1

解答　順に 7，3，3，1

解説

$n(U)=7$

$\overline{B}=\{1,\ 4,\ 5\}$ であるから　$n(\overline{B})=3$

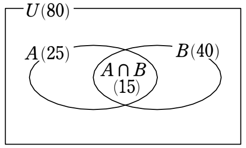
$A\cap B=\{3,\ 6,\ 7\}$ であるから　$n(A\cap B)=3$

$\overline{A\cup B}=\{4\}$ であるから　$n(\overline{A\cup B})=1$

2

解答　（ア）55　（イ）65　（ウ）50　（エ）30

解説



（ア）$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=80-25$

$=55$（個）

（イ）$n(\overline{A\cap B})$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=80-15$

$=65$（個）

（ウ）$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+40-15$

$=50$（個）

（エ）$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=80-(25+40-15)$

$=30$（個）

3

解答　(1)　2 個　　(2)　32 個

解説

1 から 100 までの整数のうち，5 で割り切れる数全体の集合を A，7 で割り切れる数全体の集合を B とする。

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，　$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$

(1)　5 と 7 の両方で割り切れる数は，35 で割り切れる数である。

その数全体の集合は $A\cap B$ で表され　　$A\cap B=\{35,\ 70\}$

よって，求める個数は　　$n(A\cap B)=2$（個）

(2)　5 と 7 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ で表される。

$n(A)=20$，$n(B)=14$ であるから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+14-2=32$（個）

4

解答　(1)　最大値 48，最小値 8　　(2)　最大値 40，最小値 0

解説

(1)　$n(A\cap B)$ は，$A\cup B=U$ のとき最小になり

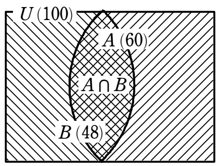
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)$

$=60+48-100=8$

$n(A)>n(B)$ であるから，$n(A\cap B)$ は，$A\supset B$ のとき最大になり　　$n(A\cap B)=n(B)=48$

よって　　最大値 48，最小値 8

$A\cup B=U$



(2)　$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=48-n(A\cap B)$

よって，$n(\overline{A}\cap B)$ は，

$n(A\cap B)$ が最大のとき最小，

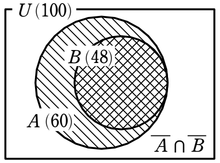
$n(A\cap B)$ が最小のとき最大

となる。(1) の結果から，

最小値は　　$48-48=0$

最大値は　　$48-8=40$

$A\supset B$



5

解答　$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cup B\cup C)=108$

解説

$A\cap B\cap C$ は 3 と 5 と 7 の最小公倍数 105 の倍数全体の集合で，$A\cap B\cap C=\{105\cdot1\}$ であるから　　　$n(A\cap B\cap C)=1$

また　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

ここで　$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$ であるから　　$n(A)=66$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$ であるから　　$n(B)=40$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot28\}$ であるから　　$n(C)=28$

$A\cap B$ は 3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数全体の集合で，

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot13\}$ であるから

$n(A\cap B)=13$

$B\cap C$ は 5 と 7 の最小公倍数 35 の倍数全体の集合で，

$B\cap C=\{35\cdot1,\ 35\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 35\cdot5\}$ であるから

$n(B\cap C)=5$

$C\cap A$ は 7 と 3 の最小公倍数 21 の倍数全体の集合で，

$C\cap A=\{21\cdot1,\ 21\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 21\cdot9\}$ であるから

$n(C\cap A)=9$

よって　　$n(A\cup B\cup C)=66+40+28-13-5-9+1=108$

6

解答　20 通り

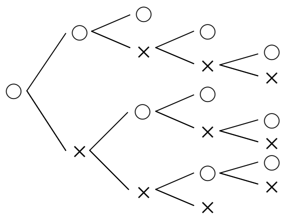
解説

1 回目が表のとき，表と裏のどちらかが 3 回出るまでの出方を樹形図にかくと，右のようになる。

この場合の出方は，10 通り。

1 回目が裏のときも同様に 10 通りある。

したがって，求める場合の数は　20 通り



［○は表，×は裏を表している］

7

解答　(1)　10 通り　　(2)　8 通り

解説

(1)　目の数を x，y とすると，和 $x+y$ は　$2\leqq x+y\leqq12$

よって，和 $x+y$ が 5 以下となるのは，2，3，4，5 の 4 通り。

[1]　$x+y=2$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$

[2]　$x+y=3$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

[3]　$x+y=4$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

[4]　$x+y=5$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$

[1]～[4] のどの 2 つも起こり方に重複はないから，求める場合の数は

$1+2+3+4=10$（通り）

(2)　目の和は，3 以上 18 以下である。

よって，目の和が 7 の倍数となるのは 7，14 の 2 通りである。

3 つのさいころの目を $\{\square,\ \square,\ \square\}$ で表す。

[1]　目の和が 7 のとき

$\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$

[2]　目の和が 14 のとき

$\{2,\ 6,\ 6\}$，$\{3,\ 5,\ 6\}$，$\{4,\ 4,\ 6\}$，$\{4,\ 5,\ 5\}$

[1] と [2] の起こり方に重複はないから，求める場合の数は

$4+4=8$（通り）

8

解答　(1)　往復で同じ鉄道を利用しないとき 6 通り，往復で同じ鉄道を利用してもよいとき 9 通り

(2)　15

解説

(1)　[1]　往復で同じ鉄道を利用しないとき

S 市から T 市へ行くとき利用する鉄道の選び方は　3 通り

そのおのおのに対して，T 市から S 市に帰るときに利用する鉄道の選び方は　2 通り

よって，積の法則により　$3\times2=6$（通り）

[2]　往復で同じ鉄道を利用してもよいとき

S 市から T 市へ行くとき利用する鉄道の選び方は　3 通り

そのおのおのに対して，T 市から S 市に帰るときに利用する鉄道の選び方は　3 通り

よって，積の法則により　$3\times3=9$（通り）

(2)　$(a+b+c+d+e)(x+y+z)$ を展開したときの各項は次の形になる。

（a，b，c，d，e のどれか 1 つ）×（x，y，z のどれか 1 つ）

よって，展開した式の項の個数は，積の法則により

$5\times3=15$（個）

9

解答　順に 20 個，1815

解説

$648=2^3\cdot3^4$ であるから，正の約数の個数は　　$(3+1)(4+1)=20$（個）

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3+3^4)$ を展開すると，各項に 648 のすべての約数が現れる。

よって，約数の総和は　　$(1+2+4+8)(1+3+9+27+81)=15\times121=1815$

10

解答　(1)　20 通り　　(2)　15 通り

解説

(1)　目の積が 3 の倍数になるのは，2 個のさいころの目の少なくとも 1 つが 3 または 6 の目の場合である。

目の出方は全部で $6^2=36$（通り）　そのうち 2 個の目がともに 3 と 6 以外の目である場

合の数は　$4^2=16$ (通り)

よって，求める場合の数は

$36-16=20$ (通り)

(2)　目の積が 6 の倍数になるには，目の積が 3 の倍数であり，かつ，2 個の目の少なくとも 1 つが偶数の場合である。

よって，(1) の結果から目の積が奇数の 3 の倍数となる場合を除けばよい。

目の積が奇数の 3 の倍数になるには，2 個の目がともに奇数であり，その中の少なくとも 1 つが 3 の目の場合であるから

$3^2-2^2=5$ (通り)

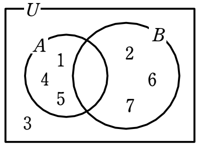
よって，求める場合の数は

$20-5=15$ (通り)

1

解答　(1)　0　　(2)　6　　(3)　3

解説



(1)　$A\cap B=\varnothing$ であるから　　$n(A\cap B)=0$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ であるから

$n(A\cup B)=6$

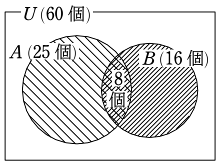
(3)　$\overline{A}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ であるから　　$\overline{A}\cap B=\{2,\ 6,\ 7\}$

よって　　$n(\overline{A}\cap B)=3$

2

解答　(1)　33　　(2)　35　　(3)　44　　(4)　27　　(5)　27

解説



(1)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+16-8$

$=33$

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=60-25$

$=35$

(3)　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)$

$=60-16$

$=44$

(4)　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=60-33=27$

(5)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=27$

3

解答　(1)　30 個　　(2)　75 個　　(3)　15 個　　(4)　90 個

解説

150 以下の自然数全体の集合を全体集合 U とし，U の部分集合のうち，5 の倍数全体の集合を A，2 の倍数全体の集合を B とする。

(1)　$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot30\}$ であるから　　$n(A)=30$ (個)

(2)　$B=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot75\}$ であるから　　$n(B)=75$

よって　　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=150-75=75$ (個)

(3)　求めるのは $n(A\cap B)$ である。

$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot15\}$

よって　　$n(A\cap B)=15$ (個)

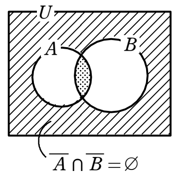
(4)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=30+75-15=90$ (個)

4

解答　(ア)　11　　(イ)　12

解説



この 40 人の集合を全体集合 U とし，野球の好きな生徒の集合を A，サッカーの好きな生徒の集合を B とする。

このとき　　$n(U)=40$，$n(A)=23$，$n(B)=28$

野球もサッカーも好きな生徒の集合は $A\cap B$ であり，

$n(A\cap B)$ が最小になるのは $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$　すなわち

$A\cup B=U$ のときである。

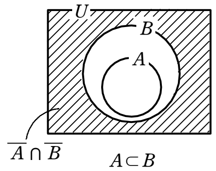
このとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=n(A)+n(B)-n(U)=23+28-40=11$

よって，野球もサッカーも好きな生徒は

ア11 人以上



また，野球もサッカーも好きではない生徒の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であり，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ が最大になるのは，

$A\subset B$ すなわち $A\cup B=B$ のときである。

このとき

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(B)=40-28=12$

よって，野球もサッカーも好きではない生徒は

イ12 人以下

5

解答　(1)　66 個　　(2)　34 個

解説

(1)　1 から 100 までの整数のうち，2 で割り切れる数全体の集合を A，5 で割り切れる数全体の集合を B，7 で割り切れる数全体の集合を C とする。

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，　$n(A)=50$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，　$n(B)=20$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$，　$n(C)=14$

$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ は，それぞれ 10，35，14 で割り切れる数全体の集合であるから

$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot10\}$，　$n(A\cap B)=10$

$B\cap C=\{35,\ 70\}$，　$n(B\cap C)=2$

$C\cap A=\{14\cdot1,\ 14\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 14\cdot7\}$，　$n(C\cap A)=7$

$A\cap B\cap C$ は 70 で割り切れる数全体の集合であるから

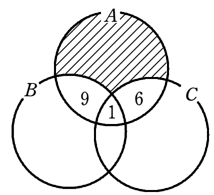
$A\cap B\cap C=\{70\}$，　$n(A\cap B\cap C)=1$

したがって，求める個数は

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=50+20+14-10-2-7+1=66$ (個)



(2)　2 では割り切れるが，5 でも 7 でも割り切れない数全体の集合は，右の図の斜線部分である。

$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cap B)=10$，$n(C\cap A)=7$ から，集合 A における各部分の要素の個数は，右のようになる。

よって，斜線部分の要素の個数は

$n(A)-(9+6+1)=50-16=34$ (個)

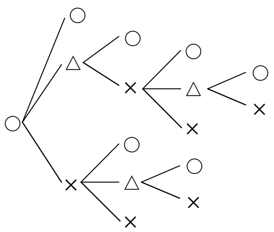
$\boxed{6}$

解答　10 通り

解説

A の勝ちを ○，引き分けを △，負けを × で表して，勝負の分かれ方の樹形図をかくと，右のようになる。

よって　　10 通り



$\boxed{7}$

解答　(1)　9 通り　　(2)　6 通り　　(3)　5 通り

解説

(1)　目の和が 4 になる場合は，表 [1] から

3 通り

目の和が 7 になる場合は，表 [2] から

6 通り

この 2 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は　　$3+6=9$ (通り)

[1]

大	1	2	3
小	3	2	1

[2]

大	1	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2	1

(2)　目の和が 4 以下になるのは，目の和が 2 または 3 または 4 になる場合である。

目の和が 2 になる場合は，表 [3] から　1 通り

目の和が 3 になる場合は，表 [4] から　2 通り

目の和が 4 になる場合は，表 [1] から　3 通り

この 3 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は

$1+2+3=6$ (通り)

[3]

大	1
小	1

[4]

大	1	2
小	2	1

(3)　目の積が 8 の倍数になるのは，目の積が 8 または 16 または 24 になる場合である。

目の積が 8 になる場合は，表 [5] から　2 通り

目の積が 16 になる場合は，表 [6] から　1 通り

目の積が 24 になる場合は，表 [7] から　2 通り

この 3 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は

$2+1+2=5$ (通り)

[5]

大	2	4
小	4	2

[6]

大	4
小	4

[7]

大	4	6
小	6	4

参考　目の積が 32 になることはない。

$\boxed{8}$

解答　(1)　15 通り　　(2)　16 個

解説

(1)　a，b，c，d，e の 5 冊から 1 冊を選ぶ方法は 5 通りあり，そのおのおのの場合について，p，q，r の 3 冊から 1 冊を選ぶ方法は 3 通りずつある。

よって，求める場合の数は　　$5\times3=15$ (通り)

(2)　$(a+b)(p+q)(x+y+z+u)$ を展開した式の各項は次の形になる。

(a か b のどちらか)×(p か q のどちらか)×(x，y，z，u のどれか 1 つ)

よって，展開した式の項の個数は　　$2\times2\times4=16$ (個)

$\boxed{9}$

解答　順に　(1)　12 個，280　　(2)　16 個，2340　　(3)　24 個，1170

解説

(1)　108 を素因数分解すると　　$108=2^2\cdot3^3$

$2^2\cdot3^3$ の正の約数は，2^2 の正の約数と，3^3 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数は，1，2，2^2 の　3 通り

3^3 の正の約数は，1，3，3^2，3^3 の　4 通り

よって，108 の正の約数の個数は　　$3\times4=12$ (個)

また，108 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=7\cdot40=280$

(2)　1000 を素因数分解すると　　$1000=2^3\cdot5^3$

$2^3\cdot5^3$ の正の約数は，2^3 の正の約数と，5^3 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の　4 通り

5^3 の正の約数は，1，5，5^2，5^3 の　4 通り

よって，1000 の正の約数の個数は　　$4\times4=16$ (個)

また，1000 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2+5^3)=15\cdot156=2340$

(3)　360 を素因数分解すると　　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

$2^3\cdot3^2\cdot5$ の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数，および 5 の正の約数の積で表される。

2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の　4 通り

3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の　3 通り

5 の正の約数は，1，5 の　2 通り

よって，360 の正の約数の個数は　　$4\times3\times2=24$ (個)

また，360 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=1170$

$\boxed{10}$

解答　(1)　189 通り　　(2)　108 通り

解説

(1)　起こりうるすべての場合は

$6\times6\times6=216$ (通り)

このうち，積が奇数になるのは 3 個とも奇数の場合で

$3\times3\times3=27$ (通り)

よって，積が偶数になる場合は

$216-27=189$ (通り)

(2)　3 個のさいころの目の和が奇数になるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1]　全部の目が奇数

$3\times3\times3=27$ (通り)

[2]　1 個だけが奇数

大のさいころが奇数の場合

$3\times3\times3=27$ (通り)

中のさいころが奇数の場合，小のさいころが奇数の場合も同様に 27 通りであるから，1 個だけが奇数であるのは

$27\times3=81$ (通り)

よって，求める場合の数は

$27+81=108$ (通り)

$\boxed{1}$

解答　(1)　75 個　　(2)　20 個　　(3)　60 個

解説

100 から 200 までの整数全体を全体集合 U とし，そのうち

4 で割り切れる数全体の集合を A

5 で割り切れる数全体の集合を B

とする。このとき

$A=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$

$B=\{5\cdot20,\ 5\cdot21,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$

$A\cap B=\{20\cdot5,\ 20\cdot6,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot10\}$

よって　　$n(A)=50-25+1=26$

$n(B)=40-20+1=21$

$n(A\cap B)=10-5+1=6$

また　　$n(U)=200-100+1=101$

(1)　求める個数は $n(\overline{A})$ であるから

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=101-26=75$ (個)

(2)　求める個数は $n(A\cap\overline{B})$ であるから

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$=26-6=20$ (個)

(3)　求める個数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ である。

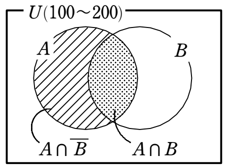
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで，$n(A\cup B)$ は

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=26+21-6=41$ (個)

よって　　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=101-41=60$ (個)



$\boxed{2}$

解答　(1)　30　　(2)　15　　(3)　55　　(4)　30

解説

(1)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=100-70=30$

(2)　$n(\overline{A}\cap B)=n(A\cup B)-n(A\cap\overline{B})-n(A\cap B)$

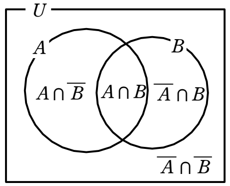
$=70-40-15=15$

(3)　$n(A)=n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)=40+15=55$

別解　$n(A)=n(A\cup B)-n(\overline{A}\cap B)=70-15=55$

(4)　$n(B)=n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap B)=15+15=30$

別解　$n(B)=n(A\cup B)-n(A\cap\overline{B})=70-40=30$



$\boxed{3}$

解答　(ア)　29　　(イ)　21　　(ウ)　69

解説

2 桁の自然数の集合を U とすると　　$n(U)=99-9=90$

$A=\{4\cdot3,\ 4\cdot4,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot24\}$ から　　$n(A)=24-3+1=22$

$B=\{6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$ から　　$n(B)=16-2+1=15$

(ア)　$A\cap B$ は 12 の倍数の集合である。

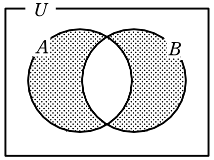
$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$ から　　$n(A\cap B)=8$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+15-8=29$

(イ)　$A\triangle B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ は，右の図の黒く塗った部分である。

よって，$A\triangle B$ の要素の個数は

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=29-8=21$$

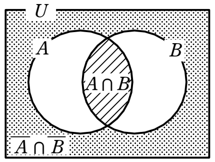


(ウ)　$A\triangle\overline{B}=(A\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ は，右の図の黒く塗った部分である。

よって，$A\triangle\overline{B}$ の要素の個数は

$$n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=n(A\cap B)+n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-\{n(A\cup B)-n(A\cap B)\}=90-21=69$$



4

解答　(1)　59 通り　　(2)　91 通り

解説

(1)　10 円硬貨 4 枚，100 円硬貨 3 枚，500 円硬貨 2 枚 を用いてできる金額は，
各硬貨 0 枚の場合も含めて　$(4+1)(3+1)(2+1)$ 通りある。
この中に 0 円が含まれるので，求める場合の数は　$(4+1)(3+1)(2+1)-1=59$ (通り)

(2)　100 円硬貨 7 枚，500 円硬貨 3 枚を用いてできる金額は，0 円を含めると 0 円から 2200 円まで 100 円きざみの 23 通りある。
そのおのおのについて，10 円硬貨が 0 円から 30 円の 4 通りある。ただし，すべての硬貨が 0 枚を除くから　$23\times4-1=91$ (通り)

5

解答　(1)　24　　(2)　15330

解説

(1)　6400 を素因数分解すると　$6400=2^8\cdot5^2$
よって，6400 の正の約数は，すべて

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8)(1+5+5^2)$$

を展開した項として 1 つずつ出てくる。
ゆえに，6400 の正の約数のうち，偶数であるものの個数は

$$8\times3=24\ (\text{個})$$

(2)　$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8)(5+5^2)=511\times30=15330$

1

解答　240

解説

$700=2^2\cdot5^2\cdot7$ であるから，1 から 699 までの整数のうち，2 でも 5 でも 7 でも割り切れない整数の個数を求めればよい。

1 から 699 までの整数全体の集合を U とすると　$n(U)=699$

U の部分集合のうち，2 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B，7 の倍数全体の集合を C とする。

$700\notin U$ に注意して，$700=2\cdot350$ から　$n(A)=349$
$700=5\cdot140$ から　$n(B)=139$
$700=7\cdot100$ から　$n(C)=99$

また，$A\cap B$ は 10 の倍数全体の集合で，$700=10\cdot70$ から　$n(A\cap B)=69$
$B\cap C$ は 35 の倍数全体の集合で，$700=35\cdot20$ から　$n(B\cap C)=19$
$C\cap A$ は 14 の倍数全体の集合で，$700=14\cdot50$ から　$n(C\cap A)=49$
$A\cap B\cap C$ は 70 の倍数全体の集合で，$700=70\cdot10$ から　$n(A\cap B\cap C)=9$

よって　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=349+139+99-69-19-49+9=459$

したがって，求める個数は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)$$
$$=699-459=240$$

2

解答　(1)　長さ 3 の列は　5 通り，長さ 4 の列は　8 通り
(2)　a で始まる列は　8 通り，b で始まる列は　5 通り
(3)　$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

解説

(1)　長さ 3 の列は　$aaa,\ aab,\ aba,\ baa,\ bab$ の 5 通り
長さ 4 の列は　$aaaa,\ aaab,\ aaba,\ abaa,\ abab,\ baaa,\ baab,\ baba$ の 8 通り

(2)　a で始まる列は，長さ 4 の列の左端に a をつければよいから，(1) より 8 通り
b で始まる列は，長さ 3 の列の左端に ba をつければよいから，(1) より 5 通り

(3)　長さ $n+2$ の列は，a で始まる列と b で始まる列に分けられる。
a で始まる列は長さ $n+1$ の列の左端に a を，b で始まる列は，長さ n の列の左端に ba をそれぞれつければよい。
よって　$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

3

解答　29 個

解説

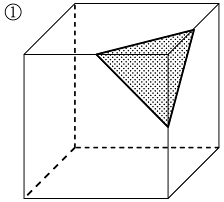
立方体の 1 辺の長さを 2 として考えてよい。

このとき，立方体の各辺の中点を結んでできる線分の長さは，$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$2\sqrt{2}$ の 4 通りある。

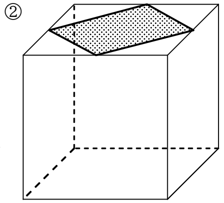
このうち，$2\sqrt{2}$ の線分を 1 辺とする正多角形はない。

[1]　1 辺の長さが $\sqrt{2}$ である正多角形は，
①　正三角形　　②　正方形　　③　正六角形
の場合がある。

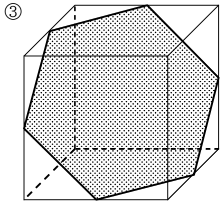
①



②



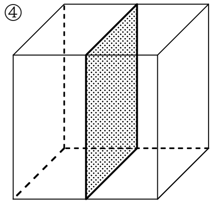
③



① の正三角形は，立方体の頂点と同じ個数だけあるから，8 個ある。
② の正方形は，立方体の面と同じ個数だけあるから，6 個ある。
③ の正六角形は，立方体の各面の $\sqrt{2}$ の線分を 1 本ずつ辺にもち，1 つの面で共有する辺を決めると 1 つに決まる。よって，4 個ある。

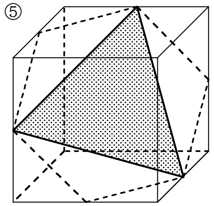
[2]　1 辺の長さが 2 である正多角形は，
④　正方形
の場合がある。
この正方形は，立方体の平行な面が 3 組あるから，3 個ある。

④



[3]　1 辺の長さが $\sqrt{6}$ である正多角形は，
⑤　正三角形
の場合がある。
この正三角形は，③ の正六角形上に 2 個ずつあるから，$2\times4=8$ 個ある。

⑤



[1] ～ [3] から，条件を満たす正多角形の個数は

$$8+6+4+3+8=29\ (\text{個})$$

1

解答　(1)　60　　(2)　4　　(3)　5040　　(4)　120　　(5)　$n(n-1)(n-2)$

解説

(1)　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$　　(2)　${}_4P_1=4$

(3)　${}_7P_7=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$　　(4)　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(5)　${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$

2

解答　(1)　60　　(2)　2520　　(3)　120

解説

(1)　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

(2)　${}_7P_5=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=2520$

(3)　${}_5P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

3

解答　(1)　2160 個　　(2)　900 個　　(3)　660 個　　(4)　480 個

解説

(1)　万の位は 0 以外の数字 1，2，3，4，5，6 のどれかで，その選び方は　6 通り
千，百，十，一の位は残りの 6 個の数字から 4 個を選んで並べるから，その並べ方は
${}_6P_4$ 通り
よって，5 桁の整数の個数は　$6\times{}_6P_4=6\times6\cdot5\cdot4\cdot3=2160$ (個)

(2)　一の位は 1，3，5 のどれかで　3 通り
万の位は一の位で選んだ数字と 0 を除く数字のどれかで，その選び方は　5 通り
千，百，十の位は残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べるから，その並べ方は
${}_5P_3$ 通り
よって，5 桁の奇数の個数は　$3\times5\times{}_5P_3=3\times5\times5\cdot4\cdot3=900$ (個)

(3)　5 の倍数であるから，一の位は 0 か 5 である。
[1]　一の位が 0 のとき
万，千，百，十の位は残りの 6 個の数字から 4 個を選んで並べる。
よって　${}_6P_4=360$ (個)
[2]　一の位が 5 のとき
万の位は 0 と 5 以外の数字のどれかで，その選び方は　5 通り
千，百，十の位は残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べるから　${}_5P_3$ 通り
よって　$5\times{}_5P_3=300$ (個)
[1], [2] から，5 の倍数の個数は　$360+300=660$ (個)

(4)　54000 より大きい 5 桁の整数は，54□□□，56□□□，6□□□□ のどれかの形である。
□に入る数は
54□□□ …… 0，1，2，3，6 から 3 個を取って並べるから
${}_5P_3=60$ (個)
56□□□ …… 0，1，2，3，4 から 3 個を取って並べるから
${}_5P_3=60$ (個)
6□□□□ …… 0，1，2，3，4，5 から 4 個を取って並べるから
${}_6P_4=360$ (個)
よって，54000 より大きい 5 桁の整数の個数は　$60\times2+360=480$ (個)

4

解答　(1)　14400 通り　　(2)　5760 通り　　(3)　60480 通り　　(4)　2880 通り　　(5)　43200 通り

解説

(1)　女子 5 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 4 人の並び方は　5! 通り

男 女 女 女 女 女 男 男 男

そのおのおのに対して，女子 5 人の並び方は　5! 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=14400$ (通り)

(2)　男男男男女女女女女 と 女女女女女男男男男 の 2 通りの場合がある。
そのおのおのに対して，男子 4 人の並び方は　4! 通り
女子 5 人の並び方は　5! 通り
よって，求める並び方の総数は
$2\times4!\times5!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5760$ (通り)

(3)　両端の 2 か所に，男子 4 人のうち 2 人が並ぶ方法は　${}_4P_2$ 通り

男 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 男

そのおのおのに対して，残りの 7 人の並び方は　7! 通り
よって，求める並び方の総数は
${}_4P_2\times7!=4\cdot3\times7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=60480$ (通り)

(4)　男子，女子が交互に並ぶようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間の 4 か所に男子 4 人を並べればよい。

女 男 女 男 女 男 女 男 女

まず，女子 5 人の並び方は　5! 通り
そのおのおのに対して，女子と女子の間の 4 か所に男子 4 人を並べる方法は
4! 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=2880$ (通り)

(5)　どの男子も隣り合わないようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べればよい。

○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○
(○ の箇所に男子を並べる)

まず，女子 5 人の並び方は　5! 通り
そのおのおのに対して，女子と女子の間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べる方法は
${}_6P_4$ 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times{}_6P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times6\cdot5\cdot4\cdot3=43200$ (通り)

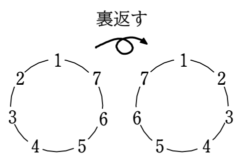
5

解答　(1)　720 通り　　(2)　360 通り

解説

(1)　$(7-1)!=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

(2)　(1) の並べ方のうち，裏返して同じになるものは 2 個ずつある。
したがって　$720\div2=360$ (通り)



6

解答　(1)　120 通り　　(2)　48 通り　　(3)　24 通り　　(4)　12 通り

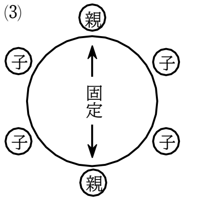
解説

(1)　両親 2 人，子ども 4 人の計 6 人の円順列であるから，求める並び方の総数は
$(6-1)!=5!=120$ (通り)

(2)　両親 2 人を 1 人と考えると，計 5 人の円順列であり，両親 2 人の並び方は 2 通りであるから　$(5-1)!\times2=4!\times2=24\times2=48$ (通り)

(3)　両親 2 人を固定して考えると，残り 4 つの位置に子ども 4 人が並ぶ順列で
$4!=24$ (通り)

(3)



(4)　まず，男性 3 人が輪を作る方法は
$(3-1)!=2!=2$ (通り)
その間の 3 か所に女性 3 人が並ぶと条件を満たすから，
求める並び方は　$2\times3!=12$ (通り)

7

解答　(1)　48 個　　(2)　63 個　　(3)　26 個

解説

(1)　百の位に使える数字は 1，2，3 の 3 通り。
そのおのおのに対して，十，一の位に使える数字は，それぞれ 0，1，2，3 の 4 通りある。
よって，3 桁の自然数の個数は　$3\times4^2=48$ (個)

(2)　1 桁の自然数は，1，2，3 の 3 個。
2 桁の自然数は，十の位に使える数字が 1，2，3 の 3 通り。
そのおのおのに対して，一の位に使える数字は，0，1，2，3 の 4 通りある。
ゆえに，2 桁の自然数は　$3\times4=12$ (個)
3 桁の自然数は，(1) から　48 個
よって，求める個数は　$3+12+48=63$ (個)

別解　0，1，2，3 の 4 種類の数字から 3 個取ってできる重複順列の個数は　$4^3=64$ (個)
このうち，123 を 3 桁の数 123，012 を 2 桁の数 12，001 を 1 桁の数 1 のようにみなすと，000 だけが自然数ではない。
よって，求める個数は　$64-1=63$ (個)

(3)　123 より小さい自然数は次の場合に分けられる。
[1]　1 桁または 2 桁の場合
(2) から　$3+12=15$ (個)
[2]　3 桁の場合
百の位は 1 である。
一の位に使える数字は
十の位が 0 のとき，0，1，2，3 の 4 通り。
十の位が 1 のとき，0，1，2，3 の 4 通り。
十の位が 2 のとき，0，1，2 の 3 通り。
よって　$4+4+3=11$ (個)
[1]，[2] から，求める個数は　$15+11=26$ (個)

8

解答　(1)　256 通り　　(2)　254 通り　　(3)　127 通り

解説

(1)　8人のそれぞれがA，B２通りの部屋の選び方があるから

$2^8=256$（通り）

(2)　(1)からA，Bのどちらかが0人になる場合を除いて

$256-2=254$（通り）

(3)　(2)で，A，Bの区別をなくして　　$254\div 2=127$（通り）

9

解答　(1)　30通り　　(2)　15通り

解説

(1)　上面の色を1つ固定する。

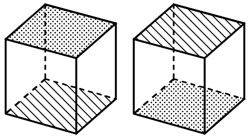
下面の色は残りの色で　　5通り

そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる4個の円順列で

$(4-1)!=3!=6$（通り）

よって，異なる6色をすべて使って塗る方法は

$5\times 6=30$（通り）



(2)　上面と下面を同じ色で固定する。

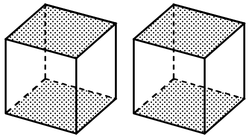
このとき，その塗り方は　　5通り

そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる4個のじゅず順列で

$\dfrac{(4-1)!}{2}=\dfrac{3!}{2}=3$（通り）

よって，異なる5色をすべて使って塗る方法は

$5\times 3=15$（通り）



1

解答　(1)　336　　(2)　720　　(3)　9　　(4)　5040　　(5)　$n(n-1)(n-2)(n-3)$

解説

(1)　${}_8P_3=8\cdot 7\cdot 6=336$

(2)　${}_6P_5=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=720$

(3)　${}_9P_1=9$

(4)　$7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

(5)　${}_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$

2

解答　(1)　720通り　　(2)　6720通り　　(3)　1320通り

解説

(1)　異なる6個の文字を1列に並べるから

$6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$（通り）

(2)　${}_8P_5=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6720$（通り）

(3)　いすの12個の番号から3個を取って並べ，その順に生徒3人が座ると考えて

${}_{12}P_3=12\cdot 11\cdot 10=1320$（通り）

3

解答　(1)　120個　　(2)　288個　　(3)　216個　　(4)　216個

解説

(1)　一の位は0で，残りの5個の数字から十，百，千，万の位の数を4個選べばよいから　　$1\times {}_5P_4=120$（個）

(2)　一の位は，1，3，5。万の位は，0と一の位の数以外の4個から1個取るから4通り。

千，百，十の位は，残りの4個から3個取る順列で，${}_4P_3$ 通り。

よって　$3\times 4\times {}_4P_3=288$（個）

(3)　[1]　一の位が0のとき，(1)より　120個

[2]　一の位が5のとき，万の位は，0と5以外の4個から1個取るから4通り。

千，百，十の位は，残りの4個から3個取る順列で，${}_4P_3$ 通り。

よって　$1\times 4\times {}_4P_3$

[1]，[2]から　$120+1\times 4\times {}_4P_3=120+96=216$（個）

(4)　3の倍数となる5つの数の組は，(1，2，3，4，5)，(0，1，2，4，5)

(1，2，3，4，5)の5つの数の並び方は　${}_5P_5$

(0，1，2，4，5)の5つの数の並び方は，万の位は0を除くから，$4\times {}_4P_4$

よって　${}_5P_5+4\times {}_4P_4=120+96=216$（個）

4

解答　(1)　1440通り　　(2)　3600通り　　(3)　2880通り　　(4)　720通り
(5)　288通り　　(6)　1440通り　　(7)　2880通り

解説

(1)　両端の2ヵ所に，男子4人のうち2人が並ぶ方法は　${}_4P_2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_4P_2\times {}_5P_5=4\cdot 3\times 5!=12\times 120=1440$（通り）

(2)　両端の少なくとも1人が女子である場合は，全体から両端が男子である場合を除いたものである。

男女7人の並び方は　${}_7P_7$ 通り。

両端が男子である並び方は，(1)から，1440通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_7P_7-1440=5040-1440=3600$（通り）

(3)　両端の一方が男子，もう一方が女子である場合は，全体から，両端が男子である場合と両端が女子である場合を除いたものである。

男女7人の並び方，両端が男子である並び方は，(1)，(2)から　それぞれ　5040通り，1440通り。

両端が女子である場合，両端の2か所に，女子3人のうち2人が並ぶ方法は　${}_3P_2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，両端が女子である並び方は，${}_3P_2\times {}_5P_5=3\cdot 2\times 5!=6\times 120=720$（通り）

したがって　求める並び方の総数は

$5040-1440-({}_3P_2\times {}_5P_5)=5040-1440-720=2880$（通り）

別解　両端の一方に男子が並ぶ方法は4通り。

もう一端に女子が並ぶ方法は3通り。

男女を入れ替えて，両端が男女の並び方は　$4\cdot 3\cdot 2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　$4\cdot 3\cdot 2\times {}_5P_5=4\cdot 3\cdot 2\times 5!=24\times 120=2880$（通り）

(4)　女子3人を1組と考え，この1組と男子4人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

そのおのおのに対して，女子3人の並び方は　${}_3P_3$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_5P_5\times {}_3P_3=5!\times 3!=120\times 6=720$（通り）

(5)　(男子4人)(女子3人)と(女子3人)(男子4人)の2通りの並び方があるから，

$2\times {}_3P_3\times {}_4P_4=2\times 3!\times 4!=2\times 6\times 24=288$（通り）

(6)　まず男子4人を並べて，その間と両端の5ヵ所に女子3人を並べればよい。

5ヵ所に，女子 3人を並べる並び方は　${}_5P_3$ 通り。

男子4人を並べる並び方は　${}_4P_4$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_5P_3\times {}_4P_4=5\cdot 4\cdot 3\times 4!=60\times 24=1440$（通り）

(7)　男子4人を並べて，その間と両端の5ヵ所に，女子2人1組と1人を並べればよい。

5ヵ所に，女子1組と1人を並べる並び方は　${}_5P_2$ 通り。

男子4人の並び方は　${}_4P_4$ 通り。

女子3人のうちで1人の選び方は3通り。残り2人1組の並び方は　${}_2P_2$ 通り。

よって，求める並び方の総数は

${}_5P_2\times {}_4P_4\times 3\times {}_2P_2=5\cdot 4\times 4!\times 3\times 2!=20\times 24\times 3\times 2=2880$（通り）

5

解答　(1)　120通り　　(2)　60種類　　(3)　90通り

解説

(1)　6個の宝石を机上で円形に並べる方法は

$\dfrac{{}_6P_6}{6}=(6-1)!=5!=120$（通り）

(2)　首飾りは，裏返すと同じになることから

$\dfrac{(6-1)!}{2}=60$（種類）

(3)　異なる6個から4個取る順列 ${}_6P_4$ には，円順列としては同じものが4個ずつあるから　　$\dfrac{{}_6P_4}{4}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4}=90$（通り）

6

解答　(1)　48通り　　(2)　24通り　　(3)　48通り

解説

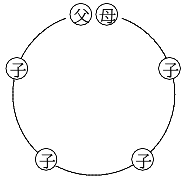
(1)　両親を1人とみなして固定し，残りの子供4人が円形のテーブルに着席する方法は

$4!$ 通り

そのおのおのに対して，両親の並び方は

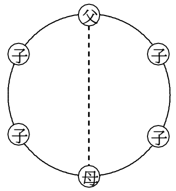
2通り

ゆえに　$4! \times 2 = 48$ (通り)



(2)　父親を固定すると，母親の席はその向かいであるから1通りに決まる。

よって，求める方法の数は子供4人が1列に並ぶ方法の数と同じで　$4! = 24$ (通り)



(3)　両親の間に着席する子供を1人選ぶ方法は

4通り

そのおのおのに対して，両親の並び方は

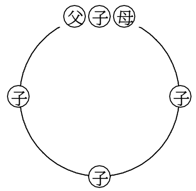
2通り

この両親と間の子供1人の計3人を1人とみなして固定し，残りの子供3人が円形のテーブルに着席する方法は

$3!$ 通り

ゆえに，求める方法の数は

$4 \times 2 \times 3! = 48$ (通り)



7

解答　(1)　500個　(2)　624個　(3)　300個　(4)　57個

解説

(1)　千の位の数字は1，2，3，4のどれかで　4通り

百，十，一の位の数字は，それぞれ0，1，2，3，4の　5通り

よって，4桁の自然数の個数は　$4 \times 5^3 = 500$ (個)

(2)　(1)と同様に考えて，3桁の自然数の個数は　$4 \times 5^2 = 100$ (個)

2桁の自然数の個数は　$4 \times 5 = 20$ (個)

また，1桁の自然数は1，2，3，4の　4個

よって，4桁以下の自然数の個数は　$4 + 20 + 100 + 500 = 624$ (個)

別解　0，1，2，3，4の5種類の数字から4個取ってできる重複順列の個数は

$5^4 = 625$ (個)

このうち，　1234を4桁の数1234，　0123を3桁の数123，

0012を2桁の数12，　0001を1桁の数1

のようにみなすと，0000だけが自然数でない。

よって，求める個数は　$625 - 1 = 624$ (個)

(3)　一の位の数字は0，2，4のどれかで　3通り

千の位の数字は1，2，3，4のどれかで　4通り

百，十の位の数字は，それぞれ0，1，2，3，4の　5通り

よって，4桁の偶数の個数は　$3 \times 4 \times 5^2 = 300$ (個)

(4)　213より小さい自然数は次の場合に分けられる。

[1]　1桁または2桁の場合

(2)から　$4 + 20 = 24$ (個)

[2]　3桁の場合

百の位は1か2である。

百の位が1である3桁の自然数の個数は　$5^2 = 25$ (個)

百の位が2である3桁の自然数のうち，213より小さいものは

200，201，202，203，204，210，211，212　の8個。

よって　$25 + 8 = 33$ (個)

[1]，[2]から，求める自然数の個数は　$24 + 33 = 57$ (個)

8

解答　(1)　62通り　(2)　31通り　(3)　65通り

解説

(1)　6枚のカードを，A，B 2つの組のどちらかに入れる方法は　$2^6 = 64$ (通り)

このうち，A，Bの一方だけに入れる方法は　2通り

ゆえに，A，B 2組に分ける方法は　$64 - 2 = 62$ (通り)

(2)　(1)でA，Bの区別をなくして　$62 \div 2 = 31$ (通り)

(3)　カード1，カード2が入る箱を，それぞれA，Bとし，残りの箱をCとする。

A，B，Cの3個の箱のどれかにカード3，4，5，6を入れる方法は　3^4 通り

このうち，Cには1枚も入れない方法は　2^4 通り

したがって　$3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$ (通り)

9

解答　(1)　2通り　(2)　順に 3通り，15通り

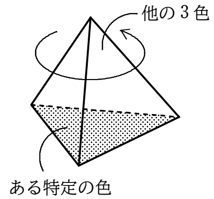
解説

(1)　4色のうちのある1色を塗った面の位置を固定すると，

残りの3面を他の3色で塗る方法は

$(3-1)! = 2$ (通り)

よって　2通り。



(2)　[1]　3色すべてを使う場合

4面あるから，どれか1色で2面を塗ることになる。

その色の選び方は　3通り

その2面を固定して，その選んだ色で塗り，残りの2面を他の2色で塗る方法は2通りあるが，回転させると一致するから，1通りである。

よって，塗り方の総数は　$3 \times 1 = 3$ (通り)

次に，3色のうち使わない色がある場合を考える。

[2]　2色で塗る場合，その色の選び方は　3通り

そのおのおのについて

(i)　1色を2面，もう1色を残りの2面に塗る場合，その塗り方は　1通り

(ii)　1色を3面，もう1色を残りの1面に塗る場合，その塗り方は　2通り

したがって，この場合の塗り方の総数は　$3 \times (1+2) = 9$ (通り)

[3]　1色で塗る場合，その色の選び方は　3通り

よって，使わない色があってもよい場合の塗り方は，[1]，[2]，[3]により，全部で

$3 + 9 + 3 = 15$ (通り)

1

解答　(1)　1440通り　(2)　3600通り　(3)　720通り　(4)　1440通り

(5)　960通り

解説

(1)　iとmをまとめた1つと，残り5文字の，6個の順列で　${}_6P_6$ 通り。

そのおのおのに対して，iとmの並び方は　2通り。

よって，積の法則により　${}_6P_6 \times {}_2P_2 = 6! \times 2 = 1440$ (通り)

(2)　(7文字すべての順列) − (1)が求める並べ方であるから

${}_7P_7 - 1440 = 7! - 1440 = 5040 - 1440 = 3600$ 通り

(3)　iとmとpをまとめた1つと，残り4文字の，5個の順列で　${}_5P_5$ 通り。

そのおのおのに対して，iとmとpの並び方は　${}_3P_3$ 通り。

よって，積の法則により　${}_5P_5 \times {}_3P_3 = 5! \times 3! = 720$ (通り)

(4)　i，m，p以外の4文字の間とその両端の5か所から3か所を選んで，i，m，pの3文字を並べる並べ方は　${}_5P_3$

i，m，p以外の4文字の並べ方は　${}_4P_4$ 通り。

よって，積の法則により　${}_5P_3 \times {}_4P_4 = {}_5P_3 \times 4! = 60 \times 24 = 1440$ (通り)

(5)　iとmの間の2文字は，i，m以外の5文字から2つ選んで並べる並べ方で

${}_5P_2$ 通り。

iとmを入れ替えて　${}_5P_2 \times 2$ 通り。

また，i□□mの4文字を1文字とみて，残り3文字と合わせた，4個の順列は

${}_4P_4$ 通り。

よって　${}_5P_2 \times 2 \times {}_4P_4 = {}_5P_2 \times 2 \times 4! = 20 \times 2 \times 24 = 960$ (通り)

2

解答　(1)　60番目　(2)　bdcea

解説

(1)　cbedaより前に並んでいる順列のうち

a□□□□の形のものは　$4! = 24$ (個)

b□□□□の形のものは　24個

ca□□□の形のものは　$3! = 6$ (個)

cba□□の形のものは　$2! = 2$ (個)

cbd□□の形のものは　2個

cbd□□の形の次に，cbead，cbedaの2個がある。

よって　$24 \times 2 + 6 + 2 \times 2 + 2 = 60$ (番目)

(2)　a□□□□の形のものは　$4! = 24$ (個)

ba□□□の形のものは　$3! = 6$ (個)

bc□□□の形のものは　6個

bda□□の形のものは　$2! = 2$ (個)

以上の合計は　$24 + 6 \times 2 + 2 = 38$ (個)

38番目はbdaecであるから，39番目は　bdcae

したがって，40番目は　bdcea

別解　次のように計算することもできる。

(1)　cはa，b，c，d，eの3番目であるから，$\boxed{\text{a または b}}$□□□□の形のものは

$2 \times 4!$ 個

bはa，b，d，eの2番目であるから，c$\boxed{\text{a}}$□□□の形のものは　$3!$ 個

eはa，d，eの3番目であるから，cb$\boxed{\text{a または d}}$□□の形のものは　$2 \times 2!$ 個

cbe□□ の形のものは，ad，da の並びを考えて　2 個

したがって，cbeda は　$2\times4!+3!+2\times2!+2=60$（番目）

(2)　40 番目の列を $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$ とする。

ここで　$40=4!\times1+3!\times2+2!\times1+1!\times1+1$

$4!\times1$ から，$\boxed{1}$ に入るのは，a，b，c，d，e の $1+1=2$ 番目の　b

$3!\times2$ から，$\boxed{2}$ に入るのは，a，c，d，e　の $2+1=3$ 番目の　d

$2!\times1$ から，$\boxed{3}$ に入るのは，a，c，e　の $1+1=2$ 番目の　c

$1!\times1+1$ より，$\boxed{4}$ には a，e の 2 番目の e，$\boxed{5}$ には a が入るから，40 番目は

bdcea

$\boxed{3}$

解答　(ア)　1152　(イ)　144

解説

男子 4 人の並び方は　4! 通り　　女子 4 人の並び方は　4! 通り

左端に男子が並ぶ場合と女子が並ぶ場合を考えて　$4!\times4!\times2=$ ア1152（通り）

男子 4 人が円形に並ぶ並び方は　$(4-1)!$ 通り

円形に並んだ男子 4 人の間に女子 4 人が並ぶ方法は　4! 通り

よって　$(4-1)!\times4!=$ イ144（通り）

$\boxed{4}$

解答　(1)　126 通り　(2)　36 通り　(3)　972 通り

解説

(1)　空室ができてもよいとすると，A，B 2 部屋に 7 人を分ける方法は

$2^7=128$（通り）

どの部屋も 1 人以上になる分け方は，この 128 通りのうち A，B のどちらかが空室になる場合を除いて　$128-2=126$（通り）

(2)　空室ができてもよいとすると，A，B，C 3 部屋に 4 人を分ける方法は

$3^4=81$（通り）

このうち，空室が 2 部屋できる場合は，空室でない残りの 1 部屋を選ぶと考えて

3 通り

空室が 1 部屋できる場合は，空室の選び方が 3 通りあり，そのおのおのについて，残りの 2 部屋に 4 人が入る方法が 2^4-2 通りずつあるから　$3\times(2^4-2)=42$（通り）

よって，求める場合の数は　$81-(3+42)=36$（通り）

(3)　まず，大人 4 人を，どの部屋も大人が 1 人以上になるように分ける方法は，(2) から

36 通り

そのおのおのについて，子ども 3 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は

$3^3=27$（通り）

よって，どの部屋も大人が 1 人以上になる分け方は　$36\times27=972$（通り）

$\boxed{1}$

解答　(1)　5040　(2)　720　(3)　720　(4)　3840　(5)　648

解説

(1)　$7!=5040$（通り）

(2)　3 個の赤色のボール 1 組と残りの 4 個の並べ方は　5! 通り

赤色のボール 3 個の並べ方は　3! 通り

よって，求める並べ方は　$5!\times3!=720$（通り）

(3)　2 の数字が書かれたボール 3 個を両端に並べる並べ方は　${}_3P_2$ 通り

残りの 5 個の並べ方は　5! 通り

ゆえに，求める並べ方は　${}_3P_2\times5!=720$（通り）

(4)　両端のボールの色が同じになるのは，次の場合がある。

[1]　両端のボールの色が赤色のとき

両端の並べ方は　${}_3P_2$ 通り　　残りの 5 個の並べ方は　5! 通り

よって　${}_3P_2\times5!=720$（通り）

[2]　両端のボールの色が青色のとき

両端の並べ方は　${}_2P_2$ 通り　　残りの 5 個の並べ方は　5! 通り

よって　${}_2P_2\times5!=240$（通り）

[3]　両端のボールの色が黒色のとき　[2] と同様にして　240 通り

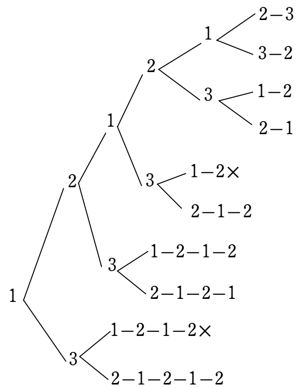
[1]，[2]，[3] から，両端のボールの色が同じになるような並べ方は

$720+240+240=1200$（通り）

したがって，求める並べ方の総数は　$5040-1200=3840$（通り）

(5)　[1]　左端が 1 のとき

隣り合う数字がすべてが異なる並べ方は右の図のようになる。



よって，8 通りの並べ方がある。

数字が 1 のボールの色の決め方は　3! 通り

数字が 2 のボールの色の決め方は　3! 通り

数字が 3 のボールの色の決め方は　1 通り

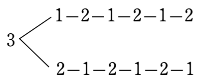
ゆえに　$8\times3!\times3!\times1=288$（通り）

[2]　左端が 2 のとき

[1] と同様にして　288 通り

[3]　左端が 3 のとき

隣り合う数字がすべてが異なる並べ方は次の図のようになる。



よって，2 通りの並べ方がある。

それぞれの数字の色の決め方は，[1] と同様に，$3!\times3!\times1$ 通りであるから

$2\times3!\times3!\times1=72$（通り）

[1]，[2]，[3] から，求める総数は　$288+288+72=648$（通り）

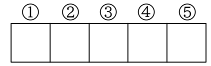
$\boxed{2}$

解答　(アイ)　48　(ウエ)　12　(オ)　2　(カ)　4　(キ)　4　(クケ)　12

(コサ)　16　(シス)　26

解説

図のように正方形をそれぞれ ① ～ ⑤ とおく。



(1)　① の塗り方は　3 通り

② の塗り方は，① の色以外の　2 通り

同様に，③，④，⑤ の塗り方も，それぞれその左にある正方形の色以外の 2 通りである。

したがって，求める塗り方は　$3\times2\times2\times2\times2=$ アイ48（通り）

(2)　左右対称に塗るとき，④ は ② と，⑤ は ① と同じ色であるから，①，②，③ の塗り方のみ考えればよい。

③ の塗り方は　3 通り

② の塗り方は，③ の色以外の　2 通り

① の塗り方は，② の色以外の　2 通り

したがって，求める塗り方は　$3\times2\times2=$ ウエ12（通り）

(3)　青と緑の 2 色だけで塗り分けるのは，青と緑が交互に塗られるときであり，① の色を定めれば ② ～ ⑤ の色は自動的に定まる。

① の色は青か緑であるから，求める塗り方は　オ2 通り

(4)　赤に塗られる正方形が 3 枚であるのは，①，③，⑤ が赤のときである。

このとき，②，④ の塗り方は，それぞれ青と緑の 2 通りである。

よって，求める塗り方は　$2\times2=$ カ4（通り）

(5)　[1]　① が赤に塗られるとき，残りの正方形は青と緑が交互に塗られる。

その塗り方は，(3) と同様に考えて　2 通り

⑤ が赤に塗られるときも同様であるから，どちらかの端の 1 枚が赤に塗られるのは

$2\times2=$ キ4（通り）

[2]　② が赤のとき，① の塗り方は青と緑の　2 通り

③，④，⑤ は青と緑を交互に塗るから，(3) と同様に考えて　2 通り

よって，② が赤となる塗り方は　$2\times2=4$（通り）

同様にして，④ が赤となる塗り方は　4 通り

③ が赤のとき，①，② は青と緑を交互に塗るから，(3) と同様に考えて　2 通り

④，⑤も青と緑を交互に塗るから　2 通り

よって，③ が赤となる塗り方は　$2\times2=4$（通り）

したがって，端以外の 1 枚が赤に塗られるのは　$4\times3=$ クケ12（通り）

[1]，[2] から，赤に塗られる正方形が 1 枚であるのは　$4+12=$ コサ16（通り）

(6)　4 つ以上の正方形を同じ色に塗ることはできないから，赤に塗られる正方形の枚数は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚のいずれかである。

したがって，(1)，(3)，(4)，(5) より，赤に塗られる正方形が 2 枚であるのは

$48-(2+4+16)=$ シス26（通り）

$\boxed{3}$

解答　(1)　$3\cdot4^{n-1}-3^n$（個）　(2)　21200

解説

(1)　0 を使わない場合も含めて考えると，n 桁の整数は，先頭の数字の選び方が 0 以外の 3 通り，それ以外の位の数字の選び方が 4 通りであるから　$3\cdot4^{n-1}$ 個

そのうち，0 を使わない整数は，それぞれの位の数字を 1，2，3 のいずれかから選ぶから　3^n 個

よって，求める個数は　$3\cdot4^{n-1}-3^n$（個）

(2)　$n=5$ のとき，(1) から $3\cdot4^4-3^5=525$（個）の整数ができる。

よって，ちょうど真中の位置にくる整数は $\dfrac{525+1}{2}=263$（番目）の数である。

[1]　1△△△△の形の整数の個数

0 を使わない場合も含めて考えると，千，百，十，一 の位の数字の選び方はそれぞれ 4 通りあるから　　$4^4=256$（個）

そのうち，0 を使わない整数は，千，百，十，一の位の数字を 1，2，3 のいずれかから選ぶから　　$3^4=81$（個）

よって，1△△△△の形の整数の個数は　　$256-81=175$（個）

[2]　20△△△の形の整数の個数

百，十，一の位の数字の選び方はそれぞれ 4 通りあるから　　$4^3=64$（個）

[3]　210△△ の形の整数の個数

[2] と同様に考えて　　$4^2=16$（個）

[4]　211△△の形の整数の個数

[1] と同様に考えて　　$4^2-3^2=7$（個）

[1]～[4] の整数の個数の合計は　　$175+64+16+7=262$（個）

よって，212△△の形の整数の初めの数 21200 がちょうど真中の位置にくる整数である。

1

解答　(1)　20　　(2)　21　　(3)　10　　(4)　1　　(5)　78　　(6)　$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

解説

(1)　${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$　　(2)　${}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$　　(3)　${}_{10}C_1=10$

(4)　${}_8C_8=1$　　(5)　${}_{13}C_{11}={}_{13}C_{13-11}={}_{13}C_2=\dfrac{13\cdot12}{2\cdot1}=78$

(6)　${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_{(n+2)-n}={}_{n+2}C_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

2

解答　(1)　56 通り　　(2)　120 通り

解説

(1)　${}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$（通り）　　(2)　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$（通り）

3

解答　(1)　210 通り　　(2)　90 通り　　(3)　195 通り　　(4)　28 通り　　(5)　56 通り

解説

(1)　男女合わせた 10 人から 4 人を選ぶから　　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

(2)　男子 6 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_6C_2$ 通り

女子 4 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_4C_2$ 通り

よって，求める委員の選び方は　　${}_6C_2\times{}_4C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=90$（通り）

(3)　4 人とも男子を選ぶ方法は　　${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$（通り）

よって，求める委員の選び方は　　$210-15=195$（通り）

(4)　a，b の 2 人を先に選んでおき，残りの 8 人から 2 人を選ぶと考えて

$${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28\text{（通り）}$$

(5)　a を先に選んでおき，a と b を除いた 8 人から 3 人を選ぶと考えて

$${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56\text{（通り）}$$

4

解答　(1)　35 本　　(2)　120 個　　(3)　60 個

解説

(1)　異なる 10 個の点から 2 個の点を選ぶ方法は　${}_{10}C_2$ 通り

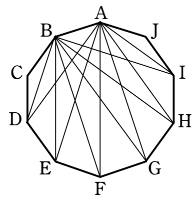
この中には正十角形 の 10 本の辺がある。

ゆえに　　${}_{10}C_2-10=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}-10=35$（本）

(2)　3 個の頂点で三角形が 1 個できるから，求める個数は

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120\text{（個）}$$

(3)　正十角形の 10 個の頂点を図のように定める。このとき，辺 AB だけを共有する三角形の第 3 の頂点の選び方は，A，B とその両隣の 2 点 C，J を除く D，E，F，G，H，I の 6 通り。



他の辺を共有する場合も同様であるから，求める個数は

$$6\times10=60\text{（個）}$$

5

解答　(1)　27720 通り　　(2)　369600 通り　　(3)　15400 通り　　(4)　1485 通り

解説

(1)　12 人から 5 人を選ぶ方法は　　${}_{12}C_5$ 通り

そのどの場合に対しても，残りの 7 人から 4 人を選ぶ方法は　　${}_7C_4$ 通り

残り 3 人を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　　${}_{12}C_5\times{}_7C_4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=27720$（通り）

(2)　A 組の 3 人の選び方は　　${}_{12}C_3$ 通り

B 組の 3 人の選び方は残りの 9 人から選ぶので　　${}_9C_3$ 通り

C 組の 3 人の選び方は残りの 6 人から選ぶので　　${}_6C_3$ 通り

A 組，B 組，C 組の人が決まれば，残りの D 組の 3 人は決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=369600\text{（通り）}$$

(3)　(2) で，A，B，C，D の区別をなくすと，4! 通りずつ同じ組分けができる。

よって，分け方の総数は　　$\dfrac{369600}{4!}=\dfrac{369600}{24}=15400$（通り）

(4)　A 組 2 人，B 組 2 人，C 組 8 人の 3 つの組に分けることを考え，A，B の区別をなくせばよい。

よって，分け方の総数は　　$\dfrac{{}_{12}C_2\times{}_{10}C_2}{2!}=\dfrac{12\cdot11}{2\cdot1}\times\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\dfrac{1}{2\cdot1}=1485$（通り）

6

解答　(1)　10080 通り　　(2)　144 通り　　(3)　420 通り

解説

(1)　O が 2 個，A が 2 個，Y，K，H，M が 1 個ずつあるから，この 8 文字の並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}=10080\text{（通り）}$$

(2)　偶数番目の 4 か所には O，O，A，A が入るから，その並べ方は

$$\frac{4!}{2!2!}\text{ 通り}$$

奇数番目の 4 か所には Y，K，H，M が入るから，その並べ方は　4! 通り

よって　　$\dfrac{4!}{2!2!}\times4!=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times4\cdot3\cdot2\cdot1=144$（通り）

(3)　Y，K，H，M を同じ文字□と考えて，□ 4 個，O 2 個，A 2 個の順列を作り，□に左から Y，K，H，M を順に入れると，題意の順列ができる。

よって　　$\dfrac{8!}{4!2!2!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot1\times2\cdot1}=420$（通り）

7

解答　(1)　792 通り　　(2)　350 通り　　(3)　120 通り　　(4)　582 通り

解説

(1)　右に１区画進むことを →，上に１区画進むことを↑で表すと，P から Q に行く最短経路の総数は，７個の → と５個の↑を１列に並べる順列の総数に等しい。

よって　$\dfrac{12!}{7!5!}=792$（通り）

(2)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=350$（通り）

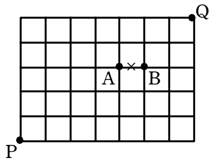
(3)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

R から S まで行く最短経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り

S から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，S をともに通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=120$（通り）

(4)　×印がある区画の左端を A，右端を B とする。



P から A まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

B から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短経路は

$$\frac{7!}{4!3!}\times\frac{4!}{2!2!}=210\ (\text{通り})$$

したがって，×印の箇所を通らない最短経路は　$792-210=582$（通り）

8

解答　(1)　66 通り　(2)　36 通り

解説

(1)　３種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66\ (\text{通り})$$

(2)　まず，３種類の果物を１個ずつ購入する。

残りは３種類の果物から重複を許して７個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36\ (\text{通り})$$

別解　(1)　10 個の○と２つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた３か所の○の個数を順に柿，りんご，みかんの個数にすると考えればよい。したがって，求める総数は，12 個の場所から，○を入れる 10 個の場所を選ぶ方法の個数に等しく

$${}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66\ (\text{通り})$$

1

解答　(1)　6　(2)　10　(3)　1　(4)　7　(5)　1　(6)　28　(7)　19600　(8)　$\dfrac{n(n+1)}{2}$

解説

(1)　${}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$　(2)　${}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$　(3)　${}_7C_7=1$

(4)　${}_7C_1=7$　(5)　${}_5C_0=1$　(6)　${}_8C_6={}_8C_{8-6}={}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

(7)　${}_{50}C_{47}={}_{50}C_{50-47}={}_{50}C_3=\dfrac{50\cdot49\cdot48}{3\cdot2\cdot1}=19600$

(8)　${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-(n-1)}={}_{n+1}C_2=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2\cdot1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2

解答　(1)　210 通り　(2)　66 通り

解説

(1)　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

(2)　12 チームから異なる２チームを選ぶ組合せの総数で

$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66\ (\text{通り})$$

3

解答　(1)　1001 通り　(2)　420 通り　(3)　931 通り　(4)　916 通り　(5)　66 通り　(6)　220 通り

解説

(1)　男女合わせた 14 人から４人を選ぶから

$${}_{14}C_4=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001\ (\text{通り})$$

(2)　男子８人から委員２人を選ぶ方法は　${}_8C_2$ 通り

女子６人から委員２人を選ぶ方法は　${}_6C_2$ 通り

よって，求める委員の選び方は　${}_8C_2\times{}_6C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=420$（通り）

(3)　すべての選び方は，(1) から　1001 通り

このうち，４人とも男子を選ぶ方法は　${}_8C_4$ 通り

よって，女子から少なくとも１人選ぶ方法は

$$1001-{}_8C_4=1001-\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001-70=931\ (\text{通り})$$

(4)　４人とも女子を選ぶ方法は　${}_6C_4$ 通り

よって，男子，女子から少なくとも１人ずつ選ぶ方法は

$$1001-({}_8C_4+{}_6C_4)=1001-(70+{}_6C_2)=1001-\left(70+\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\right)$$
$$=1001-(70+15)=916\ (\text{通り})$$

(5)　A，B の２人を先に選んでおき，残りの 12 人から２人を選ぶと考えて

$${}_{12}C_2=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66\ (\text{通り})$$

(6)　A を先に選んでおき，A，B を除いた 12 人から残りの３人を選ぶと考えて

$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220\ (\text{通り})$$

4

解答　(1)　14 本　(2)　(ア)　7 個　(イ)　7 個

解説

(1)　正七角形の２つの頂点を結んでできる線分の本数は　${}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$（本）

対角線の本数は，これから辺の数を引いたものであるから　$21-7=14$（本）

(2)　(ア)　正七角形と２辺を共有する三角形は　7 個

(イ)　７つの頂点から３点を選んで結ぶと三角形が１つできるから，三角形の総数は

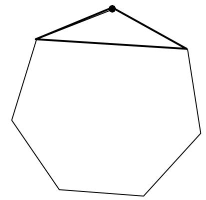
$${}_7C_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35\ (\text{個})$$

また，これらの三角形のうち

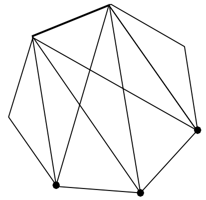
正七角形と１辺だけを共有するものは　7×3 個

正七角形と２辺を共有するものは，(ア) から　7 個

ゆえに，正七角形と辺を共有しない三角形は　$35-(7\times3+7)=7$（個）



[２辺を共有]



[１辺を共有]

5

解答　(1)　792 通り　(2)　13860 通り　(3)　924 通り　(4)　462 通り　(5)　1485 通り　(6)　15400 通り

解説

(1)　12 人から７人を選ぶと，残りは５人の組に決まる。よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_7={}_{12}C_5=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792\ (\text{通り})$$

(2)　12 人から６人を選ぶ方法は　${}_{12}C_6$ 通り

そのおのおのに対して，残りの６人から４人を選ぶ方法は　${}_6C_4$ 通り

残り２人を最後の１組とする。

よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_6\times{}_6C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=924\times15=13860\ (\text{通り})$$

別解　${}_{12}C_2\times{}_{10}C_4=66\times210=13860$（通り）

(3)　12 人から６人を選んで A の部屋に入れると，残り６人は B の部屋に決まる。

よって，求める分け方の総数は　${}_{12}C_6=924$（通り）

(4)　(3) において，A と B の区別をなくせばよいから　${}_{12}C_6\div2=462$（通り）

(5)　12 人から８人を選ぶ方法は　${}_{12}C_8$ 通り

残りの４人から２人ずつの２組に分ける方法は，まず A 組に２人，B 組に２人となるように分け，A と B の区別をなくせばよいから　${}_4C_2\div2$ 通り

よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_8\times{}_4C_2\div2={}_{12}C_4\times{}_4C_2\div2=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{1}{2}=1485\ (\text{通り})$$

(6)　12 人を 3 人ずつ A，B，C，D の 4 組に分ける方法は　$_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3$ 通り

ここで，A，B，C，D の区別をなくすと，4! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，求める分け方の総数は

$$_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3\div4!=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15400\ (通り)$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　3 通り　　(2)　60 通り　　(3)　240 通り

解説

(1)　$\boxed{}\boxed{A}\boxed{K}\boxed{}\boxed{B}\boxed{}$ の 3 個の空欄に T 1 個，I 2 個を並べる順列であるから

$$\frac{3!}{2!}=3\ (通り)$$

(2)　A，K，B を同じ文字○と考えて，○ 3 個，T 1 個，I 2 個の順列を作り，○に左から A，K，B を順に入れると題意の順列ができる。

したがって　$\dfrac{6!}{3!2!}=60$ (通り)

(3)　6 個の中に I が 2 個あるから，すべての並べ方は $\dfrac{6!}{2!}$ 通り

A，K が隣り合う並べ方は A，K を 1 つの文字と考えて 5 文字を並べる並べ方は $\dfrac{5!}{2!}$

また，A，K の並べ方が 2 通りあるから $\dfrac{5!}{2!}\times2$ 通り

よって，求める並べ方は $\dfrac{6!}{2!}-\dfrac{5!}{2!}\times2=240$ (通り)

$\boxed{7}$

解答　(1)　462 通り　　(2)　210 通り　　(3)　72 通り　　(4)　278 通り
　　(5)　184 通り　　(6)　362 通り

解説

(1)　右に 1 区画進むことを →，下に 1 区画進むことを ↓ で表すと，P から Q に行く最短経路の総数は，6 個の → と 5 個の ↓ を 1 列に並べる順列の総数に等しい。

よって　$\dfrac{11!}{6!5!}=462$ (通り)

(2)　P から R まで行く経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から Q まで行く経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通る経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=210$ (通り)

(3)　P から R まで行く経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

R から S まで行く経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り

S から Q まで行く経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，S をともに通る経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=72$ (通り)

(4)　P から S まで行く経路は　$\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り

よって，S を通る経路は　$\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{4!}{3!}=140$ (通り)

これと (2)，(3) の結果から，R または S を通る経路は

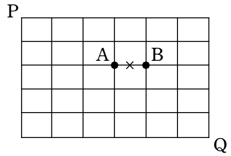
(R を通る経路の数)+(S を通る経路の数)−(R，S をともに通る経路の数)

$=210+140-72=278$ (通り)

(5)　R，S をともに通らない経路の数は，(1) の経路の数から，(4) の経路の数を引いて

$462-278=184$ (通り)

(6)　×印の区間の左端を A，右端を B とする。



P から A まで行く経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

B から Q まで行く経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る経路は

$$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=100\ (通り)$$

したがって，×印を通らない経路は　$462-100=362$ (通り)

$\boxed{8}$

解答　(1)　286 通り　　(2)　84 通り

解説

(1)　求める場合の数は，異なる 4 種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの数に等しいから　$_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=286$ (通り)

別解　10 個の ○ と 3 個の仕切り | の順列を作り，仕切りで分けられた 4 か所の ○ の個数を，左から順に柿，りんご，みかん，キウイの個数と考えればよい。

よって，求める場合の数は，10 個の ○ と 3 個の | を 1 列に並べる順列の総数に等しいから　$\dfrac{13!}{10!3!}=\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=286$ (通り)

(2)　まず，4 種類の果物を 1 個ずつ買う。

残り 6 個の買い方は，異なる 4 種類の果物から重複を許して 6 個取る組合せの数に等しいから　$_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$ (通り)

別解　まず，4 種類の果物をを 1 個ずつ買う。

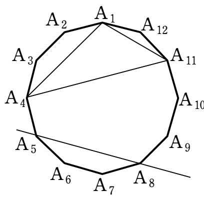
残り 6 個の買い方は，6 個の ○ と 3 個の | を 1 列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84\ (通り)$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　(ア)　220　　(イ)　66　　(2)　(ウ)　39

解説



(1)　(ア)　正十二角形の 12 個の頂点は，どの 3 点も同じ直線上にないから，3 点で 1 つの三角形が得られる。

ゆえに　$_{12}C_3=220$ (個)

(イ)　頂点はどの 3 点も同じ直線上にないから，2 点で 1 本の直線が得られる。

ゆえに　$_{12}C_2=66$ (本)

(2)　(ウ)　10 本の直線がどれも平行でないとすると，交点は　$_{10}C_2$ 個

実際には，4 本の直線が平行であるから，平行な 4 本の直線で交点が $_4C_2$ 個減る。

ゆえに　$_{10}C_2-{}_4C_2=45-6=39$ (個)

別解　(ウ)　平行な 4 直線以外の 6 本の直線は，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も同じ点で交わらないから，これら 6 本の直線の交点の個数は　$_6C_2$ 個

また，平行な 4 直線のうちの 1 本とそれと平行でない 6 本の直線の交点は 6 個ある。

したがって，求める交点の総数は　$_6C_2+6\times4=15+24=39$ (個)

$\boxed{2}$

解答　80 通り

解説

1，2，3，……，10 の 10 個から 3 個の異なる数を選ぶ組合せは

$$_{10}C_3\ 通り$$

また，3 個の整数の積は　奇数，2×奇数，2^2 の倍数　のいずれかである。

[1]　積が奇数のとき

1，3，5，7，9 から異なる 3 個を選ぶ場合で

$$_5C_3\ 通り$$

[2]　積が 2×奇数 のとき

2，6，10 から 1 個，1，3，5，7，9 から異なる 2 個を選ぶ場合で

$$_3C_1\times{}_5C_2\ 通り$$

積が 4 の倍数になるのは [1]，[2] 以外の場合であるから，その総数は

$$_{10}C_3-({}_5C_3+{}_3C_1\times{}_5C_2)=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}-\left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}+3\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)$$
$$=120-(10+30)$$
$$=80\ (通り)$$

$\boxed{3}$

解答　71 個

解説

1，2，3 のいずれかを A，B，C で表す。ただし，A，B，C はすべて異なる数字とする。

次の [1] ～ [4] のいずれかの場合が考えられる。

[1]　($AAAA$) のタイプ。つまり，同じ数字を 4 つ含むとき。

4 枚ある数字は 3 だけであるから　　1 個

[2]　($AAAB$) のタイプ。つまり，同じ数字を 3 つ含むとき。

3 枚以上ある数字は 2，3 であるから，A の選び方は　　2 通り

A にどれを選んでも，B の選び方は　2 通り

そのおのおのについて，並べ方は　$\frac{4!}{3!}=4$（通り）

よって，このタイプの整数は　$2\times2\times4=16$（個）

[3]（$AABB$）のタイプ。つまり，同じ数字 2 つを 2 組含むとき。

1，2，3 すべて 2 枚以上あるから，A，B の選び方は　${}_3C_2$ 通り

そのおのおのについて，並べ方は　$\frac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よって，このタイプの整数は　${}_3C_2\times6=18$（個）

[4]（$AABC$）のタイプ。つまり，同じ数字 2 つを 1 組含むとき。

A の選び方は 3 通りで，B，C は A を選べば決まる。

そのおのおのについて，並べ方は　$\frac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，このタイプの整数は　$3\times12=36$（個）

以上から　$1+16+18+36=71$（個）

4

解答　(1)　455　(2)　9　(3)　81　(4)　30　(5)　180

解説

(1)　${}_{15}C_3=455$（通り）

(2)　3 つの数字 a，b，c を選ぶことを abc と表す。

各色について，連続する 3 つの数字の選び方は 123，234，345 の 3 通りずつある。

よって，求める選び方は　$3\times3=9$（通り）

(3)　123 を選ぶ場合は，1，2，3 のそれぞれの色について，3 通りずつの選び方があるから　$3^3=27$（通り）

234，345 を選ぶ場合も同様に 27 通りずつある。

よって，求める選び方は　$27\times3=81$（通り）

(4)　各色について，同じ色の 3 枚の選び方は ${}_5C_3=10$（通り）ずつある。

よって，求める選び方は　$10\times3=30$（通り）

(5)　2 枚だけが同じ数字になる 2 つの数字の選び方は

$${}_5C_1\times{}_4C_1=20 \text{（通り）}$$

同じ数字の 2 枚の色は　${}_3C_2=3$（通り）

残り 1 枚の数字の色は　${}_3C_1=3$（通り）

よって，求める選び方は　$20\times3\times3=180$（通り）

5

解答　(1)　15 個　(2)　10 個

解説

(1)　この方程式の負でない整数解は，4 個の ○と 2 つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた 3 か所の ○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，整数解の個数は，4 個の同じものと 2 個の同じものの順列の個数に等しいから　$\frac{6!}{4!2!}=15$（個）

別解　例えば，$x=2$，$y=1$，$z=1$ は，x を 2 個，y を 1 個，z を 1 個取ることと考えると，方程式 $x+y+z=4$ を満たす負でない整数解の個数は，3 種類の文字 x，y，z から重複を許して 4 個取る組合せの数に等しい。

よって　${}_{3-1+4}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$（個）

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

また　$x=X+1$，$y=Y+1$，$z=Z+1$

これらを $x+y+z=6$ に代入すると　$X+Y+Z=3$

この方程式を満たす負でない整数解の個数は，(1)と同様に考えて，3 個の ○と 2 つの仕切りの順列の数に等しい。よって　$\frac{5!}{3!2!}=10$（個）

別解　$X+Y+Z=3$ を満たす負でない整数解の個数は，3 種類の文字 X，Y，Z から重複を許して 3 個取る組合せの数に等しい。

よって　${}_{3-1+3}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$（個）

6

解答　(1)　15 通り　(2)　126 通り

解説

(1)　1 ～ 6 の 6 個の目から異なる 4 個を選び，大きいものから順に x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$（通り）

(2)　1 ～ 6 の 6 個の目から重複を許して 4 個を選び，大きいものから順に x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）

別解　4 個の○と 5 つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられてできる 6 か所を左から順に 6，5，4，3，2，1 の目の場所とする。このとき，各場所に入った○にそれぞれの目をあて，大きいものから x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）

1

解答　略

解説

1，2，……，n の n 個から r 個取る組合せを，次の 3 つに分ける。

[1]　数 1，2 をともに含む組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から $r-2$ 個を選び，それに数 1，2 を入れておく。その方法の数は　${}_{n-2}C_{r-2}$

[2]　数 1 か数 2 の一方だけを含む組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から $r-1$ 個を選び，それに数 1 か数 2 の一方を入れておく。その方法の数は，数 1 と数 2 のどちらを入れる場合も ${}_{n-2}C_{r-1}$ であるから　$2{}_{n-2}C_{r-1}$

[3]　数 1，2 をともに含まない組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から r 個を取り出す方法の数は

${}_{n-2}C_r$

[1]，[2]，[3] は同時には起こらないから，和の法則により

$${}_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$$

が成り立つ。

別解

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{(n-2)!}{(r-2)!\{(n-2)-(r-2)\}!}\\&\quad+2\cdot\frac{(n-2)!}{(r-1)!\{(n-2)-(r-1)\}!}+\frac{(n-2)!}{r!\{(n-2)-r\}!}\\&=\frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!}+\frac{2\cdot(n-2)!}{(r-1)!(n-r-1)!}+\frac{(n-2)!}{r!(n-r-2)!}\\&=\frac{(n-2)!}{r!(n-r)!}\{r(r-1)+2r(n-r)+(n-r)(n-r-1)\}\\&=\frac{(n-2)!}{r!(n-r)!}(n^2-n)=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r=(\text{左辺})\end{aligned}$$

2

解答　(1)　15120 通り　(2)　60 通り　(3)　2520 通り　(4)　336 通り

解説

(1)　10 個の文字のうち A が 5 個，G が 2 個あるから

$$\frac{10!}{5!2!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1}=15120 \text{（通り）}$$

(2)　「NAGARA」と G，A，W，A の計 5 個の並べ方を考える。

同じ A が 2 個あるから

$$\frac{5!}{2!}=60 \text{（通り）}$$

(3)　A が 5 個，G が 2 個，O が 3 個あると考え，3 個の O に左から N，R，W を入れると考え

$$\frac{10!}{5!2!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=2520 \text{（通り）}$$

(4)　A が隣り合わない並べ方は，N，G，R，G，W を先に並べ，両端と間の計 6 か所から A の入る 5 か所を決めると考え

$$\frac{5!}{2!}\times{}_6C_5=5\cdot4\cdot3\cdot6=360 \text{（通り）}$$

このうち G が隣り合うものを考える。

「GG」と N，R，W の 4 つの順列を考えると　$4!=24$（通り）

両端と間の5か所すべてにAが入るので，Aは隣り合わないが，Gが隣り合うものは24通り

よって，AもGも隣り合わないものは　$360-24=336$（通り）

3

解答　444個

解説

[1]　7桁の数が1△△△△△△の形である場合

「01」が現れる数の総数は，「01」，0，2，3，4を並べる順列の総数であるから

$${}_5P_5=120 \text{（個）}$$

[2]　7桁の数が2△△△△△△の形である場合

「01」が現れる数の総数は，次の和である。

(ア)「01」，「01」，3，4を並べる順列の総数

(イ)「01」，0，1，3，4を，「01」が2組にならないように並べる順列の総数

(ア)のとき　$\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$（個）

(イ)のとき「01」，0，3，4を並べる方法は　$4!=24$（通り）

そのおのおのについて，1を0の右隣以外に並べる方法は4通りある。

よって　$24\times4=96$（個）

したがって　$12+96=108$（個）

[3]　7桁の数が3△△△△△△の形である場合

[2]と同様にして，「01」が現れる数の総数は　108個

[4]　7桁の数が4△△△△△△の形である場合

[2]と同様にして，「01」が現れる数の総数は　108個

以上から，求める7桁の数の総数は　$120+108+108+108=444$（個）

4

解答　$a_{10}=89$

解説

碁石を10個並べるとき，条件を満たす並べ方のためには，黒石が5個以上必要である。

[1]　黒石5個，白石5個のとき

黒石の間と末尾の5か所に白石5個を並べるとよい。

よって　${}_5C_5$通り　　●∧●∧●∧●∧●∧

[2]　黒石6個，白石4個のとき

黒石の間と末尾の6か所から4か所を選んで白石を並べるとよい。

よって　${}_6C_4$通り　　●∧●∧●∧●∧●∧●∧

[3]　黒石7個，白石3個のとき

黒石の間と末尾の7か所から3か所を選んで白石を並べるとよい。

よって　${}_7C_3$通り　　●∧●∧●∧●∧●∧●∧●∧

以下，「[6]　黒石10個，白石0個のとき」まで同様に考えられるから

$$a_{10}={}_5C_5+{}_6C_4+{}_7C_3+{}_8C_2+{}_9C_1+{}_{10}C_0=1+15+35+28+9+1=89$$

別解　碁石を$(n+2)$個並べるとき，条件を満たす並べ方は次の2つの場合がある。

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

[1]　先頭が黒石，2番目が黒石　(●●……………)

[2]　先頭が黒石，2番目が白石　(●○●…………)

[1]の場合，2番目以降の並べ方はa_{n+1}通りある。

[2]の場合，3番目以降の並べ方はa_n通りある。

よって，次の漸化式が成り立つ。　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

これを用いると

$a_3=2+1=3$，$a_4=3+2=5$，$a_5=5+3=8$，$a_6=8+5=13$，

$a_7=13+8=21$，$a_8=21+13=34$，$a_9=34+21=55$，$a_{10}=55+34=89$

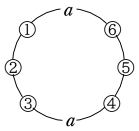
5

解答　(1)　3通り　　(2)　54通り

解説

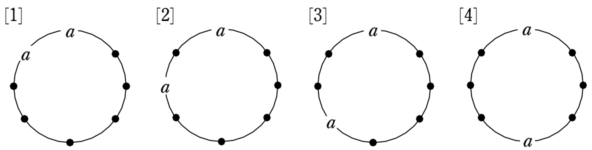
(1)　a 2個を対称な位置に固定して考える。

円の中心に関して対称であるから，右の図の①，②，③にはb 1個，c 2個を並べる。④，⑤，⑥には残りの玉を対称になるように並べる。



よって，求める円順列は　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

(2)　回転して同じにならないような，a 2個の並べ方は次の4通りがある。



[1]〜[3]の各場合について，b 2個，c 4個の並べ方は　$\dfrac{6!}{2!4!}=15$（通り）

[4]の場合，b 2個，c 4個の並べ方は，円の中心に関して対称なものを除くと，回転によって一致するものが2個ずつある。

よって　$3+\dfrac{15-3}{2}=9$（通り）

したがって，円順列の総数は　$15\times3+9=54$（通り）

別解　a 1個を固定して，a 1個，b 2個，c 4個の順列を考えると

$$\frac{7!}{2!4!}=105 \text{（通り）}$$

このうち，円の中心に関して対称なものを除いて，回転によって一致するものが2個ずつある。

よって，円順列の総数は　$3+\dfrac{105-3}{2}=54$（通り）