : 2$$

直線 ℓ が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分するとき

$$\frac{\triangle BPQ}{\triangle BOA} = \frac{BP \cdot BQ}{BO \cdot BA} = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{(2-p)(q-2)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

ゆえに $(2-p)(q-2) = 2$

$p = \frac{m+1}{1-m}, q = \frac{3-m}{m+1}$ であるから、これを代入して

$$\left(2 - \frac{m+1}{1-m}\right) \left(\frac{3-m}{m+1} - 2\right) = 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(1-3m)^2}{(1-m)(1+m)} = 2$$

したがって、 $\frac{(1-3m)^2}{1-m^2} = 2$ が得られる。(以後同じ)

4

解答 $3 - 2\sqrt{2}$

解説

章末問題C

直線 AC の傾きは $-\frac{1}{t}$

$\angle ACO = \angle BCD$ より、直線 AC の傾きと直線 CD の傾きは絶対値が等しく、符号が異なるから、直線 CD の傾きは $\frac{1}{t}$ である。

直線 CD の方程式は $y = \frac{1}{t}(x-t)$ ……①

直線 AB の方程式は $y = -x+1$ ……②

点 D の y 座標は①と②の連立方程式の解である。

①の両辺を t 倍して $ty = x-t$ ……③

②+③から $(t+1)y = 1-t$

$t+1 \neq 0$ であるから $y = \frac{1-t}{t+1}$

三角形 ACD の面積を S とすると

$$S = \triangle ABO - \triangle ACO - \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot t \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (1-t) \cdot \frac{1-t}{t+1} = \frac{1}{2} \left[1 - t - \frac{(1-t)^2}{t+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-t^2 - (1-2t+t^2)}{t+1} = \frac{t-t^2}{t+1} = -t + 2 - \frac{2}{t+1}$$

$$= 3 - \left(t+1 + \frac{2}{t+1} \right)$$

$t+1 > 0$, $\frac{2}{t+1} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係より

$$S \leq 3 - 2\sqrt{(t+1) \cdot \frac{2}{t+1}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

等号は、 $0 < t < 1$ かつ $t+1 = \frac{2}{t+1}$ すなわち $t = \sqrt{2} - 1$ のとき成り立つ。

したがって、三角形 ACD の面積は $t = \sqrt{2} - 1$ のとき最大値 $3 - 2\sqrt{2}$ をとる。

5

【解答】 (1) $\frac{1}{a}$ (2) $\frac{PR}{QR} = a$ (3) 順に $\left(\frac{2a}{a^2+1}, \pm \frac{a^2-1}{a^2+1} \right), \frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

【解説】

(1) P から C へ引いた 2 本の接線の接点のうち、1 つを A とする。

$\triangle OAP \sim \triangle OQA$ より $OP : OA = OA : OQ$

よって $a : 1 = 1 : OQ$ ゆえに $OQ = \frac{1}{a}$

したがって、点 Q の x 座標は $\frac{1}{a}$

(2) 点 R の座標を (s, t) とする。

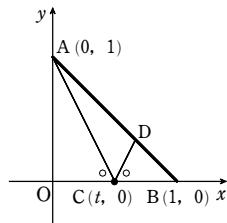
点 R は円 C 上の点であるから $s^2 + t^2 = 1$ ……①

ここで $PR^2 = (s-a)^2 + t^2 = s^2 + t^2 - 2as + a^2$

①を代入して $PR^2 = a^2 - 2as + 1$ ……②

また $QR^2 = \left(s - \frac{1}{a}\right)^2 + t^2 = s^2 + t^2 - \frac{2s}{a} + \frac{1}{a^2}$

①を代入して $QR^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2s}{a} + 1 = \frac{1}{a^2}(a^2 - 2as + 1)$



よって $\frac{PR^2}{QR^2} = a^2$ $a > 1$ より $\frac{PR}{QR} = a$

したがって、 $\frac{PR}{QR}$ は R によらず一定である。

(3) $\angle PRQ = 90^\circ$ より、 $\triangle PQR$ について三平方の定理を用いると

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2 \quad \text{よって} \quad QR^2 \left[\left(\frac{PR}{QR} \right)^2 + 1 \right] = PQ^2$$

(2) より $\frac{1}{a^2}(a^2 - 2as + 1)(a^2 + 1) = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$

展開して整理すると $as + \frac{s}{a} - 2 = 0$ ゆえに $s = \frac{2a}{a^2+1}$

これを①に代入して $\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 + t^2 = 1$

よって $t^2 = \frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}$ ゆえに $t = \pm \frac{a^2-1}{a^2+1}$

したがって、点 R の座標は $\left(\frac{2a}{a^2+1}, \pm \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

また、線分 PR の長さは②から $PR = \sqrt{a^2 - 2a \cdot \frac{2a}{a^2+1} + 1} = \frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

6

【解答】 (1) $a = -3t+2$, $b = \sqrt{-8t^2+8t}$, $0 < t < 1$ (2) $t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

【解説】

(1) O(0,0), A(1,0), P(a,b) とする。

円 C_3 が円 C_1 に内接するから $0 < t < 2$ ……①

OP = 2-t であるから

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2-t \quad \text{……②}$$

円 C_3 が円 C_2 に外接するから $AP = 1+t$

よって $\sqrt{(a-1)^2+b^2} = 1+t$ ……③

①のとき、②、③の両辺は正であるから、それぞれ
の両辺を 2 乗しても同値である。

②から $a^2+b^2 = (2-t)^2$ ……④

③から $(a-1)^2+b^2 = (1+t)^2$ ……⑤

④、⑤から、b を消去すると $2a-1 = -6t+3$ したがって $a = -3t+2$

④に代入すると $(-3t+2)^2+b^2 = (2-t)^2$ ゆえに $b^2 = -8t^2+8t$

b は正の実数であるから $-8t^2+8t > 0$ すなわち $-8t(t-1) > 0$

これを解いて $0 < t < 1$ ……⑥

t がとりうる値の範囲は、①と⑥の共通範囲を求めて $0 < t < 1$

このとき $b = \sqrt{-8t^2+8t}$

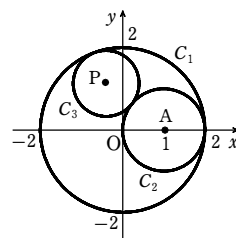
(2) $b = \sqrt{-8t^2+8t} = \sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

(1)の結果から、t は $0 < t < 1$ の範囲を動く。

よって、b は $t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

7

【解答】 (1) $8tx + (t^2-16)y - 8 = 0$ (2) 証明略, $x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$



【解説】

(1) 円 C_2 の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

$P_1(a, b)$, $P_2(c, d)$, $Q\left(t, \frac{t^2}{8}-2\right)$ とする。

点 P_1 における円 C_2 の接線の方程式は $ax + by = 1$

これが点 Q を通るから $at + b\left(\frac{t^2}{8}-2\right) = 1$ ……①

点 P_2 における円 C_2 の接線の方程式は $cx + dy = 1$

これが点 Q を通るから $ct + d\left(\frac{t^2}{8}-2\right) = 1$ ……②

①、②より、直線 $tx + \left(\frac{t^2}{8}-2\right)y = 1$ は 2 点 P_1, P_2 を通る。

したがって、直線 l の方程式は $tx + \left(\frac{t^2}{8}-2\right)y = 1$

すなわち $8tx + (t^2-16)y - 8 = 0$ ……③

(2) 直線 l が t の値にかかわらず、ある円に接するならば、その円は③で $t = 0, 4, -4, 8$ として得られる 4 直線に接する。

③より

$t = 0$ のとき $y = -\frac{1}{2}$ $t = 4$ のとき $x = \frac{1}{4}$

$t = -4$ のとき $x = -\frac{1}{4}$

$t = 8$ のとき $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

この 4 直線に接する円は $x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ だけである。

③より、この円の中心 $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ と直線 l の距離は

$$\frac{\left| -\frac{1}{4}(t^2-16) - 8 \right|}{\sqrt{64t^2 + (t^2-16)^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{4}(t^2+16) \right|}{\sqrt{(t^2+16)^2}} = \frac{1}{4}$$

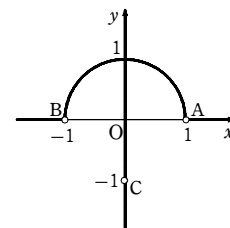
したがって、t の値によらず点 $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ と直線 l の距離は $\frac{1}{4}$ である。

ゆえに、直線 l は t の値によらず中心 $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ 、半径 $\frac{1}{4}$ の円に接し、その円の方

式は $x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

8

【解答】



章末問題C

【解説】

点Pが直線AC上または直線BC上(ただし, 点PはCと異なる)にあるとすると

$$\angle APC \cong \angle BPC$$

よって, $\triangle APC$ と $\triangle BPC$ が存在する。

$AP=a, BP=b, CP=c$ とおき, $\triangle APC$ と $\triangle BPC$ に余弦定理を用いると

$$\frac{a^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2ac} = \frac{b^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2bc}$$

ゆえに $b(a^2+c^2-2)=a(b^2+c^2-2)$

$$ab(a-b)-c^2(a-b)+2(a-b)=0$$

$$(a-b)(ab-c^2+2)=0$$

よって $a=b$ または $ab=c^2-2$

[1] $a=b$ のとき

点Pは線分ABの垂直二等分線上, すなわちy軸上を動く。ただし, 点PはCと異なるから, 点(0, -1)を除く。

[2] $ab=c^2-2$ のとき $P(x, y)$ とおくと

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x^2+(y+1)^2-2$$

よって $x^2+(y+1)^2 \geq 2$ ……① かつ

$$(x^2+1+y^2-2x)(x^2+1+y^2+2x)=((x^2+1+y^2)+2(y-1))^2 \dots\dots ②$$

②から $(x^2+1+y^2)^2-4x^2=(x^2+1+y^2)^2+4(y-1)(x^2+1+y^2)+4(y-1)^2$

ゆえに $(y-1)(x^2+y^2+1)+(y-1)^2+x^2=0$

$$(y-1)(x^2+y^2+1)+x^2+y^2+1-2y=0$$

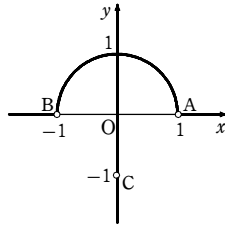
$$y(x^2+y^2+1)-2y=0$$

$$y(x^2+y^2-1)=0$$

これと①から

$$(y=0 \text{ または } x^2+y^2=1) \text{ かつ } x^2+(y+1)^2 \geq 2$$

[1], [2]と, 点PがA, Bと異なることから, 点Pの軌跡は右の図ようになる。



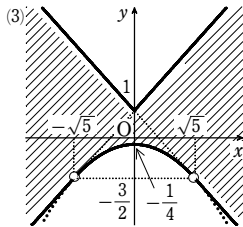
【9】

【解答】 (1) $-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$

(2) $2ax+4y-a^2+1=0$

(3) [図] 境界線は放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$

($-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$) を含み, 他は含まない。



【解説】

(1) 円Cの半径は2, CとDの中心間の距離は $\sqrt{a^2+4}$ であるから, CとDが異なる

2点で交わるための条件は $2-1 < \sqrt{a^2+4} < 2+1$

各辺を2乗して $1 < a^2+4 < 9$

したがって $-3 < a^2 < 5$ $-3 < a^2$ は常に成り立つ。

$a^2 < 5$ を満たすaの値の範囲を求めて $-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$

(2) 円Cの方程式は $x^2+(y+2)^2=4$ ……①

円Dの方程式は $(x-a)^2+y^2=1$ ……②

①-②から $2ax-a^2+4y+4=3$

すなわち $2ax+4y-a^2+1=0$ ……③

CとDの2つの交点の座標は, ①, ②を満たすから, ③も満たす。

したがって, ③が求める直線の方程式である。

(3) ③から $a^2-2xa-4y-1=0$ ……④

この2次方程式が $-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$ の範囲に解をもつための条件を求める。

$$f(a) = a^2 - 2xa - 4y - 1 \text{ とすると } f(a) = (a-x)^2 - x^2 - 4y - 1$$

[1] $x \leq -\sqrt{5}$ のとき

$$f(-\sqrt{5}) < 0 \text{ かつ } f(\sqrt{5}) > 0 \text{ から}$$

$$4+2\sqrt{5}x-4y < 0 \text{ かつ } 4-2\sqrt{5}x-4y > 0$$

すなわち $y > \frac{\sqrt{5}}{2}x+1$ かつ $y < -\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[2] $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ のとき

方程式④の判別式をDとすると, $D \geq 0$ かつ

$f(-\sqrt{5}) > 0$ または $f(\sqrt{5}) > 0$ から

$$\frac{D}{4} = x^2+4y+1 \geq 0 \text{ かつ}$$

$$(4+2\sqrt{5}x-4y > 0 \text{ または } 4-2\sqrt{5}x-4y > 0)$$

すなわち $y \geq -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$ かつ

$$\left(y < \frac{\sqrt{5}}{2}x+1 \text{ または } y < -\frac{\sqrt{5}}{2}x+1 \right)$$

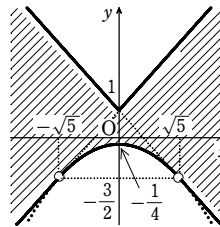
[3] $x \geq \sqrt{5}$ のとき $f(-\sqrt{5}) > 0$ かつ $f(\sqrt{5}) < 0$ から

$$4+2\sqrt{5}x-4y > 0 \text{ かつ } 4-2\sqrt{5}x-4y < 0$$

すなわち $y < \frac{\sqrt{5}}{2}x+1$ かつ $y > -\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

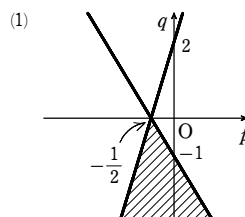
[1]~[3]から, 求める領域は右の図の斜線部分のようになる。ただし, 境界線は放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$

($-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$) を含み, 他は含まない。

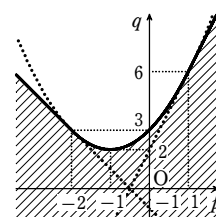


【10】

【解答】 (1) [図] 境界線を含む



(2) [図] 境界線を含む



【解説】

(1) 点(p, q)がD(a)の点であるとき

$$q \leq 2ap - a^2 + 2a + 2$$

よって $a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leq 0$

$f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とする。

$-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべてのaに対して, 不等式

$f(a) \leq 0$ が成り立つようなp, qの条件を求める。

$b=f(a)$ のグラフは下に凸の放物線であるから, 満たすべき条件は

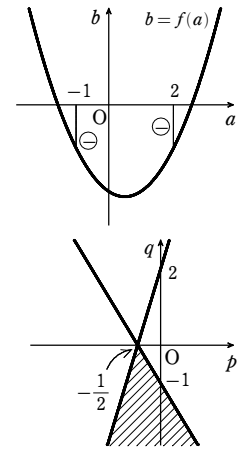
$$f(-1) \leq 0 \text{ かつ } f(2) \leq 0$$

すなわち $(-1)^2 - 2(p+1)(-1) + q - 2 \leq 0$

$$\text{かつ } 2^2 - 2(p+1)(2) + q - 2 \leq 0$$

整理すると $q \leq -2p - 1$ かつ $q \leq 4p + 2$

したがって, 求める点(p, q)の範囲は, 右の図の斜線部分である。ただし, 境界線を含む。



(2) (1)と同様に, $f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とする。

$-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかのaに対して, 不等式 $f(a) \leq 0$ が成り立つようなp, qの条件を求める。

ここで, 「 $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかのaに対して, 不等式 $f(a) \leq 0$ が成り立つ」ことと, 「 $-1 \leq a \leq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下である」ことは同値である。

よって, $-1 \leq a \leq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下となるp, qの条件を求めればよい。

$$f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2 = (a - (p+1))^2 - (p+1)^2 + q - 2$$

[1] $p+1 < -1$ すなわち $p < -2$ のとき

$f(a)$ の最小値は $f(-1)$

よって, 満たすべき条件は $f(-1) \leq 0$ ゆえに $q \leq -2p - 1$

[2] $-1 \leq p+1 \leq 2$ すなわち $-2 \leq p \leq 1$ のとき

$f(a)$ の最小値は $f(p+1)$

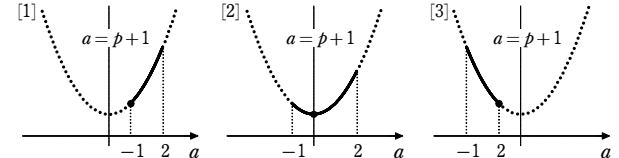
よって, 満たすべき条件は $f(p+1) \leq 0$

すなわち $-(p+1)^2 + q - 2 \leq 0$ ゆえに $q \leq (p+1)^2 + 2$

[3] $2 < p+1$ すなわち $1 < p$ のとき

$f(a)$ の最小値は $f(2)$

よって, 満たすべき条件は $f(2) \leq 0$ ゆえに $q \leq 4p + 2$



以上から, 求める点(p, q)の範囲は, 右の図の斜線部分である。

ただし, 境界線を含む。

