1 [2015 熊本大]

解説

(1)　$9ab=1$ から　　$b=\dfrac{1}{9a}$　……①

これと $a+b+c=1$ から　　$c=1-a-\dfrac{1}{9a}$　……②

a，b，c は三角形の辺の長さであるから，三角形の成立条件より

$$|b-c|<a<b+c$$

これに①，②を代入すると　　$\left|\dfrac{1}{9a}-\left(1-a-\dfrac{1}{9a}\right)\right|<a<1-a$

すなわち　　$\left|\dfrac{2}{9a}+a-1\right|<a<1-a$

$a<1-a$ から　　$a<\dfrac{1}{2}$　……③

$\left|\dfrac{2}{9a}+a-1\right|<a$ から　　$-a<\dfrac{2}{9a}+a-1<a$

$\dfrac{2}{9a}+a-1<a$ から　　$\dfrac{2}{9a}<1$　　　よって　　$a>\dfrac{2}{9}$　……④

また，$-a<\dfrac{2}{9a}+a-1$ から　　$18a^2-9a+2>0$

(左辺)$=18\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$ であるから，これは常に成り立つ。

ゆえに，③，④から，求める a の値の範囲は　　$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$

(2)　$\theta=\angle\mathrm{C}$ とする。

$\triangle\mathrm{ABC}$ において余弦定理により　　$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

①，②を代入すると

$$\cos\theta=\frac{a^2+\left(\dfrac{1}{9a}\right)^2-\left(1-a-\dfrac{1}{9a}\right)^2}{2a\cdot\dfrac{1}{9a}}=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}$ とおき，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減を調べる。

$f'(a)=9-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{9a^2-1}{a^2}$ であるから，$f'(a)=0$ とすると　　$a^2=\dfrac{1}{9}$

よって　　$a=\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減表は右のようになる。

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘	極小	↗	

また，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=3+3-\dfrac{11}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$f\left(\dfrac{2}{9}\right)=2+\dfrac{9}{2}-\dfrac{11}{2}=1$，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}+2-\dfrac{11}{2}=1$

であるから，$f(a)$ すなわち $\cos\theta$ の値の範囲は　　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

よって，$\angle\mathrm{C}$ の最大値は $60°$

$\boxed{2}$ [2024 大阪公立大]

(解説)

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\log(1+x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x)'\log(1+x^2)\,dx$

$$=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\sqrt{3}\log 4-2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=2\sqrt{3}\log 2-2\Big[x\Big]_0^{\sqrt{3}}+2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=2\sqrt{3}(\log 2-1)+2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$

ゆえに，求める定積分の値は　$2\sqrt{3}(\log 2-1)+\dfrac{2}{3}\pi$

(2) $x=-t$ とおくと　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-\sqrt{3}\longrightarrow\sqrt{3}$
t	$\sqrt{3}\longrightarrow-\sqrt{3}$

よって　$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\log(1+x^2)}{1+e^x}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\frac{\log\{1+(-t)^2\}}{1+e^{-t}}\cdot(-1)\,dt$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{e^t\log(1+t^2)}{e^t+1}\,dt=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{e^x\log(1+x^2)}{1+e^x}\,dx$$

(3) (2) の結果から

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\log(1+x^2)}{1+e^x}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\log(1+x^2)}{1+e^x}\,dx+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{e^x\log(1+x^2)}{1+e^x}\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1+e^x}{1+e^x}\log(1+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\log(1+x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\log(1+x^2)\,dx$$

$$=2\sqrt{3}(\log 2-1)+\frac{2}{3}\pi$$