［1925 東北帝国大］
解説
訳：「CP および CQ を楕円の互いに直交する半径の長さとするとき
$\dfrac{1}{\mathrm{CP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{CQ}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ となることを示せ。」
[補足]
a，b はそれぞれ楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の長半径および短半径，C は楕円の中心である。

$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$とおく。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ としても一般性を失わない。

[1]　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$(\mathrm{CP},\ \mathrm{CQ})=(a,\ b)$ または $(b,\ a)$ より $\dfrac{1}{\mathrm{CP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{CQ}^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ が成立する。

[2]　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\mathrm{CP}^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$

直線 CP の傾きは $\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta}$ より直線 CQ の傾きは $-\dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}$

よって点 Q の座標を $(X,\ Y)$ として

$$\begin{cases}\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1\\[2mm] Y=-\dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}X\end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{a^2\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta}\right)X^2=1$$

よって　$X^2=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{a^2\cos^2\theta}{b^4\sin^2\theta}}=\dfrac{a^2b^4\sin^2\theta}{a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta}$

$Y^2=\dfrac{a^2\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta}X^2=\dfrac{a^4b^2\cos^2\theta}{a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta}$

ゆえに　$\mathrm{CQ}^2=X^2+Y^2=\dfrac{a^4b^2\cos^2\theta+a^2b^4\sin^2\theta}{a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{CP}^2}+\frac{1}{\mathrm{CQ}^2}&=\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\frac{a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta}{a^4b^2\cos^2\theta+a^2b^4\sin^2\theta}\\&=\frac{a^2b^2+a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta}{a^2b^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}=\frac{(a^2+b^2)(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}{a^2b^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\end{aligned}$$