［2015 東京大］

解説

$y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$ から　　$(x^2-1)a^2-ya+\dfrac{1}{4}=0$　……①

求める C の通過する領域は，① を満たす正の実数 a が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体である。

[1]　$x^2-1=0$ すなわち $x=\pm1$ のとき

① は $ya=\dfrac{1}{4}$ となるから，これを満たす正の実数 a が存在するための条件は

$$y>0$$

[2]　$x^2-1\neq0$ のとき

$f(a)=(x^2-1)a^2-ya+\dfrac{1}{4}$ とおく。

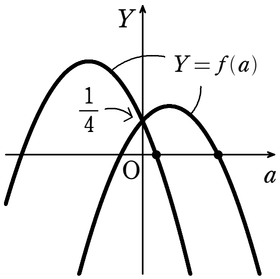
① を満たす正の実数 a が存在するための条件は，放物線 $Y=f(a)$ が a 軸の正の部分と共有点をもつことである。

(i)　$x^2-1<0$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$Y=f(a)$は上に凸の放物線であり，$f(0)=\dfrac{1}{4}$ であるから，右の図より，a 軸の正の部分と常に共有点をもつ。

よって，$-1<x<1$ のとき

yはすべての実数



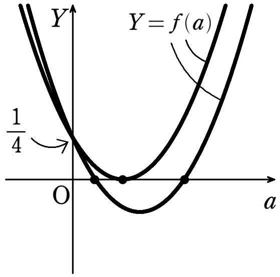
(ii)　$x^2-1>0$ すなわち $x<-1,\ 1<x$ のとき

$Y=f(a)$ は下に凸の放物線であり，$f(0)=\dfrac{1}{4}$ であるから，右の図より，a 軸の正の部分と共有点をもつための条件は，① の判別式 D について

$$D=(-y)^2-4\cdot\frac{1}{4}(x^2-1)=y^2-x^2+1\geqq0$$

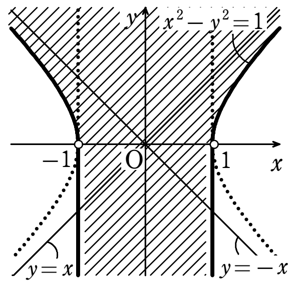
かつ　軸について　$\dfrac{y}{2(x^2-1)}>0$

よって　　$x^2-y^2\leqq1$　かつ　$y>0$



以上から，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線は，直線 $x=\pm1$ の $y\leqq0$ の部分を含まず，他は含む。



別解　xを固定して考える。

$y=(x^2-1)a+\dfrac{1}{4a}$ から　　$\dfrac{dy}{da}=x^2-1-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4(x^2-1)a^2-1}{4a^2}$

[1]　$x^2-1\leqq0$ のとき　　$\dfrac{dy}{da}<0$

また　　$\displaystyle\lim_{a\to+0}y=\infty$，　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}y=\begin{cases}0 & (x^2-1=0\text{ のとき})\\ -\infty & (x^2-1<0\text{ のとき})\end{cases}$

よって，a が正の実数全体を動くとき，yのとりうる値の範囲は，

$x=\pm1$ のとき　　$y>0$

$-1<x<1$ のとき　　すべての実数

[2]　$x^2-1>0$ のとき

$\dfrac{dy}{da}=0$ とすると　　$a=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$

$a>0$ における yの増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$	$\cdots$
$\dfrac{dy}{da}$	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	$\sqrt{x^2-1}$	↗

また　　$\displaystyle\lim_{a\to+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}y=\infty$

よって，a が正の実数全体を動くとき，yのとりうる値の範囲は　　$y\geqq\sqrt{x^2-1}$

以上から，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線は，直線 $x=\pm1$ の $y\leqq0$ の部分を含まず，他は含む。