[2023 一橋大]

解説

A，B，C が k 回 ($k=1$，2，……，n) さいころを投げて勝つ確率を，それぞれ a_k，b_k，c_k とする。

a_k は，全員が $(k-1)$ 回ずつ投げて 1 が出ないで，A が k 回目に投げたときに 1 が出る確率であるから　$a_k=\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{6}$

よって　$$P_{\mathrm{A}}=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}$$

$$=\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

b_k は，全員が $(k-1)$ 回ずつ投げて 1 が出ないで，A が k 回目に投げたときにも 1 が出ないで，B が k 回目に投げたときに 1 が出る確率であるから

$$b_k=\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}^{k-1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}a_k$$

ゆえに　$$P_{\mathrm{B}}=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{5}{6}P_{\mathrm{A}}$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{36}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

$$=\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

c_k は，全員が $(k-1)$ 回ずつ投げて 1 が出ないで，A が k 回目に投げたとき，B が k 回目に投げたときにも 1 が出ないで，C が k 回目に投げたときに 1 が出る確率であるから

$$c_k=\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^3\right\}^{k-1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}b_k$$

よって　$$P_{\mathrm{C}}=\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{5}{6}P_{\mathrm{B}}$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{30}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

$$=\frac{25}{91}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right\}$$

解説