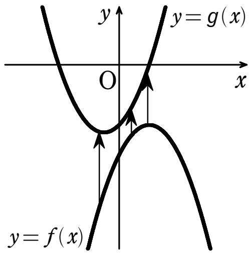
［2007 早稲田大］

解説

$f(x)=-x^2+(a+2)x+a-3$，$g(x)=x^2-(a-1)x-2$ とする。

「どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとれば不等式 (*) が成立する」ための条件は，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をもたないことである。



$f(x)=g(x)$ から

$$-x^2+(a+2)x+a-3=x^2-(a-1)x-2$$

整理して　　$2x^2-(2a+1)x-a+1=0$

判別式を D とすると

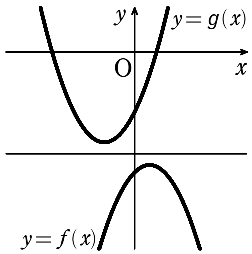
$$D=(2a+1)^2-4\cdot 2\cdot(-a+1)=4a^2+12a-7$$
$$=(2a+7)(2a-1)$$

$D<0$ であるから　　$(2a+7)(2a-1)<0$　　　　よって　　$-\frac{7}{2}<a<\frac{1}{2}$

「適当な y をとれば，どんな x に対しても不等式 (*) が成立する」ための条件は，

$$\{f(x)\text{ の最大値}\}<\{g(x)\text{ の最小値}\}\quad\cdots\cdots ①$$

が成り立つことである。



ここで　　$f(x)=-\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(a^2+8a-8)$

$$g(x)=\left(x-\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a^2-2a+9)$$

① から　　$\frac{1}{4}(a^2+8a-8)<-\frac{1}{4}(a^2-2a+9)$

よって　　$2a^2+6a+1<0$　　　　これを解くと　　$\frac{-3-\sqrt{7}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$