$\boxed{1}$ [2022 京都大]

(解説)

1 つの頂点から他の頂点に移動する経路は 3 通りあるから，n 回の移動の仕方の総数は

3^n 通り

$n+1$ 回の移動で終点 P_{n+1} が A，B，C のいずれかとなるには，次の場合がある。

[1] n 回の移動で終点 P_n が A，B，C のいずれかにあり，その次に，A，B，C のいずれかに移動する

[2] n 回の移動で終点 P_n が D，E，F のいずれかにあり，その次に，A，B，C のいずれかに移動する

[1] の場合の数は　$a_n\times 2=2a_n$ (通り)

[2] の場合の数は　$(3^n-a_n)\times 1=3^n-a_n$ (通り)

よって　$a_{n+1}=2a_n+(3^n-a_n)$　すなわち　$a_{n+1}=a_n+3^n$

また，A から 1 回の移動で A，B，C のいずれかに移動する方法は 2 通りであるから

$a_1=2$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3^n+1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

① において，$n=1$ とすると　$a_1=\dfrac{3+1}{2}=2$

よって，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

2 [2019 大阪府立大]

解説

(1) $f(t)=1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t-e^{-t}$ とおく。

$f''(t)=-e^{-t}$ であるから　　$f''(t)<0$

よって，関数 $y=f(t)$ のグラフは上に凸である。

さらに，$f(0)=0$，$f(1)=0$ であるから，$0\leqq t\leqq 1$ において　　$f(t)\geqq 0$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ に対して，不等式 $e^{-t}\leqq 1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t$ が成り立つ。

(2) $y'=\dfrac{n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)^n}{x^2}=\dfrac{(\log x)^{n-1}(n-\log x)}{x^2}$

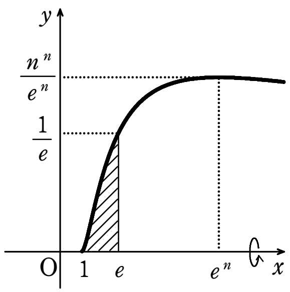
$x>1$ の範囲で $y'=0$ とすると　　$\log x=n$

すなわち　　$x=e^n$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	1	$\cdots$	e^n	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{n^n}{e^n}$	$\searrow$

したがって，関数 $y=\dfrac{(\log x)^n}{x}$ $(x\geqq 1)$ のグラフは右の図のようになり，体積 $V(n)$ は図の斜線部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積であるから



$$V(n)=\pi\int_1^e\frac{(\log x)^{2n}}{x^2}dx$$

ここで，$\log x=t$ とおくと，$x=e^t$ より　$dx=e^tdt$

x	$1\ \to\ e$
t	$0\ \to\ 1$

よって　$V(n)=\pi\displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n}}{e^{2t}}\cdot e^tdt$

$$=\pi\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt$$

(1) より，$0\leqq t\leqq 1$ において $e^{-t}\leqq 1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t$ であるから

$$t^{2n}e^{-t}\leqq t^{2n}\left\{1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t\right\}$$

よって　　$\pi\displaystyle\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt\leqq\pi\int_0^1 t^{2n}\left\{1+\left(\frac{1}{e}-1\right)t\right\}dt$

ゆえに　　$V(n)\leqq\pi\displaystyle\int_0^1\left\{t^{2n}+\left(\frac{1}{e}-1\right)t^{2n+1}\right\}dt$

$$(\text{右辺})=\pi\left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}+\left(\frac{1}{e}-1\right)\frac{1}{2n+2}t^{2n+2}\right]_0^1=\pi\left\{\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{e}-1\right)\frac{1}{2n+2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{2n+2}{2n+1}+\frac{1}{e}-1\right)=\frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

したがって，不等式 $V(n)\leqq\dfrac{\pi}{2n+2}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$ が成り立つ。

(3) $0\leqq t\leqq 1$ において $\dfrac{1}{e}\leqq e^{-t}$ であるから　　$\dfrac{t^{2n}}{e}\leqq t^{2n}e^{-t}$

よって　　$\pi\displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n}}{e}dt\leqq\pi\int_0^1 t^{2n}e^{-t}dt$　　ゆえに　　$\pi\displaystyle\int_0^1\frac{t^{2n}}{e}dt\leqq V(n)$

$(\text{左辺})=\dfrac{\pi}{e}\left[\dfrac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1=\dfrac{\pi}{e(2n+1)}$　　したがって　　$\dfrac{\pi}{e(2n+1)}\leqq V(n)$

(2) より $V(n)\leqq\dfrac{\pi}{2n+2}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$ であるから

$$\frac{\pi}{e(2n+1)}\leqq V(n)\leqq\frac{\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

ゆえに　　$\dfrac{n\pi}{e(2n+1)}\leqq nV(n)\leqq\dfrac{n\pi}{2n+2}\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$

ここで　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{e(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{e\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\pi}{2e}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2n+2}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2+\frac{2}{n}}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2e}$$

よって，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nV(n)=\frac{\pi}{2e}$