［2023 一橋大］

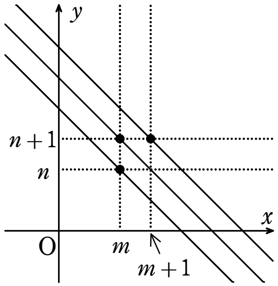
解説

(1)　点 $(m,\ n)$ は直線 $y=-x+m+n$ 上にあり，点 $(m,\ n+1)$ は直線 $y=-x+m+n+1$ 上にあるから

$$f(m,\ n+1)-f(m,\ n)=(m-1)+n+1$$

また，点 $(m+1,\ n+1)$ は直線 $y=-x+m+n+2$ 上にあるから

$$f(m+1,\ n+1)-f(m,\ n+1)=(m-1)+n+1$$



よって

$$f(m,\ n+1)-f(m,\ n)=f(m+1,\ n+1)-f(m,\ n+1)$$

ゆえに　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)$

(2)　$f(m+1,\ n)=f(m,\ n+1)-1$

よって，(1) から

$$f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=4f(m,\ n+1)-1$$

ゆえに　$4f(m,\ n+1)-1=2023$

すなわち　$f(m,\ n+1)=506$

この等式を満たす m，n を $m=s$，$n=t$ とする。

ここで，直線 $y=-x+k+1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ 上に，x 座標と y 座標がともに正の整数であるような点は k 個ある。

2 以上の自然数 p に対し，番号 506 がつけられた点 $(s,\ t+1)$ が直線 $y=-x+p+1$ 上にあるとすると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}k<506\leqq\sum_{k=1}^{p}k$

よって　$\dfrac{1}{2}(p-1)p<506\leqq\dfrac{1}{2}p(p+1)$

ゆえに　$(p-1)p<1012\leqq p(p+1)$

$31\cdot32=992$，$32\cdot33=1056$ であるから，この不等式を満たす p は　$p=32$

よって　$t+1=-s+32+1$　すなわち　$s+t=32$

また，$\dfrac{1}{2}\cdot31\cdot32=496$ であるから

$$t+1=506-496 \quad \text{すなわち} \quad t=9$$

$s+t=32$ であるから　$s=23$

したがって，求める整数の組 $(m,\ n)$ は

$$(m,\ n)=(23,\ 9)$$