$\boxed{1}$ (1) の補足

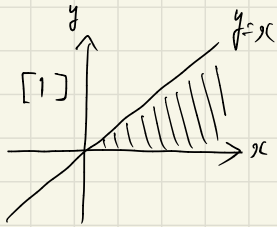
$|x-y| \leqq x+y \iff x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の証明

— ①　　　　　　　　　　— ②

i) $x-y \geqq 0$, すなわち $y \leqq x$ のとき

$|x-y| = x-y$ であるから

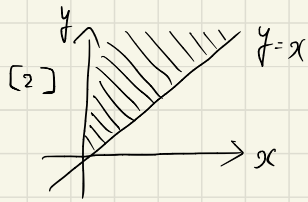
① $\iff x-y \leqq x+y \iff y \geqq 0$



ii) $x-y \leqq 0$, すなわち $y \geqq x$ のとき

$|x-y| = -x+y$ であるから

① $\iff -x+y \leqq x+y \iff x \geqq 0$



[1], [2] を合わせると、② の領域となる。

〈参考〉 2乗する方法

$x+y \leqq 0$ のときは ① は成立しないので、$x+y \geqq 0$ [3]
の条件下で考える。

① $\iff |x-y|^2 \leqq (x+y)^2 \iff (x-y)^2 \leqq (x+y)^2$

$\iff x^2-2xy+y^2 \leqq x^2+2xy+y^2 \iff xy \geqq 0$

$\iff$ "$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$" または "$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$"

[4]

[3] かつ [4] が満たす領域は ② となる。

(2) (1)の誘導を乗らずにすると…

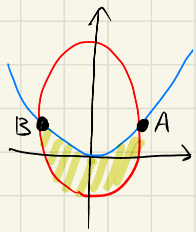
$$|1+y-2x^2-y^2| \leqq 1-y-y^2 \quad — ③$$

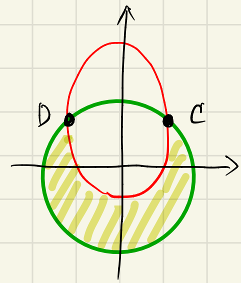
i) $1+y-2x^2-y^2 \geqq 0$ のとき

③ $\iff$ $y \leqq x^2$

ii) $1+y-2x^2-y^2 \leqq 0$ のとき

③ $\iff$ $x^2+y^2 \leqq 1$





実は, $A=C$
$B=D$

$\Downarrow$

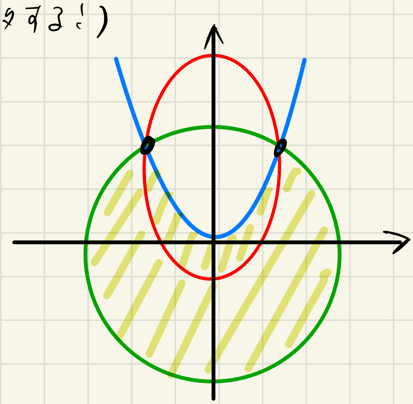
(一致する!)

• $y=x^2$ と $x^2+y^2=1$ との交点

$y+y^2=1 \Rightarrow y^2+y-1=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

図より $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ … A, B



• $1+y-2x^2-y^2=0$ と $y=x^2$ との交点

$1+y-2y-y^2=0 \Rightarrow y^2+y-1=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

図より $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ … C, D

よって, $A=C$, $B=D$ となるから上の図のようになる。