［2019 信州大］

解説

(1)　$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}$

$x\geqq 0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$ であるから　$f(x)\geqq 0$

よって　$x-\dfrac{1}{2}x^2\leqq\log(1+x)$　……①

$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと　$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$x\geqq 0$ のとき $g'(x)\geqq 0$ であるから，$g(x)$ は単調に増加する。

また，$g(0)=0$ であるから　$g(x)\geqq 0$

よって　$\log(1+x)\leqq x$　……②

①，② から　$x-\dfrac{1}{2}x^2\leqq\log(1+x)\leqq x$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

(3)　$P_n>0$ であるから，与えられた等式について両辺の自然対数を

とると　$$\log P_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)$$

$\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}>0$ であるから，(1) において $x=\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}\leqq\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

各辺において，$k=1$，2，……，n としたものの和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

ここで　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(4n^2-k^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=0\cdot\int_0^1\frac{1}{4-x^2}dx=0$$

よって，(2) から　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}-\frac{1}{2(4n^2-k^2)}\right\}=\frac{\pi}{6}$$

ゆえに，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log P_n=\frac{\pi}{6}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\frac{\pi}{6}}$