解説

$f(x)=x^3+3nx^2-(3n+2)$ とおく。

(1)　$f'(x)=3x^2+6nx=3x(x+2n)$

n は正の整数であるから，$x>0$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$x\geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

ここで　$f(0)=-(3n+2)<0$，$f(2)=9n+6>0$

したがって，3 次方程式 $f(x)=0$ は，正の解をただ 1 つしかもたない。

(2)　$f(1)=-1$ であるから，曲線 $y=f(x)$ は点 $(1,\ -1)$ を通る。

この点における接線 ℓ の傾きは　$f'(1)=6n+3$

よって，ℓ の方程式は　$y-(-1)=(6n+3)(x-1)$

すなわち　$y=(6n+3)x-(6n+4)$

ℓ と x 軸の交点の x 座標は，$y=0$ とおいて　$x=\dfrac{6n+4}{6n+3}$

$x>0$ の範囲で曲線 $y=f(x)$ は 下に凸であるから　$1<a_n<\dfrac{6n+4}{6n+3}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n+4}{6n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{6+\frac{3}{n}}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

別解　$f(1)=-1<0$，　$f\left(\sqrt{\dfrac{3n+2}{3n}}\right)=\dfrac{3n+2}{3n}\sqrt{\dfrac{3n+2}{3n}}>0$

よって　$1<a_n<\sqrt{\dfrac{3n+2}{3n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{3n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{3n}}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

解説