$\boxed{1}$ [2019 札幌医科大]

(解説)

(1) $2^9=512$，$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$2^{12}=4096$，$2^{13}=8192$，$2^{14}=16384$

よって，2^n が 4 桁になるときの n の値は

$$n=10,\ 11,\ 12,\ 13$$

(2) 5^{130} の常用対数をとると

$$\log_{10}5^{130}=130\log_{10}5$$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2$ であるから

$$\log_{10}5^{130}=130(1-\log_{10}2) \quad \cdots\cdots ①$$

(1) より，$10^3<2^{10}$，$2^{13}<10^4$ であるから，各不等式の両辺の常用対数をとると

$$3<10\log_{10}2,\ 13\log_{10}2<4$$

ゆえに　$\dfrac{3}{10}<\log_{10}2<\dfrac{4}{13} \quad \cdots\cdots ②$

よって　$1-\dfrac{4}{13}<1-\log_{10}2<1-\dfrac{3}{10}$

すなわち，$\dfrac{9}{13}<1-\log_{10}2<\dfrac{7}{10}$ であるから，① により

$$130\times\frac{9}{13}<130(1-\log_{10}2)<130\times\frac{7}{10}$$

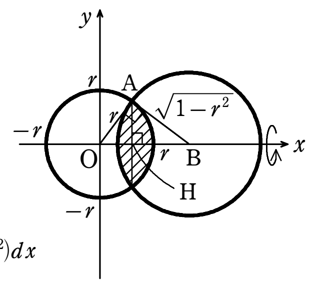
ゆえに　$90<\log_{10}5^{130}<91$

したがって，5^{130} は 91 桁の数である。

2 [2004 東京工業大]

解説

(1)　2 つの球の xy 平面による切り口は右の図のようになる．右の図のように，3 点 A，B，H をとると，



$\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{OB}^2$ であるから　$\angle\mathrm{OAB}=90°$

$\triangle\mathrm{AOH}\backsim\triangle\mathrm{BOA}$ であるから

$r:\mathrm{OH}=1:r$　　　よって　$\mathrm{OH}=r^2$

ゆえに

$$V(r)=\pi\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\{1-r^2-(x-1)^2\}dx+\pi\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left\{\left[(1-r^2)x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}+\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r^2}^{r}\right\}$$

$$=\pi\left\{(1-r^2)(r^2-1+\sqrt{1-r^2})-\frac{1}{3}(r^2-1)^3-\frac{1}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}+r^2(r-r^2)-\frac{1}{3}(r^3-r^6)\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-r^4+\frac{2}{3}r^3+r^2-\frac{2}{3}\right\}$$

(2)　(1) から

$$V'(r)=\pi\left\{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2r)-4r^3+2r^2+2r\right\}=2\pi r\left(-\sqrt{1-r^2}-2r^2+r+1\right)$$

$V'(r)=0$ とすると，$0<r<1$ であるから　$-\sqrt{1-r^2}-2r^2+r+1=0$

よって　$2r^2-r-1=-\sqrt{1-r^2}$

両辺を平方すると　$4r^4-4r^3-3r^2+2r+1=1-r^2$

整理すると　$2r(r-1)(2r^2-1)=0$

$0<r<1$ であるから　$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，$V(r)$ の増減表は次のようになる．

r	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

よって，$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$V(r)$ は極大かつ最大となる．

$$V\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}-5}{12}\pi$$

ゆえに，$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{12}\pi$ をとる．