1

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2(2+h)}-\sqrt{2\cdot 2}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2(2+h)}-2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{\sqrt{2(2+h)}-2\}\{\sqrt{2(2+h)}+2\}}{h\{\sqrt{2(2+h)}+2\}}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)-4}{h\{\sqrt{2(2+h)}+2\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\{\sqrt{2(2+h)}+2\}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(2+h)}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(2)　求める接線の傾きは　　$f'(2)=\dfrac{1}{2}$

2

解答　$x=0$ で連続である，$x=0$ で微分可能でない

解説

$$f(x)=\begin{cases} x(x+2) & (x\geqq 0\text{ のとき})\\ -x(x+2) & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

ゆえに　　$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x(x+2)=0$

$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\{-x(x+2)\}=0$

よって　　$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

また　　$f(0)=0$

ゆえに　　$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

次に，$h\neq 0$ のとき

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(h+2)-0}{h}=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(h+2)-0}{h}=-2$$

$\lim_{h\to+0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ であるから，$f'(0)$ は存在しない。

よって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

3

解答　$\alpha=2$，$\beta=4$

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能となるための必要十分条件は，極限値 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ が存在することである。

$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続である。

よって　　$\lim_{x\to 2+0}(x^3+\alpha x)=\lim_{x\to 2-0}(\beta x^2-\alpha x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2+0}(x^3+\alpha x)=f(2)=8+2\alpha$，$\lim_{x\to 2-0}(\beta x^2-\alpha x)=4\beta-2\alpha$ であるから

$8+2\alpha=4\beta-2\alpha$　　　ゆえに　　$\beta=\alpha+2$　……①

また　　$\lim_{x\to 2+0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}(x^2+2x+4+\alpha)=\alpha+12$

①を用いて　　$\lim_{x\to 2-0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\{(\alpha+2)x+4+\alpha\}=3\alpha+8$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ が存在することから　　$\alpha+12=3\alpha+8$

これを解いて　　$\alpha=2$　　　①から　$\beta=4$

4

解答　(1)　$2f'(a)$　　(2)　$a^2f'(a)-2af(a)$

解説

(1)　$(\text{与式})=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)-\{f(a+2h)-f(a)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{4\times\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}-2\times\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\right\}$$

$$=4f'(a)-2f'(a)=2f'(a)$$

(2)　$x-a=h$ とおくと，$x\longrightarrow a$ のとき　$h\longrightarrow 0$

よって　　$(\text{与式})=\lim_{h\to 0}\dfrac{a^2f(a+h)-(a+h)^2f(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2f(a+h)-(a^2+2ah+h^2)f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2\{f(a+h)-f(a)\}-(2ah+h^2)f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{a^2\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-(2a+h)f(a)\right\}$$

$$=a^2f'(a)-2af(a)$$

別解　$(\text{与式})=\lim_{x\to a}\dfrac{a^2f(x)-a^2f(a)-\{x^2f(a)-a^2f(a)\}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{x^2-a^2}{x-a}f(a)\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(x+a)f(a)\right\}$$

$$=a^2f'(a)-2af(a)$$

5

解答　$-\dfrac{2}{x^3}$

解説

$y'=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}\right\}=\lim_{h\to 0}\dfrac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h(2x+h)}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

1

解答　(1)　$-\dfrac{2}{3}$　　(2)　$-\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{3(1+h)^2}-\dfrac{1}{3\cdot 1^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{3(1+h)^2}-\dfrac{1}{3}\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1-(1+h)^2}{3(1+h)^2}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2h-h^2}{3(1+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2-h}{3(1+h)^2}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

(2)　求める接線の傾きは　　$f'(1)=-\dfrac{2}{3}$

2

解答　略

解説

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{|(2+h)^2-4|-|2^2-4|}{h}=\dfrac{|h^2+4h|}{h}=\dfrac{|h(h+4)|}{h}=\dfrac{|h||h+4|}{h}$ ……①

ここで　　$\lim_{h\to+0}\dfrac{|h||h+4|}{h}=\lim_{h\to+0}\dfrac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to+0}(h+4)=4$

$\lim_{h\to-0}\dfrac{|h||h+4|}{h}=\lim_{h\to-0}\dfrac{-h(h+4)}{h}=\lim_{h\to-0}(-h-4)=-4$

であるから，$h\longrightarrow 0$ のときの①の極限はない。

よって，関数 $f(x)=|x^2-4|$ は $x=2$ で微分可能でない。

3

解答　$a=-6$，$b=9$

解説

関数 $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続であるから

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$　　　すなわち　　$\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$

よって　　$2^2+a\cdot 2+b=-2^2+2\cdot 2+1=1$

すなわち　　$2a+b+4=1$　　　ゆえに　　$b=-2a-3$

したがって　　$\lim_{h\to+0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to+0}\dfrac{(2+h)^2+a(2+h)+b-1}{h}$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{(2+h)^2+a(2+h)-2a-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{h^2+(a+4)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\{h+(a+4)\}=a+4,$$

$\lim_{h\to-0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to-0}\dfrac{-(2+h)^2+2(2+h)+1-1}{h}$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{-h^2-2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}(-h-2)=-2$$

よって，$f(x)$ が $x=2$ で微分可能であるための条件は　　$a+4=-2$

ゆえに　　$a=-6$　　　このとき　　$b=9$

4

解答　(1)　$3f'(a)$　　(2)　$5f'(a)$　　(3)　$3a^2f(a)-a^3f'(a)$　　(4)　$2af(a)+a^2f'(a)$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot3=3f'(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot3-\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot(-2)$

$=3f'(a)+2f'(a)=5f'(a)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3f(a)-a^3f(a)+a^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}\cdot f(a)-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot a^3$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)\cdot f(a)-f'(a)\cdot a^3$

$=3a^2f(a)-a^3f'(a)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(x)-a^2f(x)+a^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}\cdot f(x)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot a^2$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}(x+a)\cdot f(x)+f'(a)\cdot a^2$

$=2af(a)+a^2f'(a)$

別解　$x^2f(x)=g(x)$ とおくと　与式$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

よって　$\{x^2f(x)\}'=2xf(x)+x^2f'(x)$

したがって　$g'(a)=2af(a)+a^2f'(a)$

5

解答　(1) $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$　(2) $-\dfrac{2}{x^3}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

解説

(1) $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)-2}-\frac{1}{x-2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{(x-2)-\{(x+h)-2\}}{\{(x+h)-2\}(x-2)}\right]$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-1}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=-\frac{1}{(x-2)^2}$

(2) $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-2hx-h^2}{x^2(x+h)^2}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}=-\frac{2}{x^3}$

(3) $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)+1\}-(2x+1)}{h\{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

1

解答　1

解説

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to+0}1=1$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to-0}(h+1)=1$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1$

ゆえに，$f(x)$ の $x=0$ における微分係数は　1

2

解答　④

解説

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}0=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x^2=0$，$f(0)=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で連続である.

次に　$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{0}{h}=0$,

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to+0}h=0$

ゆえに　$\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

よって，$f(x)$ は微分可能である.

したがって，$f(x)$ は $x=0$ において連続であり，微分可能である.

以上から，正しいものは　④

3

解答　略

解説

$f(x)=x-|x|=\begin{cases}0 & (x\geqq0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{0-0}{h}=0$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{2h-0}{h}=2$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ すなわち $f'(0)$ は存在しない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

4

解答　2

解説

関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるためには，$f(x)$ は $x=1$ で連続であることが必 要である。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{ax+b}{x+1}=\frac{a+b}{2}$，$f(1)=\log1=0$　であるから　$\dfrac{a+b}{2}=0$

ゆえに　$b=-a$

$h<0$ のとき　$\displaystyle f(1+h)-f(1)=\frac{a(1+h)-a}{(1+h)+1}=\frac{ah}{2+h}$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{ah}{h(2+h)}=\lim_{h\to-0}\frac{a}{2+h}=\frac{a}{2}$

$h>0$ のとき　$f(1+h)-f(1)=\log(1+h)$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\log(1+h)}{h}=\lim_{h\to+0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}$

$=\log e=1$

よって，$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるための条件は　$\dfrac{a}{2}=1$

したがって　$a=2$　（このとき　$b=-2$）

5

解答　(1) $2f'(c)$　(2) $(p-q)f'(c)$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(c+2h)-f(c)}{\sin h}=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{h}{\sin h}\cdot\frac{f(c+2h)-f(c)}{2h}=2\cdot1\cdot f'(c)=2f'(c)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(c+ph)-f(c+qh)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{f(c+ph)-f(c)\}-\{f(c+qh)-f(c)\}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(c+ph)-f(c)}{ph}\cdot p-\frac{f(c+qh)-f(c)}{qh}\cdot q\right\}$

$=pf'(c)-qf'(c)=(p-q)f'(c)$

6

解答　$f'(x)=2|x|$

解説

$x<0$ のとき，$f(x)=x\cdot(-x)=-x^2$ であるから

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2xh-h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-2x-h)=-2x$

$x>0$ のとき，$f(x)=x\cdot x=x^2$ であるから

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x$

また　$\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(0+h)|0+h|-0|0|}{h}=\lim_{h\to0}|h|=0$

以上をまとめると　$f'(x)=2|x|$

1

解答 (1)　$x=0$ で微分可能でない，$x=0$ で連続である

(2)　$x=0$ で微分可能である，$x=0$ で連続である

解説

(1)　$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)}{h}=\sin\frac{1}{h}$$

$h\longrightarrow 0$ のとき，この極限は存在しないから，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

$x\fallingdotseq 0$ のとき　$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$ であり，$\lim_{x\to 0}|x|=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ が成り立つから，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2)　$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

① により，$g'(0)=0$ が成り立つから，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

したがって，$g(x)$ は $x=0$ で連続でもある。

2

解答 (1)　極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する

(2)　(イ) が正しい．反例：$f(x)=|x-a|$　　(3)　略

解説

(1)　極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する．

(2)　$f(x)=|x-a|$ において

$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a-0}(-x+a)=0$，$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}(x-a)=0$，$f(a)=0$

ゆえに　$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

よって，$f(x)$ は $x=a$ において連続である．

しかし

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}(-1)=-1,$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}1=1$$

よって，$f(x)$ は $x=a$ において微分可能でない．

したがって，(イ) が正しい．

(3)　$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin a$$

極限値が存在するから，微分可能である．

3

解答 (1)　$b=\frac{2}{d-1}-a(d+1)$　　(2)　$a=-\frac{1}{8}$，$b=\frac{5}{4}$，$c=-\frac{1}{8}$，$d=5$

解説

(1)　$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから，$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$ が成り立つ。

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x=1$$

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(ax^2+bx+c)=a+b+c$$

$$f(1)=1$$

よって　$a+b+c=1$　$\cdots\cdots ①$

さらに，$f(x)$ は $x=d$ で連続であるから，$\lim_{x\to d-0}f(x)=\lim_{x\to d+0}f(x)=f(d)$ が成り立つ。

$$\lim_{x\to d-0}f(x)=\lim_{x\to d-0}(ax^2+bx+c)=ad^2+bd+c$$

$$\lim_{x\to d+0}f(x)=\lim_{x\to d+0}3=3$$

$$f(d)=ad^2+bd+c$$

よって　$ad^2+bd+c=3$　$\cdots\cdots ②$

②－① より　$a(d^2-1)+b(d-1)=2$

$d>1$ より　$b=\frac{2}{d-1}-a(d+1)$　$\cdots\cdots ③$

(2)　$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

が成り立つ。

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{(1+h)-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{a(1+h)^2+b(1+h)+c-(a+b+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{2ah+ah^2+bh}{h}=\lim_{h\to +0}(2a+ah+b)=2a+b$$

よって　$2a+b=1$　$\cdots\cdots ④$

さらに，$f(x)$ は $x=d$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(d+h)-f(d)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(d+h)-f(d)}{h}$$

が成り立つ。

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(d+h)-f(d)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{a(d+h)^2+b(d+h)+c-(ad^2+bd+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{2adh+ah^2+bh}{h}=\lim_{h\to -0}(2ad+ah+b)$$

$$=2ad+b$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(d+h)-f(d)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{3-3}{h}=0$$

よって　$2ad+b=0$　$\cdots\cdots ⑤$　　⑤－④ より　$2a(d-1)=-1$

$d>1$ より　$a=-\frac{1}{2(d-1)}$　$\cdots\cdots ⑥$

また，$f(x)$ がすべての実数 x において微分可能であるとき，$f(x)$ はすべての実数 x において連続であるから，a，b，c，d は (1) の ①，②，③ も満たす。

⑥ を ③ に代入すると　$b=\frac{2}{d-1}+\frac{d+1}{2(d-1)}=\frac{d+5}{2(d-1)}$　$\cdots\cdots ⑦$

⑥，⑦ を ④ に代入すると　$2\left\{-\frac{1}{2(d-1)}\right\}+\frac{d+5}{2(d-1)}=1$

これを解くと　$d=5$　　よって　$a=-\frac{1}{2\cdot 4}=-\frac{1}{8}$，$b=\frac{5+5}{2\cdot 4}=\frac{5}{4}$

① より　$c=1-(a+b)=-\frac{1}{8}$　　これらは ② も満たす。

よって　$a=-\frac{1}{8}$，$b=\frac{5}{4}$，$c=-\frac{1}{8}$，$d=5$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y'=-\dfrac{7}{x^8}$　(2)　$y'=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$　(3)　$y'=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$　(4)　$y'=\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(5)　$y'=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

解説

(1)　$y=x^{-7}$ であるから　$y'=-7x^{-8}=-\dfrac{7}{x^8}$

(2)　$y=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}$ より

$y'=(-x^{-3})'+(3x^{-2})'=3x^{-4}-6x^{-3}=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$

(3)　$y=x^{\frac{3}{5}}$ であるから　$y'=\dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

(4)　$y=x\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{1+\frac{1}{4}}=x^{\frac{5}{4}}$ であるから　$y'=\dfrac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\dfrac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}=\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

(5)　$y=x^{-\frac{3}{2}}$ であるから

$y'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}=-\dfrac{3}{2x^{2+\frac{1}{2}}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$

解答　$y'=8x^3-2x$

解説

$y'=(x^2+1)'(2x^2-3)+(x^2+1)(2x^2-3)'=2x(2x^2-3)+(x^2+1)\cdot 4x=4x^3-6x+4x^3+4x$

$=8x^3-2x$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y'=-\dfrac{2}{(2x-1)^2}$　(2)　$y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

解説

(1)　$y'=-\dfrac{(2x-1)'}{(2x-1)^2}=-\dfrac{2}{(2x-1)^2}$

(2)　$y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$6x(x^2+1)^2$　(2)　$-\dfrac{4}{(2x-3)^3}$　(3)　$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(4)　$\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

解説

(1)　$y'=3(x^2+1)^2\cdot(x^2+1)'=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$

(2)　$y=(2x-3)^{-2}$ であるから

$y'=-2(2x-3)^{-3}\cdot(2x-3)'=-2(2x-3)^{-3}\cdot 2=-\dfrac{4}{(2x-3)^3}$

(3)　$y'=\dfrac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

(4)　$y'=(\sqrt[4]{2x+1})'=\left\{(2x+1)^{\frac{1}{4}}\right\}'=\dfrac{1}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}-1}(2x+1)'=\dfrac{1}{4}(2x+1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2$

$=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$　(2)　$\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$y=x^3$ の逆関数は，$x=y^3$ を満たす。

よって　$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(2)　$y=g(x)$ とすると，条件から　$x=y^3+3y$ ……①　が満たされる。

①から　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2+3}$

$x=0$ のとき　$y^3+3y=0$　すなわち　$y(y^2+3)=0$

$y^2+3>0$ であるから　$y=0$　したがって　$g'(0)=\dfrac{1}{3\cdot 0^2+3}=\dfrac{1}{3}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y'=-\dfrac{5}{x^6}$　(2)　$y'=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$　(3)　$y'=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$　(4)　$\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(5)　$-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$　(6)　$\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

解説

(1)　$y'=(x^{-5})'=-5x^{-6}=-\dfrac{5}{x^6}$

(2)　$y'=(-x^{-3})'+(3x^{-2})'=3x^{-4}-6x^{-3}=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$

(3)　$y=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ より

$y'=(x)'+(x^{-1})'+(x^{-2})'=1-x^{-2}-2x^{-3}=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

(4)　$y'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(5)　$y'=\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

(6)　$y'=\left(x^{\frac{5}{3}}\right)'=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y'=12x-1$　(2)　$y'=12x^3+8x$　(3)　$y'=4x^3+6x^2+2x$

(4)　$y'=8x^3+9x^2+2x+1$

解説

(1)　$y'=(2x-1)'(3x+1)+(2x-1)(3x+1)'=2(3x+1)+(2x-1)\cdot 3$

$=6x+2+6x-3=12x-1$

(2)　$y'=(x^2+1)'(3x^2+1)+(x^2+1)(3x^2+1)'=2x(3x^2+1)+(x^2+1)\cdot 6x$

$=6x^3+2x+6x^3+6x=12x^3+8x$

(3)　$y'=(x^2+x+1)'(x^2+x-1)+(x^2+x+1)(x^2+x-1)'$

$=(2x+1)(x^2+x-1)+(x^2+x+1)(2x+1)$

$=(2x+1)\{(x^2+x-1)+(x^2+x+1)\}$

$=(2x+1)(2x^2+2x)=4x^3+6x^2+2x$

(4)　$y'=(2x^2-x+1)'(x^2+2x+1)+(2x^2-x+1)(x^2+2x+1)'$

$=(4x-1)(x^2+2x+1)+(2x^2-x+1)(2x+2)$

$=(4x^3+7x^2+2x-1)+(4x^3+2x^2+2)$

$=8x^3+9x^2+2x+1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{(x+1)^2}$　(2)　$\dfrac{6}{(x+3)^2}$　(3)　$-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$　(4)　$-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

(5)　$-\dfrac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$　(6)　$\dfrac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

解説

(1)　$y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2x)'(x+3)-2x(x+3)'}{(x+3)^2}=\dfrac{2\cdot(x+3)-2x\cdot1}{(x+3)^2}=\dfrac{6}{(x+3)^2}$

(3) $y'=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

(5) $y'=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\dfrac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$

(6) $y'=\dfrac{(x^3-4x+1)'(x-2)-(x^3-4x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{(3x^2-4)(x-2)-(x^3-4x+1)\cdot1}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

4

解答　(1) $3(x-3)^2$　(2) $4x(x^2-2)$　(3) $-\dfrac{6x}{(x^2-2)^4}$

(4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$　(5) $-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}$　(6) $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

解説

(1) $y'=3(x-3)^2(x-3)'=3(x-3)^2\cdot1=3(x-3)^2$

(2) $y'=2(x^2-2)(x^2-2)'=2(x^2-2)\cdot2x=4x(x^2-2)$

(3) $y=(x^2-2)^{-3}$ であるから

$y'=-3(x^2-2)^{-4}(x^2-2)'=-\dfrac{3}{(x^2-2)^4}\cdot2x=-\dfrac{6x}{(x^2-2)^4}$

(4) $y=\sqrt{x^2+2x+3}=(x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+2x+3)'=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)$

$=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(5) $y=\sqrt[3]{2-x^2}=(2-x^2)^{\frac{1}{3}}$

よって　$y'=\dfrac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{1}{3}-1}(2-x^2)'=\dfrac{1}{3}(2-x^2)^{-\frac{2}{3}}(-2x)=-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(2-x^2)^2}}$

(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}=(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$

よって　$y'=-\dfrac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2+3)'=-\dfrac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot2x=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

5

解答　(1) $-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$　(2) $-\dfrac{4225}{48}$

解説

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}$ の逆関数は $x=\dfrac{1}{y^3}$ を満たす。

よって　$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{3}{y^4}$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{y^4}{3}=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

(2) $y=f^{-1}(x)$ とすると　$x=f(y)=\dfrac{1}{y^3+1}$

よって　$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{(y^3+1)'}{(y^3+1)^2}=-\dfrac{3y^2}{(y^3+1)^2}$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{(y^3+1)^2}{3y^2}$

$x=\dfrac{1}{65}$ のとき　$\dfrac{1}{y^3+1}=\dfrac{1}{65}$　ゆえに　$y^3=64$　したがって　$y=4$

このとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{(4^3+1)^2}{3\cdot4^2}=-\dfrac{4225}{48}$

1

解答　(1) $y'=3x^2+14x+12$　(2) $y'=12(3x^3-1)(3x^4-4x-1)^2$

(3) $y'=-\dfrac{4(6x^2+5)}{(2x^3+5x)^5}$　(4) $y'=-\dfrac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

解説

(1) $y'=(x^2+3x)'(x+4)+(x^2+3x)(x+4)'$

$=(2x+3)(x+4)+(x^2+3x)\cdot1=3x^2+14x+12$

(2) $y'=3(3x^4-4x-1)^2(3x^4-4x-1)'$

$=3(3x^4-4x-1)^2(12x^3-4)=12(3x^3-1)(3x^4-4x-1)^2$

(3) $y=(2x^3+5x)^{-4}$ であるから

$y'=-4(2x^3+5x)^{-5}(2x^3+5x)'$

$=-4(2x^3+5x)^{-5}(6x^2+5)=-\dfrac{4(6x^2+5)}{(2x^3+5x)^5}$

(4) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$y'=-\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}(x^2+x+1)'$

$=-\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}(2x+1)=-\dfrac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

2

解答　(1) $6(x-1)(x^2-2x-4)^2$　(2) $4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(3) $-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$　(4) $\dfrac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$　(5) $\dfrac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

解説

(1) $y'=3(x^2-2x-4)^2(x^2-2x-4)'=3(x^2-2x-4)^2(2x-2)$

$=6(x-1)(x^2-2x-4)^2$

(2) $y'=4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{(x-1)(x^2+2)\}'$

$=4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{1\cdot(x^2+2)+(x-1)\cdot2x\}$

$=4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(3) $y'=-\dfrac{\{(x^2+1)^3\}'}{\{(x^2+1)^3\}^2}=-\dfrac{3(x^2+1)^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^6}=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

別解　$y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}=(x^2+1)^{-3}$ と変形できるから

$y'=-3(x^2+1)^{-4}\cdot(x^2+1)'=-3(x^2+1)^{-4}\cdot2x=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

(4) $y'=\dfrac{\{(x+1)(x-3)\}'(x-5)^3-(x+1)(x-3)\{(x-5)^3\}'}{\{(x-5)^3\}^2}$

$=\dfrac{\{1\cdot(x-3)+(x+1)\cdot1\}(x-5)^3-(x+1)(x-3)\cdot3(x-5)^2\cdot1}{(x-5)^6}$

$=\dfrac{(x-5)^2\{(2x-2)(x-5)-3(x+1)(x-3)\}}{(x-5)^6}$

$=\dfrac{(2x^2-12x+10)-(3x^2-6x-9)}{(x-5)^4}=\dfrac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$

(5)　$y'=4\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'=4\cdot\dfrac{x^3}{(x^2+1)^3}\cdot\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　(ア)　$3x^2-8x+1$　　(イ)　$5x^4-8x^3+3x^2-4x-2$

解説

(1)　$(uvw)'=\{(uv)w\}'=(uv)'w+(uv)w'$

$$=(u'v+uv')w+uvw'$$

$$=u'vw+uv'w+uvw'$$

(2)　(ア)　$y'=(x+1)'(x-2)(x-3)+(x+1)(x-2)'(x-3)+(x+1)(x-2)(x-3)'$

$$=(x-2)(x-3)+(x+1)(x-3)+(x+1)(x-2)$$

$$=3x^2-8x+1$$

(イ)　$y'=(x^2-1)'(x^2+2)(x-2)+(x^2-1)(x^2+2)'(x-2)+(x^2-1)(x^2+2)(x-2)'$

$$=2x(x^2+2)(x-2)+(x^2-1)\cdot 2x\cdot(x-2)+(x^2-1)(x^2+2)$$

$$=5x^4-8x^3+3x^2-4x-2$$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$

解説

(解答1)　$x=y^2+y-1$ を y について整理すると　　$y^2+y-(x+1)=0$

これを y について解くと

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(x+1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{4x+5}}{2}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{4x+5}}{2}\right)'=\pm\dfrac{1}{2}\left\{(4x+5)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\pm\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(4x+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{4x+5}}$$

(解答2)　$x=y^2+y-1$ を y で微分すると　　$\dfrac{dx}{dy}=2y+1$

よって，$y\neq-\dfrac{1}{2}$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y+1}$　……①

$x=y^2+y-1$ を y について解くと　　$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{4x+5}}{2}$

① に代入して　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(-1\pm\sqrt{4x+5})+1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$

$\boxed{5}$

解答　$g(2)=1$，$g'(2)=\dfrac{1}{2}$

解説

$f(x)$ は $g(x)$ の逆関数であるから，$y=g(x)$ とおくと

$x=f(y)$　　　よって　$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$

また　　$g'(x)=\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{f'(y)}$　……①

$f(1)=2$ から　$g(2)=1$　　　① から　$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{1}$

解答　$n2^{n+1}-(n+1)2^n+1$

解説

与えられた等式の両辺を x で微分すると

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'$$

ここで　$\left(\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'=\dfrac{(n+1)x^n\cdot(x-1)-(x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

よって，$x\neq1$ のとき

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

この式に $x=2$ を代入すると，

$$1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-1}=\frac{n\cdot2^{n+1}-(n+1)2^n+1}{(2-1)^2}$$

$$=n2^{n+1}-(n+1)2^n+1$$

$\boxed{2}$

解答　$h'(x)=-\dfrac{8x(x^2-1)}{(x^2-x+1)^3}$

解説

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$，　$g'(x)=2x-2$

であるから

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=\{2f(x)-2\}f'(x)$$

$$=2\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}-1\right)\frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{8x(x^2-1)}{(x^2-x+1)^3}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$f(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，この極限値を，$f(x)$ の $x=a$ における微分係数という

(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$f(x)$ について，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，この極限値を，$f(x)$ の $x=a$ における微分係数という。

(2)　$\{f(x)g(x)\}'=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

ここで　　$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$

$$=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$$

$$=\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}$$

よって　　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能であるから

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　　$\displaystyle\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$

よって　　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3)　「$f(x)=x^n$ に対して　$f'(x)=nx^{n-1}$」……(＊)であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$f(x)=x^1$ すなわち $f(x)=x$ であるから　　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to0}1=1$

nx^{n-1} に $n=1$ を代入すると　　$1\cdot x^0=1$

よって，(＊) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊) が成り立つ，すなわち $g(x)=x^k$ に対して $g'(x)=kx^{k-1}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，$f(x)=x^{k+1}$ に対して，$f(x)=xg(x)$ であるから，積の微分公式より　　$f'(x)=(x)'g(x)+xg'(x)=1\cdot x^k+x\cdot kx^{k-1}=(k+1)x^k$

よって，$n=k+1$ のときも (＊) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して (＊) は成り立つ。

1

解答　(1) $\cos x-\sin x$　(2) $\tan^2 x$　(3) $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　(4) $\dfrac{4}{\cos^2 4x}$

(5) $-2x\sin x^2$　(6) $3\sin^2 x\cos x$　(7) $\dfrac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}$

解説

(1) $y'=\cos x-\sin x$

(2) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$

(3) $y'=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)'=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(4) $y'=\dfrac{(4x)'}{\cos^2 4x}=\dfrac{4}{\cos^2 4x}$

(5) $y'=-\sin x^2\cdot(x^2)'=-2x\sin x^2$

(6) $y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$

(7) $y'=4\tan^3 x\cdot(\tan x)'=\dfrac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}$

2

解答　(1) $e^x(\sin x+\cos x)$　(2) $5e^{5x}$　(3) $2e^{2x}+2xe^{x^2}$　(4) $4\cdot 3^{4x}\log 3$

解説

(1) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

(2) $y'=e^{5x}\cdot 5=5e^{5x}$

(3) $y'=e^{2x}\cdot 2+e^{x^2}\cdot 2x=2e^{2x}+2xe^{x^2}$

(4) $y'=(3^{4x}\log 3)\cdot 4=4\cdot 3^{4x}\log 3$

3

解答　(1) $y'=\log x+1$　(2) $y'=\dfrac{2x}{x^2+3}$　(3) $y'=\dfrac{1}{x\log 3}$

(4) $y'=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$　(5) $y'=\dfrac{2\log x}{x}$　(6) $y'=\dfrac{1}{2(x+1)}$

解説

(1) $y'=(x)'\log x+x\cdot(\log x)'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

(2) $y'=\dfrac{1}{x^2+3}\cdot(x^2+3)'=\dfrac{2x}{x^2+3}$

(3) $y'=\dfrac{1}{5x\log 3}\cdot(5x)'=\dfrac{5}{5x\log 3}=\dfrac{1}{x\log 3}$

(4) $y'=\dfrac{1}{\tan x}(\tan x)'=\dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

(5) $y'=2\log x\cdot(\log x)'=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\log x}{x}$

(6) $y=\dfrac{1}{2}\log(x+1)$ であるから　$y'=\dfrac{1}{2(x+1)}$

4

解答　(1) $-\dfrac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2(x^2+1)}}$　(2) $(\log x+1)x^x$

解説

(1) 両辺の絶対値の自然対数をとって

$$\log|y|=\frac{1}{3}\{4\log|x+2|-2\log|x|-\log(x^2+1)\}$$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

よって　$y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-2(4x^2-x+2)}{(x+2)x(x^2+1)}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$

$=-\dfrac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x^2(x^2+1)}}$

(2) $x>0$ であるから，$y>0$ である。

両辺の自然対数をとって　$\log y=x\log x$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}$

よって　$y'=y(\log x+1)=(\log x+1)x^x$

5

解答　(1) e　(2) 1　(3) 1　(4) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$ であるから

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e$$

(2) $f(x)=e^x$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$f'(x)=e^x$ であるから　$f'(0)=e^0=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(3) $f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x-\log 1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$

(4) $f(x)=\log x$ とすると

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\lim_{x\to 2}\frac{\log x-\log 2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから　$f'(2)=\dfrac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\log\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

6

解答　(1) $\dfrac{1}{6}$　(2) 0　(3) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x-\sin x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^3=0$

$f(x)=x-\sin x$，$g(x)=x^3$ とおくと

$$f'(x)=1-\cos x,\quad g'(x)=3x^2$$

また　$l=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2(1+\cos x)}$

$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+\cos x)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{6}$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=l=\frac{1}{6}$

別解　ロピタルの定理を繰り返し用いると，次のように計算できる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

(2) $f(x)=x^3$，$g(x)=e^x$ とおくと

$f'(x)=3x^2$，$g'(x)=e^x$，$f''(x)=6x$，$g''(x)=e^x$，

$f'''(x)=6$，$g'''(x)=e^x$ で　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$

(3) 同様にして

$$\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-2\sin(2x-1)$　(2)　$\dfrac{3}{\cos^2 3x}$　(3)　$2x\cos x^2$　(4)　$2\sin x\cos x$

(5)　$\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

解説

(1)　$y'=-\sin(2x-1)\cdot(2x-1)'=-2\sin(2x-1)$

(2)　$y'=\dfrac{(3x)'}{\cos^2 3x}=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

(3)　$y'=\cos x^2\cdot(x^2)'=\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2$

(4)　$y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x$

(5)　$y'=3\tan^2 x\cdot(\tan x)'=3\tan^2 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$e^x(\cos x-\sin x)$　(2)　$4^x\log 4$　(3)　$2e^{2x+1}$　(4)　$(1-3x)e^{-3x}$

(5)　$3^x\{(x+1)\log 3+1\}$　(6)　$-3a^{-3x}\log a$

解説

(1)　$y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

(2)　$y'=4^x\log 4$

(3)　$y'=e^{2x+1}\cdot(2x+1)'=e^{2x+1}\cdot 2=2e^{2x+1}$

(4)　$y'=1\cdot e^{-3x}+xe^{-3x}\cdot(-3x)'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=(1-3x)e^{-3x}$

(5)　$y'=1\cdot 3^x+(x+1)\cdot 3^x\log 3=3^x\{(x+1)\log 3+1\}$

(6)　$y'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3x)'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3)=-3a^{-3x}\log a$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$3x^2\log x+x^2$　(2)　$\dfrac{1}{x(\log x+1)^2}$　(3)　$\dfrac{1}{x}$　(4)　$\dfrac{2x}{x^2-2}$

(5)　$\dfrac{x}{x^2-1}$　(6)　$\dfrac{1}{x\log 3}$　(7)　$y'=\dfrac{3}{(3x+1)\log 10}$　(8)　$\dfrac{4(\log x)^3}{x}$

(9)　$\dfrac{2x}{x^2-4}$　(10)　$\dfrac{1}{x\log x}$　(11)　$-\dfrac{\tan x}{\log 2}$

解説

(1)　$y'=3x^2\log x+x^3\cdot\dfrac{1}{x}=3x^2\log x+x^2$

(2)　$y'=\dfrac{(\log x)'(\log x+1)-\log x(\log x+1)'}{(\log x+1)^2}$

$$=\frac{\frac{1}{x}(\log x+1)-(\log x)\cdot\frac{1}{x}}{(\log x+1)^2}=\frac{1}{x(\log x+1)^2}$$

(3)　$y'=\dfrac{1}{4x}\cdot 4=\dfrac{1}{x}$

(4)　$y'=\dfrac{1}{x^2-2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2-2}$

(5)　$y=\dfrac{1}{2}\log(x^2-1)$　よって　$y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\dfrac{x}{x^2-1}$

(6)　$y'=\dfrac{1}{4x\log 3}\cdot 4=\dfrac{1}{x\log 3}$

(7)　$y'=\dfrac{1}{(3x+1)\log 10}\cdot 3=\dfrac{3}{(3x+1)\log 10}$

(8)　$y'=4(\log x)^3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{4(\log x)^3}{x}$

(9)　$y'=\dfrac{1}{x^2-4}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(10)　$y'=\dfrac{1}{\log x}\cdot(\log x)'=\dfrac{1}{x\log x}$

(11)　$y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x\log 2}=\dfrac{-\sin x}{\cos x\log 2}=-\dfrac{\tan x}{\log 2}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$y'=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$　(2)　$y'=-\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(3)　$y'=2x^{\log x-1}\log x$　(4)　$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

解説

(1)　両辺の絶対値の自然対数をとって　$\log|y|=\dfrac{1}{3}(\log|x+1|+2\log|x-2|)$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)=\frac{3x}{3(x+1)(x-2)}=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$$

ゆえに　$y'=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}\cdot\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$

(2)　両辺の絶対値の自然対数をとって

$$\log|y|=2\log|x+1|-3\log|x+2|-4\log|x+3|$$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}=-\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

ゆえに　$y'=\left\{-\dfrac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right\}\cdot\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}=-\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

(3)　対数の真数は正であるから　$x>0$　よって　$y=x^{\log x}>0$

両辺の自然対数をとって　$\log y=(\log x)^2$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y}=2\log x\cdot(\log x)'=\dfrac{2\log x}{x}$

ゆえに　$y'=\dfrac{2\log x}{x}\cdot x^{\log x}=2x^{\log x-1}\log x$

(4)　$x>0$ であるから　$y=x^{\frac{1}{x}}>0$

両辺の自然対数をとって　$\log y=\dfrac{1}{x}\log x$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\left(\frac{1}{x}\right)'\log x+\frac{1}{x}\cdot(\log x)'=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

ゆえに　$y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}\cdot x^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\sin 2a$　(2)　$\log 3$　(3)　0　(4)　$\log a+1$

解説

(1)　$f(x)=\sin^2 x$ とおくと，$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\sin 2a$$

(2)　$f(x)=3^x$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$f'(x)=3^x\log 3$ であるから　$f'(0)=\log 3$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\log 3$

(3)　$f(x)=\log\cos x$ とすると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから　$f'(0)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x}=0$

(4)　$f(x)=\log x^x$ とすると　(与式)$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{\log x^x-\log a^a}{x-a}=f'(a)$

$f'(x)=(x\log x)'=\log x+1$ であるから　$f'(a)=\log a+1$

よって　(与式)$=\log a+1$

$\boxed{6}$

解答　(1)　3　(2)　$-\pi$　(3)　$-\dfrac{1}{3}$　(4)　-1　(5)　0

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(2x^2-3x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{4x-3}=\frac{3}{4-3}=3$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin\pi x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(\cos\pi x)\cdot\pi}{1}=\pi\cos\pi=-\pi$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2\cos^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\cos^2 0}=-\frac{1}{3}$$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)=-e^0=-1$$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

1

解答　(1)　$y'=9x^2+30x+7$　　(2)　$y'=8x^3-24x^2+26x-12$　　(3)　$y'=-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$

(4)　$y'=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$　　(5)　$y'=4(6x+1)(3x^2+x-1)^3$

(6)　$y'=-\dfrac{12x^2}{(2x^3+7)^3}$　　(7)　$y'=\dfrac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}\left(=\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}\right)$

(8)　$y'=\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}\left(=\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right)$　　(9)　$y'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\left(=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}\right)$

(10)　$y'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$　　(11)　$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+6)^3}}$

(12)　$y'=-\sin x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　(13)　$y'=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$　　(14)　$y'=3\sin^2 x\cos x$

(15)　$y'=\cos 2x$　　(16)　$y'=\dfrac{2x}{x^2-5}$　　(17)　$y'=\dfrac{3x^2}{(x^3-1)\log a}$

(18)　$y'=2(x+2)e^{x^2+4x}$　　(19)　$y'=-3a^{-3x}\log a$

解説

(1)　$y'=(x+5)'(3x^2+7)+(x+5)(3x^2+7)'=1\cdot(3x^2+7)+(x+5)\cdot 6x=9x^2+30x+7$

(2)　$y'=(2x^2+3)'(x^2-4x+5)+(2x^2+3)(x^2-4x+5)'=4x(x^2-4x+5)+(2x^2+3)(2x-4)$

$=8x^3-24x^2+26x-12$

(3)　$y'=-\dfrac{(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$

(4)　$y'=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(5)　$y'=4(3x^2+x-1)^3(3x^2+x-1)'=4(6x+1)(3x^2+x-1)^3$

(6)　$y=(2x^3+7)^{-2}$ から　　$y'=-2(2x^3+7)^{-3}(2x^3+7)'=\dfrac{-2}{(2x^3+7)^3}\cdot 6x^2=-\dfrac{12x^2}{(2x^3+7)^3}$

(7)　$y=\sqrt[8]{x}$ から　　$x=y^8$

よって　　$\dfrac{dx}{dy}=8y^7=8(\sqrt[8]{x})^7=8x^{\frac{7}{8}}$

ゆえに　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{8x^{\frac{7}{8}}}=\dfrac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}\left(=\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}\right)$

(8)　$y'=\dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}\left(=\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}\right)$

(9)　$y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$ であるから　　$y'=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\left(=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}\right)$

(10)　$y=\sqrt{x^2+3x+5}=(x^2+3x+5)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$y'=\dfrac{1}{2}(x^2+3x+5)^{-\frac{1}{2}}(x^2+3x+5)'=\dfrac{1}{2}(x^2+3x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x+3)$

$=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$

(11)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+6}}=(x^2+6)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$y'=-\dfrac{1}{2}(x^2+6)^{-\frac{1}{2}-1}(x^2+6)'=-\dfrac{1}{2}(x^2+6)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+6)^3}}$

(12)　$y'=-\sin x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(13)　$y'=\dfrac{(x^2)'}{\cos^2 x^2}=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

(14)　$y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=3\sin^2 x\cos x$

(15)　$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

別解　$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$　　よって　　$y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

(16)　$y'=\dfrac{(x^2-5)'}{x^2-5}=\dfrac{2x}{x^2-5}$

(17)　$y'=\dfrac{(x^3-1)'}{(x^3-1)\log a}=\dfrac{3x^2}{(x^3-1)\log a}$

(18)　$y'=e^{x^2+4x}\cdot(x^2+4x)'=2(x+2)e^{x^2+4x}$

(19)　$y'=a^{-3x}\log a\cdot(-3x)'=-3a^{-3x}\log a$

2

解答　(1)　$10x(x^2+1)^4$　　(2)　$\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$　　(3)　$\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

解説

(1)　$f'(x)=5(x^2+1)^4\cdot 2x=10x(x^2+1)^4$

(2)　$f'(t)=\dfrac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}=\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$

(3)　$f'(x)=\dfrac{\cos 3x\cdot 3}{\sin 3x}=\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

3

解答　(1)　$y'=\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^x(\log x+1)$　　(2)　$y'=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

(3)　$y'=f(x)^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

(4)　$y'=(1+x)^{\frac{1}{1+x}-2}\{1-\log(1+x)\}$　　(5)　$y'=\dfrac{(-7x+11)(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^6}$

(6)　$y'=-\dfrac{x^3+3x^2-2x+2}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)(x^2+2)^4}}$

解説

(1)　$y=(\sqrt{x})^x=x^{\frac{1}{2}x}$　$(x>0)$

両辺の自然対数をとると　　$\log y=\dfrac{1}{2}x\log x$

両辺を x で微分すると　　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2}(\log x+1)$

よって　　$y'=\dfrac{1}{2}y(\log x+1)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^x(\log x+1)$

(2)　$y=x^{\sin x}$　$(x>0)$ の両辺の自然対数をとると

$\log y=\sin x\log x$

両辺を x で微分すると　　$\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}$

よって　　$y'=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)y=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

別解　$y=e^{\log x^{\sin x}}=e^{\sin x\log x}$

よって　　$y'=e^{\sin x\log x}(\sin x\log x)'=\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$

(3)　両辺の自然対数をとると　　$\log y=g(x)\log f(x)$

両辺を x で微分すると　　$\dfrac{y'}{y}=g'(x)\log f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

よって　　$y'=f(x)^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

(4)　$x>0$ であるから $y>0$ であり，両辺の自然対数をとると

$\log y=\log(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$　　ゆえに　　$\log y=\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$

両辺を x で微分すると　　$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)-\log(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{1-\log(1+x)}{(1+x)^2}$

よって　　$y'=(1+x)^{\frac{1}{1+x}}\cdot\dfrac{1-\log(1+x)}{(1+x)^2}=(1+x)^{\frac{1}{1+x}-2}\{1-\log(1+x)\}$

(5)　両辺の絶対値の自然対数をとると

$\log|y|=2\log|x-1|+3\log|x-2|-5\log|x-3|$

両辺を x で微分して

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{5}{x-3}$

$=\dfrac{2(x-2)(x-3)+3(x-1)(x-3)-5(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{-7x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

よって　　$y'=\dfrac{(-7x+11)(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^6}$

別解　$y=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^{-5}$

$y'=2(x-1)(x-2)^3(x-3)^{-5}+(x-1)^2\cdot 3(x-2)^2(x-3)^{-5}+(x-1)^2(x-2)^3(-5)(x-3)^{-6}$

$=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{-6}\{2(x-2)(x-3)+3(x-1)(x-3)-5(x-1)(x-2)\}$

$=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{-6}(-7x+11)$ から。

(6)　両辺の絶対値の自然対数をとると

$\log|y|=\dfrac{1}{3}\{2\log|x+1|-\log|x|-\log(x^2+2)\}$

両辺を x で微分して

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x^2+2}\right)=\dfrac{-(x^3+3x^2-2x+2)}{3x(x+1)(x^2+2)}$

よって　　$y'=-\dfrac{x^3+3x^2-2x+2}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)(x^2+2)^4}}$

4

解答　$\dfrac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}$

解説

$x>0$ であるから両辺の絶対値の自然対数をとると，

$$\log|g(x)|=\frac{1}{2}\{3\log x+\log(x+2)-5\log(x+1)\}$$

両辺を x で微分して

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{5}{x+1}\right)=\frac{-x^2+6}{2x(x+1)(x+2)}$$

5

解答　(1)　(ア)　$\log 2$　　(イ)　$\sin\alpha+\alpha\cos\alpha$　　(2)　$2e$

解説

(1)　(ア)　$f(x)=2^x$ とすると　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-2^0}{x-0}=f'(0)$

$f'(x)=2^x\log 2$ であるから　　$f'(0)=2^0\log 2=\log 2$

したがって　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2$

(イ)　$f(x)=x\sin x$ とすると

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sin x-\alpha\sin\alpha}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}=f'(\alpha)\cdot 1=f'(\alpha)$$

$f'(x)=\sin x+x\cos x$ であるから　　(与式)$=\sin\alpha+\alpha\cos\alpha$

(2)　$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(h+1)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(2e^{h^2+1}\cdot\frac{e^{2h}-1}{2h}\right)$$

$$=2\lim_{h\to 0}e^{h^2+1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}=2e\cdot 1=2e$$

1

解答　$\dfrac{2}{x}$

解説

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x-\{\log(x-h)-\log x\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\log(x+h)-\log x}{h}+\frac{\log(x-h)-\log x}{-h}\right\}$$

$$=(\log x)'+(\log x)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$$

2

解答　6

解説

$$\frac{x(e^{3x}-1)}{1-\cos x}=\frac{x(1+\cos x)(e^{3x}-1)}{1-\cos^2 x}=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\cdot\frac{e^{3x}-1}{x}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=1^2=1$,　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$

また，$f(x)=e^{3x}$ とおくと，$f'(x)=3e^{3x}$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=3e^0=3$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{3x}-1)}{1-\cos x}=1\cdot 2\cdot 3=6$

3

解答　(1)　$T_1(x)=x$，$T_2(x)=2x^2-1$　　(2)　略　　(3)　略

(4)　$T_3(x)=4x^3-3x$，$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$

解説

(1)　$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ であるから　　$T_1(x)=x$

$T_2(\cos\theta)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ であるから　　$T_2(x)=2x^2-1$

(2)　$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の両辺を θ で微分して　　$T_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)=-n\sin n\theta$

よって　　$\sin n\theta=\dfrac{1}{n}T_n'(\cos\theta)\sin\theta$

(3)　$n\geqq 2$ のとき

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta=\cos\theta\cos(n-1)\theta-\sin\theta\sin(n-1)\theta$$

$$=\cos\theta\, T_{n-1}(\cos\theta)-\sin\theta\cdot\frac{1}{n-1}T_{n-1}'(\cos\theta)\sin\theta$$

$$=\cos\theta\, T_{n-1}(\cos\theta)+\frac{1}{n-1}(\cos^2\theta-1)T_{n-1}'(\cos\theta)$$

よって，$T_n(x)=xT_{n-1}(x)+\dfrac{1}{n-1}(x^2-1)T_{n-1}'(x)$ が成り立つ。

(4)　$T_2(x)=2x^2-1$ から　　$T_2'(x)=4x$

よって，(3) から

$$T_3(x)=xT_2(x)+\frac{1}{2}(x^2-1)T_2'(x)=x(2x^2-1)+\frac{1}{2}(x^2-1)\cdot 4x=4x^3-3x$$

ゆえに　　$T_3'(x)=12x^2-3$

よって，(3) から

$$T_4(x)=xT_3(x)+\frac{1}{3}(x^2-1)T_3'(x)=x(4x^3-3x)+\frac{1}{3}(x^2-1)(12x^2-3)=8x^4-8x^2+1$$

1

解答　(1)　$3(5x-3)(3x+1)(x-2)^2$　　(2)　$-\dfrac{3x^2-4x-1}{(x^2+1)^3}$

解説

(1)　$y'=2(3x+1)\cdot 3\cdot(x-2)^3+(3x+1)^2\cdot 3(x-2)^2\cdot 1$

$=3(3x+1)(x-2)^2\{2(x-2)+(3x+1)\}$

$=3(5x-3)(3x+1)(x-2)^2$

(2)　$$y'=\frac{1\cdot(x^2+1)^2-(x-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)\{(x^2+1)-4x(x-1)\}}{(x^2+1)^4}=-\frac{3x^2-4x-1}{(x^2+1)^3}$$

2

解答　(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$　　(2)　$\dfrac{4x^4+3x^2}{\sqrt{1+x^2}}$　　(3)　$\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

解説

(1)　$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$$

(2)　$$y'=3x^2\sqrt{1+x^2}+x^3\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{3x^2(1+x^2)+x^4}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{4x^4+3x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

(3)　$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

3

解答　(1)　$-4\sin 8x$　　(2)　$2x\sin 3x^2+6x^3\cos 3x^2$

(3)　$\cos^3 x-2\cos x$　　(4)　$-\dfrac{3\sin x+1}{(3+\sin x)^2}$　　(5)　$\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(6)　$\dfrac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$　　(7)　$-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$

解説

(1)　$y'=2\cos 4x\cdot(\cos 4x)'=2\cos 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)'$

$=-8\cos 4x\sin 4x=-4\sin 8x$

別解　$y=\dfrac{1+\cos 8x}{2}$　　よって　　$y'=-\dfrac{1}{2}\sin 8x\cdot(8x)'=-4\sin 8x$

(2)　$y'=(x^2)'\sin 3x^2+x^2(\sin 3x^2)'=2x\sin 3x^2+x^2\cdot(\cos 3x^2)\cdot(3x^2)'$

$=2x\sin 3x^2+x^2\cdot(\cos 3x^2)\cdot 6x=2x\sin 3x^2+6x^3\cos 3x^2$

(3)　$y'=(\sin x)'\cos^2 x+\sin x\cdot(\cos^2 x)'=\cos x\cos^2 x+\sin x\cdot\{2\cos x\cdot(\cos x)'\}$

$=\cos x\cos^2 x+\sin x\cdot\{2\cos x\cdot(-\sin x)\}=\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x$

$=\cos^3 x-2(1-\cos^2 x)\cos x=3\cos^3 x-2\cos x$

別解　$y=\sin x(1-\sin^2 x)=\sin x-\sin^3 x$

よって　　$y'=\cos x-3\sin^2 x\cdot(\sin x)'=\cos x-3\sin^2 x\cos x$

$=\cos x-3(1-\cos^2 x)\cos x=3\cos^3 x-2\cos x$

(4) $y'=\dfrac{(\cos x)'\cdot(3+\sin x)-\cos x\cdot(3+\sin x)'}{(3+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x\cdot(3+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(3+\sin x)^2}=\dfrac{-3\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(3+\sin x)^2}$

$=-\dfrac{3\sin x+1}{(3+\sin x)^2}$

(5) $y'=\dfrac{(1+\sin^2 x)'}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\dfrac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(6) $y'=\cos\sqrt{x^2+x+1}\cdot(\sqrt{x^2+x+1})'=\cos\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$=\dfrac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(7) $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}$

$=\dfrac{1}{\cos x\sin x}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$

ゆえに　$y=\left(\dfrac{2}{\sin 2x}\right)^2=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$

よって　$y'=-\dfrac{4(\sin^2 2x)'}{(\sin^2 2x)^2}=-4\cdot\dfrac{2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'}{\sin^4 2x}$

$=-4\cdot\dfrac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}{\sin^4 2x}=-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$

$\boxed{4}$

解答　(1) $2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$　(2) $\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

解説

(1) $y'=(e^{-2x})'\cos 2x+e^{-2x}(\cos 2x)'=e^{-2x}\cdot(-2)\cdot\cos 2x+e^{-2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2$

$=-2e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

(2) $y'=e^{x\log x}(x\log x)'=e^{x\log x}\{(x)'\log x+x(\log x)'\}$

$=e^{x\log x}\left(\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=(\log x+1)e^{x\log x}$

$\boxed{5}$

解答　(1) $y'=(\log x+1)e^{x\log x}$　(2) $y'=\dfrac{1}{\cos x}$　(3) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

解説

(1) $y'=e^{x\log x}(x\log x)'=e^{x\log x}\{(x)'\log x+x(\log x)'\}$

$=e^{x\log x}\left(\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=(\log x+1)e^{x\log x}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}\{\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{\cos x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos x}$

(3) $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+4})'}{x+\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$\boxed{6}$

解答　$x-1$

解説

$f(x)$ を $(x-3)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とすると，次の恒等式が成り立つ。

$f(x)=(x-3)^2Q(x)+px+q$　……①

この $f(x)$ を微分すると

$f'(x)=2(x-3)Q(x)+(x-3)^2Q'(x)+p$　……②

①，② に $x=3$ を代入すると　$f(3)=3p+q$，$f'(3)=p$

$f(3)=2$，$f'(3)=1$ であるから　$3p+q=2$，$p=1$

これを解くと　$p=1$，$q=-1$

したがって，求める余りは　$x-1$

$\boxed{7}$

解答　(1) $f(0)=0$，$f'(x)=a$　(2) $f(0)=1$，$f'(x)=af(x)$

解説

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ……① とする。

① に $x=0$ を代入すると　$f(y)=f(0)+f(y)$　よって　$f(0)=0$

また，① に $y=h$ を代入すると　$f(x+h)=f(x)+f(h)$

ゆえに　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$

(2) $f(x+y)=f(x)f(y)$ ……② とする。

② に $x=y=0$ を代入すると　$f(0)=f(0)f(0)$

よって　$f(0)\{f(0)-1\}=0$　$f(0)>0$ であるから　$f(0)=1$

また，② に $y=h$ を代入すると　$f(x+h)=f(x)f(h)$

ゆえに　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}$

$=f(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=f(x)\cdot f'(0)=af(x)$

$\boxed{1}$

解答　(1) $28x(x-2)^7(2x+3)^5$　(2) $(x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$

(3) $-\dfrac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$　(4) $4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(5) $\dfrac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$　(6) $\dfrac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

解説

(1) $y'=\{(x-2)^8\}'\cdot(2x+3)^6+(x-2)^8\cdot\{(2x+3)^6\}'$

$=8(x-2)^7\cdot(x-2)'\cdot(2x+3)^6+(x-2)^8\cdot 6(2x+3)^5\cdot(2x+3)'$

$=8(x-2)^7(2x+3)^6+12(x-2)^8(2x+3)^5$

$=4(x-2)^7(2x+3)^5\{2(2x+3)+3(x-2)\}$

$=4(x-2)^7(2x+3)^5\cdot 7x=28x(x-2)^7(2x+3)^5$

(2) $y'=2(x^2+1)\cdot 2x(x-3)^3+(x^2+1)^2\cdot 3(x-3)^2\cdot 1$

$=(x^2+1)(x-3)^2\{4x(x-3)+3(x^2+1)\}$

$=(x^2+1)(x-3)^2(7x^2-12x+3)$

(3) $y'=\dfrac{3(2x-1)^2\cdot 2(x^2+1)^2-(2x-1)^3\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2(2x-1)^2\{3(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^3}=-\dfrac{2(x+1)(x-3)(2x-1)^2}{(x^2+1)^3}$

(4) $y'=4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{(x-1)(x^2+2)\}'$

$=4\{(x-1)(x^2+2)\}^3\{1\cdot(x^2+2)+(x-1)\cdot 2x\}$

$=4(x-1)^3(x^2+2)^3(3x^2-2x+2)$

(5) $y'=\dfrac{\{(x+1)(x-3)\}'(x-5)^3-(x+1)(x-3)\{(x-5)^3\}'}{\{(x-5)^3\}^2}$

$=\dfrac{\{1\cdot(x-3)+(x+1)\cdot 1\}(x-5)^3-(x+1)(x-3)\cdot 3(x-5)^2\cdot 1}{(x-5)^6}$

$=\dfrac{(x-5)^2\{(2x-2)(x-5)-3(x+1)(x-3)\}}{(x-5)^6}$

$=\dfrac{(2x^2-12x+10)-(3x^2-6x-9)}{(x-5)^4}=\dfrac{-x^2-6x+19}{(x-5)^4}$

(6) $y'=4\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'=4\cdot\dfrac{x^3}{(x^2+1)^3}\cdot\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x^3(1-x^2)}{(x^2+1)^5}$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$　(2) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　(3) $\dfrac{1}{(x+4)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+4)}}$

(4) $\dfrac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$

解説

(1) $y'=1\cdot\sqrt{x^2+1}+x\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{1-x^2}=\dfrac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y'=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{(x+4)-(x+1)}{(x+4)^2}=\dfrac{1}{(x+4)\sqrt[3]{(x+1)^2(x+4)}}$

(4) $y'=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\right)(x-1)-x\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x^2-2x+x^2-x)(x-1)-x(x^2-2x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x(x^2-3x+3)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$

3

解答 (1) $3\cos^3x-2\cos x$　(2) $4\sin^3x\cos 5x$　(3) $\dfrac{1}{1-\sin x}$

(4) $\dfrac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$　(5) $\dfrac{(2x-1)\cos\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$　(6) $-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2x}}$

(7) $2x\sin(3x+5)+3x^2\cos(3x+5)$　(8) $\dfrac{2}{1+\sin 2x}$　(9) $\dfrac{2+\sin x}{(1-\sin x)^2}$

(10) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$　(11) $-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$　(12) $\dfrac{a^2\cos x}{\sqrt{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^3}}$

解説

(1) $y'=(\sin x)'\cos^2x+\sin x\cdot(\cos^2x)'$

$=\cos x\cdot\cos^2x+\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)$

$=\cos^3x-2\cos x\sin^2x=\cos^3x-2\cos x(1-\cos^2x)$

$=3\cos^3x-2\cos x$

(2) $y'=(\sin^4x)'\cos 4x+\sin^4x(\cos 4x)'$

$=4\sin^3x\cdot(\sin x)'\cdot\cos 4x+\sin^4x\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)'$

$=4\sin^3x\cos x\cos 4x-4\sin^4x\sin 4x=4\sin^3x(\cos x\cos 4x-\sin x\sin 4x)$

$=4\sin^3x\cos(x+4x)=4\sin^3x\cos 5x$

(3) $y'=\dfrac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x+(\sin^2x+\cos^2x)}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1}{1-\sin x}$

(4) $y'=\dfrac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x(1+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x+\sin x-(\cos^2x+\sin^2x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$

(5) $y'=\cos\sqrt{x^2-x+1}\cdot(\sqrt{x^2-x+1})'=\cos\sqrt{x^2-x+1}\cdot\dfrac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$=\dfrac{(2x-1)\cos\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

(6) $y'=\dfrac{(1+\cos^2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2x}}=\dfrac{2\cos x\cdot(\cos x)'}{2\sqrt{1+\cos^2x}}=\dfrac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2x}}=-\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos^2x}}$

(7) $y'=2x\cdot\sin(3x+5)+x^2\cdot\cos(3x+5)\cdot 3$

$=2x\sin(3x+5)+3x^2\cos(3x+5)$

(8) $y'=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x}=\dfrac{2}{1+\sin 2x}$

(9) $y'=\dfrac{-\sin x(1-\sin x)^2-\cos x\cdot 2(1-\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^4}$

$=\dfrac{-\sin x+2+2\sin x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{2+\sin x}{(1-\sin x)^2}$

(10) $y'=\dfrac{(\sin 2x)'}{2\sqrt{\sin 2x}}=\dfrac{\cos 2x\cdot 2}{2\sqrt{\sin 2x}}=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$

(11) $y'=\left\{\left(\dfrac{\tan^2x+1}{\tan x}\right)^2\right\}'=\left\{\left(\dfrac{1}{\sin x\cos x}\right)^2\right\}'=\left\{\left(\dfrac{2}{\sin 2x}\right)^2\right\}'$

$=\{4(\sin 2x)^{-2}\}'=4\{-2(\sin 2x)^{-3}\}\cos 2x\cdot 2=-\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$

(12) $y'=\left\{\sin x(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$

$=\cos x(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}$

$-\dfrac{1}{2}\sin x(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(b^2-a^2)\sin x\cos x$

$=a^2\cos x(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{-\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{a^2\cos x}{\sqrt{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^3}}$

4

解答 (1) $\dfrac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$　(2) $y'=-3e^{-3x}(\sin 3x-\cos 3x)$

(3) $\sin(e^x+1)+xe^x\cos(e^x+1)$　(4) $e^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\tan x+\dfrac{1}{\cos^2x}\right)$

(5) $-\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$

解説

(1) $y'=\dfrac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$

(2) $y'=(e^{-3x})'\sin 3x+e^{-3x}(\sin 3x)'=e^{-3x}\cdot(-3)\cdot\sin 3x+e^{-3x}\cdot\cos 3x\cdot 3$

$=-3e^{-3x}(\sin 3x-\cos 3x)$

(3) $y'=1\cdot\sin(e^x+1)+x\cos(e^x+1)\cdot(e^x+1)'=\sin(e^x+1)+xe^x\cos(e^x+1)$

(4) $y'=e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x\cdot\tan x+e^{\sin 2x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}=e^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\tan x+\dfrac{1}{\cos^2x}\right)$

(5) $y'=\dfrac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=\dfrac{-4e^xe^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}=-\dfrac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$

別解 $y=1+\dfrac{2e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1+\dfrac{2}{e^{2x}-1}$ であるから　$y'=-\dfrac{2\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=-\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

5

解答 (1) 1　(2) $-\dfrac{\log a}{x(\log x)^2}$　(3) $\dfrac{1}{(x-a)(x+a)}$　(4) $\dfrac{x}{x-1}$

(5) $\dfrac{5}{(3x+1)(2x-1)}$　(6) $\dfrac{2\cos x}{\sin x}$　(7) $\tan x$

(8) $-\dfrac{1}{x}\tan x-\dfrac{1}{x^2}\log|\cos x|$　(9) $\dfrac{2}{\cos x}$　(10) $\dfrac{1}{\sin x}$　(11) $\dfrac{2x}{x^4-1}$

(12) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(13) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}$　(14) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

解説

(1) $y=e^{\log x}$ から $\log y=\log x$　よって　$y=x$　したがって　$y'=1$

(2) $y=\dfrac{\log a}{\log x}$　よって　$y'=-\log a\cdot\dfrac{(\log x)'}{(\log x)^2}=-\dfrac{\log a}{x(\log x)^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{2a}(\log|x-a|-\log|x+a|)$

よって　$y'=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)=\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{2a}{(x-a)(x+a)}=\dfrac{1}{(x-a)(x+a)}$

(4) $y=\log e^x+\log(1-x)=x+\log(1-x)$

よって　$y'=1+\dfrac{1}{1-x}\cdot(-1)=\dfrac{x}{x-1}$

(5) $y=\log\left|\dfrac{3x+1}{2x-1}\right|=\log|3x+1|-\log|2x-1|$

よって　$y'=\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{2}{2x-1}=-\dfrac{5}{(3x+1)(2x-1)}$

(6) $y'=\dfrac{1}{\sin^2x}\cdot 2\sin x\cos x=\dfrac{2\cos x}{\sin x}$

(7) $y'=(-\log\cos x)'=-\dfrac{-\sin x}{\cos x}=\tan x$

(8) $y'=\dfrac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}\cdot x-(\log|\cos x|)\cdot 1}{x^2}=-\dfrac{1}{x}\tan x-\dfrac{1}{x^2}\log|\cos x|$

(9) $y=\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)$ であるから

$y'=\dfrac{1}{1+\sin x}(1+\sin x)'-\dfrac{1}{1-\sin x}(1-\sin x)'$

$=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{\cos x\{(1-\sin x)+(1+\sin x)\}}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\dfrac{2\cos x}{\cos^2x}=\dfrac{2}{\cos x}$

別解 $y'=\dfrac{1}{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)'=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\dfrac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{2\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\dfrac{2\cos x}{\cos^2x}=\dfrac{2}{\cos x}$

(10) $y=\dfrac{1}{2}\{\log(1-\cos x)-\log(1+\cos x)\}$ であるから

$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=\dfrac{\sin x}{2}\cdot\dfrac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\dfrac{\sin x}{1-\cos^2x}=\dfrac{\sin x}{\sin^2x}=\dfrac{1}{\sin x}$

(11) $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\{\log(x^2-1)-\log(x^2+1)\}$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}-\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right\}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{2x}{x^4-1}$

(12) $y'=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(13) $y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{(x+\sqrt{x^2-a^2})\log a}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\log a}$

(14) $y'=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)'$

$=\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\dfrac{\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot(\sqrt{1+e^x}+1)-(\sqrt{1+e^x}-1)\cdot\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{(\sqrt{1+e^x}+1)^2}$

$=\dfrac{e^x(\sqrt{1+e^x}+1)-e^x(\sqrt{1+e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}-1)(\sqrt{1+e^x}+1)\cdot 2\sqrt{1+e^x}}=\dfrac{2e^x}{e^x\cdot 2\sqrt{1+e^x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

$\boxed{6}$

解答　$2x-1$

解説

$f(x)=(x-1)^2g(x)+ax+b$ とおくと

$f'(x)=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x)+a$

条件から　$f(1)=a+b=1$，$f'(1)=a=2$

ゆえに　$a=2$，$b=-1$

よって，余りは　$2x-1$

$\boxed{7}$

解答　$f'(x)=a$，$f(x)=ax$

解説

$f(x+py)=f(x)+pf(y)$ ……① とする。

①に $y=h$ を代入して　　$f(x+ph)=f(x)+pf(h)$

また，①に $y=0$ を代入して　　$f(x)=f(x)+pf(0)$

$p\fallingdotseq 0$ であるから　　$f(0)=0$

よって　$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+ph)-f(x)}{ph}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$

ゆえに　$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int adx=ax+C$　（C は積分定数）

$f(0)=0$ であるから　$C=0$　　よって　$f(x)=ax$

$\boxed{1}$

解答　(1) $y'=2(2x-1)^2(5x^2-x+9)$　(2) $y'=\dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$　(3) $y'=-\dfrac{3x^2}{(x-1)^4}$

(4) $y'=-\dfrac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$　(5) $y'=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $y'=\dfrac{x+2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$　(7) $y'=4x-\dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

解説

(1) $y'=2x(2x-1)^3+(x^2+3)\cdot3(2x-1)^2\cdot2$

$=2(2x-1)^2\{x(2x-1)+3(x^2+3)\}=2(2x-1)^2(5x^2-x+9)$

(2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}=\dfrac{-5x+1}{(x+1)^2}+1$

よって　$y'=\dfrac{-5\cdot(x+1)^2-(-5x+1)\cdot2(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{-5(x+1)-2(-5x+1)}{(x+1)^3}=\dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$

(3) $y'=3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\cdot\dfrac{1\cdot(x-1)-x\cdot1}{(x-1)^2}=3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\cdot\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x-1)^4}$

(4) $y=(x-1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$y'=-\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}=-\dfrac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

(5) $y'=1\cdot\sqrt{1+x^2}+x\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot2x=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\dfrac{(1+x^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

(6) $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+x+1}-x\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{x(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)-(2x^2+x)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$=\dfrac{x+2}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(7) $y=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}=\dfrac{x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-(x^2-1)}$

$=2x^2-2x\sqrt{x^2-1}-1$

よって　$y'=4x-2\left\{1\cdot\sqrt{x^2-1}+x\cdot\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot2x\right\}$

$=4x-2\left(\sqrt{x^2-1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$=4x-2\cdot\dfrac{(x^2-1)+x^2}{\sqrt{x^2-1}}=4x-\dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

$\boxed{2}$

解答　(1) $y'=\dfrac{1}{1-\sin x}$　(2) $y'=\dfrac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}$　(3) $y'=\dfrac{x+xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

(4) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

解説

(1) $y'=\dfrac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{(-\sin x)\cdot(1-\sin x)-\cos x\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x+(\sin^2x+\cos^2x)}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1}{1-\sin x}$

参考　関数 $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ は，$1-\sin x\fallingdotseq0$ すなわち $x\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（$n$ は整数）において微分可能な関数である。

(2) $y'=(x+2)'\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)(\sqrt{x^2+2x+5})'$

$=1\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)\cdot\dfrac{(x^2+2x+5)'}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$

$=\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x^2+2x+5})^2+(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\dfrac{2x^2+5x+7}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

(3) $y'=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}-xe^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\dfrac{x+xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

(4) $y=\log\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}=\log\sqrt{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}=\log(\sqrt{1+x^2}+x)$ であるから

$y'=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\boxed{3}$

解答　$\dfrac{d}{dx}g(f(x))=\log(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

解説

$g(f(x))=\dfrac{1}{2}\{2x\log(x+\sqrt{x^2+1})\}=x\log(x+\sqrt{x^2+1})$ であるから

$\dfrac{d}{dx}g(f(x))=1\cdot\log(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$

$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{1}{2(2+\log2)}$

解説

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ から　　$h'(0)=f'(g(0))g'(0)$　……①

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$　……②,

$g(x)=1+\log\{1+f(x)\}=1+\log\{1+1+\log(1+x)\}=1+\log\{2+\log(1+x)\}$,

$g'(x)=\dfrac{1}{2+\log(1+x)}\cdot\dfrac{1}{1+x}$

よって　　$g(0)=1+\log 2$，$g'(0)=\dfrac{1}{2}$　……③

①，②，③から　　$h'(0)=f'(1+\log 2)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1+(1+\log 2)}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2(2+\log 2)}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$12x+17$　　(2)　$nx-n$

解説

(1)　$h(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ とおくと

$h(x)=x^{25}-x^{13}+5=(x+1)^2Q(x)+Ax+B$

$h'(x)=25x^{24}-13x^{12}=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+A$

ゆえに　$h(-1)=5=-A+B,\ h'(-1)=12=A$　　よって　$A=12,\ B=17$

x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とすると，次の恒等式が成り立つ。

(2)　　$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+px+q$　……①

両辺を x で微分すると

$nx^{n-1}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+p$　……②

①，②に $x=1$ を代入すると　　$0=p+q,\ n=p$

よって　　$p=n,\ q=-n$

したがって，求める余りは　　$nx-n$

別解　$x-1=X$ とおくと　　$x=X+1$

二項定理により　　$x^n-1=(X+1)^n-1$

$=X^n+{}_n\mathrm{C}_1X^{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}X^2+{}_n\mathrm{C}_{n-1}X+1-1$

これを $(x-1)^2$ すなわち X^2 で割ると，余りは　　${}_n\mathrm{C}_{n-1}X=n(x-1)$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　　(2)　$a=n,\ b=-n-1$

解説

(1)　$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)=(x-1)\{2Q(x)+(x-1)Q'(x)\}$

よって，$f'(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

(2)　$g(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ から　　$g'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}$

$g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから，

$g(x)=(x-1)^2P(x)$　($P(x)$ は整式)　……①　とおける。

よって，(1)の結果より，$g'(x)$ は $x-1$ で割り切れるから　　$g'(1)=0$

ゆえに　　$a(n+1)+bn=0$　……②

①より，$g(x)$ は $x-1$ で割り切れるから　　$g(1)=0$

よって　　$a+b+1=0$　……③

②−③×n から　　$a-n=0$　　　ゆえに　　$a=n$

このとき，③から　　$b=-a-1=-n-1$

$\boxed{1}$

解答　$y'=\sqrt{x^2+4}$

解説

$$y'=\frac{1}{2}\{(x)'\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot(\sqrt{x^2+4})'\}+2\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2+4})'}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1\cdot\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'\right]+2\cdot\frac{\left\{x+(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right\}'}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+4}+x\cdot\left\{\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}\right]$$

$$+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+4)'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)+\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{x^2+4+x^2+4}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　0　　(2)　[略]　　(3)　$\dfrac{C}{x}$　　(4)　$C\log x$

解説

(1)　$x=y=1$ とすると　$f(1)=2f(1)$　　よって　$f(1)=0$

(2)　$y=\dfrac{1}{x}>0$ とすると　$f(1)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(1)より　$f(1)=0$ であるから　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

(3)　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\frac{h}{x}\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{C}{x}$$

(4)　$f(x)=\displaystyle\int\frac{C}{x}dx=C\log|x|+D$ (D は積分定数)

また　$f(1)=D=0,\ x>0$ より　$f(x)=C\log x$

1

解答　$y''=4(x+1)e^{2x}$，$y'''=4(2x+3)e^{2x}$

解説

$y'=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$ であるから

$$y''=2e^{2x}+2(2x+1)e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$$
$$y'''=4e^{2x}+8(x+1)e^{2x}=4(2x+3)e^{2x}$$

2

解答　(1)　2　　(2)　$f(x)=2x^2-2x+1$

解説

(1)　$f(x)$ の最高次の項を ax^n $(a\neq 0)$ とすると，条件から　$n\geqq 2$

このとき，$f'(x)$ の最高次の項は　nax^{n-1}

$f''(x)$ の最高次の項は　$n(n-1)ax^{n-2}$

よって，$f''(x)+2f'(x)$ の最高次の項は　$2nax^{n-1}$

これが $8x$ に等しいから　$2na=8$，$n-1=1$

これを解いて　$n=2$，$a=2$　　したがって，$f(x)$ の次数は　2

(2)　(1) と条件 $f(0)=1$ から，$f(x)=2x^2+bx+1$ とおける。

よって　$f'(x)=4x+b$，$f''(x)=4$

これらを $f''(x)+2f'(x)=8x$ に代入して

$4+2(4x+b)=8x$　　ゆえに　$b=-2$

したがって　$f(x)=2x^2-2x+1$

3

解答　略

解説

$y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$y^{(1)}=y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$n=k+1$ のとき

$$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=-\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left\{\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}=\cos\left\{x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

4

解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-2}{y}$　　(3)　$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$　　(4)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

解説

(1)　両辺を x で微分すると　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=2$

よって，$y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{2y}=\dfrac{1}{y}$

(2)　両辺を x で微分すると　$8x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}-4=0$

よって　$y\cdot\dfrac{dy}{dx}=4x-2$

$y^2=4x^2-4x+5=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+4>0$ から　$y\neq 0$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x-2}{y}$

(3)　両辺を x で微分すると　$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ゆえに，$x\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

(4)　両辺を x で微分すると　$2y+2x\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$2xy-3=0$ より，$x\neq 0$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

5

解答　(1)　$-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　(2)　$\dfrac{1+t^2}{2t}$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=3a\cos^2\theta(\cos\theta)'=-3a\sin\theta\cos^2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta(\sin\theta)'=3a\sin^2\theta\cos\theta$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\sin\theta\cos^2\theta}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t(1-t^2)-(1+t^2)\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(1-t^2)-2t\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}}=\dfrac{1+t^2}{2t}$

6

解答　$\dfrac{1}{t\cos^3 t}$

解説

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t$$
$$\frac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}(\tan t)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$

$$=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{t\cos t}=\frac{1}{t\cos^3 t}$$

参考　一般に，$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}$ が成り立つ。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y''=6x-4$，$y'''=6$　　(2)　$y''=\dfrac{8}{(2x+1)^3}$，$y'''=-\dfrac{48}{(2x+1)^4}$

(3)　$y''=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$，$y'''=-\dfrac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

(4)　$y''=-\sin x-\cos x$，$y'''=-\cos x+\sin x$

(5)　$y''=-2e^x\sin x$，$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(6)　$y''=-\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$，$y'''=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

解説

(1)　$y'=3x^2-4x+1$，　$y''=6x-4$，　$y'''=6$

(2)　$y'=-\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

$$y''=\frac{2\cdot 2(2x+1)\cdot 2}{(2x+1)^4}=\frac{8}{(2x+1)^3}$$

$$y'''=-\frac{8\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2}{(2x+1)^6}=-\frac{48}{(2x+1)^4}$$

(3)　$y'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y''=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$y''=\dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ であるから　　$y'''=-\dfrac{\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+1}\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=-\dfrac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$

(4)　$y'=\cos x-\sin x$

$y''=-\sin x-\cos x$

$y'''=-\cos x+\sin x$

(5)　$y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$

$y'''=-2(e^x\sin x+e^x\cos x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(6)　$y'=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''=-\frac{2\cdot 2x(x^2+1)^2-2(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=-\frac{4x(x^2+1)\{(x^2+1)-2(x^2-1)\}}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$n=4$　　(2)　$f(x)=x^4-3x^2+2x$

解説

(1)　$f(x)$ の最高次の項を $ax^n\ (a\neq 0)$ とすると，$n\geqq 2$ であるから

$f'(x)$ の最高次の項は　　nax^{n-1}

$f''(x)$ の最高次の項は　　$n(n-1)ax^{n-2}$

よって，等式の左辺における最高次の項の係数は　　$2na-8a=2a(n-4)$

これが 0 であるから　　$2a(n-4)=0$　　　$a\neq 0$ であるから　　$n=4$

(2)　(1) の結果から，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおける。

よって　　$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

これらを与えられた等式に代入して

$$(x-1)(12ax^2+6bx+2c)+(2x-3)(4ax^3+3bx^2+2cx+d)$$
$$-8(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)=0$$

整理すると　　$-2bx^3-(12a+3b+4c)x^2-(6b+4c+6d)x-(2c+3d+8e)=0$

これが x についての恒等式であるから

$2b=0$，　$12a+3b+4c=0$，　$6b+4c+6d=0$，　$2c+3d+8e=0$

よって　　$b=0$，$c=-3a$，$d=2a$，$e=0$

ゆえに　　$f(x)=a(x^4-3x^2+2x)$

ここで，$f(2)=8$ から　　$8a=8$　　　よって　　$a=1$

したがって　　$f(x)=x^4-3x^2+2x$

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$y'=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　　$y^{(k)}=2^k\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$ ……②

$n=k+1$ のときを考えると，② の両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dx}y^{(k)}=2^{k+1}\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

ゆえに　　$y^{(k+1)}=2^{k+1}\sin\left(2x+\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2^{k+1}\sin\left\{2x+\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right\}$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　[1]　$n=1$ のとき　　$y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

一方　　$(-1)^{1-1}\cdot\dfrac{(1-1)!}{x^1}=\dfrac{1}{x}$

よって，等式は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，等式が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{x^k}$$

$n=k+1$ のとき

$$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(-k)\cdot x^{-k-1}=(-1)^k\cdot\frac{k!}{x^{k+1}}$$

よって，$n=k+1$ のときにも等式は成り立つ。

[1]，[2] から，等式 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ はすべての自然数 n について成り立つ。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y-2)}$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$　　(3)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

(4)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y+1)}$　　(5)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+3y^2}$　　(6)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$

解説

(1)　$(y-2)^2=x+5$ の両辺を x で微分すると

$2(y-2)\dfrac{dy}{dx}=1$　　　よって　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y-2)}$

(2)　$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\dfrac{dy}{dx}=0$　　　よって　　$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(3)　$x=\cos y$ の両辺を x で微分すると

$1=(-\sin y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$　　　よって　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

(4)　両辺を x で微分すると　　$1=2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ゆえに　　$2(y+1)\dfrac{dy}{dx}=1$

よって，$y\neq -1$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(y+1)}$

(5)　両辺を x で微分すると　　$1\cdot y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}+3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}=2x$

ゆえに　　$(x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=2x-y$

よって，$x+3y^2\neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+3y^2}$

(6)　両辺を x で微分すると　　$1=\cos(x+y)\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$

よって，$\cos(x+y)\neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos(x+y)}-1=\dfrac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{2t+1}{6t^2}$　　(2)　$-2\sqrt{1-t^2}$　　(3)　$-\dfrac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$　　(4)　$-\dfrac{2}{3}\tan\theta$

(5)　$\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$　　(6)　$\dfrac{3}{2\sin t}$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=6t^2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t+1$

よって，$t\neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+1}{6t^2}$

(2)　$t\neq\pm 1$ のとき　　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって，$t\neq 0$，$t\neq\pm 1$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$

(3)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$

よって，$\sin\theta\neq 0$ のとき　　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\cos\theta}{2\sin\theta}$

(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

よって，$\sin\theta\cos\theta \neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cdot 3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cdot 3\cos^2\theta\sin\theta}=-\dfrac{2}{3}\tan\theta$

(5)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{6t(1+t^3)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}=\dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t(2-t^3)}{3(1-2t^3)}=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

(6)　$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2(-\sin t)}{\cos^2 t}=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3}{\cos^2 t}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2\sin t}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=2(t+1)^3$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{3}{4\sin^3 t}$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1\cdot(1+t)-t\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t(1+t)-t^2\cdot 1}{(1+t)^2}=\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=t^2+2t$

ここで　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(t^2+2t)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{(1+t)^2}}=(2t+2)\cdot(1+t)^2=2(t+1)^3$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\cos t$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3\cos t}{2\sin t}$

ここで　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$

よって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{3\cos t}{2\sin t}\right)\cdot\dfrac{1}{-2\sin t}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\tan t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sin t}\right)$

$=-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sin t}\right)=-\dfrac{3}{4\sin^3 t}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　(ア)　$y''=6x-6$，$y'''=6$　　(イ)　$y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$，$y'''=\dfrac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$

(ウ)　$y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，$y'''=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

(エ)　$y''=-2e^x\sin x$，$y'''=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(オ)　$y''=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$，$y'''=-e^x(2\cos 2x+11\sin 2x)$

解説

(1)　(ア)　$y'=3x^2-6x+2$ であるから　　$y''=6x-6$，$y'''=6$

(イ)　$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ であるから

$y''=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

$y'''=-\dfrac{2}{9}\cdot\left(-\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}\right)=\dfrac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}=\dfrac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}$

(ウ)　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ であるから

$y''=\dfrac{2(x^2+1-x\cdot 2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$y'''=\{2(1-x^2)(x^2+1)^{-2}\}'=2(-2x)(x^2+1)^{-2}+2(1-x^2)(-2)(x^2+1)^{-3}\cdot 2x$

$=-4x(x^2+1)^{-3}\{x^2+1+2(1-x^2)\}=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

(エ)　$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$ であるから

$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$

$y'''=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=-2e^x(\sin x+\cos x)$

(オ)　$y'=e^x\sin 2x+e^x\cos 2x\cdot 2=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$y''=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)+e^x(\cos 2x\cdot 2-2\sin 2x\cdot 2)$

$=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

$y'''=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)+e^x(-4\sin 2x\cdot 2-3\cos 2x\cdot 2)$

$=e^x(-2\cos 2x-11\sin 2x)=-e^x(2\cos 2x+11\sin 2x)$

(2)　条件より，$y=g(x)$ に対して $x=\cos y$ が成り立つから

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\dfrac{1}{\sin y}$

$\pi<y<2\pi$ であるから　　$\sin y<0$

ゆえに　$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

よって　$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

また　$g''(x)=\left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　$a=-3$，$b=2$

解説

(1)　$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$y''=\left\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

よって　$(x^2+1)y''+xy'=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0$

ゆえに，等式 $(x^2+1)y''+xy'=0$ は成り立つ。

(2)　$y'=2e^{2x}+e^x$，$y''=4e^{2x}+e^x$ であるから

$y''+ay'+by=(4e^{2x}+e^x)+a(2e^{2x}+e^x)+b(e^{2x}+e^x)$

$y''+ay'+by=0$ から　　$(2a+b+4)e^{2x}+(a+b+1)e^x=0$

これがすべての x に対して成り立つから

$2a+b+4=0$ ……①，$a+b+1=0$ ……②

①，② を解いて　　$a=-3$，$b=2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y^{(n)}=n!$　　(2)　$y^{(n)}=n!\cdot 7^n(1-7x)^{-n-1}$　　(3)　$y^{(n)}=a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$

解説

(1)　$n=1$，2，3 のとき，順に

$y'=x'=1$，$y''=(x^2)''=(2x)'=2\cdot 1$，$y'''=(x^3)'''=3(x^2)''=3\cdot 2\cdot 1$

したがって，$y^{(n)}=n!$ ……① と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき　　$y'=1!$ であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$y^{(k)}=k!$　すなわち　$\dfrac{d^k}{dx^k}x^k=k!$

$n=k+1$ のときを考えると，$y=x^{k+1}$ で $(x^{k+1})'=(k+1)x^k$ であるから

$y^{(k+1)}=\dfrac{d^k}{dx^k}\left(\dfrac{d}{dx}x^{k+1}\right)=\dfrac{d^k}{dx^k}\{(k+1)x^k\}=(k+1)\dfrac{d^k}{dx^k}x^k=(k+1)k!=(k+1)!$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立ち　　$y^{(n)}=n!$

(2)　$y=(1-7x)^{-1}$ であるから

$y'=-(1-7x)^{-2}\cdot(-7)=7(1-7x)^{-2}$

$y''=7\cdot(-2)(1-7x)^{-3}\cdot(-7)=2\cdot 7^2(1-7x)^{-3}$

$y'''=2\cdot 7^2\cdot(-3)(1-7x)^{-4}\cdot(-7)=2\cdot 3\cdot 7^3(1-7x)^{-4}$

よって，$y^{(n)}=n!\cdot 7^n(1-7x)^{-n-1}$ ……①　と推測できる。

[1]　$n=1$ のとき，$y'=7(1-7x)^{-2}=1!\cdot 7^1(1-7x)^{-1-1}$

であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$y^{(k)}=k!\cdot 7^k(1-7x)^{-k-1}$ ……②

$n=k+1$ のときを考えると，② の両辺を x で微分して

$y^{(k+1)}=k!\cdot 7^k\cdot(-k-1)(1-7x)^{-k-2}\cdot(-7)$

$=(k+1)!\cdot 7^{(k+1)}(1-7x)^{-(k+1)-1}$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して ① は成り立つ。

したがって　　$y^{(n)}=n!\cdot 7^n(1-7x)^{-n-1}$

(3)　$y'=e^{ax}+axe^{ax}=(1+ax)e^{ax}$ ……①

$y''=ae^{ax}+a(1+ax)e^{ax}=a(2+ax)e^{ax}$

$y'''=a\{ae^{ax}+a(2+ax)e^{ax}\}=a^2(3+ax)e^{ax}$

よって，$y^{(n)}=a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$ ……[A] と類推される。

[A] を，数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき，① から，[A] は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，[A] が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=a^{k-1}(k+ax)e^{ax}$$

$n=k+1$ のとき

$$y^{(k+1)}=\{y^{(k)}\}'=a^{k-1}\{ae^{ax}+a(k+ax)e^{ax}\}$$
$$=a^{k-1}\cdot a(1+k+ax)e^{ax}$$
$$=a^{k}\{(k+1)+ax\}e^{ax}$$

よって，$n=k+1$ のときにも [A] は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について [A] は成り立つ。

ゆえに　$y^{(n)}=a^{n-1}(n+ax)e^{ax}$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の順に　(1)　$\dfrac{1}{2y}$，$-\dfrac{1}{4y^3}$　(2)　$\dfrac{x}{y}$，$-\dfrac{4}{y^3}$

(3)　$-\dfrac{x+1}{y}$，$-\dfrac{9}{y^3}$　(4)　$\dfrac{2-3y}{3x+5}$，$\dfrac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$

解説

(1)　$y^2=x$ の両辺を x で微分すると　$2y\dfrac{dy}{dx}=1$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$

また，この両辺を x で微分すると　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{y'}{2y^2}=-\dfrac{1}{2y^2}\cdot\dfrac{1}{2y}=-\dfrac{1}{4y^3}$

(2)　$x^2-y^2=4$ の両辺を x で微分すると　$2x-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1\cdot y-xy'}{y^2}=\frac{y-\dfrac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{4}{y^3}$$

(3)　$(x+1)^2+y^2=9$ の両辺を x で微分すると　$2(x+1)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1\cdot y-(x+1)y'}{y^2}=-\frac{y+\dfrac{(x+1)^2}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+(x+1)^2}{y^3}=-\frac{9}{y^3}$$

(4)　$3xy-2x+5y=0$ の両辺を x で微分すると　$3\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)-2+5\dfrac{dy}{dx}=0$

よって　$(3x+5)\dfrac{dy}{dx}=2-3y$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-3y}{3x+5}$

また，この両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3y'(3x+5)-(2-3y)\cdot 3}{(3x+5)^2}=\frac{-3\cdot\dfrac{2-3y}{3x+5}\cdot(3x+5)-3(2-3y)}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{6(3y-2)}{(3x+5)^2}$$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{4}{9}$

解説

$x^3+(x+1)\{y(x)\}^3=1$ ……① とする。

① に $x=0$ を代入すると　$\{y(0)\}^3=1$　よって　$y(0)=1$

① の両辺を x で微分すると　$3x^2+\{y(x)\}^3+3(x+1)y'(x)\{y(x)\}^2=0$ ……②

② に $x=0$ を代入すると　$\{y(0)\}^3+3y'(0)\{y(0)\}^2=0$

$y(0)=1$ であるから　$1+3y'(0)=0$　すなわち　$y'(0)=-\dfrac{1}{3}$

② の両辺を x で微分すると

$$6x+3y'(x)\{y(x)\}^2+3y'(x)\{y(x)\}^2+3(x+1)y''(x)\{y(x)\}^2+6(x+1)\{y'(x)\}^2y(x)=0$$

これに $x=0$ を代入すると

$$6y'(0)\{y(0)\}^2+3y''(0)\{y(0)\}^2+6\{y'(0)\}^2y(0)=0$$

$y(0)=1$，$y'(0)=-\dfrac{1}{3}$ であるから　$6\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 1^2+3y''(0)\cdot 1^2+6\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot 1=0$

ゆえに　$-2+3y''(0)+\dfrac{2}{3}=0$　よって　$y''(0)=\dfrac{4}{9}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{x^2+1}$　(2)　$-\dfrac{b}{a^2\sin^3\theta}$　(3)　$-\dfrac{2(t-1)(3t^2+8t+6)}{(2+t)^5}e^{4t}$

解説

(1)　$x\tan y=1$ の両辺を x で微分すると

$$\tan y+x\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}=0\quad\cdots\cdots①$$

条件から　$x>0$，$\cos y>0$

よって　$\tan y=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

① に代入して　$\dfrac{1}{x}+x\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2+1}$

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$

よって，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$

$$=-\frac{b(-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta)}{a\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{-a\sin\theta}$$
$$=-\frac{b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{a^2\sin^3\theta}=-\frac{b}{a^2\sin^3\theta}$$

(3)　$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}+(3+t)e^{-t}=(2+t)e^{-t}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-(2+t)-(2-t)}{(2+t)^2}e^{2t}+\frac{2-t}{2+t}\cdot 2e^{2t}=\frac{-4+2(2-t)(2+t)}{(2+t)^2}e^{2t}=\frac{4-2t^2}{(2+t)^2}e^{2t}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4-2t^2}{(2+t)^2}\cdot e^{2t}\cdot\dfrac{1}{(2+t)e^{-t}}=\dfrac{4-2t^2}{(2+t)^3}e^{3t}$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{4-2t^2}{(2+t)^3}e^{3t}\right\}=\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{4-2t^2}{(2+t)^3}e^{3t}\right\}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$$=\left\{\frac{-4t(2+t)^3-(4-2t^2)\cdot 3(2+t)^2}{(2+t)^6}e^{3t}+\frac{4-2t^2}{(2+t)^3}\cdot 3e^{3t}\right\}\cdot\frac{e^t}{2+t}$$
$$=\frac{-4t(2+t)-3(4-2t^2)+3(4-2t^2)(2+t)}{(2+t)^4}\cdot\frac{e^{4t}}{2+t}$$
$$=-\frac{2(3t^3+5t^2-2t-6)}{(2+t)^5}e^{4t}=-\frac{2(t-1)(3t^2+8t+6)}{(2+t)^5}e^{4t}$$

$\boxed{1}$

解答　(1) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

解説

(1) 逆関数を $y=f(x)$ とすると　$x=f^{-1}(y)=\sin y$

よって　$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos y\geqq 0$

ゆえに　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$

$y=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$ とおくと　$e^{2x}-2ye^x-1=0$

$e^x>0$ であるから　$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$

よって　$x=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

x と y を入れ替えて　$y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

よって　$h(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

したがって

$$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}h(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}h(x)=-(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x(x^2+2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(2x^2-1)$$

よって　$(x^2+1)\dfrac{d^3}{dx^3}h(x)+3x\dfrac{d^2}{dx^2}h(x)$

$$=(x^2+1)(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}(2x^2-1)+3x\left\{-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(2x^2-1-3x^2)=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(-x^2-1)=-(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{2}$

解答　(1) 略　(2) $f^{(9)}(0)=11025$，$f^{(10)}(0)=0$

解説

(1) 与えられた等式を ① とする。

[1] $n=1$ のとき，$f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$f''(x)=\left\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ であるから

(① の左辺)$=(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0$

よって，① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$(x^2+1)f^{(k+1)}(x)+(2k-1)xf^{(k)}(x)+(k-1)^2f^{(k-1)}(x)=0$$

両辺を x で微分すると

$$2xf^{(k+1)}(x)+(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k-1)\{f^{(k)}(x)+xf^{(k+1)}(x)\}+(k-1)^2f^{(k)}(x)=0$$

よって　$(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k-1+2)xf^{(k+1)}(x)+\{(2k-1)+(k-1)^2\}f^{(k)}(x)=0$

ゆえに　$(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k+1)xf^{(k+1)}(x)+k^2f^{(k)}(x)=0$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，任意の自然数 n に対して ① が成り立つ。

(2) ① の両辺に $x=0$ を代入して　$f^{(n+1)}(0)+(n-1)^2f^{(n-1)}(0)=0$

よって　$f^{(n+1)}(0)=-(n-1)^2f^{(n-1)}(0)$　…… ②

ここで，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから　$f'(0)=1$

ゆえに，② から

$f^{(3)}(0)=-1^2\cdot f'(0)=-1$，$f^{(5)}(0)=-3^2f^{(3)}(0)=-9(-1)=9$，

$f^{(7)}(0)=-5^2f^{(5)}(0)=-25\cdot 9=-225$，

$f^{(9)}(0)=-7^2f^{(7)}(0)=-49(-225)=11025$

また，$f^{(0)}(0)=f(0)=0$，② から　$f^{(2)}(0)=0$，$f^{(4)}(0)=-2^2f^{(2)}(0)=0$

同様にして　$f^{(6)}(0)=0$，$f^{(8)}(0)=0$，$f^{(10)}(0)=0$

$\boxed{1}$

解答　(ア) 1　(イ) 1　(ウ) 2　(エ) 0　(オ) 1　(カ) 4

解説

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}=a$

$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}={}^{ア}1$ であるから

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot1\cdot\frac{-1}{-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$a=\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2}$

また，$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき，$x=1$ で連続である。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}=b$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\sin\pi x\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}\cdot\frac{1}{4x}$$

$$=0\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$$

したがって　$b={}^{エ}0$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから，

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ と $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ が存在して，その値が等しい。

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{-c\pi(x-1)}{x-1}=-c\pi$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin\pi x\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\pi^2x^2(x-1)^3}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\pi}{4(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)}{\frac{\pi}{2}x(x-1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2}(x-1)}$$

ここで　$\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot\dfrac{\pi}{4(x-1)}=-\dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\cdot\dfrac{\pi}{4x}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot1\cdot1=-\frac{\pi}{4}$

ゆえに，$-c\pi=-\dfrac{\pi}{4}$ から　$c=\dfrac{{}^{オ}1}{{}^{カ}4}$

2

解答　$A=-5f'(2)$，$A=-4$

解説

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-3h)-f(2)-\{f(2+2h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[-3\left\{\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\right\}-2\left\{\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\right\}\right]$$
$$=-3f'(2)-2f'(2)$$
$$=-5f'(2)$$

ここで，$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ から　$f'(2)=\dfrac{4}{5}$

ゆえに　$A=-4$

3

解答　(ア)　3　　(イ)　3

解説

(ア)　$$\lim_{h\to+0}\frac{f(5h)-f(-2h)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(5h)-f(0)-f(-2h)+f(0)}{h}$$
$$=5\lim_{h\to+0}\frac{f(5h)-f(0)}{5h}+2\lim_{h\to+0}\frac{f(-2h)-f(0)}{(-2h)}$$

$5h=s$，$-2h=t$ とおくと $h\to+0$ のとき $s\to+0$，$t\to-0$ から

$$5\lim_{s\to+0}\frac{f(s)-f(0)}{s}+2\lim_{t\to-0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=5\times1+2\times(-1)=3$$

(イ)　$$\lim_{h\to-0}\frac{f(3h^2)-f(h^3)}{h^2}=\lim_{h\to-0}\frac{f(3h^2)-f(0)-f(h^3)+f(0)}{h^2}$$
$$=3\lim_{h\to-0}\frac{f(3h^2)-f(0)}{3h^2}-\lim_{h\to-0}\left\{\frac{f(h^3)-f(0)}{h^3}\times h\right\}$$

$3h^2=s$，$h^3=t$ とおくと $h\to-0$ のとき $s\to+0$，$t\to-0$ から

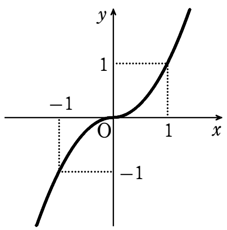
$$3\lim_{s\to+0}\frac{f(s)-f(0)}{s}-\lim_{t\to-0}\left\{\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\sqrt[3]{t}\right\}=3\times1-\{(-1)\times0\}=3$$

4

解答　(1)　略

(2)　[図]

(3)　微分可能である



解説

(1)　$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ であるから，

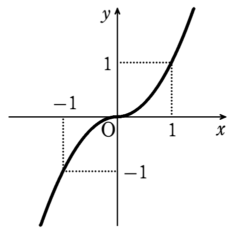
$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能でない。

(2)　$x\geqq0$ のとき　$y=x^2$

$x<0$ のとき　$y=-x^2$

よって，$y=x|x|$ のグラフの概形は，右の図のようになる。



(3)　m は自然数であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^m\cdot h-0}{h}=\lim_{h\to+0}h^m=0,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h^m\cdot(-h)-0}{h}=\lim_{h\to-0}(-h^m)=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=0$ であるから，極限値

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$ が存在する。

したがって，$g(x)$ は $x=0$ において微分可能である。

5

解答　(1)　略　　(2)　$f'(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$　　(3)　2

解説

(1)　$$f(-x)=\log\frac{1-x}{1+x}=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\log\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$

ゆえに，$f(x)$ は奇関数である.

(2)　$-1<x<1$ から　$1+x>0$，$1-x>0$

よって　$f(x)=\log(1+x)-\log(1-x)$

ゆえに　$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}$$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

(3)　$f(0)=\log1=0$ から　与式$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

(2) から　$f'(0)=\dfrac{2}{1-0^2}=2$

よって，求める値は　2

6

解答　(1)　$f_2(x)=x^2+2x$　　(2)　$a_{n+1}=a_n+2$，$b_{n+1}=a_n+b_n$

(3)　$a_n=2(n-1)$，$b_n=(n-1)(n-2)$

解説

(1)　$$e^xf_2(x)=\frac{d}{dx}(e^xf_1(x))=\frac{d}{dx}(x^2e^x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$$

よって　$f_2(x)=x^2+2x$

(2)　$$e^xf_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}(e^xf_n(x))=e^x\{f_n(x)+f_n'(x)\}$$

よって　$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_n'(x)$　……①

$f_n'(x)=2x+a_n$ であるから，① より

$$x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}=(x^2+a_nx+b_n)+2x+a_n$$

整理すると　$(a_{n+1}-a_n-2)x+(b_{n+1}-b_n-a_n)=0$

これが x についての恒等式であるから　$a_{n+1}-a_n-2=0$，　$b_{n+1}-b_n-a_n=0$

よって　$a_{n+1}=a_n+2$ ……②，　$b_{n+1}=a_n+b_n$ ……③

(3)　$f_1(x)=x^2$ から　$x^2+a_1x+b_1=x^2$　よって　$a_1=b_1=0$　……④

②，④ より，$\{a_n\}$ は初項 0，公差 2 の等差数列で

$a_n=0+(n-1)\cdot2=2(n-1)$

③ から　$b_{n+1}-b_n=2(n-1)$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2(k-1)=0+2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)\right\}$$
$$=(n-1)(n-2)\quad……⑤$$

初項は $b_1=0$ であるから，⑤ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=(n-1)(n-2)$

7

解答　(ア)　$\dfrac{2}{13}$　　(イ)　$-\dfrac{3}{13}$

解説

$y=e^{2x}(a\sin3x+b\cos3x)$ より

$$y'=e^{2x}\cdot2\cdot(a\sin3x+b\cos3x)+e^{2x}(a\cdot3\cos3x-b\cdot3\sin3x)$$
$$=e^{2x}\{(2a-3b)\sin3x+(3a+2b)\cos3x\}$$

よって　$e^{2x}\{(2a-3b)\sin3x+(3a+2b)\cos3x\}=e^{2x}\sin3x$

これが x についての恒等式となるとき　$2a-3b=1$，$3a+2b=0$

これを解くと　$a={}^{ア}\dfrac{2}{13}$，$b={}^{イ}-\dfrac{3}{13}$

8

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$　　(2)　$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

解説

(1)　$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\}\{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}{h\{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h\{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\}}=\lim_{h\to0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+(x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$
$$=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(2)　$f(x)\cdot\{f(x)\cdot f(x)\}=x$ の両辺を x で微分すると

$f'(x)\{f(x)\cdot f(x)\}+f(x)\{f(x)\cdot f(x)\}'=1$

よって　$f'(x)\{f(x)\}^2+f(x)\{f'(x)\cdot f(x)+f(x)\cdot f'(x)\}=1$

ゆえに　$3f'(x)\{f(x)\}^2=1$　　$f(x)\neq0$ であるから　$f'(x)=\dfrac{1}{3\{f(x)\}^2}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

9

解答　(1)　[略]　　(2)　[略]　　(3)　[略]

解説

(1)　$(1-x)(1+x+\cdots\cdots+x^n)=(1+x+\cdots\cdots+x^n)-x(1+x+\cdots\cdots+x^n)=1-x^{n+1}$

ゆえに　$(1-x)f(x)=1-x^{n+1}$ …… ①

(2)　① の両辺を x で微分すると　$-f(x)+(1-x)f'(x)=-(n+1)x^n$

よって　$(1-x)f'(x)=f(x)-(n+1)x^n$ …… ②

$x\neq 1$ であるから，① により　$f(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

これを ② に代入して　
$$(1-x)f'(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^n=\frac{1-x^{n+1}-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}}{1-x}=\frac{nx^n(x-1)+1-x^n}{1-x}$$

$x\neq 1$ であるから　$f'(x)=\dfrac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(1-x)^2}$

(3)　$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$

よって，(2) から　$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}=\dfrac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(1-x)^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n>0,\ n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}>0$ であるから　$1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}<4$

両辺を 2 で割ると　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}<2$

10

解答　$\log a-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{6a^3}x^3$

解説

$f(x)=\log(\sqrt{a^2+x^2}-x)$ から　$f(0)=\log\sqrt{a^2}=\log|a|$

$a>0$ であるから　$f(0)=\log a$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}-x}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}-1\right)$$
$$=\frac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{(\sqrt{a^2+x^2}-x)\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{a^2+x^2}}=-(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

よって　$f'(0)=-(a^2)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{a}$

$$f''(x)=-\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=x(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

よって　$f''(0)=0\cdot(a^2)^{-\frac{3}{2}}=0$

$$f'''(x)=1\cdot(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}+x\cdot\left\{-\frac{3}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}\{(a^2+x^2)-3x^2\}$$
$$=(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2-2x^2)$$

よって　$f'''(0)=(a^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot a^2=\dfrac{1}{a^3}$

したがって　$f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3=\log a-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{6a^3}x^3$

11

解答　$a=2,\ b=\dfrac{1}{4},\ c=0$

解説

$f'(x)=-\sin x,\ g'(x)=-\dfrac{a(2bx+c)}{(bx^2+cx+1)^2}$

$f(0)=g(0)$　から　$2=a$　…… ①

$f'(0)=g'(0)$ から　$0=-ac$　…… ②

①，② から　$a=2,\ c=0$

よって，$g'(x)=-\dfrac{4bx}{(bx^2+1)^2}$ であるから

$$g''(x)=-\frac{4b\{(bx^2+1)^2-x\cdot 2(bx^2+1)\cdot 2bx\}}{(bx^2+1)^4}=-\frac{4b(bx^2+1-4bx^2)}{(bx^2+1)^3}$$
$$=\frac{4b(3bx^2-1)}{(bx^2+1)^3}$$

また　$f''(x)=-\cos x$

よって，$f''(0)=g''(0)$ から　$-1=-4b$　ゆえに　$b=\dfrac{1}{4}$

したがって　$a=2,\ b=\dfrac{1}{4},\ c=0$

12

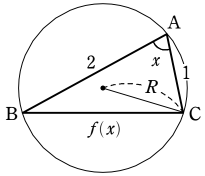
解答　(1)　$f(x)=\sqrt{5-4\cos x}$　(2)　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{R}$　(3)　1

解説

(1)　余弦定理により

$\{f(x)\}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos x=5-4\cos x$

$f(x)>0$ であるから　$f(x)=\sqrt{5-4\cos x}$　…… ①



(2)　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{-4(-\sin x)}{2\sqrt{5-4\cos x}}=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

ここで，正弦定理により　$\dfrac{f(x)}{\sin x}=2R$

よって，① から　$\sqrt{5-4\cos x}=2R\sin x$

ゆえに　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{2\sin x}{2R\sin x}=\dfrac{1}{R}$　…… ②

(3)　正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin C}=2R$　すなわち　$\dfrac{1}{R}=\sin C$

よって，② から　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\sin C$

ゆえに，$0°<C<180°$ のとき $\dfrac{d}{dx}f(x)$ は $C=90°$ で最大値 1 をとる。

このとき $A=60°,\ B=30°$ で，確かに $\triangle ABC$ が存在する。

13［横浜市立大］

解答　証明略，$a_n=n(n-1)$

解説

$f(x)=x^2e^x$ に対し，a_n を定数として

$$f^{(n)}(x)=x^2e^x+2nxe^x+a_ne^x \quad \cdots\cdots ①$$

とする。

[1]　$n=1$ のとき　$f'(x)=2xe^x+x^2e^x$

よって，$a_1=0$ とすると，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，定数 a_k があり

$$f^{(k)}(x)=x^2e^x+2kxe^x+a_ke^x \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると，② の両辺を x で微分して

$$f^{(k+1)}(x)=2xe^x+x^2e^x+2ke^x+2kxe^x+a_ke^x$$
$$=x^2e^x+2(k+1)xe^x+(a_k+2k)e^x$$

a_k+2k は定数であるから，これを a_{k+1} とおくと，① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，a_n を定数として ① が成り立つ。

次に，以上のことから　$a_{n+1}=a_n+2n$　ゆえに　$a_{n+1}-a_n=2n$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k=0+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n(n-1)$　…… ③

③ で $n=1$ とすると　$a_1=0$

[1] より $a_1=0$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n(n-1)$

14

解答　(ア)　$\dfrac{1}{4}$　(イ)　$(\sqrt{2})^n$　(ウ)　$\dfrac{n}{4}$　(エ)　$(\sqrt{2})^{n+1}$　(オ)　$\dfrac{n+1}{4}$

解説

$$y^{(1)}=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x+{}^{ア}\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$y^{(2)}=\sqrt{2}\left\{e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\,e^x\left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}\,e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right\}=(\sqrt{2})^2e^x\cos\left(x+\frac{2}{4}\pi\right)$$

よって，$y^{(n)}=(\sqrt{2})^ne^x\cos\left(x+\dfrac{n}{4}\pi\right)$　…… ① と推測できる。

これを，数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$ のとき

$y^{(1)}=\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x+\dfrac{1}{4}\pi\right)$ により，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

① が成り立つと仮定する。

$y^{(k)}=(\sqrt{2})^ke^x\cos\left(x+\dfrac{k}{4}\pi\right)$ の両辺を x で微分すると

$$y^{(k+1)}=(\sqrt{2})^ke^x\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)-(\sqrt{2})^ke^x\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)$$
$$=(\sqrt{2})^ke^x\left\{\cos\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)-\sin\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=(\sqrt{2})^ke^x\cdot\sqrt{2}\cos\left\{\left(x+\frac{k}{4}\pi\right)+\frac{\pi}{4}\right\}=(\sqrt{2})^{k+1}e^x\cos\left(x+\frac{k+1}{4}\pi\right)$$

よって，$n=k+1$ のときも，① は成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n に対して，$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+\dfrac{n}{4}\pi\right)$ が成り立つ。

したがって　$y^{(n)}={}^{イ}(\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+{}^{ウ}\dfrac{n}{4}\pi\right)$ ……②

次に，$y=e^x(\cos x+\sin x)$ のとき，$y=\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，$x-\dfrac{\pi}{4}=t$ とおけば　$y=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\cdot e^t\cos t$

ここで　$y^{(1)}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot 1=\dfrac{dy}{dt}$

よって，これを繰り返すことにより　$y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dt^n}$

したがって，② より　$y^{(n)}=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\cdot(\sqrt{2})^n e^t\cos\left(t+\dfrac{n}{4}\pi\right)$

よって　$y^{(n)}=(\sqrt{2})^{n+1}e^{\frac{\pi}{4}}\cdot e^{x-\frac{\pi}{4}}\cos\left\{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{n}{4}\pi\right\}$

$$=(\sqrt{2})^{n+1}e^x\cos\left\{\left(x+\frac{n+1}{4}\pi\right)-\frac{\pi}{2}\right\}={}^{エ}(\sqrt{2})^{n+1}e^x\sin\left(x+{}^{オ}\frac{n+1}{4}\pi\right)$$

15

解答　(1)　$a_n=n$　　(2)　$\dfrac{1}{e-1}$

解説

(1)　$f^{(1)}(x)=1\cdot e^{-x}+x(-e^{-x})=-(x-1)e^{-x}$

$f^{(2)}(x)=-\{1\cdot e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})\}=(x-2)e^{-x}$

$f^{(3)}(x)=1\cdot e^{-x}+(x-2)(-e^{-x})=-(x-3)e^{-x}$

よって，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ ……①　と推測される。

この推測が正しいことを，数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$f^{(1)}(x)=-(x-1)e^{-x}$ であるから，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち

$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$ ……②　と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると，② により

$f^{(k+1)}(x)=(-1)^k\{1\cdot e^{-x}+(x-k)(-e^{-x})\}=(-1)^k\{-(x-k-1)e^{-x}\}$

$=(-1)^{k+1}\{x-(k+1)\}e^{-x}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

ゆえに　$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$

$f^{(n)}(x)=0$ とすると　$(-1)^n(x-n)e^{-x}=0$

これを解くと　$x=n$　　したがって　$a_n=n$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

16

解答　(1)　$f'(2)=2e$，$f''(2)=\dfrac{3}{2}e$　　(2)　$g'(2e)=\dfrac{1}{2e}$，$g''(2e)=-\dfrac{3}{16e^2}$

解説

(1)　$f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$ から　$f'(x)=1\cdot e^{\frac{x}{2}}+x\cdot\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}(x+2)e^{\frac{x}{2}}$，

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}(x+2)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}(x+4)e^{\frac{x}{2}}$$

よって　$f'(2)=\dfrac{1}{2}(2+2)e^{\frac{2}{2}}=2e$，　$f''(2)=\dfrac{1}{4}(2+4)e^{\frac{2}{2}}=\dfrac{3}{2}e$

(2)　$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから，$y=g(x)$ とおくと　$x=f(y)$

両辺の関数を x で微分すると　$1=f'(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$　　すなわち　$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

さらに，この両辺の関数を x で微分すると

$$g''(x)=\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(y)}=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

ここで，$f(2)=2e$ であるから，$x=2e$ のとき　$y=g(2e)=2$

ゆえに，(1) より　$g'(2e)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{2e}$，

$$g''(2e)=-\frac{f''(2)}{\{f'(2)\}^3}=-\frac{3}{2}e\cdot\frac{1}{(2e)^3}=-\frac{3}{16e^2}$$

参考　($g(x)$ の定義域)

$x>0$ において，$f'(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)e^{\frac{x}{2}}>0$ であるから，関数 $f(x)$ は単調に増加する。

また　$f(0)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

これと，$f(x)$ が連続であることから，関数 $y=f(x)$ の値域は　$y\geqq 0$

したがって，その逆関数 $g(x)$ の定義域は　$x\geqq 0$

17

解答　(ア)　-2　　(イ)　$\dfrac{1}{3}$

解説

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$\dfrac{d}{dx}\sqrt{(x^2+1)^3}=\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+1}$　から

$$\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{(x^2+1)^3}=3\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{3(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

与式は　$\dfrac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{3b(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ゆえに　$(a+6b)x^2+3b=1$

これが x についての恒等式となるのは　$a+6b=0$，$3b=1$

よって　$a=-2$，$b=\dfrac{1}{3}$

18

解答　(1)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=2$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{25}{8}$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$

よって，$\sin\theta\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

また　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$

$$=\frac{\sin\theta\sin\theta-(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

(2)　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1=-\dfrac{3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=-\dfrac{4}{3}$ であるから　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{4}{5}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{\dfrac{4}{5}}=2$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3}=\dfrac{25}{8}$

19

解答　(1)　(ア)　3　　(イ)　$\dfrac{5}{2}$　　(2)　(ウ)　7　　(エ)　4　　(3)　(オ)　2　　(カ)　$2\sqrt{3}$

解説

$f(\theta)=h(g(\theta))=\log g(\theta)=\log\left(\dfrac{9}{4}\sin 2\theta\right)$ ……① とする。

(1)　① から　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\log\left(\dfrac{9}{4}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=\log\left(\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\log\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^3}=-{}^{ア}3\log 2+{}^{イ}\frac{5}{2}\log 3$$

(2)　$\sin\theta_1+\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{82}}{8}$ から　$(\sin\theta_1+\cos\theta_1)^2=\dfrac{82}{64}=\dfrac{41}{32}$

よって　$1+2\sin\theta_1\cos\theta_1=\dfrac{41}{32}$

ゆえに　$2\sin\theta_1\cos\theta_1=\dfrac{9}{32}$　　すなわち　$\sin 2\theta_1=\dfrac{9}{32}$

したがって，① から

$$f(\theta_1)=\log\left(\frac{9}{4}\sin 2\theta_1\right)=\log\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{32}\right)=\log\frac{3^4}{2^7}=-{}^{ウ}7\log 2+{}^{エ}4\log 3$$

(3)　$f'(\theta)=h'(g(\theta))g'(\theta)$ であり，

$h'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(\theta)=\dfrac{9}{4}\cdot 2\cos 2\theta=\dfrac{9}{2}\cos 2\theta$

であるから　$f'(\theta)=\dfrac{1}{\dfrac{9}{4}\sin 2\theta}\cdot\dfrac{9}{2}\cos 2\theta=\dfrac{2}{\tan 2\theta}$

よって　$f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{2}{\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{2}{1}={}^{オ}2$，$f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{2}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}={}^{カ}2\sqrt{3}$

$\boxed{1}$

解答　$5f(a)g'(a)+3f'(a)g(a)$

解説

$$f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)$$
$$=f(a+3h)g(a+5h)-f(a+3h)g(a)+f(a+3h)g(a)-f(a)g(a)$$
$$=f(a+3h)\{g(a+5h)-g(a)\}+\{f(a+3h)-f(a)\}g(a)$$

よって　$\dfrac{f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)}{h}$

$$=\frac{f(a+3h)\{g(a+5h)-g(a)\}+\{f(a+3h)-f(a)\}g(a)}{h}$$

$$=5f(a+3h)\cdot\frac{g(a+5h)-g(a)}{5h}+\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot 3g(a)$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ は $x=a$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+5h)-g(a)}{5h}=g'(a),$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=f'(a),$$
$$\lim_{h\to 0}f(a+3h)=f(a)$$

したがって　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)}{h}=5f(a)g'(a)+3f'(a)g(a)$

$\boxed{2}$

解答　(ア)　ax^3+bx^2+c　　(イ)　$x+2$　　(ウ)　$a+b+c=3$
　(エ)　$-a+b+c=1$　　(オ)　1　　(カ)　-1　　(キ)　3

解説

(1)　(ア)　$|x|<1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=ax^3+bx^2+c$

(イ)　$|x|>1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ であるから

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+2+2\left(\dfrac{a}{x^{n-3}}+\dfrac{b}{x^{n-2}}+\dfrac{c}{x^n}\right)}{1+\dfrac{2}{x^n}}=x+2$$

(2)　(ウ)　$f(x)$ が $x=1$ で連続であるための条件は

$$f(1)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$$

ゆえに　$\dfrac{3+2a+2b+2c}{3}=a+b+c=3$

よって　$a+b+c=3$

(3)　(エ)　n が偶数のとき

$f(-1)=\dfrac{1}{3}\{-1+2+2(-a+b+c)\}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}(-a+b+c)$ ……①

n が奇数のとき

$f(-1)=1-2+2(-a+b+c)=-1+2(-a+b+c)$ ……②

$x=-1$ で $f(x)$ が定まるためには，① と ② が一致すればよい．

ゆえに　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}(-a+b+c)=-1+2(-a+b+c)$

よって　$-a+b+c=1$

(4)　(オ)，(カ)，(キ)　$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{(h+3)-3}{h}=1,$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{a(1+h)^3+b(1+h)^2+c-(a+b+c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to -0}(3a+3ah+ah^2+2b+bh)$$
$$=3a+2b$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

ゆえに　$3a+2b=1$ ……③

また，$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから，(2) より

$a+b+c=3$ ……④

更に，(3) から　$-a+b+c=1$ ……⑤

③，④，⑤ から　$a=1$，$b=-1$，$c=3$

$\boxed{3}$

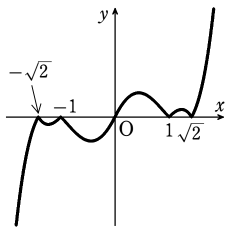
解答　4 個

解説

$x\geqq 0$ のとき　$y=x|x-1||x^2-2|$，$x<0$ のとき　$y=x|-x-1||x^2-2|$ から

$$y=\begin{cases} x(x-1)(x^2-2) & (x\geqq\sqrt{2}) \\ -x(x-1)(x^2-2) & (1\leqq x<\sqrt{2}) \\ x(x-1)(x^2-2) & (0\leqq x<1) \\ -x(x+1)(x^2-2) & (-1\leqq x<0) \\ x(x+1)(x^2-2) & (-\sqrt{2}\leqq x<-1) \\ -x(x+1)(x^2-2) & (x<-\sqrt{2}) \end{cases}$$

となり，グラフは図のようになる．



グラフから，明らかに，4 点 $x=-\sqrt{2}$，-1，1，$\sqrt{2}$ で微分不可能である．

$x=0$ においては，

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h-1)(h^2-2)}{h}=2,$$
$$\lim_{h\to -0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+1)(h^2-2)}{h}=2$$

から，微分可能である．

ゆえに，微分可能でない点を 4 個もっている．

$\boxed{4}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(0)\fallingdotseq 0$ と仮定する。与式で $x=y=0$ とすると　　$f(0)+\{f(0)\}^2=2f(0)$

よって　　$f(0)\{f(0)-1\}=0$　　　　$f(0)\fallingdotseq 0$ であるから　　$f(0)=1$

このとき，与式で $y=0$ とすると　　$f(x)+f(x)\cdot 1=f(x)+1$

よって　　$f(x)=1$　　　　ゆえに　　$f'(x)=0$

したがって，$f'(0)=0$ となり，$f'(0)=1$ に矛盾。

よって，$f(0)=0$ である。

(2)　$f'(0)=1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$　……①

与式で $y=h$ とすると　　$f(x+h)+f(x)f(h)=f(x)+f(h)$

ゆえに　　$f(x+h)-f(x)=f(h)\{1-f(x)\}$　……②

①，② から，任意の実数 x に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\{1-f(x)\}=1-f(x)$$

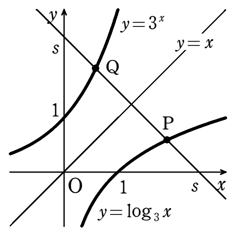
よって　　$f'(x)=1-f(x)$

すなわち，$f(x)$ は常に微分可能である。

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$k=4$，極限値 $1+\dfrac{5}{3\log 3}$

解説



(1)　$y=\log_3 x$ のグラフと $y=3^x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であり，直線 $y=-x+s$ も直線 $y=x$ に関して対称であるから，2 点 P，Q も直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，線分 PQ の中点は，2 直線 $y=x$ と $y=-x+s$ の交点である。

$x=-x+s$ から　　$x=\dfrac{s}{2}$

ゆえに　　$y=\dfrac{s}{2}$

したがって，線分 PQ の中点の座標は　　$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$

(2)　$\dfrac{s}{2}=\dfrac{t+u}{2}$ から　　$s=t+u$　……①

点 P は直線 $y=-x+s$ 上にあるから　　$\log_3 t=-t+s$

これと ① から　　$u=\log_3 t$

(3)　$su=(t+u)\log_3 t=(t+\log_3 t)\log_3 t$ であるから，$t\longrightarrow 3$ のとき　$su\longrightarrow 4$

よって，$k=4$ が必要である。

このとき，$f(t)=(t+\log_3 t)\log_3 t$ とおくと，$f(3)=4$ であるから

$$\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}=f'(3)$$

$f'(t)=\left(1+\dfrac{1}{t\log 3}\right)\log_3 t+\dfrac{t+\log_3 t}{t\log 3}$ であるから

$$\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}=1+\frac{5}{3\log 3}$$

ゆえに　　$k=4$，極限値 $1+\dfrac{5}{3\log 3}$

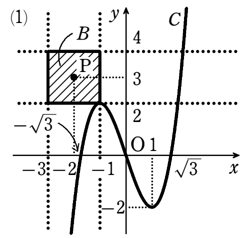
$\boxed{6}$

解答　(1)　[図]，境界線を含む

(2)　曲線 $y=x^3+3x^2-1$ の $x<-2$ の部分

(3)　曲線 $y=\begin{cases} x^3+3x^2-1 & \left(x<-2,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}<x\right) \\ 3 & (-2\leqq x\leqq 0) \\ x^3-3x^2+3 & \left(0<x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$

(4)　略



解説

(1)　$y=x^3-3x$ より

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

よって，曲線 C の概形は右図のようになる。

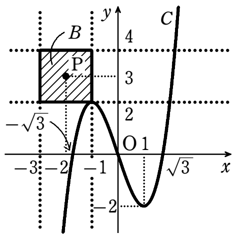
また，点 $\mathrm{P}(-2,\ 3)$ のとき

$|x+2|\leqq1,\ |y-3|\leqq1$

よって　　$-3\leqq x\leqq-1,\ 2\leqq y\leqq4$

したがって，このときの領域 B は右図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



(2)　$a,\ b$ は $b>a^3-3a$ を満たすから，P が動く領域は右図の斜線部分のように C の上側である。

ただし，境界線を含まない。

$\mathrm{P}(a,\ b)$ のときの領域 B は，$|x-a|\leqq1,\ |y-b|\leqq1$

より　　$a-1\leqq x\leqq a+1,\ b-1\leqq y\leqq b+1$

すなわち，4 頂点 $(a-1,\ b-1)$，$(a-1,\ b+1)$，$(a+1,\ b-1)$，$(a+1,\ b+1)$ がつくる正方形の周および内部である。

B と C が $x<-1$ の範囲にある点で接するとき，点 $(a+1,\ b-1)$ は C の $x<-1$ の部分上にある。

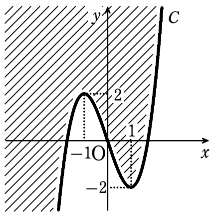
すなわち

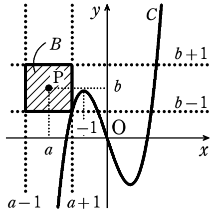
$a+1<-1$ かつ $b-1=(a+1)^3-3(a+1)$

よって　　$a<-2$ かつ $b=a^3+3a^2-1$

ゆえに，このときの点 P の軌跡は

曲線 $y=x^3+3x^2-1$ の $x<-2$ の部分





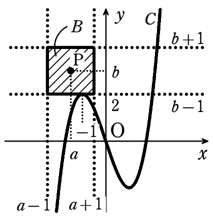
(3)　[1]　B と C が $x=-1$ の点で接するとき

このとき　　$a-1\leqq-1\leqq a+1$ かつ $b-1=2$

よって　　$-2\leqq a\leqq0$ かつ $b=3$

ゆえに，このときの点 P の軌跡は

直線 $y=3$ の $-2\leqq x\leqq0$ の部分



[2]　B と C が $x>-1$ の範囲にある点で接するとき

まず，このとき $a-1>-1$ であるから　　$a>0$

ここで，点 $(a-1,\ b-1)$ と $(a+1,\ b-1)$ がともに C 上にあるときを考える。

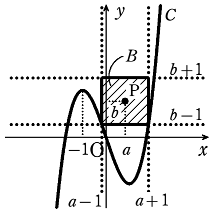
$b-1=(a-1)^3-3(a-1)$ より　　$b=a^3-3a^2+3$

$b-1=(a+1)^3-3(a+1)$ より　　$b=a^3+3a^2-1$

b を消去すると　　$a^3-3a^2+3=a^3+3a^2-1$

よって　　$a^2=\dfrac{2}{3}$

$a>0$ より　　$a=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



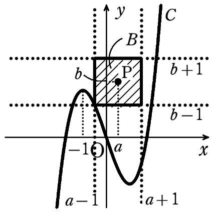
(i)　$0<a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき

このとき，B と C は点 $(a-1,\ b-1)$ で接するから，点 $(a-1,\ b-1)$ は C 上にある。

よって　　$b=a^3-3a^2+3$

このときの点 P の軌跡は

曲線 $y=x^3-3x^2+3$ の $0<x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の部分



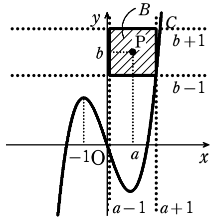
(ii)　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a$ のとき

このとき，B と C は点 $(a+1,\ b-1)$ で接するから，点 $(a+1,\ b-1)$ は C 上にある。

よって　　$b=a^3+3a^2-1$

このときの点 P の軌跡は

曲線 $y=x^3+3x^2-1$ の $x>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の部分



よって，(2) の結果と合わせると，求める軌跡は次の式で表される曲線である。

$$y=\begin{cases} x^3+3x^2-1 & \left(x<-2,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}<x\right) \\ 3 & (-2\leqq x\leqq0) \\ x^3-3x^2+3 & \left(0<x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$$

(4)　$y=f(x)$ とすると，(3) より

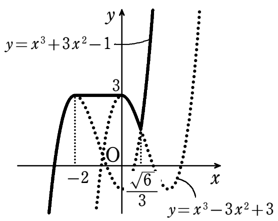
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{3-3}{h}=0$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(h^3-3h^2+3)-3}{h}=\lim_{h\to+0}(h^2-3h)=0$$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$

すなわち，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

参考　点 P の軌跡は右図のようになる。



7

解答　(1)　1　　(2)　1　　(3)　略　　(4)　略　　(5)　$f(x)=e^x$

解説

(1)　(b) の不等式に $x=0$ を代入すると　$|f(0)-1|\leqq0$　　ゆえに　　$f(0)=1$

(2)　(b) と (1) から　　$\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|\leqq M\sqrt{|x|}$

$\displaystyle\lim_{x\to0}M\sqrt{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|=0$

ゆえに　　$f'(0)=1$

(3)　(a) から　$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\cdot\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$h\longrightarrow0$ のとき　$f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$

ゆえに　　$f'(x)=f(x)$

(4)　$\dfrac{d}{dx}(f(x)e^{-x})=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=f(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$

(5)　(4) から $f(x)e^{-x}=a$（a は定数）とおける。

$f(0)e^{-0}=1$ であるから　$f(x)e^{-x}=1$

ゆえに　　$f(x)=e^x$

8

解答　(1)　略　　(2)　$a=1,\ b=-2$

解説

(1)　$f(x)$ を m 次多項式，$g(x)$ を n 次多項式とする．ここで，$1\leqq m\leqq n$ としてよい．

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ と仮定する．

両辺の次数から　$m+n-1=2n$

すなわち　$m=n+1$ でなければならない．

これは，$m>n$ を意味し，$m\leqq n$ に矛盾する．

ゆえに，$f(x)$，$g(x)$ がともに多項式の場合では，関係式を満足しない．

(2)　$f(x)=e^x+2e^{-x}$，$g(x)=ae^x+be^{-x}$

ゆえに　$f(x)g(x)=ae^{2x}+(2a+b)+2be^{-2x}$

よって　$\{f(x)g(x)\}'=2ae^{2x}-4be^{-2x}$

$\{f(x)\}^2=e^{2x}+4+4e^{-2x}$

$\{g(x)\}^2=a^2e^{2x}+2ab+b^2e^{-2x}$

関係式に代入して係数を比較すると

$2a=a^2+1,\ 0=2ab+4,\ -4b=b^2+4$

したがって　$a=1,\ b=-2$

9

解答　(1)　$\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$　　(2)　$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

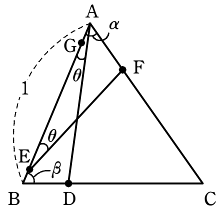
解説

(1) △ABD において正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin(\pi-\theta-\beta)}$$

AD＝AE であるから

$$\mathrm{AE}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)}\quad\cdots\cdots ①$$



△AEF において正弦定理により

$$\frac{\mathrm{EF}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{AE}}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}$$

EF＝EG であるから　$\mathrm{EG}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}\mathrm{AE}$

① より　$\mathrm{EG}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$

(2) $\mathrm{AG}+\mathrm{EB}=\mathrm{AB}-\mathrm{EG}=1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$

$$=\frac{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$f(\theta)=\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)$ とおくと

$$f'(\theta)=\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)+\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\beta)$$

よって　$f'(0)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AG}+\mathrm{EB}}{\theta}$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\theta}\times\frac{1}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)-f(0)}{\theta}\cdot\frac{1}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

$$=f'(0)\cdot\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

10

解答　(1) 略　(2) $F(x)=1$, $G(x)=1$　(3) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

解説

(1) $H(x)=\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ とする。

$$H'(x)=2f(x)f'(x)-2g(x)g'(x)=2f(x)g(x)-2g(x)f(x)=0$$

ゆえに, $H(x)$ は定数である。

ここで　$H(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2=1^2-0^2=1$

よって　$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$

(2) $F'(x)=-e^{-x}\{f(x)+g(x)\}+e^{-x}\{f'(x)+g'(x)\}=0$

ゆえに, $F(x)$ は定数である。

ここで　$F(0)=f(0)+g(0)=1$　　よって　$F(x)=1$

また　$G'(x)=e^x\{f(x)-g(x)\}+e^x\{f'(x)-g'(x)\}=0$

ゆえに, $G(x)$ は定数である。

ここで　$G(0)=f(0)-g(0)=1$　　よって　$G(x)=1$

(3) $F(x)=1$ であるから　$e^{-x}\{f(x)+g(x)\}=1$

すなわち　$f(x)+g(x)=e^x$　……①

$G(x)=1$ であるから　$e^x\{f(x)-g(x)\}=1$

すなわち　$f(x)-g(x)=e^{-x}$　……②

①, ② から　$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

11

解答　(1) 0　(2) 3　(3) 11　(4) $f(x)=4x^2+3x$

解説

$f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy$ …… ① とする。

(1) ① に $x=y=0$ を代入すると　$f(0)=f(0)+f(0)+0$

よって　$f(0)=0$

(2) $f(0)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)$

条件(B)から　$\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}=3$

(3) ① に $x=1$ を代入すると　$f(1+y)=f(1)+f(y)+8y$

よって　$f(1+y)-f(1)=f(y)+8y$

ゆえに　$\displaystyle f'(1)=\lim_{y\to0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)+8y}{y}$

$$=\lim_{y\to0}\left\{\frac{f(y)}{y}+8\right\}=3+8=11$$

(4) ① から　$f(x+y)-f(x)=f(y)+8xy$

よって　$\displaystyle f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)+8xy}{y}=\lim_{y\to0}\left\{\frac{f(y)}{y}+8x\right\}$

$=3+8x$

ゆえに　$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3+8x)dx=4x^2+3x+C$ (C は積分定数)

(1) より, $f(0)=0$ であるから　$C=0$

したがって　$f(x)=4x^2+3x$

12

解答　$s=-\dfrac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$, $t=\dfrac{1}{4}\sin^2\theta$

解説

曲線 C 上の任意の点を (x, y) とすると

$$(x-s)^2+(y-t)^2=\frac{(x\cos\theta+y\sin\theta+p)^2}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

よって　$(x-s)^2+(y-t)^2=(x\cos\theta+y\sin\theta+p)^2$　……①

① の両辺を x で微分すると

$$2(x-s)+2(y-t)\frac{dy}{dx}=2(x\cos\theta+y\sin\theta+p)\left(\cos\theta+\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)\quad\cdots\cdots ②$$

② の両辺を 2 で割り, 更に両辺を x で微分すると

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-t)\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$=\left(\cos\theta+\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)\left(\cos\theta+\frac{dy}{dx}\sin\theta\right)+(x\cos\theta+y\sin\theta+p)\frac{d^2y}{dx^2}\sin\theta\quad\cdots\cdots ③$$

曲線 C は原点を通るから, ① より　$s^2+t^2=p^2$　……④

一方　$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+4x-1$, $f'(0)=0$,

$f''(x)=-2e^{-x}\cos x+4$, $f''(0)=2$

条件から, $x=0$, $y=0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2$

ゆえに, ② から　$-s=p\cos\theta$,　③ から　$1-2t=\cos^2\theta+2p\sin\theta$

よって　$s=-p\cos\theta$, $t=\dfrac{1}{2}\sin\theta(\sin\theta-2p)$　……⑤

④, ⑤ から　$p^2=p^2\cos^2\theta+\dfrac{1}{4}(\sin^4\theta-4p\sin^3\theta+4p^2\sin^2\theta)$

$$=p^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\frac{1}{4}\sin^3\theta(\sin\theta-4p)$$

$$=p^2+\frac{1}{4}\sin^3\theta(\sin\theta-4p)$$

ゆえに　$\dfrac{1}{4}\sin^3\theta(\sin\theta-4p)=0$　　$\sin\theta\neq0$ であるから　$p=\dfrac{1}{4}\sin\theta$

よって　$s=-\dfrac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$, $t=\dfrac{1}{4}\sin^2\theta$

13

解答　(1) 略　(2) 証明略, 0

解説

(1) $F'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$,　$F''(x)=e^xf(x)+2e^xf'(x)+e^xf''(x)$

ここで, $f''(x)=-2f'(x)-2f(x)$ であるから

$$F''(x)=e^xf(x)+2e^xf'(x)+e^x\{-2f'(x)-2f(x)\}=-e^xf(x)=-F(x)$$

(2) $F''(x)=-F(x)$ を満たす関数 $F(x)$ は

$$[\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2]'=2F'(x)F''(x)+2F(x)F'(x)$$

$$=2F'(x)\{F''(x)+F(x)\}=0$$

したがって, $\{F'(x)\}^2+\{F(x)\}^2=C$ (C は負でない定数) と表される。

このとき, $C\geqq\{F(x)\}^2$ から　$\sqrt{C}\geqq|F(x)|$

$f(x)=\dfrac{F(x)}{e^x}$ とすると　$0\leqq|f(x)|\leqq\dfrac{\sqrt{C}}{e^x}$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{C}}{e^x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}|f(x)|=0$　　よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

14

解答　(1) $f_n'(0)=n$, $f_n''(0)=n(n-1)$

(2) $f_{m+n}''(x)=f_m''(x)f_n(x)+2f_m'(x)f_n'(x)+f_m(x)f_n''(x)$　(3) [略]

解説

$f_n(x)=(1+x)^n$

(1) $f_n'(x)=n(1+x)^{n-1}$, $f_n''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$

ゆえに　$f_n'(0)=n$, $f_n''(0)=n(n-1)$

(2) $f_{m+n}(x)=(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n=f_m(x)f_n(x)$

ゆえに　$f_{m+n}'(x)=f_m'(x)f_n(x)+f_m(x)f_n'(x)$

よって　$f_{m+n}''(x)=f_m''(x)f_n(x)+2f_m'(x)f_n'(x)+f_m(x)f_n''(x)$

(3) (2) の結果に $x=0$ を代入すると

$f_{m+n}''(0)=f_m''(0)f_n(0)+2f_m'(0)f_n'(0)+f_m(0)f_n''(0)$

$f_m(0)=f_n(0)=1$ であるから, (1) より

$(m+n)(m+n-1)=m(m-1)+2mn+n(n-1)$

ゆえに　$\dfrac{(m+n)(m+n-1)}{2}=\dfrac{m(m-1)}{2}+mn+\dfrac{n(n-1)}{2}$

よって　${}_{m+n}\mathrm{C}_2={}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2$

15

解答　証明略, 係数は $(n-1)!\,n!$

解説

[1] $n=1$ のとき $f_1(x)=x^2$

よって，$f_1(x)$ は2次多項式である。

[2] $n=k$ のとき，$f_k(x)$ が $(k+1)$ 次多項式であると仮定すると

$f_k(x)=a_kx^{k+1}+g_k(x)$（ただし，$a_k\neq 0$，$g_k(x)$ は k 次以下の多項式）……①

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると，① の両辺を x で微分して

$$f_k'(x)=(k+1)a_kx^k+g_k'(x)$$

更に，両辺を x で微分して　$f_k''(x)=k(k+1)a_kx^{k-1}+g_k''(x)$

ゆえに　$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3f_k''(x)=f_k(x)+x^3\{k(k+1)a_kx^{k-1}+g_k''(x)\}$

$=k(k+1)a_kx^{k+2}+f_k(x)+x^3g_k''(x)$ ……②

ここで，$k(k+1)a_k\neq 0$，$f_k(x)$ は $(k+1)$ 次式，$x^3g_k''(x)$ は $(k+1)$ 次以下の多項式である。

よって，$f_{k+1}(x)$ は $(k+2)$ 次式である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式である。

次に，① から，$f_{n+1}(x)$ の x^{n+2} の係数は a_{n+1} であり，② より，$f_{n+1}(x)$ の x^{n+2} の係数は $n(n+1)a_n$ であるから　$a_{n+1}=n(n+1)a_n$，$a_1=1$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{n!(n+1)!}=\dfrac{a_n}{(n-1)!n!}$　　よって　$\dfrac{a_n}{(n-1)!n!}=\dfrac{a_1}{0!1!}=1$

したがって　$a_n=(n-1)!n!$

16

解答　$e^{2ax}(x+at)^n$

解説

$f'(x)=2ae^{2ax}$，$f''(x)=(2a)^2e^{2ax}$，……

よって　$f^{(k)}(x)=(2a)^ke^{2ax}$　$(k\geqq 0)$

また　$g'(x)=nx^{n-1}$，$g''(x)=n(n-1)x^{n-2}$，……

ゆえに，$0\leqq k\leqq n$ のとき

$$g^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)x^{n-k}={}_n\mathrm{P}_kx^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

$k\geqq n+1$ のとき　$g^{(k)}(x)=0$

よって　$(f*_tg)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{2^kk!}f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{2^kk!}(2a)^ke^{2ax}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$

$$=e^{2ax}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(at)^kx^{n-k}=e^{2ax}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(at)^kx^{n-k}$$

ここで，二項定理から　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}(at)^k=(x+at)^n$

したがって　$(f*_tg)(x)=e^{2ax}(x+at)^n$

17

解答　(1) $e^x=\dfrac{1}{y}-1$　(2) $f_1(y)=y^2-y$，$a_1=1$，$b_1=-1$　(3) $a_2=2$，$b_2=-3$

(4) $a_{n+1}=(n+1)a_n$，$a_n=n!$　(5) $b_{n+1}=nb_n-(n+1)!$，$b_n=-\dfrac{1}{2}(n+1)!$

解説

(1) $y=\dfrac{1}{1+e^x}$ $(\neq 0)$ より　$1+e^x=\dfrac{1}{y}$　　よって　$e^x=\dfrac{1}{y}-1$

(2) $f_1(y)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}=-\dfrac{\frac{1}{y}-1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2}=y^2-y$

よって　$a_1=1$，$b_1=-1$

(3) $f_2(y)=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dy}f_1(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}=(2y-1)(y^2-y)=2y^3-3y^2+y$

よって　$a_2=2$，$b_2=-3$

(4) $f_n(y)$ の $(n-1)$ 次以下の部分を $g_n(y)$ とすると，$f_n(y)=a_ny^{n+1}+b_ny^n+g_n(y)$ と表せる。

$$f_{n+1}(y)=\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)=\frac{d}{dx}f_n(y)=\frac{d}{dy}f_n(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\{a_n(n+1)y^n+b_nny^{n-1}+g_n'(y)\}(y^2-y)$$

$$=(n+1)a_ny^{n+2}+\{nb_n-(n+1)a_n\}y^{n+1}-nb_ny^n+g_n'(y)(y^2-y)$$

$-nb_ny^n+g_n'(y)(y^2-y)$ は y の n 次式であるから

$a_{n+1}=(n+1)a_n$ ……①

$b_{n+1}=nb_n-(n+1)a_n$ ……②

① の両辺を $(n+1)!$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

よって　$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_1}{1!}=1$　　ゆえに　$a_n=n!$

(5) ② より　$b_{n+1}=nb_n-(n+1)!$

両辺を $n!$ で割ると　$\dfrac{b_{n+1}}{n!}=\dfrac{b_n}{(n-1)!}-(n+1)$

$n\geqq 2$ のとき　$\dfrac{b_n}{(n-1)!}=\dfrac{b_1}{0!}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{-(k+1)\}=-1-\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$

$$=-\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって　$b_n=-\dfrac{1}{2}(n+1)!$　　これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$b_n=-\dfrac{1}{2}(n+1)!$

18

解答　(1) $f_3(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4}$，$g_3(x)=\dfrac{6}{(4-x)^4}$

(2) $f_n(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$，$g_n(x)=\dfrac{n!}{(4-x)^{n+1}}$；証明は略

(3) $\dfrac{n!}{3}\left\{\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{1}{(4-x)^{n+1}}\right\}$

(4) $-\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $f_1(x)=f'_0(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$　　よって　$f_2(x)=f'_1(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$

ゆえに　$f_3(x)=f'_2(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4}$

また　$g_1(x)=g'_0(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$　　よって　$g_2(x)=g'_1(x)=\dfrac{2}{(4-x)^3}$

ゆえに　$g_3(x)=g'_2(x)=\dfrac{6}{(4-x)^4}$

(2) (1) から　$f_n(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ……①

$g_n(x)=\dfrac{n!}{(4-x)^{n+1}}$ ……②

と推測できる。

[1] $n=0$ のとき

$f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$g_0(x)=\dfrac{1}{4-x}$ であるから，$n=0$ のとき ①，② は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ①，② が成り立つ，すなわち

$f_k(x)=\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$，$g_k(x)=\dfrac{k!}{(4-x)^{k+1}}$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$f_{k+1}(x)=f'_k(x)=\frac{k!(k+1)}{(1-x)^{k+2}}=\frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}$$

$$g_{k+1}(x)=g'_k(x)=\frac{k!(k+1)}{(4-x)^{k+2}}=\frac{(k+1)!}{(4-x)^{(k+1)+1}}$$

したがって，$n=k+1$ のときにも ①，② は成り立つ。

[1]，[2] から，①，② は0以上のすべての整数 n に対して成り立つ。

(3) ${}_n\mathrm{C}_{k-1}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$

(2) から　$f_{k-1}(x)=\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$，$g_{n-k+1}(x)=\dfrac{(n-k+1)!}{(4-x)^{n-k+2}}$

よって　${}_n\mathrm{C}_{k-1}f_{k-1}(x)g_{n-k+1}(x)=\dfrac{n!}{(4-x)^{n+2}}\left(\dfrac{4-x}{1-x}\right)^k$

ゆえに　$h_n(x)=\dfrac{n!}{(4-x)^{n+2}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^k$

$\dfrac{4-x}{1-x}\neq 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^k=\frac{\frac{4-x}{1-x}\left\{1-\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{4-x}{1-x}}=\frac{x-4}{3}\left\{1-\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^{n+1}\right\}$$

よって　$h_n(x)=\dfrac{n!}{3}\left\{\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}-\dfrac{1}{(4-x)^{n+1}}\right\}$

(4) (3) から　$h_n(3)=\dfrac{n!}{3}\left\{\dfrac{1}{(-2)^{n+1}}-1\right\}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}h_n(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(-2)^{n+1}}-1\right\}=-\frac{1}{3}$

19

解答　(1) 関数 $f(x)$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという

(2) 略　(3) 略

解説

(1)　関数 $f(x)$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという．

(2)　$h(x)-h(a)=f(x)g(x)-f(a)g(a)=\{f(x)-f(a)\}g(x)+f(a)\{g(x)-g(a)\}$

よって　$h'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left\{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\cdot\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right\}$

$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

(3)　$h^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ ……①　とする．

[1]　$n=1$ のとき

(①の左辺)$=h^{(1)}(x)=h'(x)$

(①の右辺)$={}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)+{}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

微分可能である関数 $f(x)$，$g(x)$ について　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ が成り立つから，①は成り立つ．

[2]　$n=l$ のとき①が成り立つと仮定する．

$n=l+1$ のときを考えると

$$h^{(l+1)}(x)=\{h^{(l)}(x)\}'=\left\{\sum_{k=0}^{l}{}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)\right\}'$$

$$=\sum_{k=0}^{l}\left\{{}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+{}_l\mathrm{C}_k f^{(l-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right\}$$

$$={}_l\mathrm{C}_0 f^{(l+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{k=1}^{l}({}_l\mathrm{C}_k+{}_l\mathrm{C}_{k-1})f^{(l-k+1)}(x)g^{(k)}(x)$$

$$+{}_l\mathrm{C}_l f^{(0)}(x)g^{(l+1)}(x)$$

ここで，${}_l\mathrm{C}_0={}_{l+1}\mathrm{C}_0$，${}_{l+1}\mathrm{C}_k={}_l\mathrm{C}_k+{}_l\mathrm{C}_{k-1}$ ($k=1$，2，……，l)，${}_l\mathrm{C}_l={}_{l+1}\mathrm{C}_{l+1}$ が成り立つから　$h^{(l+1)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{l+1}{}_{l+1}\mathrm{C}_k f^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$

よって，①は $n=l+1$ のときにも成り立つ．

[1]，[2] から，①はすべての自然数 n について成り立つ．

①に $x=a$ を代入して　$h^{(n)}(a)=\sum\limits_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a)$

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$2^n a_n\sin\dfrac{x}{2^n}=2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}$ …… $\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$

$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(2\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)$$

$$=2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=2^{n-1}a_{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}=\cdots\cdots=2a_1\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$$

よって，n と無関係に一定である。

(2)　$\log|a_n|=\log\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+\log\left|\cos\dfrac{x}{2^2}\right|+\cdots\cdots+\log\left|\cos\dfrac{x}{2^n}\right|$ ……①

また $2^n a_n\sin\dfrac{x}{2^n}=\sin x$ から，$\sin\dfrac{x}{2^n}\fallingdotseq 0$ のとき　$a_n=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$

よって

$$\log|a_n|=\log\left|\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right|=-n\log 2+\log|\sin x|-\log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$\log|\sin x|-\log\left|\sin\dfrac{x}{2^n}\right|-n\log 2=\sum\limits_{k=1}^{n}\log\left|\cos\dfrac{x}{2^k}\right|$

両辺を x で微分すると

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{-\sin\frac{x}{2^k}}{\cos\frac{x}{2^k}}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

両辺を $-\dfrac{1}{2}$ 倍すると　$-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^{k+1}}\tan\dfrac{x}{2^k}$

ここで $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$-\frac{1}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}$$

よって　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{\pi}{2^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\times\dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\pi}\times\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{\pi}$$

2

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　略

解説

$f(2x)=(e^x+1)f(x)$ ……①とする。

(1)　①において $x=0$ とすると　　$f(0)=(e^0+1)f(0)$

すなわち　　$f(0)=2f(0)$　　　したがって　　$f(0)=0$

(2)　①において，x を $\dfrac{x}{2}$ とすると　　$f(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$x\fallingdotseq 0$ のとき $e^x-1\fallingdotseq 0$ であるから，両辺を e^x-1 で割って

$$\frac{f(x)}{e^x-1}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)}=\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-1}$$

したがって，$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$\dfrac{f(x)}{e^x-1}=\dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-1}$

(3)　(1) より $f(0)=0$ であるから　　$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

また　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{e^h-1}=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}\cdot\dfrac{1}{\frac{e^h-1}{h}}\right\}$

ここで，$g(x)=e^x$ とすると　　$g'(x)=e^x$

よって　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}=g'(0)=1$

ゆえに　　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{e^h-1}=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}\cdot\dfrac{1}{1}\right\}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

すなわち　　$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{e^h-1}$

(4)　(2) から，$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$\dfrac{f(x)}{e^x-1}=\dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}}-1}=\dfrac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{e^{\frac{x}{4}}-1}=\cdots\cdots=\dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}}-1}$

$h=\dfrac{x}{2^n}$ とおくと　　$\dfrac{f(x)}{e^x-1}=\dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}}-1}=\dfrac{f(h)}{e^h-1}$

$n\longrightarrow\infty$ のとき $h\longrightarrow 0$ であるから，(3) より

$$\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{e^{\frac{x}{2^n}}-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{e^h-1}=f'(0)$$

よって，$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$f(x)=(e^x-1)f'(0)$

$x=0$ のとき $f(0)=(1-1)f'(0)=0$ となり，(1) より $f(0)=0$ であるから，$x=0$ のときも成り立つ。

したがって，すべての実数 x について　　$f(x)=(e^x-1)f'(0)$

3

解答　(1)　略　　(2)　$\{a\mid 0<a\leqq 1,\ a=3\}$

(3)　正しくない。(反例)　$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 2 & (x\leqq 0)\end{cases}$

解説

(1)　実数 a が条件 (P) を満たすから，$|\Delta x|<r$ のとき　　$f(a+\Delta x)\leqq f(a)$

よって　　$f(a+\Delta x)-f(a)\leqq 0$

$0<\Delta x<r$ のとき　$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\leqq 0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\leqq 0$　　すなわち　$f'(a)\leqq 0$ ……①

$-r<\Delta x<0$ のとき　$\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\geqq 0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\geqq 0$　　すなわち　$f'(a)\geqq 0$ ……②

①，②から　$f'(a)=0$

(2)　$x<0$ のとき　$|x|-x=-2x$

$0\leqq x<1$ のとき　$|x|-x=0$

また，$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ であるから

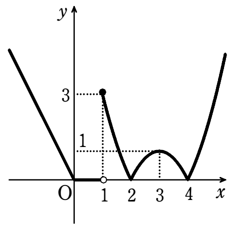
$1\leqq x\leqq 2$，$4\leqq x$ のとき

$|x^2-6x+8|=x^2-6x+8$

$2<x<4$ のとき

$|x^2-6x+8|=-(x^2-6x+8)$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



[1]　$a\neq 0,\ 1,\ 2,\ 4$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるから，a が条件 (P) を満たすとき，(1) より $f'(a)=0$ となる。よって，$0<a<1$ または $a=3$ となることが必要である。

(i)　$0<a<1$ のとき　$f(a)=0$

正の実数 r を $0<a-r$，$a+r<1$ を満たすように選べば，$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して　$f(x)=0$　　ゆえに，$f(x)\leqq f(a)$ が成り立つ。

(ii)　$a=3$ のとき

$r=1$ とすれば，グラフから，$|x-3|<r$ を満たすすべての実数 x に対して

$f(x)\leqq f(3)$

したがって，条件 (P) を満たす a の値の範囲は　$0<a<1$，$a=3$

[2]　$a=0,\ 2,\ 4$ のとき

グラフより，条件 (P) を満たさない。

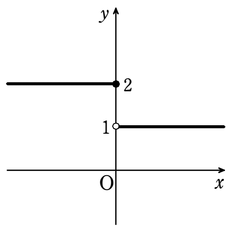
[3]　$a=1$ のとき

$r=1$ とすれば，グラフより，$|x-1|<1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)\leqq f(1)$ となるから，条件 (P) を満たす。

[1]，[2]，[3] から，求める実数 a 全体の集合は　$\{a\mid 0<a\leqq 1,\ a=3\}$

(3)　正しくない。

(反例)　$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 2 & (x\leqq 0)\end{cases}$



[1]　$a\leqq 0$ のとき　$f(a)=2$

どのような実数 r を選んでも，$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して　$f(x)\leqq 2$

よって，$f(x)\leqq f(a)$ が成り立つ。

[2]　$a>0$ のとき　$f(a)=1$

正の実数 r を $0<a-r$ を満たすように選べば，

$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して　$f(x)=1$

よって，$f(x)\leqq f(a)$ が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての実数 a は条件 (P) を満たすが，$f(x)$ は定数関数ではない。

4

解答　(1)　$S(h)=\pi\{f(a+h)+f(a)\}\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}$

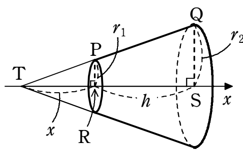
(2)　$2\pi f(a)\sqrt{\{f'(a)\}^2+1}$

解説

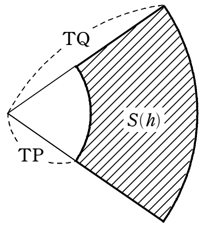
(1)　$f(a)=r_1$，$f(a+h)=r_2$ とし，[図1] のように点 R，S，T をとる。

また，$\mathrm{TR}=x$ とする。

ここで，$f'(x)>0$，$h>0$ から　$r_2>r_1$



[図1]



[図2]

$\triangle\mathrm{PTR}\backsim\triangle\mathrm{QTS}$ であるから　$x:r_1=(x+h):r_2$

よって　$r_1x+hr_1=r_2x$　　ゆえに　$x=\dfrac{hr_1}{r_2-r_1}$

ここで　$\mathrm{TP}=\sqrt{r_1{}^2+x^2}$，$\mathrm{TQ}=\dfrac{r_2}{r_1}\mathrm{TP}$

よって，[図2] から

$$S(h)=\frac{1}{2}\mathrm{TQ}\cdot 2\pi r_2-\frac{1}{2}\mathrm{TP}\cdot 2\pi r_1=\frac{\pi r_2{}^2\mathrm{TP}}{r_1}-\pi r_1\mathrm{TP}=\frac{\pi\sqrt{r_1{}^2+x^2}(r_2{}^2-r_1{}^2)}{r_1}$$

$$=\pi\sqrt{r_1{}^2+\left(\frac{hr_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{r_2{}^2-r_1{}^2}{r_1}=\frac{\pi r_1}{r_2-r_1}\sqrt{(r_2-r_1)^2+h^2}\cdot\frac{(r_2+r_1)(r_2-r_1)}{r_1}$$

$$=\pi(r_2+r_1)\sqrt{(r_2-r_1)^2+h^2}$$

$r_1=f(a)$，$r_2=f(a+h)$ であるから

$$S(h)=\pi\{f(a+h)+f(a)\}\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}$$

(2)　$$\lim_{h\to+0}\frac{S(h)}{h}=\lim_{h\to+0}\pi\{f(a+h)+f(a)\}\sqrt{\frac{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}{h^2}}$$

$$=\pi\lim_{h\to+0}\{f(a+h)+f(a)\}\sqrt{\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}^2+1}$$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ であるから　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{S(h)}{h}=2\pi f(a)\sqrt{\{f'(a)\}^2+1}$

5

解答　(1)　$f(0)=1$，$g(0)=0$

(2)　(ア)　$\dfrac{f(y)-1}{y}$　(イ)　$\dfrac{g(y)}{y}$　(ウ)　$2f(x)-g(x)$　(エ)　$f(x)+2g(x)$

(オ)　4　(カ)　$4x$　(キ)　e^{4x}

解説

(1)　①，②に $x=y=0$ を代入すると　$f(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2$ ……①′

$g(0)=2f(0)g(0)$ ……②′

②′において $g(0)\neq 0$ と仮定すると $f(0)=\dfrac{1}{2}$

このとき①′から $\{g(0)\}^2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}<0$ となり不適。

よって　$g(0)=0$

したがって，①′と $\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2>0$ から　$f(0)=1$

(2)　$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(x)f(y)-g(x)g(y)-f(x)}{y}={}^{ア}\frac{f(y)-1}{y}f(x)-{}^{イ}\frac{g(y)}{y}g(x)$$

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{y}=\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-g(x)}{y}=\frac{g(y)}{y}f(x)+\frac{f(y)-1}{y}g(x)$$

よって，$y\to 0$ とすると，$f(0)=1$，$g(0)=0$，$f'(0)=2$，$g'(0)=1$ から

$$\begin{cases}f'(x)={}^{ウ}2f(x)-g(x) & \cdots\cdots③\\ g'(x)={}^{エ}f(x)+2g(x) & \cdots\cdots④\end{cases}$$

このとき $F(x)=\log[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$ から

$$F'(x)=\frac{2\{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)\}}{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2}$$

③，④から　$f(x)f'(x)+g(x)g'(x)=f(x)\{2f(x)-g(x)\}+g(x)\{f(x)+2g(x)\}$

$=2[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$

ゆえに　$F'(x)={}^{オ}4$

また　$F(0)=\log[\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2]=\log 1=0$

よって　$F(x)={}^{カ}4x$

ゆえに　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2={}^{キ}e^{4x}$

6

解答　(1)　略　　(2)　証明は略，$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

解説

$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$ ……①

(1)　$-1<x<1$ のとき　$-1<-x<1$

①において，$y=-x$ とすると　$f(x)+f(-x)=f\left(\dfrac{x-x}{1-x^2}\right)$

よって　$f(x)+f(-x)=f(0)$ ……②

また，①において，$x=y=0$ とすると　$f(0)+f(0)=f(0)$

よって　$f(0)=0$ ……③

②，③から　$f(x)+f(-x)=0$　　したがって　$f(x)=-f(-x)$

(2)　$f'(0)=1$ から　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$　　③から　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$ ……④

$-1<x<1$ で，h が十分に小さいとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(-x)}{h}\quad ((1)から)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{x+h-x}{1+(x+h)(-x)}\right)}{h}\quad (①から)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\dfrac{h}{1-x^2-hx}}\cdot\frac{1}{1-x^2-hx}$$

$h\to0$ のとき，$\dfrac{h}{1-x^2-hx}\to0$ であるから，④ より $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f\left(\dfrac{h}{1-x^2-hx}\right)}{\dfrac{h}{1-x^2-hx}}=1$

よって $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1\cdot\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$

したがって，$f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲で微分可能で $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

7

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき $f_1(x)=x$，$g_1(x)=1$ とおけばよい。

[2] $n=k$ のとき 題意を満たす $f_k(x)$，$g_k(x)$ が存在すると仮定する。

$n=k+1$ とすると

$\cos(k+1)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=f_k(\cos\theta)\cos\theta-g_k(\cos\theta)\sin^2\theta$，

$\sin(k+1)\theta=\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=g_k(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta+f_k(\cos\theta)\sin\theta$

$=\{g_k(\cos\theta)\cos\theta+f_k(\cos\theta)\}\sin\theta$

そこで $f_{k+1}(x)=f_k(x)x-g_k(x)(1-x^2)$，$g_{k+1}(x)=g_k(x)x+f_k(x)$ とおくと，
これらは題意を満たす。

[1]，[2] から，題意を満たす $f_n(x)$ と $g_n(x)$ が存在する。

(2) $\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$ の両辺を θ で微分すると $-n\sin n\theta=f_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)$

よって $-ng_n(\cos\theta)\sin\theta=f_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)$ が任意の θ に対して成り立つ。

ゆえに，$ng_n(x)=f_n'(x)$ が無限個の x について成り立ち，かつ，両辺は整式であるから，恒等的に $f_n'(x)=ng_n(x)$ である。

8

解答 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=c$ (2) 0 (3) 略

解説

(1) $f(x)$ は $x=0$ で連続であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=c$ ……①

$\dfrac{1}{n+1}\leqq|x|<\dfrac{1}{n}$ の各辺の逆数をとって

$n<\dfrac{1}{|x|}\leqq n+1$ ……② すなわち $\dfrac{1}{|x|}-1\leqq n<\dfrac{1}{|x|}$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}-1\right)=\infty$ であるから，$x\to0$ のとき $n\to\infty$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{n\to\infty}c_n$ よって，① から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=c$

(2) $f(x)$ の定義から $f(x)=f(-x)$

ゆえに $\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right\}=-f'(0)$

よって $2f'(0)=0$ すなわち $f'(0)=0$

(3) $f'(0)$ が存在するとき，(2) から $\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ ……③

ここで，(1) の ② の不等式から

$n|f(x)-f(0)|\leqq\dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x|}\leqq(n+1)|f(x)-f(0)|$

ゆえに $n|c_n-c|\leqq\dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x|}\leqq(n+1)|c_n-c|$ ……④

$\dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x|}\leqq(n+1)|c_n-c|$ から $\dfrac{n}{n+1}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqq n|c_n-c|$

これと ④ の左の不等式から

$\dfrac{n}{n+1}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqq n|c_n-c|\leqq\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|$

ここで，$n\to\infty$ とすると，$x\to0$ であるから，③ より

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=|f'(0)|=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n|c_n-c|=0$ したがって，数列 $\{n(c_n-c)\}$ は 0 に収束する。

9

解答 (1) $f(0)=0$ (2) 略 (3) $f'(x+y)=f'(x)\sqrt{1+\{f(y)\}^2}+\dfrac{f(y)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

(4) $f'(x)=\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$

解説

$f(x+y)=f(x)\sqrt{1+\{f(y)\}^2}+f(y)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$ ……①

(1) ① に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$f(0)=f(0)\sqrt{1+\{f(0)\}^2}+f(0)\sqrt{1+\{f(0)\}^2}$

よって $f(0)\{2\sqrt{1+\{f(0)\}^2}-1\}=0$

$2\sqrt{1+\{f(0)\}^2}-1\geqq1$ であるから $f(0)=0$

(2) ① に $y=-x$ を代入すると

$f(0)=f(x)\sqrt{1+\{f(-x)\}^2}+f(-x)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$

(1) より $f(0)=0$ であるから

$f(x)\sqrt{1+\{f(-x)\}^2}=-f(-x)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$ ……②

両辺を 2 乗すると

$\{f(x)\}^2[1+\{f(-x)\}^2]=\{f(-x)\}^2[1+\{f(x)\}^2]$

整理すると $\{f(-x)\}^2=\{f(x)\}^2$

ゆえに $f(-x)=f(x)$ または $f(-x)=-f(x)$

ここで $f(-x)=f(x)$ のとき，② から $2f(x)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}=0$

よって，任意の実数 x に対して $f(x)=0$

これは $f(-x)=-f(x)$ を満たす。

したがって $f(-x)=-f(x)$

(3) ① の両辺を x で微分すると

$f'(x+y)=f'(x)\sqrt{1+\{f(y)\}^2}+\dfrac{f(y)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$ ……③

(4) ③ に $y=-x$ を代入すると

$f'(0)=f'(x)\sqrt{1+\{f(-x)\}^2}+\dfrac{f(-x)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

$f'(0)=1$ であるから

$1=f'(x)\sqrt{1+\{f(-x)\}^2}+\dfrac{f(-x)f(x)f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

(2) より $f(-x)=-f(x)$ であるから

$1=f'(x)\sqrt{1+\{f(x)\}^2}-\dfrac{\{f(x)\}^2f'(x)}{\sqrt{1+\{f(x)\}^2}}$

分母を払うと $\sqrt{1+\{f(x)\}^2}=f'(x)[1+\{f(x)\}^2]-\{f(x)\}^2f'(x)$

したがって $f'(x)=\sqrt{1+\{f(x)\}^2}$

10

解答 (1) $f_6(t)=32t^6-48t^4+18t^2-1$ (2) 2^{2m-1} (3) 略

解説

(1) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が成り立ち，$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\cos n\theta$，$\sin n\theta$ は実数であるから，$\cos n\theta$ は $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ の実部と一致する。

よって

$\cos6\theta={}_6C_0(\cos\theta)^6+{}_6C_2(\cos\theta)^4(i\sin\theta)^2+{}_6C_4(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^4+{}_6C_6(i\sin\theta)^6$

$=\cos^6\theta-15\cos^4\theta\sin^2\theta+15\cos^2\theta\sin^4\theta-\sin^6\theta$

$t=\cos\theta$ とおくと $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-t^2$

よって $\cos6\theta=t^6-15t^4(1-t^2)+15t^2(1-t^2)^2-(1-t^2)^3$

$=32t^6-48t^4+18t^2-1$

ゆえに $f_6(t)=32t^6-48t^4+18t^2-1$

(2) (1) と同様にして

$\cos2m\theta={}_{2m}C_0(\cos\theta)^{2m}+{}_{2m}C_2(\cos\theta)^{2m-2}(i\sin\theta)^2+{}_{2m}C_4(\cos\theta)^{2m-4}(i\sin\theta)^4$

$+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}(i\sin\theta)^{2m}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}C_{2k}(\cos\theta)^{2m-2k}(i\sin\theta)^{2k}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k{}_{2m}C_{2k}(\cos\theta)^{2(m-k)}(\sin^2\theta)^k$

$t=\cos\theta$ とおくと

$\displaystyle\cos2m\theta=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k{}_{2m}C_{2k}t^{2(m-k)}(1-t^2)^k=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k{}_{2m}C_{2k}t^{2(m-k)}\left\{\sum_{l=0}^{k}{}_kC_l(-t^2)^l\right\}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l}{}_{2m}C_{2k}\cdot{}_kC_lt^{2(m-k+l)}$

この式の t^{2m} の項は $2(m-k+l)=2m$ すなわち $k=l$ のときである。

$k=l$ のとき，$(-1)^{k+l}=1$，${}_kC_l=1$ であるから，$f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は

${}_{2m}C_0+{}_{2m}C_2+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}$

ここで $(x+1)^{2m}={}_{2m}C_0x^{2m}+{}_{2m}C_1x^{2m-1}+{}_{2m}C_2x^{2m-2}+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}$

この式に $x=1$，-1 をそれぞれ代入すると

$2^{2m}={}_{2m}C_0+{}_{2m}C_1+{}_{2m}C_2+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}$

$0={}_{2m}C_0-{}_{2m}C_1+{}_{2m}C_2-\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}$

よって $2^{2m}=2({}_{2m}C_0+{}_{2m}C_2+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m})$

ゆえに ${}_{2m}C_0+{}_{2m}C_2+\cdots\cdots+{}_{2m}C_{2m}=2^{2m-1}$

したがって，$f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は 2^{2m-1}

別解 $\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cos\theta$ であるから

$f_{n+2}(t)+f_n(t)=2tf_{n+1}(t)$

よって $f_{n+2}(t)=2tf_{n+1}(t)-f_n(t)$

また $f_1(t)=\cos\theta=t$，$f_2(t)=\cos2\theta=2t^2-1$

これらより $f_n(t)=2^{n-1}t^n+(n-1$ 次以下$)$ ……①

であると推測できる。

この推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1,\ 2$ のとき

$f_1(t)=t$，$f_2(t)=2t^2-1$ であるから，① は正しい。

[2]　$n=k,\ k+1$ のとき ① が正しいと仮定すると

$$f_k(t)=2^{k-1}t^k+(k-1\text{ 次以下})$$
$$f_{k+1}(t)=2^kt^{k+1}+(k\text{ 次以下})$$

$n=k+2$ のときを考えると

$$f_{k+2}(t)=2tf_{k+1}(t)-f_k(t)=2t\{2^kt^{k+1}+(k\text{ 次以下})\}-\{2^{k-1}t^k+(k-1\text{ 次以下})\}$$
$$=2^{k+1}t^{k+2}+(k+1\text{ 次以下})$$

よって，① は $n=k+2$ のときも正しい。

[1]，[2] より，すべての自然数 n で ① は正しい。

よって，$f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数は　2^{2m-1}

(3)　$\cos n\theta=f_n(\cos\theta)$

この両辺を θ で微分すると　$-\sin n\theta\cdot n=f_n'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)$

よって　$\dfrac{1}{n}f_n'(\cos\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

ゆえに　$$f_n(t)^2+(1-t^2)\left\{\frac{1}{n}f_n'(t)\right\}^2=f_n(\cos\theta)^2+(1-\cos^2\theta)\left\{\frac{1}{n}f_n'(\cos\theta)\right\}^2$$
$$=\cos^2 n\theta+\sin^2\theta\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta=1$$

11

解答　(1)　略　　(2)　(ア)　$a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$　　(イ)　略

解説

(1)　[1]　$n=1$ のとき

$$f'(x)=-\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2}+\frac{\beta}{(x-\beta)^2}=(-1)^1 1!\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{1+1}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{1+1}}\right\}$$ であるから，

$n=1$ のときは成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}}\right\}$$ が成り立つと仮定すると

$$f^{(k+1)}(x)=(-1)^k k!\left\{-\frac{(k+1)\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}}+\frac{(k+1)\beta}{(x-\beta)^{k+2}}\right\}$$
$$=(-1)^{k+1}(k+1)!\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{k+2}}\right\}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}}\right\}$$ が成り立つ。

(2)　(ア)　$b^2>4c$ であるから，2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，それらが α，β であるから　$x^2-bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\beta}{x-\beta}\right)$$ であるから，(1) の結果より

$$h^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}}\right\}$$

よって　$h^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{\alpha^n}-\dfrac{1}{\beta^n}\right)$

解と係数の関係により，$\alpha+\beta=b$，$\alpha\beta=c$ であるから

$$a_n=-\frac{\alpha^n\beta^n}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

(イ)　$$a_{n+2}-ba_{n+1}+ca_n=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-\alpha^{n+2}+\alpha\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta+\beta^{n+2}+\alpha^{n+1}\beta-\alpha\beta^{n+1})$$
$$=0$$

12

解答　(1)　$a_0=1$　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　$a_n=2n+1$

解説

(1)　$H_0(x)=1$ であるから　$f_0(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

よって　$f_0'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$，$f_0''(x)=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}$

ゆえに，$-f_0''(x)+x^2f_0(x)=f_0(x)$ が成り立つから　$a_0=1$

(2)　$f_n'(x)=H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}-xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ であるから

$$f_{n+1}(x)=H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=\{2xH_n(x)-H_n'(x)\}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}-\left\{H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}-xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}$$
$$=xf_n(x)-f_n'(x)$$

(3)　$f(x)$ は 2 回微分可能であるから　$g'(x)=f(x)+xf'(x)-f''(x)$

$-f''(x)=af(x)-x^2f(x)$ を代入すると　$g'(x)=(a+1)f(x)-x^2f(x)+xf'(x)$

よって　$$g''(x)=(a+1)f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+f'(x)+xf''(x)$$
$$=(a+2)f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+xf''(x)$$
$$=(a+2)f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+x\{x^2f(x)-af(x)\}$$
$$=(a+2)\{f'(x)-xf(x)\}-x^2f'(x)+x^3f(x)$$
$$=-(a+2)g(x)+x^2\{xf(x)-f'(x)\}=-(a+2)g(x)+x^2g(x)$$

ゆえに　$-g''(x)+x^2g(x)=(a+2)g(x)$

(4)　$g_n(x)=xf_n(x)-f_n'(x)$ とおくと，(2) から　$f_{n+1}(x)=g_n(x)$

また，$-f_n''(x)+x^2f_n(x)=a_nf_n(x)$ が成り立つとき，(3) から

$$-g_n''(x)+x^2g_n(x)=(a_n+2)g_n(x)$$

すなわち　$-f_{n+1}''(x)+x^2f_{n+1}(x)=(a_n+2)f_{n+1}(x)$

よって　$a_{n+1}=a_n+2$

数列 $\{a_n\}$ は $a_0=1$，公差 2 の等差数列であるから　$a_n=2n+1$

13

解答　(1)　$P_2(-a)=8a^2$，$P_3(-a)=-48a^3$　　(2)　略

(3)　$P_n(-a)=n!(-2a)^n$，$P_n(a)=n!(2a)^n$

解説

(1)　$$P_2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2a^2x^2+a^4)=\frac{d}{dx}(4x^3-4a^2x)=12x^2-4a^2$$

よって　$P_2(-a)=12(-a)^2-4a^2=8a^2$

また　$$P_3(x)=\frac{d^3}{dx^3}(x^6-3a^2x^4+3a^4x^2-a^6)=\frac{d^2}{dx^2}(6x^5-12a^2x^3+6a^4x)$$
$$=\frac{d}{dx}(30x^4-36a^2x^2+6a^4)=120x^3-72a^2x$$

ゆえに　$P_3(-a)=120(-a)^3-72a^2(-a)=-48a^3$

(2)　$(uv)^{(n)}={}_n\mathrm{C}_0u^{(n)}v+{}_n\mathrm{C}_1u^{(n-1)}v^{(1)}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}u^{(1)}v^{(n-1)}+{}_n\mathrm{C}_nuv^{(n)}$　……(＊)

であることを n に関する数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=(uv)^{(1)}=u^{(1)}v+uv^{(1)}$

(右辺)$={}_1\mathrm{C}_0u^{(1)}v+{}_1\mathrm{C}_1uv^{(1)}=u^{(1)}v+uv^{(1)}$

よって，(＊) は成り立つ。

[2]　$n=i$ のとき，(＊) が成り立つと仮定すると

$$(uv)^{(i)}={}_i\mathrm{C}_0u^{(i)}v+{}_i\mathrm{C}_1u^{(i-1)}v^{(1)}+\cdots\cdots+{}_i\mathrm{C}_{i-1}u^{(1)}v^{(i-1)}+{}_i\mathrm{C}_iuv^{(i)}$$

両辺を x で微分すると

$$(uv)^{(i+1)}={}_i\mathrm{C}_0u^{(i+1)}v+{}_i\mathrm{C}_0u^{(i)}v^{(1)}+{}_i\mathrm{C}_1u^{(i)}v^{(1)}+{}_i\mathrm{C}_1u^{(i-1)}v^{(2)}+\cdots\cdots$$
$$+{}_i\mathrm{C}_{i-1}u^{(2)}v^{(i-1)}+{}_i\mathrm{C}_{i-1}u^{(1)}v^{(i)}+{}_i\mathrm{C}_iu^{(1)}v^{(i)}+{}_i\mathrm{C}_iuv^{(i+1)}$$
$$={}_i\mathrm{C}_0u^{(i+1)}v+({}_i\mathrm{C}_0+{}_i\mathrm{C}_1)u^{(i)}v^{(1)}+\cdots\cdots+({}_i\mathrm{C}_{i-1}+{}_i\mathrm{C}_i)u^{(1)}v^{(i)}+{}_i\mathrm{C}_iuv^{(i+1)}$$

${}_i\mathrm{C}_0={}_{i+1}\mathrm{C}_0\ (=1)$，${}_i\mathrm{C}_i={}_{i+1}\mathrm{C}_{i+1}\ (=1)$，${}_i\mathrm{C}_{k-1}+{}_i\mathrm{C}_k={}_{i+1}\mathrm{C}_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ i)$

であるから

$$(uv)^{(i+1)}={}_{i+1}\mathrm{C}_0u^{(i+1)}v+{}_{i+1}\mathrm{C}_1u^{(i)}v^{(1)}+\cdots\cdots+{}_{i+1}\mathrm{C}_iu^{(1)}v^{(i)}+{}_{i+1}\mathrm{C}_{i+1}uv^{(i+1)}$$

よって，$n=i+1$ のときも (＊) は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して (＊) は成り立つ。

(3)　$P_n(x)=\{(x^2-a^2)^n\}^{(n)}=\{(x+a)^n(x-a)^n\}^{(n)}$

$(x+a)^n=u$，$(x-a)^n=v$ とすると，(2) で示したライプニッツの公式から

$$P_n(x)=(uv)^{(n)}$$
$$={}_n\mathrm{C}_0u^{(n)}v+{}_n\mathrm{C}_1u^{(n-1)}v^{(1)}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}u^{(1)}v^{(n-1)}+{}_n\mathrm{C}_nuv^{(n)}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，0 以上の整数 $k\ (0\leqq k\leqq n)$ について

$$u^{(k)}=\{(x+a)^n\}^{(k)}={}_n\mathrm{P}_k(x+a)^{n-k},\quad v^{(k)}=\{(x-a)^n\}^{(k)}={}_n\mathrm{P}_k(x-a)^{n-k}$$

よって　$$u^{(k)}(-a)=\begin{cases}0 & (0\leqq k\leqq n-1)\\ n! & (k=n)\end{cases},\quad v^{(k)}(a)=\begin{cases}0 & (0\leqq k\leqq n-1)\\ n! & (k=n)\end{cases}$$

したがって，① から

$$P_n(-a)={}_n\mathrm{C}_0u^{(n)}(-a)v(-a)=1\cdot n!\cdot(-a-a)^n=n!(-2a)^n$$
$$P_n(a)={}_n\mathrm{C}_nu(a)v^{(n)}(a)=1\cdot(a+a)^n\cdot n!=n!(2a)^n$$

14

解答　(1)　証明略，$a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n$，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$

(2)　$a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$，$b_n=(-1)^nn!$

解説

(1)　[1]　$n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\log x\times 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

よって，$a_1=1$，$b_1=-1$ とすればよい。

[2]　$n=k$ のとき

$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と表されると仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$f^{(k+1)}(x)=\left(\frac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}\right)'=b_k\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^{k+1}}-(a_k+b_k\log x)\times\frac{k+1}{x^{k+2}}$$

$$=\frac{b_k-(k+1)a_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

よって，$a_{k+1}=b_k-(k+1)a_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とすればよい。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して与えられた命題は成り立つ。

また　$a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n$，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$

(2)　$b_{n+1}=-(n+1)b_n$ から　$\dfrac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\dfrac{b_n}{(-1)^n n!}$

$b_1=-1$ であるから　$\dfrac{b_n}{(-1)^n n!}=\dfrac{-1}{(-1)\times 1!}$

ゆえに　$b_n=(-1)^n n!$

したがって，$a_{n+1}=(-1)^n n!-(n+1)a_n$ から

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=-\frac{1}{n+1}+\frac{a_n}{(-1)^n n!}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!}=\frac{a_1}{(-1)\times 1!}+\sum_{l=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{l+1}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

$h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ であるから　$a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$

15

解答　(1)　略

(2)　(ア)　x^{p-1}　(イ)　$r'(x)(x-1)+pr(x)$　(ウ)　x^{p-1}　(エ)　$\dfrac{p+k-1}{k}$

(オ)　$\dfrac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!}(-1)^p$

解説

(1)　$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$ $(b_n\neq 0)$ とおく．

$g^{(k)}(x)=b_n\,{}_n\mathrm{P}_kx^{n-k}+b_{n-1}\,{}_{n-1}\mathrm{P}_kx^{n-k-1}+\cdots\cdots+b_k\,{}_k\mathrm{P}_k$

ただし　${}_m\mathrm{P}_k=\dfrac{m!}{(m-k)!}$ $(m\geqq k)$

${}_k\mathrm{P}_k=k!$ であるから　$g^{(k)}(0)=b_kk!$

$g^{(k)}(0)=0$ のとき　$b_k=0$

これが $k=0$，1，2，……，$m-1$ について成り立つ．

よって，$g(x)$ は m 次以上の項からなり，$(n-m)$ 次式 $h(x)$ を用いて，$g(x)=h(x)x^m$ と表される．

(2)　条件 (B) より，$(2p-2)$ 次式 $f'(x)$ に対して　$f^{(k+1)}(0)=0$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ p-2)$

よって，(1) より，$(p-1)$ 次式 $h(x)$ を用いて　$f'(x)=h(x)x^{p-1}$

と表される．一方，$f(x)=r(x)(x-1)^p$ であるから

$$f'(x)=\{r'(x)(x-1)+pr(x)\}(x-1)^{p-1}\quad\cdots\cdots①$$

したがって，$f'(x)$ は x^{p-1}，$(x-1)^{p-1}$ で割り切れ

$$f'(x)=A(x)x^{p-1}(x-1)^{p-1}\quad\cdots\cdots②$$

と表される．① と

$r(x)=a_{p-1}x^{p-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$

$r'(x)=(p-1)a_{p-1}x^{p-2}+\cdots\cdots+a_1$

より $f'(x)$ の最高次の項は　$\{(p-1)a_{p-1}+pa_{p-1}\}x^{2p-2}=(2p-1)a_{p-1}x^{2p-2}$

一方，② より $f'(x)$ の最高次の項は

$(A(x)$ の最高次の項$)\times x^{2p-2}$

である．

$f'(x)$ の次数は $2p-2$ であるから，$A(x)$ は定数で $(2p-1)a_{p-1}$ でなければならない．

ゆえに，② から　$f'(x)=(2p-1)a_{p-1}(x-1)^{p-1}\times x^{p-1}$

① から　$r'(x)(x-1)+pr(x)=(2p-1)a_{p-1}x^{p-1}$

ここで両辺の x^{k-1} $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1)$ の係数を比較すると

$(k-1)a_{k-1}-ka_k+pa_{k-1}=0$

よって　$a_k=\dfrac{p+k-1}{k}a_{k-1}$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1)$

また　$f(0)=r(0)(-1)^p=a_0(-1)^p$

(A) から　$a_0(-1)^p=1$　　ゆえに　$a_0=(-1)^p$

よって　$a_k=\dfrac{p+k-1}{k}\cdot\dfrac{p+k-2}{k-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{p}{1}\times a_0=\dfrac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!}(-1)^p$