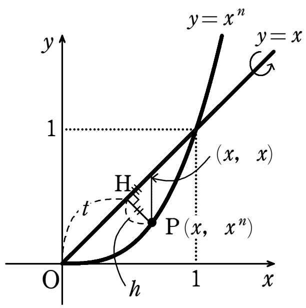
解説

(1)　図のように，曲線 $y=x^n$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^n)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を引き，

$$\mathrm{PH}=h,\ \mathrm{OH}=t \quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

とする。このとき



$$h=\frac{|x-x^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}$$

$$t=\sqrt{2}\,x-h=\sqrt{2}\,x-\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^n}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$dt=\dfrac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$

t と x の対応は右のようになる。

t	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
x	$0 \longrightarrow 1$

よって，求める体積 V_n は

$$V_n=\pi\int_0^{\sqrt{2}} h^2dt=\pi\int_0^1\frac{(x-x^n)^2}{2}\cdot\frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-2x^{n+1}+x^{2n})(1+nx^{n-1})dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\{x^2+(n-2)x^{n+1}+(1-2n)x^{2n}+nx^{3n-1}\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{n-2}{n+2}x^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}x^{2n+1}+\frac{x^{3n}}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}+\frac{1}{3}\right)\quad\cdots\cdots ①$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3}-\frac{6n}{(n+2)(2n+1)}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4n^2-8n+4}{3(n+2)(2n+1)}=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$$

(2)　(1) の ① を用いて

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}+1-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$