$\boxed{1}$

(解説)

(1) $|x-y| \leqq x+y$

$\iff -(x+y) \leqq x-y \leqq x+y$

$\iff -(x+y) \leqq x-y$ かつ $x-y \leqq x+y$

$\iff x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

よって，題意は示された。

注意 一般に，実数 a，b に対して

$$|a| \leqq b \iff -b \leqq a \leqq b$$

が成り立つ。

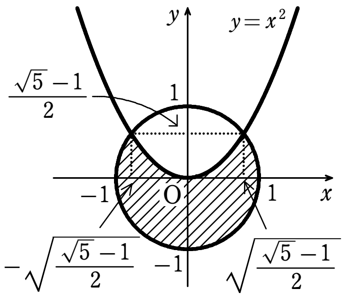
(2) $X=1-x^2-y^2$，$Y=-y+x^2$ とすると，条件から $|X-Y| \leqq X+Y$

(1) から，$|X-Y| \leqq X+Y$ であることの必要十分条件は，$X \geqq 0$ かつ $Y \geqq 0$ であるから

$1-x^2-y^2 \geqq 0$ かつ $-y+x^2 \geqq 0$

すなわち $x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $y \leqq x^2$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ から

$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x$

$\quad=-x\cos x$

$0<x<\pi$ において，$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{\pi}{2}$

$0<x<\pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

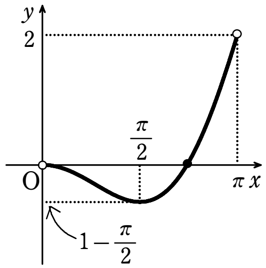
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

また　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\cos\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=1-\dfrac{\pi}{2}$

$f(0)=1-\cos 0=0$

$f(\pi)=1-\cos\pi-\pi\sin\pi=2$

よって，$y=f(x)$ の $0<x<\pi$ におけるグラフは右のようになる。



ゆえに，$0<x<\pi$ において $f(x)=0$ はただ1つの解をもつ。

(2)　(1) から　　$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき　$f(x)\leqq 0$,

$\alpha\leqq x\leqq\pi$ のとき　$f(x)\geqq 0$

よって　　$J=\displaystyle\int_0^{\alpha}\{-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)dx$

ここで　　$\displaystyle\int f(x)dx=\int(1-\cos x-x\sin x)dx$

$\quad=x-\sin x+x\cos x-\displaystyle\int\cos x\,dx$

$\quad=x+x\cos x-2\sin x+C$（$C$ は積分定数）

ゆえに　　$J=-\displaystyle\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)dx$

$\quad=-\Big[x+x\cos x-2\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[x+x\cos x-2\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi}$

$\quad=-(\alpha+\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha)+\pi-\pi-(\alpha+\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha)$

$\quad=4\sin\alpha-2\alpha(1+\cos\alpha)$

ここで，$f(\alpha)=0$ から　　$1-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha=0$

$\sin\alpha\neq 0$ から　　$\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

よって　　$J=4\sin\alpha-2\cdot\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)=4\sin\alpha-\dfrac{2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$

(3)　$2\sin\alpha$ と $\sqrt{2}$ の大小を比較する。

$y=f(x)$ のグラフから　　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ を満たす実数 θ において，$2\sin\theta=\sqrt{2}$ となる θ の値は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，$2\sin\alpha$ と $2\sin\dfrac{3}{4}\pi$ の大小を比較するから，α と $\dfrac{3}{4}\pi$ の大小関係を調べる。

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{8-\sqrt{2}(3\pi-4)}{8}$$

$\sqrt{2}<1.42$，$\pi<3.15$ であるから

$$\frac{8-\sqrt{2}(3\pi-4)}{8}>\frac{8-1.42(3\cdot 3.15-4)}{8}=\frac{0.261}{8}>0$$

よって　　$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$

$f(\alpha)=0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフより　　$\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$

関数 $y=\sin x$ は $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ において単調に減少する。

ゆえに　　$2\sin\alpha>2\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$　　すなわち　　$J>\sqrt{2}$