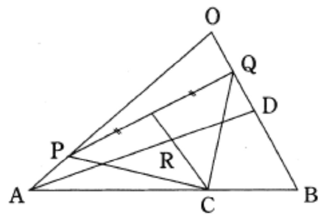
$\boxed{1}$ [2006 駿台京大実践模試(改)]

(解説)

(1) $\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}$ とおける。

$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$ ……①

ただし，$(p,\ q)\fallingdotseq(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ である。



$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}+p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\{(3p+1)\overrightarrow{OA}+(3q+2)\overrightarrow{OB}\}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OR}=\frac{1}{9}\{(3p+1)\overrightarrow{OA}+2(3q+2)\overrightarrow{OD}\}$$

R は線分 AD 上にあるから，

$$\frac{1}{9}(3p+1)+\frac{2}{9}(3q+2)=1 \qquad \therefore\quad 3p+6q=4$$

$$\therefore\quad p=-2q+\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots③$$

(2) ③ を ② に代入すると，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{9}\{(-6q+5)\overrightarrow{OA}+(6q+4)\overrightarrow{OD}\}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{9}\{(-6q-4)\overrightarrow{OA}+(6q+4)\overrightarrow{OD}\}=\frac{1}{9}(6q+4)\overrightarrow{AD}$$

①，③より，$\dfrac{1}{6}\leqq q\leqq\dfrac{2}{3}$ であるから，

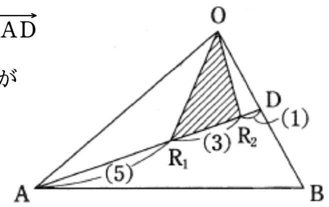
$$\frac{5}{9}\leqq\frac{1}{9}(6q+4)\leqq\frac{8}{9}$$

よって，R が動く範囲は，$\overrightarrow{AR_1}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AR_2}=\dfrac{8}{9}\overrightarrow{AD}$

なる 2 点 R_1，R_2 を結ぶ線分であるから，線分 OR が通過する範囲は $\triangle OR_1R_2$ の周および内部である。

その面積は $\triangle OAB=1$ より，

$$\triangle OAD\cdot\frac{R_1R_2}{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8-5}{9}=\frac{1}{6}$$



$\boxed{2}$ [2023 一橋大]

解説

(1)　加法定理により

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

(2)　$f(x)=x-\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{3}\cdot 3\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$=\frac{\cos^4 x-\cos^2 x+(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$=\frac{\cos^4 x-2\cos^2 x+1}{\cos^4 x}=\frac{(\cos^2 x-1)^2}{\cos^4 x}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\cos x<1$ であるから　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調に増加する。

また，$f(x)$ は $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ で連続であり，$f(0)=0$ であるから，$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$f(x)\geqq 0$

したがって，$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$x\geqq \tan x-\dfrac{\tan^3 x}{3}$

(3)　$0\leqq\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，(2) より

$$\frac{\pi}{12}\geqq\tan\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\tan^3\frac{\pi}{12}$$

$$=(2-\sqrt{3})-\frac{1}{3}(2-\sqrt{3})^3=\frac{(2-\sqrt{3})\{3-(2-\sqrt{3})^2\}}{3}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{3})\{3-(7-4\sqrt{3})\}}{3}=\frac{(2-\sqrt{3})\cdot 4(\sqrt{3}-1)}{3}$$

$$=\frac{4(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3}=\frac{4(3\sqrt{3}-5)}{3}$$

よって　　$\pi\geqq 16(3\sqrt{3}-5)$

ここで，$1.732^2=2.999824<3$ であるから　　$\sqrt{3}>1.732$

ゆえに　　$\pi\geqq 16(3\sqrt{3}-5)>16(3\cdot 1.732-5)=16\cdot 0.196=3.136$

したがって　　$\pi>3.1$