1

解答　C は積分定数とする。

(1)　$\dfrac{x^4}{4}-x^3+\dfrac{x^2}{2}-4x+C$　　(2)　$3y^3+6y^2+4y+C$

(3)　$\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{2}xt^2-x^2t+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　(与式)$=\dfrac{x^4}{4}-3\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-4x+C=\dfrac{x^4}{4}-x^3+\dfrac{x^2}{2}-4x+C$

(2)　(与式)$=\displaystyle\int(9y^2+12y+4)dy=9\cdot\frac{y^3}{3}+12\cdot\frac{y^2}{2}+4y+C$

$=3y^3+6y^2+4y+C$

(3)　$\displaystyle\int(t-x)(2t+x)dt=\int(2t^2-xt-x^2)dt=2\int t^2dt-x\int tdt-x^2\int dt$

$=\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{2}xt^2-x^2t+C$

2

解答　(1)　$F(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+3$　　(2)　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x-\dfrac{11}{2}$

解説

(1)　$F'(x)=4x^2-x+1$ から

$F(x)=\displaystyle\int(4x^2-x+1)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+C$　(C は積分定数)

$F(0)=3$ から　　$C=3$

よって　　$F(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+3$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$F(x)=\displaystyle\int(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$　(C は積分定数)

$F(x)=xf(x)-x^3+2x^2$ であるから

$\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C=x(ax^2+bx+c)-x^3+2x^2$

よって　　$\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C=(a-1)x^3+(b+2)x^2+cx$

これが x についての恒等式であるから　　$\dfrac{a}{3}=a-1$,　$\dfrac{b}{2}=b+2$,　$C=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=-4$　　　このとき　　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x+c$

条件 $f(-1)=0$ から　　$\dfrac{3}{2}+4+c=0$　　　よって　　$c=-\dfrac{11}{2}$

したがって　　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-4x-\dfrac{11}{2}$

参考　上の解答では $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ の関係を利用したが，次のように $F'(x)=f(x)$ の関係を利用して解いてもよい。

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$F(x)=xf(x)-x^3+2x^2=x(ax^2+bx+c)-x^3+2x^2$

$=(a-1)x^3+(b+2)x^2+cx$

よって　　$F'(x)=3(a-1)x^2+2(b+2)x+c$

$F'(x)=f(x)$ であるから　　$3(a-1)x^2+2(b+2)x+c=ax^2+bx+c$

これが x についての恒等式であるから

$3(a-1)=a$,　$2(b+2)=b$　　　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=-4$

以下，上の解答と同様にして c を求める。

3

解答　(1)　$\dfrac{5}{6}$　　(2)　$\dfrac{28}{3}$　　(3)　$-\dfrac{27}{4}$

解説

(1)　(与式)$=\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]_1^2=\left(\dfrac{8}{3}-2\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{6}$

(2)　与式$=\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2-4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{-1}^{3}$

$=(9-18+12)-\left(-\dfrac{1}{3}-2-4\right)=\dfrac{28}{3}$

(3)　(与式)$=\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2-4)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-4x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\dfrac{1}{4}+1-4\right)-(4-8+8)=-\dfrac{27}{4}$

4

解答　(1)　0　　(2)　$\dfrac{16}{3}$　　(3)　$\dfrac{92}{3}$　　(4)　$\dfrac{27}{2}$

解説

(1)　上端と下端が等しいから　　(与式)$=0$

(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{0}(3x^3+x^2)dx-\int_{2}^{0}(3x^3+x^2)dx=\int_{-2}^{0}(3x^3+x^2)dx+\int_{0}^{2}(3x^3+x^2)dx$

$=\displaystyle\int_{-2}^{2}(3x^3+x^2)dx=\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

$=\left(12+\dfrac{8}{3}\right)-\left(12-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{8}{3}\cdot2=\dfrac{16}{3}$

(3)　(与式)$=\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+3)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+3\right)-(-18-9)=\frac{92}{3}$

(4)　与式$=\displaystyle\int_{1}^{3}(9x^2-2x^3)dx+\int_{3}^{2}(9x^2-2x^3)dx$

$=\displaystyle\int_{1}^{2}(9x^2-2x^3)dx=\left[3x^3-\frac{x^4}{2}\right]_{1}^{2}$

$=(24-8)-\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{2}$

5

解答　48

解説

$\displaystyle\int_{-3}^{3}(4x^3+6x^2-9x-10)dx=\int_{-3}^{3}(4x^3-9x)dx+\int_{-3}^{3}(6x^2-10)dx$

$=0+2\displaystyle\int_{0}^{3}(6x^2-10)dx=2\Big[2x^3-10x\Big]_{0}^{3}$

$=2(2\cdot3^3-10\cdot3-0)=48$

6

解答　$a=3$，$b=4$，$c=1$

解説

$f(1)=8$ から　　$a+b+c=8$　……①

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2+c)dx$

$=2\left[\dfrac{a}{3}x^3+cx\right]_0^1=2\left(\dfrac{a}{3}+c\right)$

よって　　$2\left(\dfrac{a}{3}+c\right)=4$　　　ゆえに　　$a+3c=6$　……②

また，$f'(x)=2ax+b$ から

$\displaystyle\int_{-1}^{1}xf'(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x(2ax+b)dx=\int_{-1}^{1}(2ax^2+bx)dx$

$=4a\displaystyle\int_{0}^{1}x^2dx=4a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}a$

よって　　$\dfrac{4}{3}a=4$　　　ゆえに　　$a=3$

したがって，①，② から　　$b=4$，$c=1$

$\boxed{1}$

解答　C は積分定数とする

(1) $2x^2+7x+C$　　(2) $3x^4-3x^3+\dfrac{11}{2}x^2-10x+C$

(3) $4t^3-\dfrac{t^2}{2}-6t+C$　　(4) $\dfrac{x^4}{4}+3x^3+\dfrac{27}{2}x^2+27x+C$

(5) $\dfrac{2}{3}xt^3+\dfrac{1}{2}(x^2+2)t^2+xt+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $(\text{与式})=4\displaystyle\int xdx+7\int dx=4\cdot\frac{x^2}{2}+7x+C=2x^2+7x+C$

(2) $\text{与式})=12\displaystyle\int x^3dx-9\int x^2dx+11\int xdx-10\int dx$

$\quad=12\cdot\dfrac{x^4}{4}-9\cdot\dfrac{x^3}{3}+11\cdot\dfrac{x^2}{2}-10x+C$

$\quad=3x^4-3x^3+\dfrac{11}{2}x^2-10x+C$

(3) $(\text{与式})=\displaystyle\int(12t^2-t-6)dt=12\cdot\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t+C=4t^3-\frac{t^2}{2}-6t+C$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\int(x^3+9x^2+27x+27)dx=\frac{x^4}{4}+9\cdot\frac{x^3}{3}+27\cdot\frac{x^2}{2}+27x+C$

$\quad=\dfrac{x^4}{4}+3x^3+\dfrac{27}{2}x^2+27x+C$

(5) $\displaystyle\int(tx+1)(x+2t)dt=\int\{2xt^2+(x^2+2)t+x\}dt$

$\quad=\dfrac{2}{3}xt^3+\dfrac{1}{2}(x^2+2)t^2+xt+C$

$\boxed{2}$

解答　(1) ① $F(x)=2x^2+2x+1$　　② $F(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-\dfrac{7}{2}$

(2) $f(x)=3x^2-6x+3$

解説

(1) ① $F'(x)=4x+2$ であるから

$F(x)=\displaystyle\int(4x+2)dx=2x^2+2x+C$　(C は積分定数)

$F(0)=1$ から　$C=1$　よって　$F(x)=2x^2+2x+1$

② $F'(x)=3(x-1)(x-2)$ であるから

$F(x)=\displaystyle\int3(x-1)(x-2)dx$

$\quad=\displaystyle\int(3x^2-9x+6)dx=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+C$　(C は積分定数)

$F(1)=-1$ から　$1-\dfrac{9}{2}+6+C=-1$　よって　$C=-\dfrac{7}{2}$

ゆえに　$F(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-\dfrac{7}{2}$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ とおくと

$F(x)=\displaystyle\int(ax^2+bx+c)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$　(C は積分定数)

$F(x)=xf(x)-2x^3+3x^2$ であるから

$\quad\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C=x(ax^2+bx+c)-2x^3+3x^2$

よって　$\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C=(a-2)x^3+(b+3)x^2+cx$

これが x についての恒等式であるから

$\dfrac{a}{3}=a-2,\ \dfrac{b}{2}=b+3,\ C=0$　ゆえに　$a=3,\ b=-6$　($a\neq0$ を満たす)

このとき　$f(x)=3x^2-6x+c$

$f(1)=0$ から　$3-6+c=0$　よって　$c=3$

したがって　$f(x)=3x^2-6x+3$

$\boxed{3}$

解答　(1) 14　(2) -3　(3) 1　(4) $\dfrac{14}{3}$　(5) $\dfrac{65}{3}$　(6) $\dfrac{64}{3}$

解説

(1) $(\text{与式})=\Big[2x^3-x\Big]_0^2=(16-2)-0=14$

(2) $(\text{与式})=\Big[-3x\Big]_1^2=-6-(-3)=-3$

(3) $(\text{与式})=\Big[x^3+x^2-x\Big]_0^1=(1+1-1)-0=1$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\int_2^4(x^2-3x+2)dx=\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_2^4$

$\quad=\left(\dfrac{64}{3}-24+8\right)-\left(\dfrac{8}{3}-6+4\right)=\dfrac{14}{3}$

(5) $(\text{与式})=\displaystyle\int_{-2}^3(x^2-4x+4)dx=\Big[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\Big]_{-2}^3$

$\quad=(9-18+12)-\left(-\dfrac{8}{3}-8-8\right)=\dfrac{65}{3}$

別解　$(\text{与式})=\left[\dfrac{(x-2)^3}{3}\right]_{-2}^3=\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{64}{3}\right)=\dfrac{65}{3}$

(6) $(\text{与式})=\displaystyle\int_{-1}^3(x^3+x^2-x-1)dx=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\Big]_{-1}^3$

$\quad=\left(\dfrac{81}{4}+9-\dfrac{9}{2}-3\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{64}{3}$

別解　$(\text{与式})=\displaystyle\int_{-1}^3(x+1)^3dx-2\int_{-1}^3(x+1)^2dx$

$\quad=\left[\dfrac{(x+1)^4}{4}\right]_{-1}^3-2\left[\dfrac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^3$

$\quad=\dfrac{256}{4}-\dfrac{128}{3}=\dfrac{256}{12}=\dfrac{64}{3}$

$\boxed{4}$

解答　(1) 0　(2) 84　(3) 30　(4) 56　(5) $-\dfrac{29}{2}$

解説

(1) $(\text{与式})=0$

(2) $(\text{与式})=\displaystyle\int_{-2}^4\{(2x+1)+(3x^2-x)\}dx=\int_{-2}^4(3x^2+x+1)dx=\Big[x^3+\frac{x^2}{2}+x\Big]_{-2}^4$

$\quad=(64+8+4)-(-8+2-2)=84$

(3) $\displaystyle\int_1^4(x+1)^2dx-\int_1^4(x-1)^2dx=\int_1^4\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$\quad=\displaystyle\int_1^4 4xdx=4\int_1^4 xdx=4\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^4=4\left(8-\frac{1}{2}\right)=30$

(4) $(\text{与式})=\displaystyle\int_0^4 x(x+1)(x-1)dx=\int_0^4(x^3-x)dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Big]_0^4$

$\quad=(64-8)-0=56$

(5) $(\text{与式})=\displaystyle\int_1^3(1+2x)(1-3x)dx+\int_3^2(1+2x)(1-3x)dx$

$\quad=\displaystyle\int_1^2(1+2x)(1-3x)dx=\int_1^2(1-x-6x^2)dx=\Big[x-\frac{x^2}{2}-2x^3\Big]_1^2$

$\quad=(2-2-16)-\left(1-\dfrac{1}{2}-2\right)=-\dfrac{29}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1) 4　(2) $-\dfrac{92}{3}$

解説

(1) 与式$=2\displaystyle\int_0^1(3x^2+1)dx=2\Big[x^3+x\Big]_0^1=2\{(1+1)-0\}=4$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2(x-1)(2x^2-3x+1)dx=\int_{-2}^2(2x^3-5x^2+4x-1)dx$

$\quad=\displaystyle\int_{-2}^2(2x^3+4x)dx+\int_{-2}^2(-5x^2-1)dx$

$\quad=0+2\displaystyle\int_0^2(-5x^2-1)dx=-2\Big[\frac{5}{3}x^3+x\Big]_0^2$

$\quad=-2\left(\dfrac{40}{3}+2\right)=-\dfrac{92}{3}$

$\boxed{6}$

解答　$f(x)=3x^2+2x-1$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1(ax^2+c)dx=2\Big[\frac{a}{3}x^3+cx\Big]_0^1=2\left(\frac{a}{3}+c\right)$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\Big[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\Big]_0^2=\frac{8}{3}a+2b+2c$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_0^1 bx^2dx=2\Big[\frac{b}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}b$

条件から　$2\left(\dfrac{a}{3}+c\right)=0,\ \dfrac{8}{3}a+2b+2c=10,\ \dfrac{2}{3}b=\dfrac{4}{3}$

よって　$a+3c=0$　……①

$4a+3b+3c=15$　……②

$b=2$　……③

①，②，③を解いて　$a=3,\ b=2,\ c=-1$

したがって　$f(x)=3x^2+2x-1$

$\boxed{1}$

解答　$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{2}{3}$

解説

曲線 $y=f(x)$ の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $f'(x)$ で与えられるから

$$f'(x)=x^2-1$$

したがって　$f(x)=\displaystyle\int(x^2-1)dx=\frac{x^3}{3}-x+C$　(C は積分定数)

点 $(1,\ 0)$ を通るから　$f(1)=0$

よって　$\dfrac{1}{3}-1+C=0$　ゆえに　$C=\dfrac{2}{3}$

したがって　$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(ア)　0　(イ)　$\dfrac{1}{3}$

解説

$$\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx=\int_{-1}^{1}\{x^4+2px^3+(p^2-2q)x^2-2pqx+q^2\}dx$$

$$=2\int_0^1\{x^4+(p^2-2q)x^2+q^2\}dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)x^3+q^2x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)+q^2\right\}=\frac{2}{3}p^2+2q^2-\frac{4}{3}q+\frac{2}{5}$$

$$=\frac{2}{3}p^2+2\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}$$

よって，この定積分は $p={}^{ア}0$，$q={}^{イ}\dfrac{1}{3}$ で最小値をとる。

$\boxed{3}$

解答　$a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$

解説

$p,\ q$ を定数として，$g(x)=px+q\ (p\neq 0)$ とおくと

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=p\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx+q\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx\quad\cdots\cdots①$$

$$=2p\int_0^1ax^2dx+2q\int_0^1(x^2+b)dx=2p\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+2q\left[\frac{x^3}{3}+bx\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}ap+\frac{2}{3}(1+3b)q$$

$g(x)$ は任意の１次式であるから，任意の $p,\ q\ (p\neq 0)$ に対して，上の式が 0 になる。
したがって，$p,\ q$ の係数が，それぞれ 0 である。

すなわち　$\dfrac{2}{3}a=0,\ \dfrac{2}{3}(1+3b)=0$　よって　$a=0,\ b=-\dfrac{1}{3}$

参考　①$=0$ から　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=0$

$\boxed{1}$

解答　(1)　[略]　(2)　$\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

解説

(1)　$\displaystyle\int_k^{k+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\right]_k^{k+1}=\frac{1}{4}\left[x^2(x-1)^2\right]_k^{k+1}$

$$=\frac{1}{4}\{(k+1)^2k^2-k^2(k-1)^2\}=\frac{1}{4}k^2\cdot 4k=k^3$$

(2)　$\displaystyle 1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\int_1^2\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\int_2^3\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\cdots$

$$+\int_n^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\int_1^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}\left[x^2(x-1)^2\right]_1^{n+1}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$f(x)+g(x)=2x-1$　(2)　$f(x)g(x)=x^2-x-2$
(3)　$f(x)=x+1,\ g(x)=x-2$

解説

(1)　(ア) から　$f(x)+g(x)=\displaystyle\int 2dx=2x+C_1$　(C_1 は積分定数)

(ウ)，(エ) から　$f(0)+g(0)=1+(-2)=-1$

よって　$C_1=-1$　ゆえに　$f(x)+g(x)=2x-1$

(2)　(イ) から　$(f(x))^2+(g(x))^2=\displaystyle\int(4x-2)dx=2x^2-2x+C_2$　(C_2 は積分定数)

(ウ)，(エ) から　$(f(0))^2+(g(0))^2=1^2+(-2)^2=5$　よって　$C_2=5$

ゆえに　$(f(x))^2+(g(x))^2=2x^2-2x+5$

(1) より $(f(x)+g(x))^2=(2x-1)^2$ であるから

$$(f(x))^2+(g(x))^2+2f(x)g(x)=4x^2-4x+1$$

すなわち　$2x^2-2x+5+2f(x)g(x)=4x^2-4x+1$

したがって　$f(x)g(x)=x^2-x-2$

(3)　$f(x)g(x)=(x+1)(x-2)$

これと $f(x)+g(x)=2x-1$ から　$\begin{cases}f(x)=x+1\\g(x)=x-2\end{cases}$　または　$\begin{cases}f(x)=x-2\\g(x)=x+1\end{cases}$

このうち，(ウ)，(エ) を満たすのは　$f(x)=x+1,\ g(x)=x-2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\dfrac{11}{5}$　(2)　$\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^1(3x-1)^4dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{32-(-1)}{5}=\frac{11}{5}$

(2)　$\displaystyle\int_1^3(x-1)^2(x-2)dx=\int_1^3\{(x-1)^3-(x-1)^2\}dx=\left[\frac{(x-1)^4}{4}-\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^3$

$$=\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}=\frac{4}{3}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$-\dfrac{125}{6}$　(2)　$-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

解説

(1)　(与式)$\displaystyle=\int_{-3}^{2}(x+3)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-3)\}^3=-\frac{1}{6}\cdot 5^3=-\frac{125}{6}$

(2)　$x^2-4x+2=0$ の解は　$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 2}=2\pm\sqrt{2}$

したがって　(与式)$\displaystyle=\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}}\{x-(2-\sqrt{2})\}\{x-(2+\sqrt{2})\}dx$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\}^3=-\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2})^3=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$f(x)=2x^2+\dfrac{4}{3}x$　(2)　$f(x)=-12x-8$

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^1f(t)dt=a$（定数）とおくと　$f(x)=2x^2+ax$

よって　$\displaystyle\int_0^1f(t)dt=\int_0^1(2t^2+at)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{2}{3}+\frac{a}{2}$

ゆえに　$\dfrac{2}{3}+\dfrac{a}{2}=a$　よって　$a=\dfrac{4}{3}$

したがって　$f(x)=2x^2+\dfrac{4}{3}x$

(2)　$\displaystyle f(x)=2x+\int_0^1\{xf(t)+tf(t)\}dt=2x+x\int_0^1f(t)dt+\int_0^1tf(t)dt$

$\displaystyle\int_0^1f(t)dt=a,\ \int_0^1tf(t)dt=b$（$a,\ b$ は定数）とおくと

$$f(x)=2x+ax+b=(2+a)x+b$$

よって　$\displaystyle\int_0^1f(t)dt=\int_0^1\{(2+a)t+b\}dt=\left[\frac{2+a}{2}t^2+bt\right]_0^1=\frac{2+a}{2}+b$

ゆえに　$\dfrac{2+a}{2}+b=a$　よって　$a-2b=2$　……①

また　$\displaystyle\int_0^1tf(t)dt=\int_0^1t\{(2+a)t+b\}dt=\int_0^1\{(2+a)t^2+bt\}dt$

$$=\left[\frac{2+a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^1=\frac{2+a}{3}+\frac{b}{2}$$

ゆえに　$\dfrac{2+a}{3}+\dfrac{b}{2}=b$　よって　$2a-3b=-4$　……②

①，② を連立させて解くと　$a=-14,\ b=-8$

したがって　$f(x)=-12x-8$

4

解答　$f(x)=3x^2-6x+1$，$a=0$，1，2

解説

等式の両辺を x で微分すると　$f(x)=3x^2-6x+1$

また，等式で $x=a$ とおくと　$0=a^3-3a^2+a+a$

よって　$a^3-3a^2+2a=0$　　すなわち　$a(a-1)(a-2)=0$

したがって　$a=0$，1，2

5 ★★☆

解答　$x=-1$ で極大値 0，$x=-\frac{1}{3}$ で極小値 $-\frac{4}{27}$

解説

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(3t^2+4t+1)dt=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$，$-\frac{1}{3}$

また　$f(x)=\left[t^3+2t^2+t\right]_{-1}^{x}=x^3+2x^2+x$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$x=-1$ で極大値 0，

$x=-\frac{1}{3}$ で極小値 $-\frac{4}{27}$ をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{4}{27}$	↗

1

解答　(1) $\frac{1}{7}$　(2) $\frac{7}{30}$　(3) $-\frac{64}{3}$

解説

(1) $\int_{2}^{3}(2x-5)^6dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-5)^7}{7}\right]_{2}^{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)}{7}=\frac{1}{7}$

(2) $\int_{1}^{2}x(x-2)^4dx=\int_{1}^{2}\{(x-2)^5+2(x-2)^4\}dx=\left[\frac{(x-2)^6}{6}+\frac{2}{5}(x-2)^5\right]_{1}^{2}$

$$=0-\left\{\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\cdot(-1)\right\}=\frac{7}{30}$$

(3) $\int_{-3}^{1}(x+3)^2(x-1)dx=\int_{-3}^{1}\{(x+3)^3-4(x+3)^2\}dx=\left[\frac{(x+3)^4}{4}-\frac{4}{3}(x+3)^3\right]_{-3}^{1}$

$$=4^3-\frac{4}{3}\cdot4^3-0=-\frac{64}{3}$$

2

解答　(1) $-\frac{9}{2}$　(2) $-\frac{343}{24}$　(3) $-\frac{28\sqrt{7}}{3}$

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=-\frac{9}{2}$

(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)dx$

$$=-\frac{2}{6}\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=-\frac{343}{24}$$

(3) $x^2-4x-3=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{7}$

したがって

$$\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}}(x^2-4x-3)dx=\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}}\{x-(2-\sqrt{7})\}\{x-(2+\sqrt{7})\}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})\}^3$$

$$=-\frac{1}{6}(2\sqrt{7})^3=-\frac{28\sqrt{7}}{3}$$

3

解答　(1) $f(x)=3x-2$　(2) $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x$　(3) $f(x)=\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}$

解説

(1) $\int_{0}^{2}f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=3x-a$

よって　$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}(3t-a)dt=\left[\frac{3}{2}t^2-at\right]_{0}^{2}=6-2a$

ゆえに　$6-2a=a$　　これを解いて　$a=2$

したがって　$f(x)=3x-2$

(2) x は t に無関係であるから　$f(x)=x^3+x\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a$ とおくと　$f(x)=x^3+ax$

よって　$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(t^3+at)dt=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{a}{2}$

ゆえに　$\frac{1}{4}+\frac{a}{2}=a$　　これを解いて　$a=\frac{1}{2}$

したがって　$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x$

(3) x は t に無関係であるから　$f(x)=1+x\int_{0}^{1}f(t)dt-\int_{0}^{1}tf(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a$，$\int_{0}^{1}tf(t)dt=b$ とおくと　$f(x)=ax+1-b$　……①

よって　$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(at+1-b)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+(1-b)t\right]_{0}^{1}=\frac{a}{2}-b+1$

ゆえに　$\frac{a}{2}-b+1=a$　　整理して　$a+2b=2$　……②

また　$\int_{0}^{1}tf(t)dt=\int_{0}^{1}\{at^2+(1-b)t\}dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{1-b}{2}t^2\right]_{0}^{1}=\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$

ゆえに　$\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+\frac{1}{2}=b$　　整理して　$2a-9b=-3$　……③

②，③ から　$a=\frac{12}{13}$，$b=\frac{7}{13}$

これらを ① に代入して　$f(x)=\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}$

4

解答　(1) $f(x)=2x+5$；$a=1$，-6　(2) $f(x)=3x+4$，$a=-3$

解説

(1) $\int_{a}^{x}f(t)dt=x^2+5x-6$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　$f(x)=2x+5$

また，① において $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2+5a-6$　すなわち　$(a-1)(a+6)=0$

これを解いて　$a=1$，-6

(2) $\int_{1}^{x}tf(t)dt=x^3+2x^2+a$ ……① とする。

① の両辺を x で微分すると　$xf(x)=3x^2+4x$

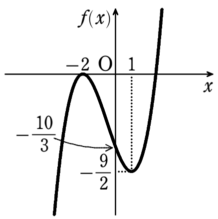
したがって　$f(x)=3x+4$

また，① において $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=1+2+a$　　よって　$a=-3$

5

解答　$x=-2$ で極大値 0，$x=1$ で極小値 $-\frac{9}{2}$，［図］



解説

$f(x)=\int_{-2}^{x}(t^2+t-2)dt$ の両辺を x で微分すると

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

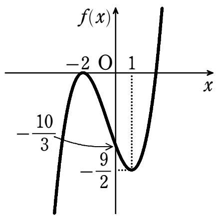
また　$f(-2)=\int_{-2}^{-2}(t^2+t-2)dt=0$

$$f(1)=\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)dt$$
$$=\int_{-2}^{1}(t+2)(t-1)dt$$
$$=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=-\frac{9}{2}$$

よって，$f(x)$ は，$x=-2$ で極大値 0，

$x=1$　で極小値 $-\frac{9}{2}$ をとる。

また，グラフは図のようになる。



$\boxed{1}$

解答　略

解説

$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}$ であるから

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\boxed{2}$

解答　$a=\frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}$

解説

$$f(a)=\left[\frac{2}{3}ax^3-\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{a^2}{2}+\frac{2}{3}a$$
$$=-\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{4}{3}a\right)=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}$$

よって，$f(a)$ は $a=\frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}$ をとる。

$\boxed{3}$

解答　$f(x)=3x-3$

解説

$$f(x)=x^2-\int_0^1[\{f(t)\}^2+2xf(t)+x^2]dt$$
$$=x^2-\int_0^1\{f(t)\}^2dt-2x\int_0^1 f(t)dt-x^2\int_0^1 1dx$$
$$=x^2-\int_0^1\{f(t)\}^2dt-2x\int_0^1 f(t)dt-x^2$$
$$=-\int_0^1\{f(t)\}^2dt-2x\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1\{f(t)\}^2dt=a$，$\int_0^1 f(t)dt=b$ とおくと　$f(x)=-a-2bx$

$$\int_0^1\{f(t)\}^2dt=\int_0^1(-a-2bt)^2dt=\int_0^1(a^2+4abt+4b^2t^2)dt$$
$$=\left[a^2t+2abt^2+\frac{4}{3}b^2t^3\right]_0^1=a^2+2ab+\frac{4}{3}b^2$$

よって　$a^2+2ab+\frac{4}{3}b^2=a$　……①

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(-a-2bt)dt=\left[-at-bt^2\right]_0^1=-a-b$$

よって　$-a-b=b$　　すなわち　$a=-2b$　……②

② を ① に代入すると　$(-2b)^2+2\cdot(-2b)\cdot b+\frac{4}{3}b^2=-2b$

両辺に 3 を掛け，整理すると　$2b(2b+3)=0$　　よって　$b=0,\ -\frac{3}{2}$

$b=0$ のとき，② より　$a=0$

このとき，$f(x)=0$ となり定数関数となるから不適。

$b=-\frac{3}{2}$ のとき，② より　$a=3$

このとき，$f(x)=3x-3$ となり適する。

以上から，求める関数 $f(x)$ は　$f(x)=3x-3$

$\boxed{4}$

解答　$a=-4,\ b=3,\ c=-1$

解説

$f'(x)=x^2+ax+b$

$x=1,\ 3$ で極値をとるから　$f'(1)=0,\ f'(3)=0$

ゆえに　$1+a+b=0,\ 9+3a+b=0$

これを解いて　$a=-4,\ b=3$

よって　$f(x)=\int_c^x(t^2-4t+3)dt=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_c^x$

$$=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-\left(\frac{c^3}{3}-2c^2+3c\right)$$

$f(0)=\frac{16}{3}$ であるから　$-\frac{c^3}{3}+2c^2-3c=\frac{16}{3}$

整理して　$c^3-6c^2+9c+16=0$

ゆえに　$(c+1)(c^2-7c+16)=0$

c は実数であるから　$c=-1$

逆に，このとき　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\frac{16}{3}$

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって　$a=-4,\ b=3,\ c=-1$

1

解答　(1)　$f'(x)=2x+2g(x)$　　(2)　$f(x)=-x^2+\dfrac{1}{3}x$，$g(x)=-2x+\dfrac{1}{6}$

解説

(1)　(A) の両辺を x で微分すると　　$f'(x)=2x+2g(x)$　……①

(2)　$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=a$ (a は定数) とおくと，(B) から　　$g(x)=f'(x)+a$　……②

①，② から　　$f'(x)=-2x-2a$

$g(x)=-2x-a$

$f'(x)=-2x-2a$ から　　$\displaystyle f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x-2a)dx$

$=-x^2-2ax+C$ (C は積分定数)

ここで，(A) に $x=0$ を代入すると　　$f(0)=0$

よって　　$C=0$

ゆえに　　$f(x)=-x^2-2ax$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(-t^2-2at)dt=\left[-\frac{1}{3}t^3-at^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}-a$

ゆえに　　$-\dfrac{1}{3}-a=a$　　　これを解いて　　$a=-\dfrac{1}{6}$

したがって　$f(x)=-x^2+\dfrac{1}{3}x$

$g(x)=-2x+\dfrac{1}{6}$

2

解答　$f(x)=x^2-x+\dfrac{5}{2}$　または　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+1$

解説

$\displaystyle f(x)+\int_1^x g(t)dt=\frac{5}{2}x^2-x+1$ ……①，　$f'(x)g(x)=6x^2-3x$ ……② とする。

① の両辺を x で微分すると　　$f'(x)+g(x)=5x-1$

よって　　$f'(x)=5x-1-g(x)$

これと ② から $f'(x)$ を消去すると　　$\{5x-1-g(x)\}g(x)=6x^2-3x$

ゆえに　　$\{g(x)\}^2-(5x-1)g(x)+3x(2x-1)=0$

よって　　$\{g(x)-3x\}\{g(x)-(2x-1)\}=0$

ゆえに　　$g(x)=3x$　または　$g(x)=2x-1$

[1]　$g(x)=3x$ のとき　　$f'(x)=2x-1$

$\displaystyle\int_1^x g(t)dt=\int_1^x 3t\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_1^x=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$

したがって，① から　　$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-x+1-\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}\right)=x^2-x+\dfrac{5}{2}$

[2]　$g(x)=2x-1$ のとき　　$f'(x)=3x$

$\displaystyle\int_1^x g(t)dt=\int_1^x(2t-1)dt=\left[t^2-t\right]_1^x=x^2-x$

したがって，① から　　$f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-x+1-(x^2-x)=\dfrac{3}{2}x^2+1$

別解　上の [1]，[2] において，$f'(x)=2x-1$ または $f'(x)=3x$ から，$f(x)$ を求めてもよい。C，D を積分定数とすると

$f(x)=x^2-x+C$　または　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+D$

一方，① において $x=1$ とすると　　$f(1)=\dfrac{5}{2}$　　　よって　$C=\dfrac{5}{2}$，$D=1$

ゆえに　　$f(x)=x^2-x+\dfrac{5}{2}$　または　$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+1$

1

解答　$\dfrac{13}{3}$

解説

図のように，$1\leqq x\leqq 2$ では

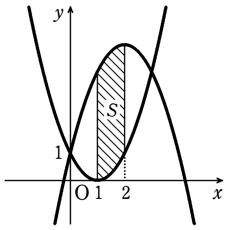
$x^2-2x+1<-x^2+4x+1$

よって

$\displaystyle S=\int_1^2\{(-x^2+4x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$

$\displaystyle=\int_1^2(-2x^2+6x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_1^2$

$=\left(-\dfrac{16}{3}+12\right)-\left(-\dfrac{2}{3}+3\right)=\dfrac{13}{3}$



2

解答　(1)　$\dfrac{31}{6}$　　(2)　8

解説

(1)　放物線と x 軸の交点の x 座標は，方程式 $x^2-3x=0$ を解いて　　$x=0$，3

$1\leqq x\leqq 3$ では　$y\leqq 0$

$3\leqq x\leqq 4$ では　$y\geqq 0$

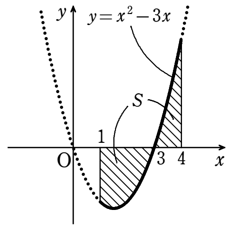
であるから，求める面積 S は

$\displaystyle S=-\int_1^3(x^2-3x)dx+\int_3^4(x^2-3x)dx$

$=-\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2\right]_1^3+\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2\right]_3^4$

$=-\left\{\left(9-\dfrac{27}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\right)\right\}+\left(\dfrac{64}{3}-24\right)-\left(9-\dfrac{27}{2}\right)$

$=-42+\dfrac{1+64}{3}+\dfrac{27\cdot 2-3}{2}=\dfrac{31}{6}$



(2)　2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式

$2x^2=-x^2+6x$　すなわち　$3x^2-6x=0$

を解いて　　$x=0$，2

$0\leqq x\leqq 2$ では　　$-x^2+6x\geqq 2x^2$

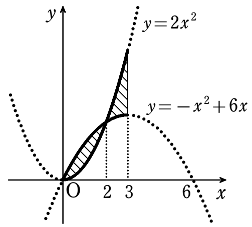
$2\leqq x\leqq 3$ では　　$2x^2\geqq -x^2+6x$

したがって　　$\displaystyle S=\int_0^2\{(-x^2+6x)-2x^2\}dx$

$\displaystyle+\int_2^3\{2x^2-(-x^2+6x)\}dx$

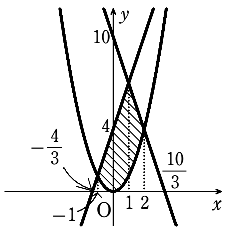
$\displaystyle=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^3(3x^2-6x)dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^3=8$



3

解答　(1)　[図]　境界線を含む　　(2)　$\dfrac{21}{2}$



解説

(1)　$y=x^2$ …… ①，$y=3x+4$ …… ②，$y=-3x+10$ …… ③

放物線 ① と直線 ② の交点の x 座標は，方程式 $x^2=3x+4$

すなわち　$x^2-3x-4=0$ を解いて　$x=-1,\ 4$

放物線 ① と直線 ③ の交点の x 座標は，方程式 $x^2=-3x+10$

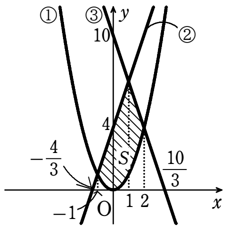
すなわち　$x^2+3x-10=0$ を解いて　$x=-5,\ 2$

直線 ② と直線 ③ の交点の x 座標は，方程式

$3x+4=-3x+10$ を解いて　$x=1$

よって，与えられた連立不等式の表す領域は，右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ では $3x+4\geqq x^2$

$1\leqq x\leqq 2$ では $-3x+10\geqq x^2$ であるから

$$S=\int_{-1}^{1}\{(3x+4)-x^2\}dx+\int_{1}^{2}\{(-3x+10)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+3x+4)dx+\int_{1}^{2}(-x^2-3x+10)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+4)dx-\int_{1}^{2}(x^2+3x-10)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-10x\right]_1^2$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+4\right)-\left\{\left(\frac{8}{3}+6-20\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-10\right)\right\}$$

$$=\frac{-2-8+1}{3}+\frac{3}{2}+8-6+20-10=\frac{21}{2}$$

4

解答　(1)　$\dfrac{5}{2}$　　(2)　3

解説

(1)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x-2|=x-2$　であるから

$$\int_1^4|x-2|dx=\int_1^2\{-(x-2)\}dx+\int_2^4(x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4$$

$$=-\left\{(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}+(8-8)-(2-4)=\frac{5}{2}$$

(2)　$|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x^2+x-2|=-(x^2+x-2)$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2+x-2|=x^2+x-2$　であるから

$$\int_0^2|x^2+x-2|dx=\int_0^1\{-(x^2+x-2)\}dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\times 2+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)=3$$

5

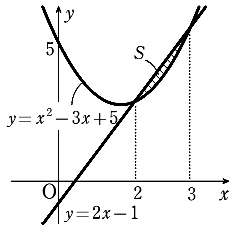
解答　(1)　$\dfrac{1}{6}$　　(2)　$\dfrac{8}{3}$

解説

(1)　方程式 $x^2-3x+5=2x-1$ を解くと，

$x^2-5x+6=0$ より　$x=2,\ 3$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx$$

$$=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$$

$$=\left(-9+\frac{45}{2}-18\right)-\left(-\frac{8}{3}+10-12\right)=\frac{1}{6}$$

別解　[積分の計算]

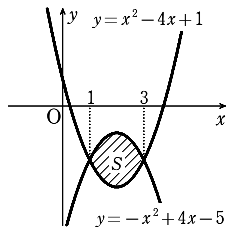
$$S=\int_2^3\{(2x-1)-(x^2-3x+5)\}dx=\int_2^3(-x^2+5x-6)dx=-\int_2^3(x-2)(x-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(3-2)^3=\frac{1}{6}$$

(2)　方程式 $x^2-4x+1=-x^2+4x-5$ を解くと，

$x^2-4x+3=0$ より　$x=1,\ 3$

よって，求める面積 S は，図から



$$S=\int_1^3\{(-x^2+4x-5)-(x^2-4x+1)\}dx$$

$$=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3$$

$$=(-18+36-18)-\left(-\frac{2}{3}+4-6\right)=\frac{8}{3}$$

別解　[積分の計算]

$$S=\int_1^3\{(-x^2+4x-5)-(x^2-4x+1)\}dx=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx$$

$$=-2\int_1^3(x-1)(x-3)dx=\frac{2}{6}(3-1)^3=\frac{8}{3}$$

1

解答　$\dfrac{53}{6}$

解説

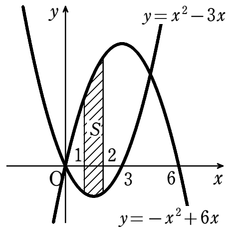
図から

$$S=\int_1^2\{(-x^2+6x)-(x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_1^2(-2x^2+9x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{53}{6}$$



2

解答　(1)　$\dfrac{98}{3}$　　(2)　$\dfrac{23}{3}$

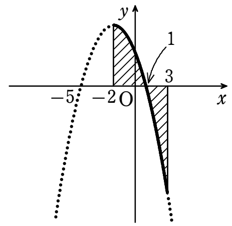
解説

1)　$-x^2-4x+5=-(x-1)(x+5)$ であるから

$-2\leqq x\leqq 1$ では　$y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$ では　$y\leqq 0$

したがって



$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-4x+5)dx-\int_1^3(-x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_{-2}^1-\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_1^3$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)-\left(\frac{8}{3}-8-10\right)$$

$$-\left\{(-9-18+15)-\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)\right\}$$

$$=\frac{98}{3}$$

(2)　曲線 $y=x^2-3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ と 直線 $y=-2x$

の交点の x 座標は，方程式

$x^2-3=-2x$　　すなわち　　$x^2+2x-3=0$

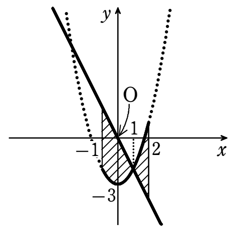
を解いて　$x=1,\ -3$

$-1\leqq x\leqq 2$ であるから　　$x=1$

区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で　　$-2x\geqq x^2-3$

区間 $1\leqq x\leqq 2$　で　　$x^2-3\geqq -2x$

よって



$$S=\int_{-1}^{1}\{-2x-(x^2-3)\}dx+\int_1^2\{(x^2-3)-(-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=2\int_0^1(-x^2+3)dx+\int_1^2(x^2+2x-3)dx$$

$$=2\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^2$$

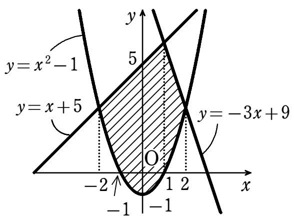
$$=2\left(-\frac{1}{3}+3\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right\}=\frac{23}{3}$$

3

解答　$\dfrac{50}{3}$

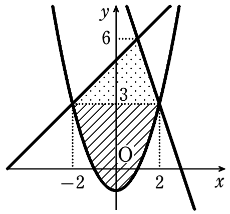
解説

与えられた連立不等式の表す領域は，右図の斜線部分（境界線を含む）である。
よって，求める面積は



$$\int_{-2}^{1}\{(x+5)-(x^2-1)\}dx$$
$$+\int_{1}^{2}\{(-3x+9)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2+x+6)dx+\int_{1}^{2}(-x^2-3x+10)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+10x\right]_{1}^{2}=\frac{50}{3}$$

別解　領域を，右のように分けて考えると



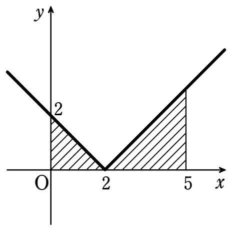
$$\int_{-2}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx+\frac{1}{2}\cdot\{2-(-2)\}\cdot(6-3)$$
$$=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx+6=\frac{\{2-(-2)\}^3}{6}+6$$
$$=\frac{50}{3}$$

4

解答　(1) $\dfrac{13}{2}$　(2) $\dfrac{37}{3}$　(3) $\dfrac{19}{2}$

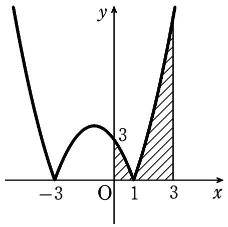
解説

(1)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$
　$2\leqq x\leqq 5$ のとき　$|x-2|=x-2$



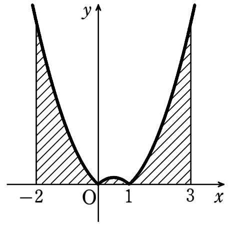
よって　$(\text{与式})=\int_{0}^{2}\{-(x-2)\}dx+\int_{2}^{5}(x-2)dx$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{5}$$
$$=-(2-4)+\left(\frac{25}{2}-10\right)-(2-4)$$
$$=\frac{13}{2}$$

(2)　$|x^2+2x-3|=|(x+3)(x-1)|$
$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x^2+2x-3|=-(x^2+2x-3)$
$1\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$
よって



$$(\text{与式})=\int_{0}^{1}\{-(x^2+2x-3)\}dx+\int_{1}^{3}(x^2+2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{1}^{3}$$
$$=-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)+(9+9-9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)$$
$$=\frac{37}{3}$$

(3)　$|x^2-x|=|x(x-1)|$
$-2\leqq x\leqq 0$ のとき　$|x^2-x|=x^2-x$
$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x^2-x|=-(x^2-x)$
$1\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x^2-x|=x^2-x$
よって



$$(\text{与式})=\int_{-2}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}\{-(x^2-x)\}dx$$
$$+\int_{1}^{3}(x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+2+9$$
$$=2-\frac{7}{2}+11=\frac{19}{2}$$

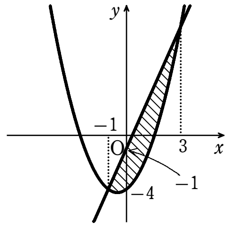
5

解答　(1) $\dfrac{32}{3}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{32}{3}$

解説

求める面積を S とする。

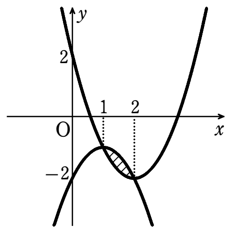
(1)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式
$$x^2+x-4=3x-1$$
すなわち　$x^2-2x-3=0$ を解いて
$x=-1$，3
$-1\leqq x\leqq 3$ では，$x^2+x-4\leqq 3x-1$ であるから



$$S=\int_{-1}^{3}\{(3x-1)-(x^2+x-4)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}=-\left\{(9-9-9)-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)\right\}=\frac{32}{3}$$

別解　[積分の計算]
$$S=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

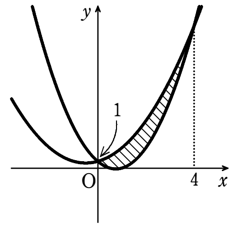
(2)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式
$$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$$
すなわち　$2x^2-6x+4=0$ を解いて
$x=1$，2
$1\leqq x\leqq 2$ では，$x^2-4x+2\leqq -x^2+2x-2$
であるから



$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$
$$=-2\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx$$
$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{3}$$

別解　[積分の計算]
$$S=-2\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx=-2\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx=\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式
$$x^2+x+1=2x^2-3x+1$$
すなわち　$x^2-4x=0$ を解いて
$x=0$，4
$0\leqq x\leqq 4$ では，$x^2+x+1\geqq 2x^2-3x+1$
であるから



$$S=\int_{0}^{4}\{(x^2+x+1)-(2x^2-3x+1)\}dx$$
$$=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{4}$$
$$=-\left(\frac{64}{3}-32\right)=\frac{32}{3}$$

別解　[積分の計算]
$$S=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)dx=-\int_{0}^{4}x(x-4)dx=\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{32}{3}$$

1

解答　(1) $\dfrac{253}{12}$　　(2) $\dfrac{13}{3}$

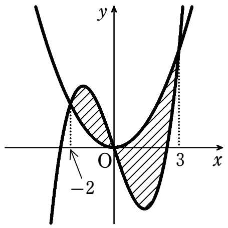
解説

(1) 2 曲線の交点の x 座標は，方程式

$x^3-6x=x^2$　すなわち　$x(x+2)(x-3)=0$

を解いて　$x=-2,\ 0,\ 3$

グラフから，求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3-6x)-x^2\}dx+\int_{0}^{3}\{x^2-(x^3-6x)\}dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{16}{3}+\frac{63}{4}=\frac{253}{12}$$

(2) $|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$

$-1\leqq x\leqq 2$　のとき　$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)=-x^2+x+2$

$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき　$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

$-1\leqq x\leqq 2$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$-x^2+x+2=x+1$　すなわち　$x^2-1=0$

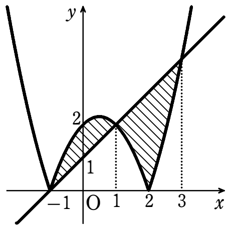
を解いて　$x=\pm 1$

$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき，曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2-x-2=x+1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解いて　$x=-1,\ 3$

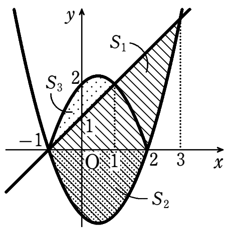
グラフから，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x+1)-(-x^2+x+2)\}dx$$
$$+\int_{2}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{2}^{3}=\frac{13}{3}$$

別解　[面積の求め方]

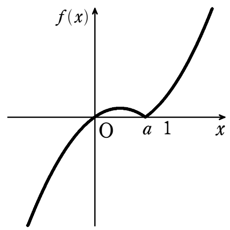
右の図のように，曲線 $y=x^2-x-2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y=x^2-x-2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，曲線 $y=-x^2+x+2$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると



$$S=S_1-(2S_2-S_3)+S_3=S_1-2S_2+2S_3$$
$$=\int_{-1}^{3}\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx$$
$$-2\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx+2\int_{-1}^{1}\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx+2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$
$$=\frac{\{3-(-1)\}^3}{6}-2\cdot\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}+2\cdot\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}$$
$$=\frac{32}{3}-9+\frac{8}{3}=\frac{13}{3}$$

2

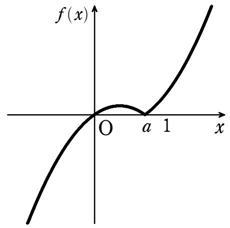
解答　(1) ［図］　(2) $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



解説

(1) $0<a<1,\ f(x)=\begin{cases}x(a-x) & (x<a\ のとき)\\ x(x-a) & (x\geqq a\ のとき)\end{cases}$

よって，グラフは図のようになる．



(2) $0<a<1$ であるから

$$g(a)=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_a^1$$
$$=2\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$

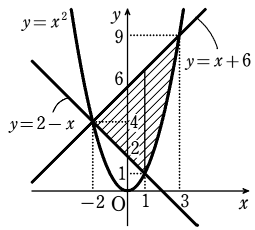
$g'(a)=a^2-\dfrac{1}{2}$　$g'(a)=0,\ 0<a<1$ とすると $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

増減表から $g(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小となる．

a	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
$g'(a)$		−	0	+	
$g(a)$		↘		↗	

3

解答　(1) ［図］境界線を含む　(2) $\dfrac{49}{3}$



解説

(1) 境界線の交点の座標は，次の 3 つの連立方程式の解である。

① $\begin{cases}y=x^2\\ y=2-x\end{cases}$　② $\begin{cases}y=x^2\\ y=x+6\end{cases}$　③ $\begin{cases}y=2-x\\ y=x+6\end{cases}$

連立方程式 ① を解くと

$(x,\ y)=(-2,\ 4),\ (1,\ 1)$

連立方程式 ② を解くと

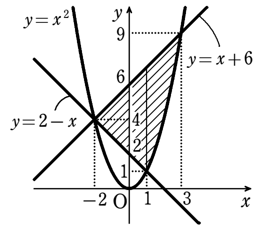
$(x,\ y)=(-2,\ 4),\ (3,\ 9)$

連立方程式 ③ を解くと

$(x,\ y)=(-2,\ 4)$

したがって，求める領域は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2) 直線 $x=1$ と直線 $y=x+6$ の交点の座標は　$(1,\ 7)$

よって，(1) の図から，求める面積は

$$S=\frac{1}{2}\times\{1-(-2)\}\times(7-1)+\int_1^3\{(x+6)-x^2\}dx$$
$$=9+\int_1^3(-x^2+x+6)dx=9+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_1^3$$
$$=9+\frac{22}{3}=\frac{49}{3}$$

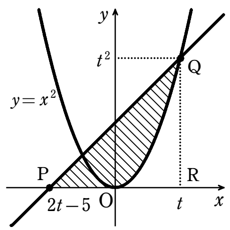
4

解答　(1) $-\dfrac{5}{6}t^3+\dfrac{5}{2}t^2$　　(2) $t=2$ のとき最大値 $\dfrac{10}{3}$

解説

(1) 実数 t $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{5}{2}\right)$ に対し，点 $\mathrm{P}(2t-5,\ 0)$ は x 軸上の $x\leqq 0$ の部分にあり，点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ は放物線 $y=x^2$ 上の $x\geqq 0$ の部分にある。

よって，求める面積を S とし，点 $(t,\ 0)$ を R とすると



$$S=(\triangle\mathrm{PQR}\ の面積)-\int_0^t x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\{t-(2t-5)\}t^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}(-t+5)t^2-\frac{1}{3}t^3$$
$$=-\frac{5}{6}t^3+\frac{5}{2}t^2$$

(2) S を t で微分すると

$$S'=-\frac{5}{2}t^2+5t=-\frac{5}{2}t(t-2)$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{5}{2}$ における S の増減表は右のようになる。

t	0	…	2	…	$\frac{5}{2}$
S'		+	0	−	
S		↗	$\frac{10}{3}$	↘	

よって，S は $t=2$ のとき最大値 $\dfrac{10}{3}$ をとる。

1

解答　(1)　$t\leqq 0$ のとき $F(t)=-t+\frac{1}{3}$，$0<t<\frac{1}{2}$ のとき $F(t)=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$，

$t\geqq\frac{1}{2}$ のとき $F(t)=t-\frac{1}{3}$

(2)　$t=-1$ のとき最大値 $\frac{4}{3}$，$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

解説

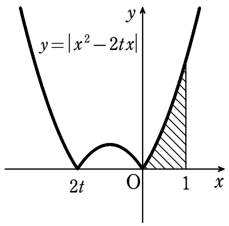
(1)　$x^2-2tx=x(x-2t)$

[1]　$2t\leqq 0$ すなわち $t\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ では $|x^2-2tx|=x^2-2tx$ であるから

$$F(t)=\int_0^1(x^2-2tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_0^1$$
$$=-t+\frac{1}{3}$$

[1]



[2]　$0<2t<1$ すなわち $0<t<\frac{1}{2}$ のとき

$0\leqq x\leqq 2t$ では $|x^2-2tx|=-(x^2-2tx)$，

$2t\leqq x\leqq 1$ では $|x^2-2tx|=x^2-2tx$　　であるから

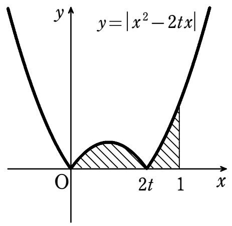
$$F(t)=-\int_0^{2t}(x^2-2tx)dx+\int_{2t}^1(x^2-2tx)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_0^{2t}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_{2t}^1=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$

[3]　$2t\geqq 1$ すなわち $t\geqq\frac{1}{2}$ のとき

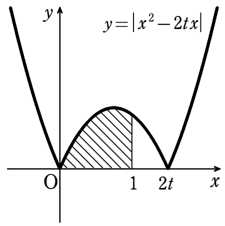
$0\leqq x\leqq 1$ では $|x^2-2tx|=-(x^2-2tx)$ であるから

$$F(t)=-\int_0^1(x^2-2tx)dx=t-\frac{1}{3}$$

[2]



[3]



まとめると　　$F(t)=\begin{cases}-t+\frac{1}{3} & (t\leqq 0)\\ \frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3} & \left(0<t<\frac{1}{2}\right)\\ t-\frac{1}{3} & \left(t\geqq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

(2)　$0<t<\frac{1}{2}$ のとき　　$F'(t)=8t^2-1$

$F'(t)=0$ とすると　　$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

$-1\leqq t\leqq 1$ における $F(t)$ の増減表は次のようになる。

t	-1	…	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$F'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$F(t)$	$\frac{4}{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{2}{3}$

よって，$F(t)$ は $t=-1$ のとき最大値 $\frac{4}{3}$，$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ をとる。

2

解答　(1)　$0\leqq a<1$ のとき $S(a)=-3a^2+3a+2$，

$1\leqq a\leqq 2$ のとき $S(a)=2a^3-3a^2-3a+6$

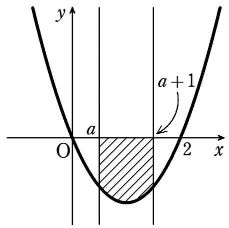
(2)　$a=2$ のとき最大値 4

解説

(1)　[1]　$0\leqq a$　かつ　$a+1<2$　すなわち

$0\leqq a<1$ のとき

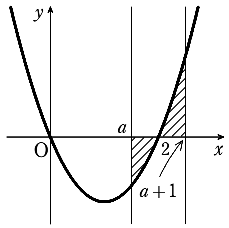
$$S(a)=\int_a^{a+1}\{-3x(x-2)\}dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_a^{a+1}$$
$$=\{-(a+1)^3+3(a+1)^2\}-(-a^3+3a^2)$$
$$=-3a^2+3a+2$$



[2]　$0\leqq a\leqq 2\leqq a+1$　すなわち

$1\leqq a\leqq 2$ のとき

$$S(a)=\int_a^2\{-3x(x-2)\}dx+\int_2^{a+1}3x(x-2)dx$$
$$=\left[-x^3+3x^2\right]_a^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^{a+1}$$
$$=(-8+12)-(-a^3+3a^2)$$
$$+\{(a+1)^3-3(a+1)^2\}-(8-12)$$
$$=2a^3-3a^2-3a+6$$

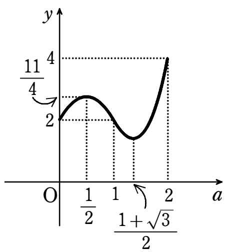


(2)　[1]　$0\leqq a<1$ のとき　$S(a)=-3a^2+3a+2=-3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

[2]　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$S'(a)=6a^2-6a-3=3(2a^2-2a-1)$

増減表は次のようになる.

a	1	…	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	…	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	2	↘	極小	↗	4

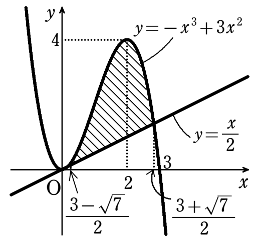


[1]，[2] から，$y=S(a)$ のグラフは右図のようになる.

したがって，$a=2$ のとき最大値 4 をとる.

3

解答　[図] ただし，境界線を含む；$\frac{7\sqrt{7}}{4}$



解説

不等式を上から順に ①，② とおく。

真数は正であるから　$y>0$，$x>0$，$3-x>0$　　ゆえに　$0<x<3$，$y>0$　……③

また，① から　　$\log_2 y\geqq\log_2 x-\log_2 2=\log_2\frac{x}{2}$

底 2 は 1 より大きいから　　$y\geqq\frac{x}{2}$　……①′

② から　　$\log_2 y\leqq\log_2 x^2+\log_2(3-x)=\log_2\{x^2(3-x)\}$

ゆえに　　$y\leqq x^2(3-x)=-x^3+3x^2$　……②′

ここで　　$f(x)=-x^3+3x^2$ とすると

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，2

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

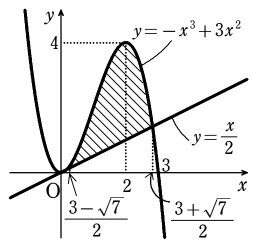
x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

また　　$-x^3+3x^2=\frac{x}{2}$

とすると　　$x(2x^2-6x+1)=0$

よって　　$x=0$，$\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

であり，求める領域は ①′，②′，③ から図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



この領域の面積を S，$\frac{3-\sqrt{7}}{2}=\alpha$，$\frac{3+\sqrt{7}}{2}=\beta$ とおくと

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-x^3+3x^2-\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{\beta^4-\alpha^4}{4}+(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2+\alpha^2+1)+(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$$

$\beta-\alpha=\sqrt{7}$，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=\frac{1}{2}$，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8$

であるから　$S=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{7}\cdot 3(8+1)+\sqrt{7}\left(8+\frac{1}{2}\right)=\frac{7\sqrt{7}}{4}$

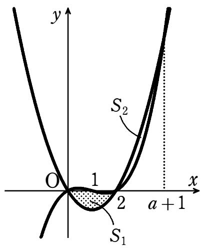
4

解答　(ア)　0，2，$a+1$　　(イ)　3

解説

2曲線の交点の x 座標は，$x^3-3x^2+2x=ax(x-2)$ を解くと，$x(x-2)\{x-(a+1)\}=0$ から　　$x={}^{ア}0,\ 2,\ a+1$

$a>1$ であるから，2曲線の概形は右の図のようになり，2つの部分の面積 S_1，S_2 が等しくなるための条件は，$S_1=S_2$ すなわち　$S_1-S_2=0$ であるから



$$\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx-\int_2^{a+1}\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって　　$\displaystyle\int_0^{a+1}\{f(x)-g(x)\}dx=0$

左辺の定積分を I とすると

$$I=\int_0^{a+1}\{x^3-(a+3)x^2+2(a+1)x\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+3}{3}x^3+(a+1)x^2\right]_0^{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^4}{4}-\frac{a+3}{3}(a+1)^3+(a+1)^3=\frac{1}{12}(a+1)^3(3-a)$$

$a>1$ であるから，$I=0$ となるのは　　$a={}^{イ}3$

1

解答　(1)　$\ell_1：y=-4x+3$，$\ell_2：y=8x-33$　　(2)　18

解説

(1)　$y'=2x-4$ から，

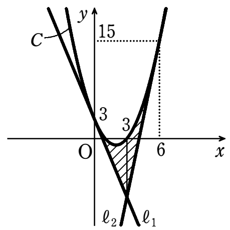
ℓ_1 の方程式は　　$y-3=(2\cdot0-4)(x-0)$　すなわち　$y=-4x+3$

ℓ_2 の方程式は　　$y-15=(2\cdot6-4)(x-6)$　すなわち　$y=8x-33$

(2)　ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標を求めると

$-4x+3=8x-33$ から　　$12x=36$　　　ゆえに　　$x=3$

よって，求める面積 S は



$$S=\int_0^3\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$

$$+\int_3^6\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$

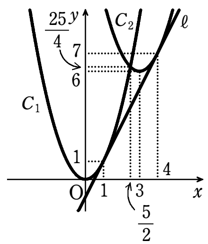
$$=\int_0^3x^2dx+\int_3^6(x-6)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+\left[\frac{(x-6)^3}{3}\right]_3^6$$

$$=9+9=18$$

2

解答　(1)　$y=2x-1$，[図]　　(2)　$\dfrac{9}{4}$



解説

(1)　$C_1：y=x^2$ において　　$y'=2x$

よって，ℓ と C_1 との接点を $(a,\ a^2)$ とすると，ℓ の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$　　　すなわち　　$y=2ax-a^2$

ℓ は C_2 と接するから，方程式

$2ax-a^2=x^2-6x+15$

すなわち　$x^2-2(a+3)x+a^2+15=0$　……①

は重解をもつ。

① の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(a+3)^2-1\cdot(a^2+15)=6(a-1)$

$D=0$ であるから　　　$a=1$

よって，ℓ の方程式は　　$y=2x-1$

また，ℓ と C_1 の接点は　　$(1,\ 1)$

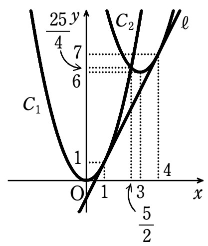
ℓ と C_2 の接点は，x 座標が ① の重解 $\dfrac{2(1+3)}{2\cdot1}=4$

であるから　　$(4,\ 7)$

C_1 と C_2 の交点は，方程式 $x^2=x^2-6x+15$ を解いて，

$x=\dfrac{5}{2}$ から　　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$

$C_2：y=(x-3)^2+6$ であるから，C_1，C_2 および ℓ を図示すると右のようになる。



(2)　求める面積を S とすると

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{x^2-6x+15-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^4=\frac{9}{4}$$

3

解答　(1)　$y=2x-2$　　(2)　$\dfrac{27}{4}$

解説

(1)　$y'=-3x^2+5$ であるから，点 A における接線 ℓ の方程式は

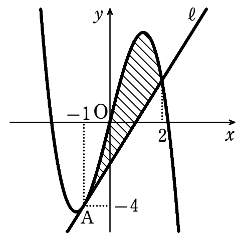
$y-(-4)=\{-3(-1)^2+5\}\{x-(-1)\}$　　すなわち　$y=2x-2$

(2)　曲線と接線 ℓ の共有点の x 座標は，

$-x^3+5x=2x-2$ すなわち $x^3-3x-2=0$ の解である。

ゆえに　　$(x+1)^2(x-2)=0$　　よって　$x=-1,\ 2$

ゆえに，図から求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^2\{(-x^3+5x)-(2x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$

$$=-\frac{1}{4}(16-1)+\frac{3}{2}(4-1)+2(2+1)$$

$$=\frac{27}{4}$$

4

解答　$a=3\left(1-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$

解説

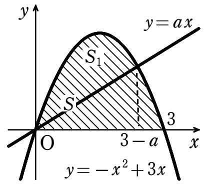
直線 $y=ax$ と放物線 $y=-x^2+3x$ の交点の x 座標は

$ax=-x^2+3x$ の解であるから，これを解いて

$x\{x-(3-a)\}=0$　　　よって　　$x=0,\ 3-a$

放物線と直線 $y=ax$，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を

それぞれS_1，Sとすると



$$S_1=\int_0^{3-a}\{(-x^2+3x)-ax\}dx$$
$$=-\int_0^{3-a}x\{x-(3-a)\}dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(3-a)-0\}^3=\frac{1}{6}(3-a)^3$$
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)dx=-\int_0^3 x(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3=\frac{9}{2}$$

求める条件は　$2S_1=S$

ゆえに　$\frac{1}{3}(3-a)^3=\frac{9}{2}$　すなわち　$(3-a)^3=\frac{27}{2}$

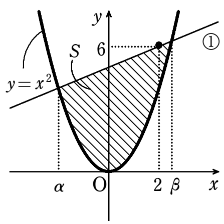
よって　$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$　すなわち　$a=3\left(1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$

$\boxed{5}$

解答　$y=4x-2$

解説

直線 $x=2$ は条件を満たさないから，点$(2,\ 6)$を通る直線の方程式を $y=m(x-2)+6$ ……① とおく。



放物線 $y=x^2$ と直線①の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は $x^2=m(x-2)+6$ すなわち $x^2-mx+2m-6=0$ の２つの実数解である。

よって，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=2m-6$ ……②

放物線 $y=x^2$ と直線①で囲まれる面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-2)+6-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

ここで，②を利用すると

$$S=\frac{1}{6}\{m^2-4(2m-6)\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(m-4)^2+8\}^{\frac{3}{2}}$$

よって，S は $m=4$ のとき最小になる。

ゆえに，求める直線の方程式は　$y=4(x-2)+6$

すなわち　$y=4x-2$

参考　２次方程式 $x^2-mx+2m-6=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4\cdot(2m-6)=m^2-8m+24=(m-4)^2+8>0$$

よって，放物線 $y=x^2$ と直線①は，常に異なる２点で交わり，さらに $S=\frac{1}{6}(\sqrt{D})^3$ が成り立つ。

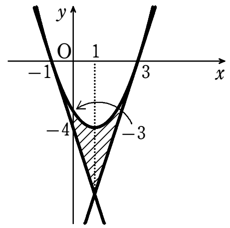
$\boxed{1}$

解答　$\frac{16}{3}$

解説

$x^2-2x-3=0$ とすると　$(x+1)(x-3)=0$　　ゆえに　$x=-1,\ 3$

よって，放物線①と x 軸との交点の座標は　$(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$



また，$y=x^2-2x-3$ から　$y'=2x-2$

点$(-1,\ 0)$における接線の方程式は

$y=\{2\cdot(-1)-2\}(x+1)$　すなわち

$y=-4x-4$

点$(3,\ 0)$における接線の方程式は

$y=(2\cdot3-2)(x-3)$　すなわち　$y=4x-12$

この２つの接線の交点の x 座標は

$-4x-4=4x-12$ から　$x=1$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1\{(x^2-2x-3)-(-4x-4)\}dx+\int_1^3\{(x^2-2x-3)-(4x-12)\}dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)$$
$$=\frac{1}{3}+2+9-6=\frac{16}{3}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y=x-2$　　(2)　$\frac{16}{3}$

解説

(1)　$f(x)=x^2-5x+7$ とすると　$f'(x)=2x-5$

ゆえに，C_1 上の点 A$(t,\ f(t))$ における接線 l の方程式は

$l：y=(2t-5)(x-t)+t^2-5t+7$

よって　$l：y=(2t-5)x-t^2+7$

一方 l は，$C_2：y=x^2+3x-1$ にも接することから

$x^2-2(t-4)x+t^2-8=0$ ……① の判別式を D とすると　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(t-4)^2-(t^2-8)=-8t+24$$

よって　$-8t+24=0$　　ゆえに　$t=3$

したがって　$l：y=x-2$

(2)　(1)から，接点 A の x 座標は　3

また，C_2 と l の接点を B，C_1 と C_2 の交点を C とする．

$x^2+3x-1=x-2$ から　$(x+1)^2=0$　　よって　$x=-1$

ゆえに，点 B の x 座標は　-1

$x^2-5x+7=x^2+3x-1$ から　$8x-8=0$　　よって　$x=1$

ゆえに，点 C の x 座標は　1

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^1(x+1)^2dx+\int_1^3(x-3)^2dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^1+\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^3=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{64}{3}$

解説

$f(x)=x^3-x^2-12x$ とすると　　$f'(x)=3x^2-2x-12$

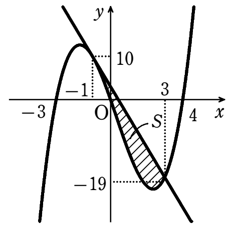
接線の傾きは　　$f'(-1)=3\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-12=-7$

よって，接線の方程式は　　$y-10=-7(x+1)$　すなわち　$y=-7x+3$

曲線 $y=f(x)$ と接線の共有点の x 座標は，方程式

$x^3-x^2-12x=-7x+3$　すなわち　$x^3-x^2-5x-3=0$

の解である。



左辺を因数分解すると　　$(x+1)^2(x-3)=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 3$

接線が曲線 $y=f(x)$ と交わる点の x 座標は 3 であり，グラフは右の図のようになる。

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^3\{(-7x+3)-(x^3-x^2-12x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^3(-x^3+x^2+5x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-1}^3$$
$$=\left(-\frac{81}{4}+9+\frac{45}{2}+9\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-3\right)=\frac{64}{3}$$

別解　[積分の計算]

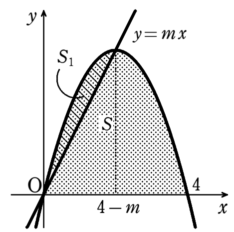
$$S=-\int_{-1}^3(x^3-x^2-5x-3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)^2(x-3)dx$$
$$=-\int_{-1}^3(x+1)^2\{(x+1)-4\}dx=-\int_{-1}^3\{(x+1)^3-4(x+1)^2\}dx$$
$$=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}-\frac{4}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^3=-\left(64-\frac{256}{3}\right)=\frac{64}{3}$$

$\boxed{4}$

解答　$S=\frac{32}{3}$，$m=2$

解説

放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸の交点の x 座標は，



方程式　$-x^2+4x=0$　すなわち　$x^2-4x=0$

を解いて　　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq4$ では，$y\geqq0$ であるから

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx=-\int_0^4x(x-4)dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot4^3=\frac{32}{3}$$

放物線と直線 $y=mx$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。放物線と直線の共有点の x 座標は，

方程式　$-x^2+4x=mx$　すなわち　$x\{x-(4-m)\}=0$

を解いて　　$x=0,\ 4-m$

題意を満たすとき　$0<4-m<4$

すなわち　$0<m<4$

ここで　$S_1=\int_0^{4-m}\{(-x^2+4x)-mx\}dx=-\int_0^{4-m}x\{x-(4-m)\}dx=\dfrac{(4-m)^3}{6}$

$S_1:S=1:8$ であるから　$8S_1=S$　すなわち　$8\cdot\dfrac{(4-m)^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

ゆえに　$(4-m)^3=8$　よって　$4-m=2$

したがって　$m=2$　これは，$0<m<4$ を満たす。

$\boxed{5}$

解答　$m=1$，面積 $\dfrac{4}{3}$

解説

原点を通る傾き m の直線の方程式は　$y=mx$

放物線とこの直線の交点の x 座標は，方程式

$x^2+x-1=mx$　すなわち　$x^2-(m-1)x-1=0$　……①

の実数解である。

① の判別式を D とすると　$D=(m-1)^2+4>0$

よって，① は異なる２つの実数解をもつ。それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

放物線と直線で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta\{mx-(x^2+x-1)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで　$\beta-\alpha=\dfrac{m-1+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{m-1-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(m-1)^2+4}$

よって　$S=\dfrac{1}{6}\{\sqrt{(m-1)^2+4}\}^3$

したがって，面積 S は，$m=1$ のとき最小となり，そのときの面積は　$\dfrac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\dfrac{4}{3}$

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{16}{3}$

解説

$y=x^2-x+3$ を微分すると　$y'=2x-1$

接点の座標を $(t,\ t^2-t+3)$ とすると，この点における接線の方程式は

$y-(t^2-t+3)=(2t-1)(x-t)$

すなわち　$y=(2t-1)x-t^2+3$　……①

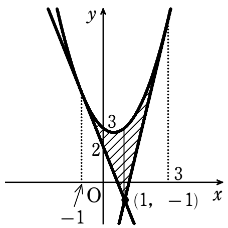
これが点 $(1,\ -1)$ を通るとき

$-1=(2t-1)\cdot1-t^2+3$

整理して　$t^2-2t-3=0$

これを解いて　$t=-1,\ 3$

よって，２つの接線の方程式は，① に $t=-1,\ 3$ を代入して　$y=-3x+2$，$y=5x-6$



グラフから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^1\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_1^3\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\int_0^1(x^2+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_1^3=\frac{16}{3}$$

別解　[積分の計算]

$$S=\int_{-1}^1(x^2+2x+1)dx+\int_1^3(x^2-6x+9)dx=\int_{-1}^1(x+1)^2dx+\int_1^3(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^1+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_1^3=\frac{16}{3}$$

$\boxed{2}$

解答　[略]

解説

点 $\mathrm{P}(p,\ p^2+1)$ における接線の方程式は，$y=x^2+1$ より $y'=2x$ であるから

$y-(p^2+1)=2p(x-p)$　すなわち　$y=2px+1-p^2$

$x^2=2px+1-p^2$ とすると　$x^2-2px+p^2-1=0$　これを解くと　$x=p-1,\ p+1$

ゆえに，$p-1\leqq x\leqq p+1$ において，$2px+1-p^2\geqq x^2$ であるから，

直線 $y=2px+1-p^2$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた部分の面積は

$$\int_{p-1}^{p+1}\{(2px+1-p^2)-x^2\}dx=\int_{p-1}^{p+1}(-x^2+2px+1-p^2)dx$$

$$=-\int_{p-1}^{p+1}\{x-(p-1)\}\{x-(p+1)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(p+1)-(p-1)\}^3=\frac{4}{3}\quad（一定）$$

ゆえに，題意は証明された．

$\boxed{3}$

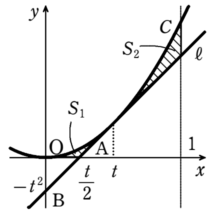
解答　$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{27}$

解説

$y=x^2$ において，$y'=2x$ であるから，ℓ の方程式は

$y-t^2=2t(x-t)$　すなわち　$y=2tx-t^2$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ -t^2)$ とすると，右の図から



$$S_1+S_2=\int_0^1\{x^2-(2tx-t^2)\}dx-\triangle\mathrm{OAB}$$

$$=\int_0^1(x-t)^2dx-\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2$$

$$=\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^1-\frac{t^3}{4}=-\frac{t^3}{4}+t^2-t+\frac{1}{3}$$

$f(t)=-\dfrac{t^3}{4}+t^2-t+\dfrac{1}{3}$ とすると　$f'(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+2t-1=-\dfrac{1}{4}(3t-2)(t-2)$

$f'(t)=0$ とすると，$0<t<1$ より　$t=\dfrac{2}{3}$

$f(t)$ の $0<t<1$ における増減表は，次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$ であるから，

S_1+S_2 は $t=\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{27}$ をとる。

第４講　レベルＢ

1

解答　$\dfrac{a^3}{3}$

解説

接線 l：$y=mx$ と放物線 C：$y=x^2-2x+c$ が，ともに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$b=ma$ ……①，　$b=a^2-2a+c$ ……②

$y=x^2-2x+c$ から　$y'=2x-2$

よって，点 P における接線の傾きは　$2a-2$

ゆえに　　$m=2a-2$

よって，① から　$b=(2a-2)a=2a^2-2a$

これと ② から　$2a^2-2a=a^2-2a+c$　　　ゆえに　　$c=a^2$

したがって，接線 l：$y=(2a-2)x$，y 軸，および放物線 C：$y=x^2-2x+a^2$ で囲まれる領域の面積 S は

$$S=\int_0^a\{(x^2-2x+a^2)-(2a-2)x\}dx=\int_0^a(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\int_0^a(x-a)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$$

別解　直線 l：$y=mx$ と放物線 C：$y=x^2-2x+c$ が $x=a$ で接しているから

$x^2-2x+c-mx=(x-a)^2$

が成り立つ。

よって　　$S=\displaystyle\int_0^a(x^2-2x+c-mx)dx=\int_0^a(x-a)^2dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$$

2

解答　$m=(\sqrt[3]{2}-1)a$

解説

曲線 $y=x^2-ax$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は，$x^2-ax=mx$ から

$x\{x-(a+m)\}=0$

したがって　　$x=0,\ a+m$

曲線 $y=-(x^2-ax)$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は，$-(x^2-ax)=mx$ から

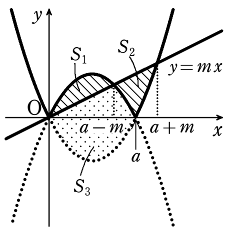
$x\{x-(a-m)\}=0$

したがって　　$x=0,\ a-m$

題意から，右の図において

$S_1+S_3=S_2+S_3$

となるときの m を a で表せばよい。



$$S_1+S_3=2\int_0^a(-x^2+ax)dx=-2\int_0^a x(x-a)dx=\frac{2a^3}{6}$$

$$S_2+S_3=\int_0^{a+m}\{mx-(x^2-ax)\}dx$$

$$=-\int_0^{a+m}x\{x-(a+m)\}dx=\frac{(a+m)^3}{6}$$

求める条件は　　$(a+m)^3=2a^3$

よって　　　　$m=(\sqrt[3]{2}-1)a$

章末問題Ａ

1

解答　$(a,\ b,\ c)=(3,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}),\ (3,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

解説

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1(ax-1)^2dx=\int_0^1(a^2x^2-2ax+1)dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3-ax^2+x\right]_0^1=\frac{a^2}{3}-a+1$$

よって，$\dfrac{a^2}{3}-a+1=1$ から　　$\dfrac{1}{3}a(a-3)=0$

$a\neq 0$ であるから　　$a=3$

したがって，$f(x)=3x-1$ であるから

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1(3x-1)(bx+c)dx=\int_0^1\{3bx^2+(3c-b)x-c\}dx$$

$$=\left[bx^3+\frac{1}{2}(3c-b)x^2-cx\right]_0^1=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$$

よって，$\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}c=0$ から　　$c=-b$　……①

$$\int_0^1\{g(x)\}^2dx=\int_0^1(bx-b)^2dx=\int_0^1 b^2(x-1)^2dx=b^2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{b^2}{3}$$

よって，$\dfrac{b^2}{3}=1$ から　　$b=\pm\sqrt{3}$

これを ① に代入して　　$c=\mp\sqrt{3}$　(複号同順)

以上から　　$(a,\ b,\ c)=(3,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}),\ (3,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

2

解答　略

解説

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ とすると　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1=\frac{a}{2}+b$

よって，条件から　　$\dfrac{a}{2}+b=1$　　　　ゆえに　　$b=1-\dfrac{a}{2}$

したがって　　$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1(ax+b)^2dx=\left[\frac{(ax+b)^3}{3a}\right]_0^1$

$$=\frac{(a+b)^3-b^3}{3a}=\frac{a^2}{3}+ab+b^2$$

$$=\frac{a^2}{3}+a\left(1-\frac{a}{2}\right)+\left(1-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{12}+1$$

$a\neq 0$ であるから　　$\dfrac{a^2}{12}+1>1$

すなわち　　$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx>1$

参考　本問の不等式はシュワルツの不等式から導くことができる。

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leqq\int_a^b\{f(x)\}^2dx\int_a^b\{g(x)\}^2dx$$

において，$a=0$，$b=1$，$g(x)=1$ とおくと

$$\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2\leqq\int_0^1\{f(x)\}^2dx\quad となる。$$

よって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ のとき　　$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx\geqq 1$

更に $f(x)$ が x の 1 次式のとき，不等式の等号は成り立たないから

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx>1$$

3

解答　(1)　$x=1,\ 4$　　(2)　$x=2,\ 5$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$；$x=0$ で最小値 $-\dfrac{16}{3}$

解説

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_1^x(t^2-6t+8)dt=\left[\frac{t^3}{3}-3t^2+8t\right]_1^x=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)$

$$=\frac{1}{3}(x^3-9x^2+24x-16)=\frac{1}{3}(x-1)(x^2-8x+16)$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)(x-4)^2$$

よって，$f(x)=0$ となる x の値は　　$x=1,\ 4$

(2)　$f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x(t^2-6t+8)dt=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2,\ 4$

$0\leqq x\leqq 5$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	…	2	…	4	…	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{16}{3}$	↗	極大 $\dfrac{4}{3}$	↘	極小 0	↗	$\dfrac{4}{3}$

よって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 5$ において

$x=2,\ 5$ で最大値 $\dfrac{4}{3}$；$x=0$ で最小値 $-\dfrac{16}{3}$　をとる。

4

解答　$a=-3+2\sqrt{3}$，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

解説

$\displaystyle\int_0^1\{f(t)\}^2dt=k$ (定数) とおくと　　$f(x)=ax+k$　……①

よって　$\displaystyle\int_0^1\{f(t)\}^2dt=\int_0^1(at+k)^2dt=\int_0^1(a^2t^2+2akt+k^2)dt$

$$=\left[\frac{a^2}{3}t^3+akt^2+k^2t\right]_0^1=\frac{a^2}{3}+ak+k^2$$

ゆえに　$\dfrac{a^2}{3}+ak+k^2=k$　　　整理すると　$k^2+(a-1)k+\dfrac{a^2}{3}=0$　……②

ここで，$f(x)$ がただ 1 つしか存在しない条件は，① より，k の 2 次方程式 ② が重解をもつことである。

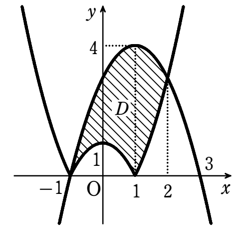
よって，② の判別式 D について　$D=0$　　すなわち　$(a-1)^2-\dfrac{4a^2}{3}=0$

ゆえに　$a^2+6a-3=0$　　　$a>0$ であるから　$a=-3+2\sqrt{3}$

このとき　$k=-\dfrac{a-1}{2}=2-\sqrt{3}$　　したがって　$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}$

5

解答　(1)〔図〕境界線を含む。　(2) $\dfrac{19}{3}$



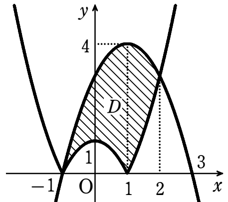
解説

(1)　$y=|x^2-1|$ のグラフは，$y=x^2-1$ の $y<0$ の部分を上に折り返したものである。

また　$y=-x^2+2x+3$

$\quad=-(x-1)^2+4$

よって，領域 D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2)　2つのグラフ $y=|x^2-1|$，$y=-x^2+2x+3$ の $x>1$ における共有点について，

$x^2-1=-x^2+2x+3$

とすると　$2x^2-2x-4=0$

よって　$(x+1)(x-2)=0$

$x>1$ であるから　$x=2$

ゆえに，領域 D の面積は，図より

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)\}dx+\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

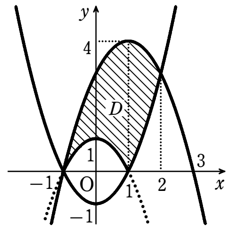
$$=\Big[x^2+2x\Big]_{-1}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\Big]_{1}^{2}$$

$$=(1+2)-(1-2)+\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(-\frac{2}{3}+1+4\right)$$

$$=\frac{19}{3}$$

別解　領域 D の面積は，$y=x^2-1$ と $y=-x^2+2x+3$ で囲まれた部分の面積から，$y=x^2-1$ と $y=1-x^2$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。

ゆえに，求める面積は



$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx-\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)-(x^2-1)\}dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{2}{6}\{2-(-1)\}^3-\frac{2}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{19}{3}$$

6

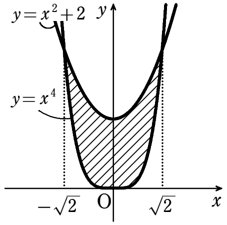
解答　$\dfrac{56\sqrt{2}}{15}$

解説

$x^4=x^2+2$ とすると　$x^4-x^2-2=0$　　すなわち　$(x^2-2)(x^2+1)=0$

x は実数であるから　$x=\pm\sqrt{2}$

よって，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\{(x^2+2)-x^4\}dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^4+x^2+2)dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+2x\Big]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)=\frac{56\sqrt{2}}{15}$$

7

解答　(1) $k=\dfrac{5}{4}$　　(2) $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$

解説

(1)　$y'=2x+2$

接点を $(t,\ t^2+2t+k)$ とすると，接線の方程式は

$y-(t^2+2t+k)=(2t+2)(x-t)$　　すなわち　$y=(2t+2)x-t^2+k$

これが原点を通るから

$0=(2t+2)\cdot 0-t^2+k$　　よって　$t^2=k$　…… ①

条件より，t の方程式 ① が異なる2つの実数解をもつから　$k>0$

このとき，① から　$t=\pm\sqrt{k}$

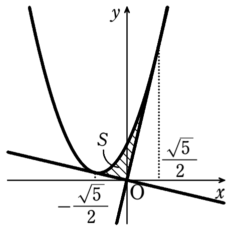
ゆえに，2本の接線の傾きは，それぞれ　$2\sqrt{k}+2$，$-2\sqrt{k}+2$

これらの接線が垂直であるから

$(2\sqrt{k}+2)(-2\sqrt{k}+2)=-1$　　よって　$-4k+4=-1$

ゆえに　$k=\dfrac{5}{4}$　（これは $k>0$ を満たす）

(2)　2つの接点の x 座標は　$\pm\sqrt{k}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



また，2本の接線の方程式は

$y=(\sqrt{5}+2)x$，$y=(-\sqrt{5}+2)x$

求める面積を S とすると，図から

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{0}\left\{\left(x^2+2x+\frac{5}{4}\right)-(-\sqrt{5}+2)x\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left\{\left(x^2+2x+\frac{5}{4}\right)-(\sqrt{5}+2)x\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{0}\left(x^2+\sqrt{5}x+\frac{5}{4}\right)dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(x^2-\sqrt{5}x+\frac{5}{4}\right)dx$$

$$=\Big[\frac{x^3}{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{5}{4}x\Big]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{0}+\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{5}{4}x\Big]_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{24}+\frac{5\sqrt{5}}{24}=\frac{5\sqrt{5}}{12}$$

別解　［S の計算］

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{0}\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left\{0-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right\}=\frac{5\sqrt{5}}{12}$$

8

解答　(1) $2a+\dfrac{1}{a}$　　(2) $S=\dfrac{8}{3}a+\dfrac{1}{a}$，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ で最小値 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

解説

(1)　$y=\dfrac{1}{2}ax^2$ から　$y'=ax$

よって，点 P$(2,\ 2a)$ における接線の傾きは　$2a$

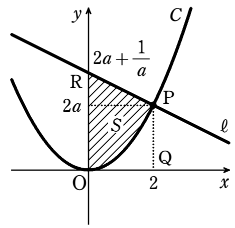
ゆえに，直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$ であるから，その方程式は

$y-2a=-\dfrac{1}{2a}(x-2)$　　すなわち　$y=-\dfrac{1}{2a}x+2a+\dfrac{1}{a}$

$x=0$ を代入すると　$y=2a+\dfrac{1}{a}$

したがって，直線 ℓ の y 切片は　$2a+\dfrac{1}{a}$

(2)　Q$(2,\ 0)$，R$\left(0,\ 2a+\dfrac{1}{a}\right)$ とすると



$$S=(\text{台形 OQPR})-\int_{0}^{2}\frac{1}{2}ax^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2a+\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot 2-\Big[\frac{1}{6}ax^3\Big]_{0}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}a+\frac{1}{a}$$

$a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$S=\frac{8}{3}a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{8}{3}a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{8}{3}a=\dfrac{1}{a}$ のときである。

$\dfrac{8}{3}a=\dfrac{1}{a}$ から　$a^2=\dfrac{3}{8}$　　$a>0$ であるから　$a=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

したがって，S は $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ で最小値 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ をとる。

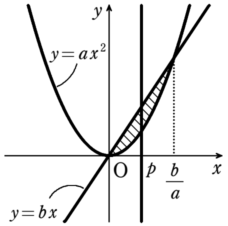
9

解答　$x=\dfrac{b}{2a}$

解説

章末問題A

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx$ の交点の x 座標は，方程式 $ax^2=bx$ ……① の実数解である。



① から　$ax\left(x-\dfrac{b}{a}\right)=0$　　よって　$x=0,\ \dfrac{b}{a}$

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx$ で囲まれる部分の面積を S とする。

$0\leqq x\leqq\dfrac{b}{a}$ の範囲で $bx\geqq ax^2$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{b}{a}}(bx-ax^2)dx=\int_0^{\frac{b}{a}}\left\{-ax\left(x-\frac{b}{a}\right)\right\}dx=\frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{6a^2}$$

直線 $x=p$ が S を 2 等分するから　$0<p<\dfrac{b}{a}$　……②

したがって　$\displaystyle\int_0^p(bx-ax^2)dx=\frac{S}{2}$

ここで　$(左辺)=\left[\dfrac{b}{2}x^2-\dfrac{a}{3}x^3\right]_0^p=\dfrac{b}{2}p^2-\dfrac{a}{3}p^3$

よって　$\dfrac{b}{2}p^2-\dfrac{a}{3}p^3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b^3}{6a^2}$　　ゆえに　$4p^3-6\left(\dfrac{b}{a}\right)p^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^3=0$

ここで，$\dfrac{b}{a}=k$ とおくと　$4p^3-6kp^2+k^3=0$

すなわち　$(2p-k)(2p^2-2kp-k^2)=0$

② より，$0<p<k$ であるから　$p=\dfrac{k}{2}$　　したがって　$p=\dfrac{b}{2a}$

よって　$x=\dfrac{b}{2a}$

章末問題B

$\boxed{1}$

解答　$S=-\dfrac{1}{6}\alpha^3+\dfrac{1}{12}\alpha$，$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{6}}{108}$

解説

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=2\int_0^1(x^2+\alpha\beta)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+\alpha\beta x\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+\alpha\beta\right)$$

$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx=1$ から　$2\left(\dfrac{1}{3}+\alpha\beta\right)=1$　　したがって　$\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$

このとき　$\displaystyle S=\int_0^\alpha\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_0^\alpha$

$$=\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha\beta)\alpha+\alpha\beta\alpha=\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{1}{6}\right)\alpha+\frac{1}{6}\alpha$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{12}\alpha\quad\cdots\cdots①$$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$ から　$\beta=\dfrac{1}{6\alpha}$

これと条件 $0\leqq\alpha\leqq\beta$ から　$0<\alpha\leqq\dfrac{1}{6\alpha}$

よって　$0<\alpha$ かつ $\alpha^2\leqq\dfrac{1}{6}$　　ゆえに　$0<\alpha\leqq\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　……②

① から　$\dfrac{dS}{d\alpha}=-\dfrac{1}{2}\alpha^2+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{12}(1-6\alpha^2)$

② の範囲において　$\dfrac{dS}{d\alpha}\geqq0$

よって，S は ② の範囲で単調に増加する。

ゆえに，S は $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき最大となり，最大値は

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{108}$$

$\boxed{2}$

解答　$a=-2$，$f(x)=3x^2+4x-1$，$g(x)=x^2+2x-2$

解説

$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=b$ ……①，$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)dt=c$ ……② とおくと

$g(x)=x^2+bx+c$　……③

よって　$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x(x^2+bx+c)+x+a$

$=x^3+bx^2+(c+1)x+a$　……④

両辺を x で微分すると　$f(x)=3x^2+2bx+(c+1)$　……⑤

このとき　$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\{3t^2+2bt+(c+1)\}dt$

$$=\Big[t^3+bt^2+(c+1)t\Big]_0^1=b+c+2$$

$$\int_{-1}^0 f(t)dt=\int_{-1}^0\{3t^2+2bt+(c+1)\}dt$$
$$=\Big[t^3+bt^2+(c+1)t\Big]_{-1}^0=-b+c+2$$

よって，①，② から　$b+c+2=b$，$-b+c+2=c$

これらを連立して解くと　$b=2$，$c=-2$

③，⑤ に代入して　$f(x)=3x^2+4x-1$，$g(x)=x^2+2x-2$

また，④ から　$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x^3+2x^2-x+a$

$x=1$ とおくと　$0=1+2-1+a$　　よって　$a=-2$

$\boxed{3}$

解答　$a=-8$，$f(x)=3x^2+8x-7$，$g(x)=x^2+4x+1$

解説

① に $x=0$ を代入すると　$\displaystyle\int_1^0 f(t)dt=2$

よって　$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=-2$

これを ② に代入すると　$g(x)=x^2+4x+1$

ゆえに，① から　$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x^3+4x^2+(a+1)x+2$　……③

③ に $x=1$ を代入すると　$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt=a+8$

すなわち　$0=a+8$　　よって　$a=-8$

これを ③ に代入すると　$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=x^3+4x^2-7x+2$

この両辺を x で微分すると　$f(x)=3x^2+8x-7$

$\boxed{4}$

解答　$f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{5}{24}$

解説

$\displaystyle\int_0^x f(y)dy+\int_0^1(x+y)^2f(y)dy=x^2+C$ から

$$\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy+\int_0^1 y^2f(y)dy=x^2+C$$

$x=0$ を代入すると　$\displaystyle\int_0^1 y^2f(y)dy=C$　……①

よって，次の等式が成り立つ。

$$\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy=x^2$$

$\displaystyle\int_0^1 f(y)dy=a$，$\displaystyle\int_0^1 yf(y)dy=b$（$a$，$b$ は定数）とおくと

$$\int_0^x f(y)dy=(1-a)x^2-2bx$$

両辺を x で微分すると　$f(x)=2(1-a)x-2b$

$$a=\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1\{2(1-a)y-2b\}dy=\Big[(1-a)y^2-2by\Big]_0^1=1-a-2b$$

よって　$2a+2b=1$　……②

$$b=\int_0^1 yf(y)dy=\int_0^1\{2(1-a)y^2-2by\}dy=\left[\frac{2}{3}(1-a)y^3-by^2\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-a)-b$$

よって　$\dfrac{2}{3}a+2b=\dfrac{2}{3}$　……③

② と ③ を連立して解くと　$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{4}$　　したがって　$f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

よって，① から

$$C=\int_0^1 y^2\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left[\frac{3}{8}y^4-\frac{1}{6}y^3\right]_0^1=\frac{5}{24}$$

$\boxed{5}$

解答　$\frac{1}{3}$

解説

A$\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right)$，B$\left(\beta,\ \frac{1}{2}\beta^2\right)$ $(\alpha<\beta)$ とする。

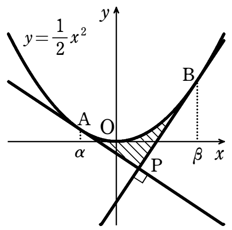
$y=\frac{1}{2}x^2$ から　　$y'=x$

よって，点 A における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha)\quad すなわち\quad y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2$$

同様にして，点 B における接線の方程式は　　$y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2$

2 本の接線の交点 P の x 座標を求める。



$\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2$ とすると

$$(\alpha-\beta)x=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$$

$\alpha\neq\beta$ であるから　　$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

また，PA，PB が直交するとき　　$\alpha\beta=-1$　……①

ゆえに，α，β は異符号で，$\alpha<\beta$ であるから

$$\alpha<0<\beta$$

よって　　$S=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\right)\right\}dx$

$$=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\frac{1}{2}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3$$

① より，$\alpha=-\frac{1}{\beta}$ であるから　　$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3$

$\beta>0$，$\frac{1}{\beta}>0$ から，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3\geqq\frac{1}{24}\left(2\sqrt{\beta\cdot\frac{1}{\beta}}\right)^3=\frac{1}{3}$$

等号は $\beta=\frac{1}{\beta}$，$\beta>0$ すなわち $\beta=1$ のとき成り立つ。

したがって，S の最小値は　　$\frac{1}{3}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$0\leqq t<1$ のとき $F(t)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$，$t\geqq1$ のとき $F(t)=t^2-\frac{1}{3}$

(2)　$t=\frac{1}{2}$

解説

(1)　$|x^2-t^2|=\begin{cases}x^2-t^2 & (x\leqq -t,\ t\leqq x)\\ t^2-x^2 & (-t\leqq x\leqq t)\end{cases}$

よって，$t\geqq1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1|x^2-t^2|dx=\int_0^1(t^2-x^2)dx=\left[t^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$$

$0\leqq t<1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1|x^2-t^2|dx=\int_0^t(t^2-x^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx$$

$$=\left[t^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_t^1=\left(t^3-\frac{t^3}{3}\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}-t^2\right)-\left(\frac{t^3}{3}-t^3\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

以上から　　$F(t)=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3} & (0\leqq t<1)\\ t^2-\frac{1}{3} & (t\geqq1)\end{cases}$

(2)　[1]　$t\geqq1$ のとき　　$F'(t)=2t$

[2]　$0\leqq t<1$ のとき　　$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

$F'(t)=0$ とすると　　$t=0,\ \frac{1}{2}$

よって，$t\geqq0$ における $F(t)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，$F(t)$ が最小値をとるときの t の値は

$$t=\frac{1}{2}$$

t	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1	…
$F'(t)$		−	0	+		+
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗

$\boxed{7}$

解答　$y=x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

解説

P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$ $(p<q)$　とすると

$-\int_p^q(x-p)(x-q)dx=1$　から　$\frac{1}{6}(q-p)^3=1$

よって　$q-p=6^{\frac{1}{3}}$ ……①

また，R$(x,\ y)$ とすると　$x=\frac{p+q}{2}$ ……②，　$y=\frac{p^2+q^2}{2}$ ……③

② から　$p+q=2x$ ……④

③ から　$(p+q)^2-2pq=2y$

④ を代入して　$4x^2-2pq=2y$　　　よって　$pq=2x^2-y$ ……⑤

ここで，① から　$(p+q)^2-4pq=6^{\frac{2}{3}}$

これに ④，⑤ を代入して　$4x^2-4(2x^2-y)=6^{\frac{2}{3}}$

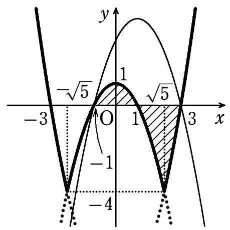
ゆえに，PQ の中点 R が描く図形の方程式は　$y=x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　[図] 境界線を含む

(2)　$20-\frac{20\sqrt{5}}{3}$

(1)



解説

(1)　$y(y-|x^2-5|+4)\leqq0$ ……①，　$y+x^2-2x-3\leqq0$ ……②　とする。

① $\Longleftrightarrow$ ($y\geqq0$ かつ $y-|x^2-5|+4\leqq0$)

　または　($y\leqq0$ かつ $y-|x^2-5|+4\geqq0$)

$\Longleftrightarrow$ ($y\geqq0$ かつ $y\leqq|x^2-5|-4$)

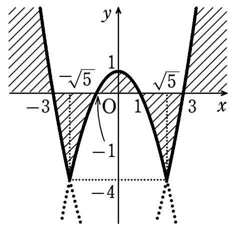
　または　($y\leqq0$ かつ $y\geqq|x^2-5|-4$)

ここで，$x\leqq-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}\leqq x$ のとき

$$|x^2-5|-4=(x^2-5)-4$$
$$=x^2-9$$

$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき

$$|x^2-5|-4=-(x^2-5)-4$$
$$=-x^2+1$$



であるから，① の表す領域は，右の図の斜線部分 (境界線を含む) になる。

また　　② $\Longleftrightarrow$ $y\leqq-x^2+2x+3$

$\Longleftrightarrow$ $y\leqq-(x+1)(x-3)$

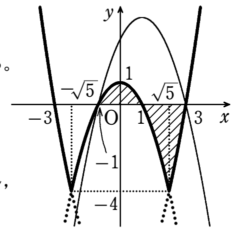
で，② の表す領域は，2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通る放物線 $y=-x^2+2x+3$ の下側の部分 (境界線を含む) である。

D は，① の領域と ② の領域の共通部分であり，

$-\sqrt{5}<x<-1$ の範囲で

$$-x^2+1-(-x^2+2x+3)=-2(x+1)>0$$

であることなどから，右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



(2)　(1) の結果から，D の面積は

$$\int_{-1}^1(-x^2+1)dx+\int_1^{\sqrt{5}}\{-(-x^2+1)\}dx+\int_{\sqrt{5}}^3\{-(x^2-9)\}dx$$

$$=2\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^{\sqrt{5}}(x^2-1)dx+\int_{\sqrt{5}}^3(9-x^2)dx$$

$$=2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{5}}^3$$

$$=\frac{4}{3}+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(18-\frac{22\sqrt{5}}{3}\right)=20-\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$1\leqq p<2$　　(2)　$p=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) 直線 AP の方程式は　$y=-3px+3p$

これと C：$y=-3x^2+3$ から y を消去すると

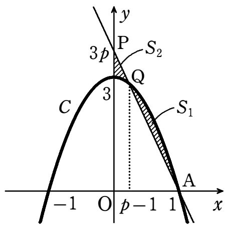
$$-3px+3p=-3x^2+3$$

両辺を 3 で割って整理すると

$$x^2-px+p-1=0$$

$$(x-1)\{x-(p-1)\}=0$$

よって　$x=1,\ p-1$



線分 AP と C が A と異なる点 Q を共有するための条件は，Q の x 座標が $p-1$ となるから

$$0\leqq p-1<1$$

ゆえに　$1\leqq p<2$

(2) S_1，S_2 の面積をそれぞれ y_1，y_2 とする。

$$y_1=\int_{p-1}^{1}\{(-3x^2+3)-(-3px+3p)\}dx$$

$$=-3\int_{p-1}^{1}\{x-(p-1)\}(x-1)dx=3\cdot\frac{1}{6}\{1-(p-1)\}^3=\frac{1}{2}(2-p)^3$$

$$=-\frac{1}{2}p^3+3p^2-6p+4$$

$$y_2=\int_{0}^{p-1}\{(-3px+3p)-(-3x^2+3)\}dx$$

$$=\int_{0}^{p-1}(3x^2-3px+3p-3)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{3}{2}px^2+3(p-1)x\right]_0^{p-1}=(p-1)^3-\frac{3}{2}p(p-1)^2+3(p-1)^2$$

$$=-\frac{1}{2}p^3+3p^2-\frac{9}{2}p+2$$

$y_1+y_2=f(p)$ とおくと

$$f(p)=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

$$f'(p)=-3p^2+12p-\frac{21}{2}=-\frac{3}{2}(2p^2-8p+7)$$

$f'(p)=0$ とすると　$p=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

$1\leqq p<2$ における $f(p)$ の増減表は次のようになる。

p	1	$\cdots$	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	2
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$	$\frac{1}{2}$	↘	極小	↗	

よって，S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値は　$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

参考　S_1 の面積と S_2 の面積の和の計算は，y_1 を求めた後，次のようにすると，より簡単である。

$$y_1+y_2=\triangle\mathrm{OAP}-\int_0^1(-3x^2+3)dx+2y_1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3p+3\int_0^1(x^2-1)dx+2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3$$

$$=\frac{3}{2}p+3\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+(2-p)^3=\frac{3}{2}p-2+(2-p)^3$$

$$=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

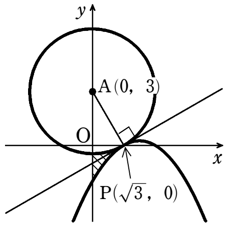
10

解答　(1) $\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=2$　(2) $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}-\pi$

解説

(1) 点 $(0,\ 3)$ を A とする。

AP の傾きは $-\sqrt{3}$ であるから，P における接線の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。



$f(x)=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ とおくと　$f'(x)=-\dfrac{2}{3}x+\alpha$

$f'(\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から　$-\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{3}+\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\alpha=\sqrt{3}$

ゆえに，$f(\sqrt{3})=0$ から　$-\dfrac{(\sqrt{3})^2}{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\beta=0$

よって　$\beta=2$

(2) $\angle\mathrm{PAO}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AP}=2\sqrt{3}$ であるから，求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(-\frac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2\right)\right\}dx-\left\{\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot3\right\}$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}-\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}\right)-\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}-\pi$$

1

解答　$t=2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

解説

$f(x)=x|x-t|$ とする。

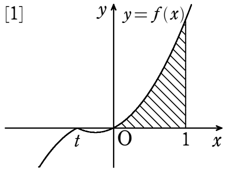
$x-t\geqq0$ すなわち $x\geqq t$ のとき　$f(x)=x(x-t)=x^2-tx$

$x-t\leqq0$ すなわち $x\leqq t$ のとき　$f(x)=-x(x-t)=-x^2+tx$

$f(x)=0$ とすると　$x=0,\ t$

[1] $-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq0$ のとき

[1]



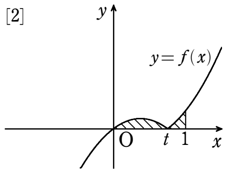
$0\leqq x\leqq1$ では　$f(x)=x^2-tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^1(x^2-tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1$

$$=\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$$

[2] $0<t<1$ のとき

[2]



$0\leqq x\leqq t$ では　$f(x)=-x^2+tx$

$t\leqq x\leqq1$ では　$f(x)=x^2-tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^t(-x^2+tx)dx+\int_t^1(x^2-tx)dx$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1$$

$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$

$F'(t)=t^2-\dfrac{1}{2}=\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

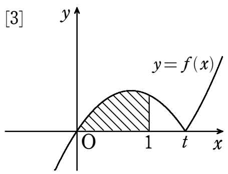
$F'(t)=0$ とすると　$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0<t<1$ における増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$		↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	

[3] $1\leqq t\leqq2$ のとき

[3]



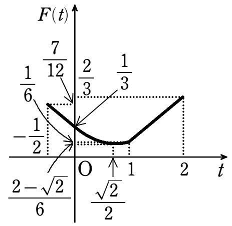
$0\leqq x\leqq1$ では　$f(x)=-x^2+tx$

よって　$F(t)=\displaystyle\int_0^1(-x^2+tx)dx$

$$=-\int_0^1(x^2-tx)dx$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$$

[1]，[2]，[3] から，$y=F(t)$ のグラフは，右の図のようになる。



したがって，$F(t)$ は

$t=2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}$，

$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

をとる。

2

解答　(1)　$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき $S=-\frac{4a^2+1}{2a}$，　$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ のとき $S=2$，

$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき $S=\frac{4a^2+1}{2a}$

(2)　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき最小値 2

解説

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ から　　$c=0$，$4a+2b+c=2$

よって　　$b=-2a+1$，$c=0$

ゆえに　　$f(x)=ax^2+(-2a+1)x$

$f'(x)=2ax-2a+1=2a(x-1)+1$

したがって，$y=f'(x)$ のグラフは傾き $2a$ の直線で，a の値に関係なく点 $(1,\ 1)$ を通る。

また　　$f'(0)=1-2a$，$f'(2)=1+2a$

[1]　$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき　　$f'(0)>0$，$f'(2)\leqq0$

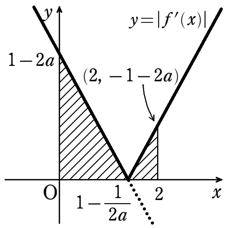
$f'(x)=0$ とすると　　$x=1-\frac{1}{2a}$

$y=|f'(x)|$ のグラフは右の図のようになるから

$S=\int_0^2|f'(x)|dx$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2a}\right)(1-2a)+\frac{1}{2}\left\{2-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}(-1-2a)$

$=-\frac{(2a-1)^2}{4a}-\frac{(2a+1)^2}{4a}=-\frac{4a^2+1}{2a}$

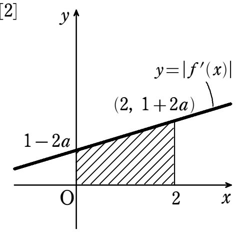


[2]　$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ のとき　　$f'(0)>0$，$f'(2)>0$

よって　　$S=\int_0^2|f'(x)|dx$

$=\frac{1}{2}\{(1-2a)+(1+2a)\}\times2=2$

[2]



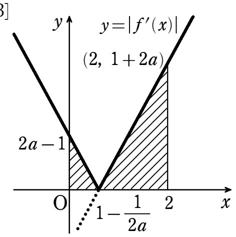
[3]　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　　$f'(0)\leqq0$，$f'(2)>0$

[1] と同様にして

$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2a}\right)(2a-1)+\frac{1}{2}\left\{2-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}(1+2a)$

$=\frac{(2a-1)^2}{4a}+\frac{(2a+1)^2}{4a}=\frac{4a^2+1}{2a}$

[3]



まとめると　　$S=\begin{cases}-\frac{4a^2+1}{2a} & \left(a\leqq-\frac{1}{2}\right)\\ 2 & \left(-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4a^2+1}{2a} & \left(a\geqq\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

(2)　(1) で求めた a の関数 S は偶関数である。

$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　　$S=\frac{4a^2+1}{2a}=2a+\frac{1}{2a}$

相加平均・相乗平均の関係から　　$2a+\frac{1}{2a}\geqq2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$

等号は $2a=\frac{1}{2a}$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき成り立つ。

また，$0\leqq a<\frac{1}{2}$ のとき　　$S=2$

以上から，S は $-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき最小値 2 をとる。

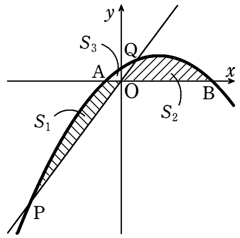
3

解答　$m=4$

解説

右図のように，線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積を S_1，線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

また，$m>0$ の場合，線分 OA，OQ と C で囲まれた図形の面積を S_3，$m<0$ の場合，線分 OB，OP と C で囲まれた図形の面積を S_3 とする。



$S_1=S_2$ から　　$S_1+S_3=S_2+S_3$

ゆえに　$-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

よって　　$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(b-a)^3$

α，β，a，b は実数であるから　　$\beta-\alpha=b-a$　……①

$-x^2+2x+1=0$ の解が $x=a$，b $(a<b)$ であるから

$b-a=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$-x^2+2x+1=mx$ すなわち $x^2+(m-2)x-1=0$ の解が $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ であるから

$\beta-\alpha=\frac{-(m-2)+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}-\frac{-(m-2)-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

$=\sqrt{m^2-4m+8}$

① に代入すると　　$\sqrt{m^2-4m+8}=2\sqrt{2}$　……②

ゆえに　　$m(m-4)=0$　　　$m\neq0$ であるから　　$m=4$

これは ② を満たすから適する。

4

解答　(1)　$t<-1$，$0<t$　　(2)　$S(t)>\frac{27}{64}$

解説

(1)　$y=x^3-x$ から　　$y'=3x^2-1$

C 上の点 $(a,\ a^3-a)$ における接線の方程式は

$y-(a^3-a)=(3a^2-1)(x-a)$

すなわち　　$y=(3a^2-1)x-2a^3$

この直線が点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通るから

$t=(3a^2-1)\cdot1-2a^3$

整理すると　$-2a^3+3a^2-1=t$　……①

点 P を通る接線がちょうど 1 本だけ引けるためには，a の 3 次方程式 ① が実数解を 1 つもてばよい。

すなわち，曲線 $y=-2a^3+3a^2-1$ と直線 $y=t$ がちょうど 1 点で交わればよい。

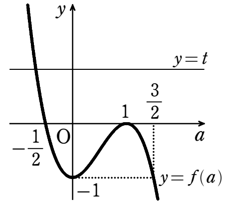
$f(a)=-2a^3+3a^2-1$ とすると

$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

$f'(a)=0$ とすると　　$a=0$，1

$f(a)$ の増減表は次のようになる。

a	…	0	…	1	…
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	-1	↗	0	↘



右図より，求める t の範囲は

$t<-1$，$0<t$

(2)　$t<-1$，$0<t$ のとき

(1) の図から

$a<-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}<a$　……②

また，C と接線の共有点の x 座標は

$x^3-x=(3a^2-1)x-2a^3$

の解である。

整理すると　　$x^3-3a^2x+2a^3=0$

すなわち　　$(x+2a)(x-a)^2=0$　　　よって　　$x=-2a$，a

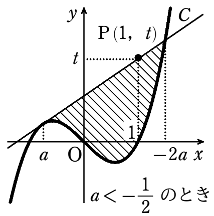
ゆえに

$S(t)=\left|\int_{-2a}^a[(x^3-x)-\{(3a^2-1)x-2a^3\}]dx\right|$

$=\left|\int_{-2a}^a(x^3-3a^2x+2a^3)dx\right|$

$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-3a^2\cdot\frac{x^2}{2}+2a^3x\right]_{-2a}^a\right|$

$=\frac{27}{4}a^4$



② より，$a^4>\frac{1}{16}$ であるから

$S(t)>\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{16}=\frac{27}{64}$

参考　一般に

$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ が成り立つ。

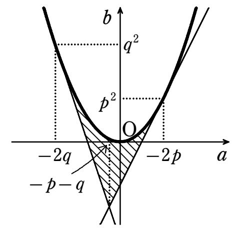
(2) の積分は，次のように計算できる。

$\int_{-2a}^a(x^3-3a^2x+2a^3)dx=\int_{-2a}^a(x+2a)(x-a)^2dx$

$=\frac{1}{12}\{a-(-2a)\}^4=\frac{27}{4}a^4$

5

解答　［図］境界線を含む，$\frac{1}{6}(q-p)^3$

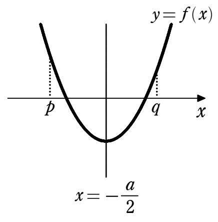


解説

$f(x)=x^2+ax+b$ とおく。

2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解をもつから，判別式 D について　　$D=a^2-4b\geqq 0$

よって　　$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$　……①



軸について $p\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq q$ から

$$-2q\leqq a\leqq -2p\quad\cdots\cdots②$$

また，$f(p)=p^2+ap+b\geqq 0$，$f(q)=q^2+aq+b\geqq 0$ であるから

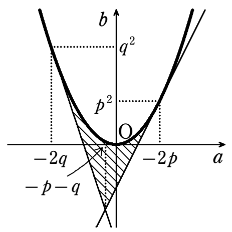
$$b\geqq -pa-p^2\quad\cdots\cdots③,\qquad b\geqq -qa-q^2\quad\cdots\cdots④$$

$b=-pa-p^2$ と $b=-qa-q^2$ の交点の a 座標を求めると

$-pa-p^2=-qa-q^2$ から　　$a=-p-q$

また，$b=\dfrac{a^2}{4}$ は $b=-pa-p^2$，$b=-qa-q^2$ とそれぞれ点 $(-2p,\ p^2)$，$(-2q,\ q^2)$ で接する。

以上から，求める領域は ① ～ ④ を満たす領域で，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



この領域の面積を S とすると

$$S=\int_{-2q}^{-p-q}\left\{\frac{a^2}{4}-(-qa-q^2)\right\}da+\int_{-p-q}^{-2p}\left\{\frac{a^2}{4}-(-pa-p^2)\right\}da$$

$$=\int_{-2q}^{-p-q}\frac{1}{4}(a+2q)^2da+\int_{-p-q}^{-2p}\frac{1}{4}(a+2p)^2da$$

$$=\frac{1}{12}\Big[(a+2q)^3\Big]_{-2q}^{-p-q}+\frac{1}{12}\Big[(a+2p)^3\Big]_{-p-q}^{-2p}=\frac{1}{6}(q-p)^3$$

$\boxed{6}$

解答　$m=1$

解説

$$y=x^2+x+4-|3x|=\begin{cases}x^2-2x+4 & (x\geqq 0)\\ x^2+4x+4 & (x<0)\end{cases}$$

曲線 $y=x^2-2x+4$ と直線 $y=mx+4$ の交点の x 座標は

$x^2-2x+4=mx+4$　を解いて　$x=0,\ m+2$

曲線 $y=x^2+4x+4$ と直線 $y=mx+4$ の交点の x 座標は

$x^2+4x+4=mx+4$　を解いて　$x=0,\ m-4$

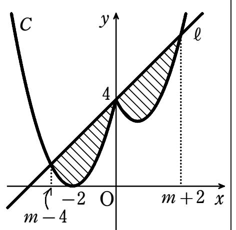
C：$y=x^2+x+4-|3x|$，ℓ：$y=mx+4$ とする。

[1]　$-2<m<4$ のとき

C と ℓ の交点の x 座標は

$m-4,\ 0,\ m+2$

よって



$$S=\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx+\int_{0}^{m+2}\{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=\int_{m-4}^{0}[-x\{x-(m-4)\}]dx+\int_{0}^{m+2}[-x\{x-(m+2)\}]dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3+\frac{1}{6}(m+2)^3=3(m-1)^2+9$$

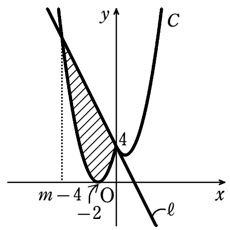
S は $m=1$ のとき最小値 9 をとる。

[2]　$m\leqq-2$ のとき

C と ℓ の交点の x 座標は　　$m-4,\ 0$　のみ。

よって　　$S=\displaystyle\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3$$



S は，$m\leqq-2$ において単調減少であるから，

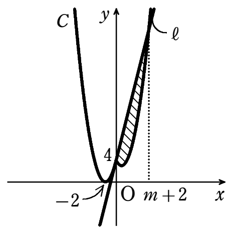
$m=-2$ のとき最小値 36 をとる。

[3]　$m\geqq 4$ のとき

C と ℓ の交点の x 座標は　　$0,\ m+2$　のみ。

よって　　$S=\displaystyle\int_{0}^{m+2}\{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$

$$=\frac{1}{6}(m+2)^3$$



S は，$m\geqq 4$ において単調増加であるから，

$m=4$ のとき最小値 36 をとる。

[1] ～ [3] から　　$m=1$