$\boxed{1}$ [2023 東京大]

(解説)

2 次方程式 $x^2+x-k=0$ ……① の判別式を D とすると　$D=1+4k$

$k>2$ のとき，$D>0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-k$　……②

$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ を変形すると

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}=\frac{\alpha^3(1-\alpha)+\beta^3(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)}=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha^4+\beta^4)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

ここで，② から

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2k+1$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-3k-1$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=2k^2+4k+1$$

よって

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta}+\frac{\beta^3}{1-\alpha}=\frac{-3k-1-(2k^2+4k+1)}{1-(-1)-k}=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}=\frac{(k-2)(2k+11)+24}{k-2}$$

$$=2k+11+\frac{24}{k-2}=2(k-2)+\frac{24}{k-2}+15$$

$k>2$ のとき，$2(k-2)>0$，$\dfrac{24}{k-2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係に

より　$2(k-2)+\dfrac{24}{k-2}\geqq 2\sqrt{2(k-2)\cdot\dfrac{24}{k-2}}=8\sqrt{3}$

等号が成り立つのは，$2(k-2)=\dfrac{24}{k-2}$ かつ $k>2$，すなわち $k=2+2\sqrt{3}$ のときである。

したがって，求める最小値は　$15+8\sqrt{3}$

$\boxed{2}$ [2023 徳島大]

解説

(1) $a_3=\dfrac{1}{a_2}+a_1=1+1=2$，$a_4=\dfrac{1}{a_3}+a_2=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，

$a_5=\dfrac{1}{a_4}+a_3=\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{8}{3}$

(2) $1<a_n<n$ ……① とする。

[1] $n=3$ のとき

$a_3=2$ であるから　　$1<a_3<3$

よって，$n=3$ のとき，① は成り立つ。

[2] $n=4$ のとき

$a_4=\dfrac{3}{2}$ であるから　　$1<a_4<4$

よって，$n=4$ のとき，① は成り立つ。

[3] $k\geqq 4$ として，$n=k-1$，k のとき，① が成り立つ，すなわち $1<a_{k-1}<k-1$，$1<a_k<k$ と仮定する。

$n=k+1$ のとき　　$a_{k+1}=\dfrac{1}{a_k}+a_{k-1}$

$\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{a_k}<1$，$1<a_{k-1}<k-1$ であるから　　$\dfrac{1}{k}+1<\dfrac{1}{a_k}+a_{k-1}<k$

すなわち　　$\dfrac{1}{k}+1<a_{k+1}<k$　　　よって　　$1<a_{k+1}<k+1$

したがって，$n=k+1$ のときにも ① が成り立つ。

以上から，$n\geqq 3$ のとき，① が成り立つ。

(3) $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4\cdots\cdots)$ から

$$a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}+a_{2n-1}$$

$$a_{2n+1}-a_{2n-1}=\frac{1}{a_{2n}}\quad (n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(a_{2k+1}-a_{2k-1})=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{2k}}$

$$a_{2n+1}-a_3=\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n}}$$

(2) より，$n\geqq 3$ のとき $1<a_n<n$ が成り立つから

$$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{2n}}>\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

したがって　　$a_{2n+1}>a_3+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

$$>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

ここで，自然数 l に対して，$l\leqq x\leqq l+1$ のとき　　$\dfrac{1}{l}\geqq\dfrac{1}{x}$

また，等号は常には成り立たないから　　$\displaystyle\int_l^{l+1}\frac{1}{l}dx>\int_l^{l+1}\frac{1}{x}dx$

すなわち　　$\displaystyle\frac{1}{l}>\int_l^{l+1}\frac{dx}{x}$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}>\sum_{l=1}^{n}\int_l^{l+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log|x|\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$

したがって　　$1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$

よって　　$a_{2n+1}>\dfrac{1}{2}\log(n+1)$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log(n+1)=\infty$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\infty$