

国私立中高一貫校対象
集団 & 個別指導ハイブリッド型塾

STUDY
COLLABO
スタディ・コラボ



2024年度 春期講習会

高3理系数学総合S

第1講

【演習問題】

1

(1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt\right)x \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

2

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t), g(t)$ が次の6つの条件を満たしているとする。

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2, \quad f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

このとき、

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく。

(1) $p'(t)$ を求めよ。

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ。

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ を求めよ。

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して、媒介変数表示された平面曲線 $(x, y) = (f(t), g(t)) (0 \leq t \leq T)$ の長さを求めよ。

3

$x \geq 2$ をみたす実数 x に対し, $f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$ とおく。必要ならば,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること, および, 自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを証明なしで用いてもよい。

- (1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき, 関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ。
- (2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し, $g(\alpha) = 0$ をみたす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ, $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし, (2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。
- (4) $2 \leq m < n$ をみたす整数 m, n の組 (m, n) に対して, 等式

$$(2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。