［1990 京都大］

解説

△ABC において，余弦定理から

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=a^2+c^2-ac=(a^2-2ac+c^2)+ac$$

よって　$ac=b^2-(a-c)^2$　　ゆえに　$ac=(b+a-c)(b-a+c)$

$a \geqq c$ としても一般性を失わないから，$a \geqq c$ とすると　$b+a-c \geqq b-a+c$

a，c は素数であるから，a，b，c の間には次の場合の関係式が考えられる。

[1]　$b+a-c=a$，$b-a+c=c$

[2]　$b+a-c=ac$，$b-a+c=1$

[1] のとき　$b+a-c=a$ から　$c=b$　　$b-a+c=c$ から　$a=b$

よって　$a=b=c$

[2] のとき　2 式から b を消去すると　$-2a+2c+ac-1=0$

ゆえに　$a(c-2)+2(c-2)+3=0$　　よって　$(a+2)(c-2)=-3$

$a+2$，$c-2$ はともに整数であり，$a+2>0$ であるから　$a+2=3$，$c-2=-1$

よって　$a=c=1$

これは a，c が素数であるという条件を満たさない。

以上から，a，b，c は [1] の場合の関係式を満たし，このとき △ABC は正三角形である。