

第7章～整数～ 第1講 例題

1

【解答】 (1) 1, 4, 7 (2) 2, 6 (3) 69774 (4) 76986

【解説】

(1) □に入る数を a ($0 \leq a \leq 9$) とする。

$4+2+a+5=11+a$ が3の倍数であるとき、4桁の自然数は3の倍数になる。

$11+a$ が3の倍数になるのは、 $a=1, 4, 7$ のときである。

よって、求める数は 1, 4, 7

(2) □に入る数を a ($0 \leq a \leq 9$) とする。

下2桁が4の倍数であるとき、4桁の自然数は4の倍数になる。

下2桁すなわち $50+a$ が4の倍数になるのは、 $a=2, 6$ のときである。

よって、求める数は 2, 6

(3) □に入る数を大きい位から a, b ($0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$) とする。

$6+a+7+b+4=a+b+17$ が3の倍数であるとき、5桁の自然数は3の倍数になる。

$a+b+17$ が3の倍数になり、5桁の自然数が最大となるのは $a=9, b=7$ のときである。

よって、求める自然数は 69774

よって、求める自然数は 69774

(4) □に入る数を大きい位から a, b ($0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$) とする。

$7+6+a+8+b=a+b+21$ が9の倍数であるとき、5桁の自然数は9の倍数になる。

$a+b+21$ が9の倍数になり、5桁の自然数が最大となるのは $a=9, b=6$ のときである。

よって、求める自然数は 76986

よって、求める自然数は 76986

2

【解答】 $n=21, 84, 189, 756$

【解説】

$\sqrt{\frac{756}{n}}$ が自然数になるのは、 $\frac{756}{n}$ がある自然数の2乗になるときである。

756を素因数分解すると $756=2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ を $3 \cdot 7=21$ で割ると $2^2 \cdot 3^2$ すなわち $(2 \cdot 3)^2$

$3^3 \cdot 7=189$ で割ると 2^2

$2^2 \cdot 3 \cdot 7=84$ で割ると 3^2

756で割ると 1^2

よって、求める自然数 n は $n=21, 84, 189, 756$

3

【解答】 (1) 24 (2) $n=2025, 5625$ (3) 5個

【解説】

(1) $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

よって、求める正の約数の個数は

$(3+1)(2+1)(1+1)=4 \cdot 3 \cdot 2=24$ (個)

(2) 15を素因数分解すると $15=3 \cdot 5$

よって、正の約数の個数が15個である自然数 n を素因数分解すると、

p^{14}, p^2q^4 (p, q は異なる素数) のいずれかの形で表される。

n は45の倍数であり、 $45=3^2 \cdot 5$ であるから、 n は p^2q^4 の形で表される。

したがって、求める自然数 n は $n=3^2 \cdot 5^4, 3^4 \cdot 5^2$

すなわち $n=2025, 5625$

(3) 10を素因数分解すると $10=2 \cdot 5$

よって、正の約数の個数が10個である自然数 n を素因数分解すると、

p^9, pq^4 (p, q は異なる素数) のいずれかの形で表される。

[1] 自然数 n が p^9 の形で表されるとき

$2^9 > 200$ であるから、条件を満たさない。

[2] 自然数 n が p^2q^4 の形で表されるとき

$p=2$ とすると

$2 \cdot 3^4=162, 2 \cdot 5^4 > 200$ であるから、 $p=2, q=3$ は条件を満たす。

$p=3$ とすると

$3 \cdot 2^4=48, 3 \cdot 5^4 > 200$ であるから、 $p=3, q=2$ は条件を満たす。

$p=5$ とすると

$5 \cdot 2^4=80, 5 \cdot 3^4 > 200$ であるから、 $p=5, q=2$ は条件を満たす。

$p=7$ とすると

$7 \cdot 2^4=112, 7 \cdot 3^4 > 200$ であるから、 $p=7, q=2$ は条件を満たす。

$p=11$ とすると

$11 \cdot 2^4=176, 11 \cdot 3^4 > 200$ であるから、 $p=11, q=2$ は条件を満たす。

$p=13$ とすると

$13 \cdot 2^4 > 200$ であるから、条件を満たさない。

以上から、200以下の自然数のうち、正の約数が10個である数は、162, 48, 80,

112, 176の5個である。

4

【解答】 (1) 最大公約数 84, 最小公倍数 504 (2) 最大公約数 42, 最小公倍数 1260

【解説】

(1) $168=2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$252=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

最大公約数は $2^2 \cdot 3 \cdot 7=84$

最小公倍数は $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7=504$

(2) $84=2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$126=2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$630=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

最大公約数は $2 \cdot 3 \cdot 7=42$

最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7=1260$

5

【解答】 (1) $(a, b)=(5, 90), (10, 45)$

(2) $(a, b)=(18, 540), (36, 270), (54, 180), (90, 108)$

【解説】

(1) 最大公約数が5であるから、 a, b は

$a=5a', b=5b'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

このとき、 a, b の最小公倍数は $5a'b'$ と表されるから

$5a'b'=90$ すなわち $a'b'=18$

$a'b'=18, a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$(a', b')=(1, 18), (2, 9)$

よって $(a, b)=(5, 90), (10, 45)$

(2) 最大公約数が18であるから、 a, b は

$a=18a', b=18b'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

このとき、 a, b の最小公倍数は $18a'b'$ と表されるから

$18a'b'=540$ すなわち $a'b'=30$

$a'b'=30, a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$(a', b')=(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)$

よって $(a, b)=(18, 540), (36, 270), (54, 180), (90, 108)$

6

【解答】 (1) $(a, b)=(14, 266), (42, 238), (98, 182), (126, 154)$

(2) $(a, b)=(5, 140), (20, 35)$ (3) $(a, b)=(77, 91)$

(4) $(a, b)=(5, 60), (15, 20)$

【解説】

(1) 最大公約数が14であるから、 a, b は

$a=14a', b=14b'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

a, b の和が280であるから $14a'+14b'=280$

すなわち $a'+b'=20$

$a'+b'=20, a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$(a', b')=(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$

よって $(a, b)=(14, 266), (42, 238), (98, 182), (126, 154)$

(2) 最大公約数が5であるから、 a, b は

$a=5a', b=5b'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

a, b の積が700であるから $25a'b'=700$

すなわち $a'b'=28$

$a'b'=28, a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$(a', b')=(1, 28), (4, 7)$

よって $(a, b)=(5, 140), (20, 35)$

(3) 最大公約数を g とすると、 a, b は

$a=ga', b=gb'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

a, b の和が168であるから $ga'+gb'=168$

すなわち $g(a'+b')=2^3 \cdot 3 \cdot 7 \dots \dots \textcircled{1}$

最小公倍数が1001であるから $ga'b'=1001$

すなわち $ga'b'=7 \cdot 11 \cdot 13 \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から $g=7$ ($g=1$ は不適)

よって $a'+b'=2^3 \cdot 3, a'b'=11 \cdot 13$

$a'b'=11 \cdot 13, a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$(a', b')=(1, 143), (11, 13)$

$a'+b'=2^3 \cdot 3=24$ を満たすのは $(a', b')=(11, 13)$

よって $(a, b)=(77, 91)$

(4) 最大公約数を g とすると、 a, b は

$a=ga', b=gb'$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

a, b の積が300であるから $ga' \cdot gb'=300$

すなわち $g \cdot ga'b'=300 \dots \dots \textcircled{1}$

最小公倍数が60であるから

$$ga'b' = 60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②から $g=5, a'b'=12$

$a'b'=12, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 12), (3, 4)$$

よって $(a, b) = (5, 60), (15, 20)$

1

解答 (1) 1, 4, 7 (2) 2, 6 (3) 79485 (4) 43983

解説

(1) □に入る数を $a (0 \leq a \leq 9)$ とする。

$5+8+a+7=20+a$ が3の倍数であるとき, 4桁の自然数は3の倍数になる。

$20+a$ が3の倍数になるのは, $a=1, 4, 7$ のときである。

よって, 求める数は 1, 4, 7

(2) □に入る数を $a (0 \leq a \leq 9)$ とする。

下2桁が4の倍数であるとき, 4桁の自然数は4の倍数になる。

下2桁が4の倍数になるのは, $a=2, 6$ のときである。

よって, 求める数は 2, 6

(3) □に入る数を大きい位から $a, b (0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$ とする。

$7+a+4+b+5=a+b+16$ が3の倍数であるとき, 5桁の自然数は3の倍数になる。

$a+b+16$ が3の倍数になり, 5桁の自然数が最大となるのは $a=9, b=8$ のときである。

よって, 求める自然数は 79485

(4) □に入る数を大きい位から $a, b (0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9)$ とする。

$4+3+a+8+b=a+b+15$ が9の倍数であるとき, 5桁の自然数は9の倍数になる。

$a+b+15$ が9の倍数になり, 5桁の自然数が最大となるのは $a=9, b=3$ のときである。

よって, 求める自然数は 43983

2

解答 $n=3, 12, 48, 147, 588, 2352$

解説

$\sqrt{\frac{2352}{n}}$ が自然数になるのは, $\frac{2352}{n}$ がある自然数の2乗になるときである。

2352を素因数分解すると $2352=2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$

$2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$ を3で割ると $2^4 \cdot 7^2$ すなわち $(2^2 \cdot 7)^2$

$2^2 \cdot 3=12$ で割ると $2^2 \cdot 7^2$ すなわち $(2 \cdot 7)^2$

$3 \cdot 7^2=147$ で割ると 2^4 すなわち $(2^2)^2$

$2^4 \cdot 3=48$ で割ると 7^2

$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2=588$ で割ると 2^2

2352で割ると 1^2

よって, 求める自然数 n は $n=3, 12, 48, 147, 588, 2352$

3

解答 (1) ① 9個 ② 24個 ③ 36個 (2) $n=400, 2500$ (3) 5個

解説

(1) ① 196を素因数分解すると $196=2^2 \cdot 7^2$

よって, 196の正の約数の個数は

$$(2+1)(2+1)=3 \cdot 3=9 \text{ (個)}$$

② 936を素因数分解すると $936=2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$

よって, 936の正の約数の個数は

$$(3+1)(2+1)(1+1)=4 \cdot 3 \cdot 2=24 \text{ (個)}$$

③ 3150を素因数分解すると $3150=2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

よって, 3150の正の約数の個数は

$$(1+1)(2+1)(2+1)(1+1)=2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2=36 \text{ (個)}$$

(2) 15を素因数分解すると $15=3 \cdot 5$

よって, 正の約数の個数が15個である自然数 n を素因数分解すると,

$$p^4, p^2q^4 \text{ (} p, q \text{は異なる素数)}$$

のどちらかの形で表される。

n は20の倍数であり, $20=2^2 \cdot 5$ であるから, n は p^2q^4 の形で表される。

したがって, 求める自然数 n は

$$n=2^2 \cdot 5^4, 5^2 \cdot 2^4 \text{ すなわち } n=400, 2500$$

(3) 9を素因数分解すると $9=3^2$

よって, 正の約数の個数が9個である自然数 n を素因数分解すると,

p^8, p^2q^2 (p, q は異なる素数)のいずれかの形で表される。

[1] 自然数 n が p^8 の形で表されるとき

$2^8=256, 3^8 > 300$ であるから, $p=2$ は条件を満たす。

[2] 自然数 n が p^2q^2 ($p < q$)の形で表されるとき

$p=2$ とすると

$$2^2 \cdot 3^2=36, 2^2 \cdot 5^2=100, 2^2 \cdot 7^2=196, 2^2 \cdot 11^2 > 300 \text{ であるから,}$$

$q=3, 5, 7$ は条件を満たす。

$p=3$ とすると

$$3^2 \cdot 5^2=225, 3^2 \cdot 7^2 > 300 \text{ であるから, } q=5 \text{ は条件を満たす。}$$

$p=5$ とすると

$$5^2 \cdot 7^2 > 300 \text{ であるから, 条件を満たさない。}$$

以上から, 300以下の自然数のうち, 正の約数が9個である数は, 36, 100, 196, 225, 256の5個である。

4

解答 (1) 最大公約数42, 最小公倍数1512

(2) 最大公約数13, 最小公倍数2340

解説

(1) 右の計算から最大公約数は $2 \cdot 3 \cdot 7=42$

最小公倍数は $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 9=1512$

$$\begin{array}{r} 2) 168 \quad 378 \\ 3) 84 \quad 189 \\ 7) 28 \quad 63 \\ \quad 4 \quad 9 \end{array}$$

(2) 右の計算から最大公約数は 13

最小公倍数は $13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3=2340$

$$\begin{array}{r} 13) 65 \quad 156 \quad 234 \\ 2) 5 \quad 12 \quad 18 \\ 3) 5 \quad 6 \quad 9 \\ \quad 5 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

5

解答 (1) $(a, b)=(5, 75), (15, 25)$ (2) $(a, b)=(20, 160)$

解説

(1) 最大公約数が5であるから, a, b は

$$a=5a', b=5b'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

このとき, a, b の最小公倍数は $5a'b'$ と表されるから

$$5a'b'=75 \text{ すなわち } a'b'=15$$

$a'b'=15, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b')=(1, 15), (3, 5)$$

よって $(a, b) = (5, 75), (15, 25)$

(2) 最大公約数が20であるから, a, b は

$$a = 20a', b = 20b'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

このとき, a, b の最小公倍数は $20a'b'$ と表されるから

$$20a'b' = 160 \quad \text{すなわち} \quad a'b' = 8$$

$a'b' = 8, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 8)$$

よって $(a, b) = (20, 160)$

6

解答 (1) $(a, b) = (16, 304), (48, 272), (112, 208), (144, 176)$

(2) $(a, b) = (6, 120), (24, 30)$ (3) $(a, b) = (55, 85)$

(4) $(a, b) = (7, 105), (21, 35)$

解説

(1) 最大公約数が16であるから, a, b は

$$a = 16a', b = 16b'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

a, b の和が320であるから $16a' + 16b' = 320$

すなわち $a' + b' = 20$

$a' + b' = 20, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$$

よって $(a, b) = (16, 304), (48, 272), (112, 208), (144, 176)$

(2) 最大公約数が6であるから, a, b は

$$a = 6a', b = 6b'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

a, b の積が720であるから $36a'b' = 720$

すなわち $a'b' = 20$

$a'b' = 20, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 20), (4, 5)$$

よって $(a, b) = (6, 120), (24, 30)$

(3) 最大公約数を g とすると, a, b は

$$a = ga', b = gb'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

a, b の和が140であるから $ga' + gb' = 140$

すなわち $g(a' + b') = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \dots\dots ①$

最小公倍数が935であるから $ga'b' = 935$

すなわち $ga'b' = 5 \cdot 11 \cdot 17 \dots\dots ②$

①, ②から $g = 5$ ($g = 1$ は不適)

よって $a' + b' = 2^2 \cdot 7, a'b' = 11 \cdot 17$

$a'b' = 11 \cdot 17, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 187), (11, 17)$$

$a' + b' = 2^2 \cdot 7 = 28$ を満たすのは $(a', b') = (11, 17)$

よって $(a, b) = (55, 85)$

(4) 最大公約数を g とすると, a, b は

$$a = ga', b = gb'$$

と表される。ただし, a', b' は互いに素である自然数で, $a' < b'$ である。

a, b の積と最大公約数, 最小公倍数の積は等しいから $735 = g \cdot 105$

ゆえに $g = 7$

最小公倍数が105であるから $ga'b' = 105$ すなわち $7a'b' = 105$

よって $a'b' = 15$

$a'b' = 15, a' < b'$ を満たし, 互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b') = (1, 15), (3, 5)$$

よって $(a, b) = (7, 105), (21, 35)$

別解 a, b の積が735であるから $ga' \cdot gb' = 735 \dots\dots ①$

最小公倍数が105であるから $ga'b' = 105 \dots\dots ②$

①÷②から $g = 7$ ②より $a'b' = 15$ (以下同様)

1

解答 $n = 180$

解説

$\frac{n}{36}, \frac{n}{45}$ がともに自然数となるから, n は36の倍数かつ45の倍数である。

このような n のうちで, 最も小さいものは, 36と45の最小公倍数である。

36と45を素因数分解すると $36 = 2^2 \cdot 3^2, 45 = 3^2 \cdot 5$

よって, 求める n の値は $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

2

解答 385

解説

$\sqrt{\frac{500}{77n}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5^3}{7 \cdot 11n}} = 10\sqrt{\frac{5}{7 \cdot 11n}}$ であるから, これが有理数となるような最小の

自然数 n は $n = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

3

解答 (1) $n = 9, 18, 36, 72, 144$ (2) $n = 125, 250, 500, 375, 750, 1500$

解説

(1) 16と144を素因数分解すると

$$16 = 2^4, 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

よって, 16との最小公倍数が144である自然数 n は

$$n = 2^a \cdot 3^2 \quad (a = 0, 1, 2, 3, 4)$$

と表される。

したがって, 求める自然数 n は

$$n = 2^0 \cdot 3^2, 2^1 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^2$$

すなわち $n = 9, 18, 36, 72, 144$

(2) 12, 50, 1500を素因数分解すると

$$12 = 2^2 \cdot 3, 50 = 2 \cdot 5^2, 1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

よって, 12, 50との最小公倍数が1500である自然数 n は

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^3 \quad (a = 0, 1, 2; b = 0, 1)$$

と表される。

したがって, 求める自然数 n は

$$n = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^3, 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^3, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$$

すなわち $n = 125, 250, 500, 375, 750, 1500$

1

【解答】 $a=30, b=48, c=72$

【解説】

(A) から, a', b', c' をその最大公約数が1である正の整数として $a=6a', b=6b', c=6c' (0 < a' < b' < c')$ とおける.

(B) から, b'', c'' を互いに素である正の整数として

$$b=24b'', c=24c'' (0 < b'' < c'') \text{ とおけて } 24b''c''=144$$

よって $b''c''=6$ $b'' < c''$ であるから $(b'', c'')=(1, 6), (2, 3)$

$(b'', c'')=(1, 6)$ のとき $a=2 \cdot 3a', b=2^3 \cdot 3, c=2^4 \cdot 3^2$

(C) について $240=2^4 \cdot 3 \cdot 5$ また $a' < b'=4$ から, (C) に反する.

$(b'', c'')=(2, 3)$ のとき $a=2 \cdot 3a', b=2^4 \cdot 3, c=2^3 \cdot 3^2$

$a' < b'=8$ から, (C) について $a'=5$

よって $a=6 \cdot 5=30, b=48, c=72$

2

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$$(1) N=1001a+99b+11c+(b+d-a-c)$$

$$=11 \times (91a+9b+c)+(b+d-a-c)$$

と変形でき, $91a+9b+c, b+d-a-c$ は整数である.

よって N が11で割り切れる $\Leftrightarrow (b+d)-(a+c)$ が11の倍数

$$(2) N=10^6 \times a + 10^3 b + c \text{ とする.}$$

ただし a, b, c は $100 \leq a \leq 999, 0 \leq b \leq 999, 0 \leq c \leq 999$

$a+c-b=7m$ (m は整数) と表されるとすると

$$c=7m+b-a$$

よって $N=10^6 a + 10^3 b + (7m+b-a)$

$$=(10^6-1)a + 1001b + 7m$$

$$=7 \times 142857a + 7 \times 143b + 7m$$

$$=7(142857a + 143b + m)$$

$142857a + 143b + m$ は整数であるから, N は7の倍数である.

1

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) a, b は7の倍数であるから, 整数 k, l を用いて

$$a=7k, b=7l$$

と表される.

$$\text{よって } 4a+5b=4 \cdot 7k+5 \cdot 7l=7(4k+5l)$$

$4k+5l$ は整数であるから, $4a+5b$ は7の倍数である.

(2) $a+2, a+3$ は, 自然数 k, l を用いて

$$a+2=5k, a+3=7l$$

と表される.

$$a+17=(a+2)+15=5k+15=5(k+3)$$

$$a+17=(a+3)+14=7l+14=7(l+2)$$

よって $5(k+3)=7(l+2)$

$5(k+3)$ は7の倍数であるが, 5と7は互いに素であるから, $k+3$ は7の倍数である.

したがって, 自然数 m を用いて

$$k+3=7m$$

と表されるから $a+17=5(k+3)=5 \cdot 7m=35m$

したがって, $a+17$ は35の倍数である.

2

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) すべての整数 n は

$$n=2k, n=2k+1 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される.

[1] $n=2k$ のとき

$$n^2+5n+4=(2k)^2+5 \cdot 2k+4=2(2k^2+5k+2)$$

[2] $n=2k+1$ のとき

$$n^2+5n+4=(2k+1)^2+5(2k+1)+4=4k^2+14k+10=2(2k^2+7k+5)$$

いずれの場合も n^2+5n+4 は偶数である.

よって, n^2+5n+4 は偶数である.

【別解】 (与式) $=n(n+1)+4(n+1)$ であり, 連続する2つの整数の積 $n(n+1)$ は偶数で,

$4(n+1)$ も偶数であるから, n^2+5n+4 は偶数である.

(2) すべての整数 n は

$$n=3k, n=3k+1, n=3k+2 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される.

[1] $n=3k$ のとき

$$n^2+1=(3k)^2+1=3 \cdot 3k^2+1$$

[2] $n=3k+1$ のとき

$$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$$

[3] $n=3k+2$ のとき

$$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$$

いずれの場合も n^2+1 は3の倍数でない.

よって, n^2+1 は3の倍数でない.

3

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

$$(1) n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの整数の積であるから, 6の倍数である.

$$(2) n^3+9n^2+8n=n(n+1)(n+8)=n(n+1)(n+2+6)$$

$$=n(n+1)(n+2)+6n(n+1)$$

連続する3つの整数の積は6の倍数であるから, $n(n+1)(n+2)$ は6の倍数である.

また, $6n(n+1)$ も6の倍数である.

よって, n^3+9n^2+8n は6の倍数である.

$$(3) 2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$$

$$=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$

$$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$$

$n(n+1)(n+2), (n-1)n(n+1)$ は, 連続する3整数の積であり, 6の倍数である.

よって, $2n^3+3n^2+n$ は6の倍数である.

4

【解答】 (1) 4 (2) 11 (3) 9

【解説】

(1) $n \equiv 3 \pmod{8}$ のとき

$$n^2+2n+5 \equiv 3^2+2 \cdot 3+5$$

$$\equiv 20 \equiv 4 \pmod{8}$$

よって, n^2+2n+5 を8で割った余りは 4

(2) $n \equiv 15 \pmod{17}$ のとき

$$3n^2+5n+9 \equiv 3 \cdot 15^2+5 \cdot 15+9$$

$$\equiv 759 \equiv 11 \pmod{17}$$

よって, $3n^2+5n+9$ を17で割った余りは 11

【別解】 $3n^2+5n+9 \equiv 3 \cdot 15^2+5 \cdot 15+9$

$$\equiv 3 \cdot 225+75+9$$

$$\equiv 3 \cdot 4+7+9 \equiv 28$$

$$\equiv 11 \pmod{17}$$

(3) $n \equiv 2 \pmod{35}$ のとき

$$n^4+3n^3+4 \equiv 2^4+3 \cdot 2^3+4$$

$$\equiv 16+24+4 \equiv 44$$

$$\equiv 9 \pmod{35}$$

よって, n^4+3n^3+4 を35で割った余りは 9

5

【解答】 (1) 1 (2) 1 (3) 3 (4) 7 (5) 9 (6) 43

【解説】

$$(1) 37 \equiv 1 \pmod{6} \text{ であるから } 37^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{6}$$

よって, 37^{100} を6で割った余りは 1

$$(2) 5^2 \equiv 1 \pmod{8} \text{ であるから } 5^{80} \equiv (5^2)^{40} \equiv 1^{40} \equiv 1 \pmod{8}$$

よって, 5^{80} を8で割った余りは 1

$$(3) 3^3 \equiv 1 \pmod{13} \text{ であるから } 3^{100} \equiv (3^3)^{33} \cdot 3 \equiv 1^{33} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{13}$$

よって, 3^{100} を13で割った余りは 3

第2講 例題

- (4) $4^3 \equiv 1 \pmod{9}$ であるから $4^{200} \equiv (4^3)^{66} \cdot 4^2 \equiv 1^{66} \cdot 4^2 \equiv 7 \pmod{9}$
 よって、 4^{200} を9で割った余りは 7
- (5) 123^{122} の一の位は 123^{122} を10で割った余りに等しい。以下、10を法として考える。
 $123 \equiv 3, 123^2 \equiv 3^2 \equiv 9, 123^3 \equiv 3^3 \equiv 7, 123^4 \equiv 3^4 \equiv 1$
 よって $123^{122} \equiv (123^4)^{30} \cdot 123^2 \equiv 1^{30} \cdot 9 \equiv 9$
 したがって、 123^{122} の一の位は 9
- (6) 7^{251} の下2桁は 7^{251} を100で割った余りに等しい。以下、100を法として考える。
 $7^2 \equiv 49, 7^3 \equiv 49 \cdot 7 \equiv 343 \equiv 43, 7^4 \equiv 43 \cdot 7 \equiv 301 \equiv 1$
 よって $7^{251} \equiv (7^4)^{62} \cdot 7^3 \equiv 1^{62} \cdot 43 \equiv 43$
 したがって、 7^{251} の下2桁は 43

6

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) [1] $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき
 $n^5 + n^2 + 2 \equiv 2 \pmod{3}$
- [2] $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき
 $n^5 + n^2 + 2 \equiv 1^5 + 1^2 + 2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$
- [3] $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき
 $n^5 + n^2 + 2 \equiv 2^5 + 2^2 + 2 \equiv 38 \equiv 2 \pmod{3}$
 よって、 $n^5 + n^2 + 2$ は3の倍数でない。
- (2) $5^{n+1} + 6^{2n-1} \equiv 5^2 \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 6^{2n-1} \equiv 25 \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 36^{n-1}$
 $\equiv (-6) \cdot 5^{n-1} + 6 \cdot 5^{n-1} \equiv 0 \pmod{31}$
 よって、 $5^{n+1} + 6^{2n-1}$ は31の倍数である。

第2講 例題演習

1

解答 (1) 略 (2) 略

解説

- (1) a, b は7の倍数であるから、整数 k, l を用いて、 $a = 7k, b = 7l$ と表される。
 よって $a + 3b = 7k + 3 \cdot 7l = 7(k + 3l)$
 $k + 3l$ は整数であるから、 $a + 3b$ は7の倍数である。
- (2) $n + 1, n + 4$ は、自然数 k, l を用いて
 $n + 1 = 6k, n + 4 = 9l$
 と表される。
 $n + 13 = (n + 1) + 12 = 6k + 12 = 6(k + 2)$
 $n + 13 = (n + 4) + 9 = 9l + 9 = 9(l + 1)$
 よって $6(k + 2) = 9(l + 1)$ すなわち $2(k + 2) = 3(l + 1)$
 $2(k + 2)$ は3の倍数であるが、2と3は互いに素であるから、 $k + 2$ は3の倍数である。
 よって、自然数 m を用いて $k + 2 = 3m$ と表されるから
 $n + 13 = 6(k + 2) = 6 \cdot 3m = 18m$
 したがって、 $n + 13$ は18の倍数である。

2

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

- (1) すべての整数 n は、 $3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) のいずれかの形で表される。
 $n^4 + 2n^2 = n^2(n^2 + 2)$ であるから
- [1] $n = 3k$ のとき
 $n^4 + 2n^2 = 9k^2(9k^2 + 2) = 3 \cdot 3k^2(9k^2 + 2)$
- [2] $n = 3k + 1$ のとき
 $n^4 + 2n^2 = (3k + 1)^2(9k^2 + 6k + 1 + 2) = 3(3k + 1)^2(3k^2 + 2k + 1)$
- [3] $n = 3k + 2$ のとき
 $n^4 + 2n^2 = (3k + 2)^2(9k^2 + 12k + 4 + 2) = 3(3k + 2)^2(3k^2 + 4k + 2)$
 よって、 $n^4 + 2n^2$ は3の倍数である。
- (2) すべての整数 n は、 $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ (k は整数) のいずれかの形で表される。
- [1] $n = 5k$ のとき $n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + k) + 1$
- [2] $n = 5k + 1$ のとき $n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 3k) + 3$
- [3] $n = 5k + 2$ のとき $n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 5k + 1) + 2$
- [4] $n = 5k + 3$ のとき $n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 7k + 2) + 3$
- [5] $n = 5k + 4$ のとき $n^2 + n + 1 = 5(5k^2 + 9k + 4) + 1$
 それぞれの場合について、 $n^2 + n + 1$ を5で割った余りは、1, 3, 2, 3, 1であり、 $n^2 + n + 1$ は5で割り切れない。
- (3) すべての整数 n は
 $n = 7k, n = 7k \pm 1, n = 7k \pm 2, n = 7k \pm 3$ (k は整数)
 のいずれかの形で表される。

[1] $n = 7k$ のとき

$$n^2 = (7k)^2 = 49k^2 = 7 \cdot 7k^2$$

[2] $n = 7k \pm 1$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 1)^2 = 49k^2 \pm 14k + 1 = 7(7k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順})$$

[3] $n = 7k \pm 2$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 2)^2 = 49k^2 \pm 28k + 4 = 7(7k^2 \pm 4k) + 4 \quad (\text{複号同順})$$

[4] $n = 7k \pm 3$ のとき

$$n^2 = (7k \pm 3)^2 = 49k^2 \pm 42k + 9 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2 \quad (\text{複号同順})$$

よって、 n^2 を7で割ったときの余りは、0か1か2か4である。

3

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) 略 (5) 略

解説

- (1) $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = n(n^2 - 1) + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$
 $(n - 1)n(n + 1)$ は連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。
 $6n$ も6の倍数である。
 よって、 $n^3 + 5n$ は6の倍数である。
- (2) $2n^3 + 4n = 2(n^3 - n) + 6n = 2n(n^2 - 1) + 6n = 2(n - 1)n(n + 1) + 6n$
 $(n - 1)n(n + 1)$ は連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。
 $6n$ も6の倍数である。
 よって、 $2n^3 + 4n$ は6の倍数である。
- (3) $n^3 - 3n^2 - 4n = n(n + 1)(n - 4) = n(n + 1)((n + 2) - 6) = n(n + 1)(n + 2) - 6n(n + 1)$
 $n(n + 1)(n + 2)$ は、連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。
 また、 $6n(n + 1)$ も6の倍数である。
 よって、 $n^3 - 3n^2 - 4n$ は6の倍数である。
- (4) $2n^3 - 3n^2 + n = n(n - 1)(2n - 1) = n(n - 1)((n - 2) + (n + 1)) = (n - 2)(n - 1)n + (n - 1)n(n + 1)$
 $(n - 2)(n - 1)n, (n - 1)n(n + 1)$ は連続する3つの整数の積であるから、どちらも6の倍数である。
 よって、 $2n^3 - 3n^2 + n$ は6の倍数である。
- (5) $2n^3 + 3n^2 - 5n = n(n - 1)(2n + 5) = n(n - 1)(2(n + 1) + 3) = 2(n - 1)n(n + 1) + 3(n - 1)n$
 $(n - 1)n(n + 1)$ は連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。
 また、 $(n - 1)n$ は連続する2つの整数の積であるから、2の倍数である。
 よって、 $3(n - 1)n$ は6の倍数である。
 したがって、 $2n^3 + 3n^2 - 5n$ は6の倍数である。

4

解答 (1) 4 (2) 6

解説

(1) $n \equiv 2 \pmod{5}$ のとき $n^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{5}$

よって、 n^6 を5で割った余りは 4

(2) $n \equiv 3 \pmod{7}$ のとき

$$2n^2 + 5n + 8 \equiv 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 8 \equiv 41 \equiv 6 \pmod{7}$$

よって、 $2n^2+5n+8$ を7で割った余りは 6

5

解答 (1) 1 (2) 1 (3) 4 (4) 9 (5) 7 (6) 49

解説

(1) $26 \equiv 1 \pmod{5}$ であるから $26^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{5}$

よって、 26^{100} を5で割った余りは 1

(2) $7^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから $7^{60} \equiv (7^2)^{30} \equiv 1^{30} \equiv 1 \pmod{8}$

よって、 7^{60} を8で割った余りは 1

(3) $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから $4^{100} \equiv (4^3)^{33} \cdot 4 \equiv 1^{33} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{7}$

よって、 4^{100} を7で割った余りは 4

(4) $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ であるから $3^{200} \equiv (3^3)^{66} \cdot 3^2 \equiv 1^{66} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{13}$

よって、 3^{200} を13で割った余りは 9

(5) 23^{23} の一の位は、 23^{23} を10で割った余りに等しい。

10を法として考えると

$$23 \equiv 3, 23^2 \equiv 3^2 \equiv 9, 23^3 \equiv 3^3 \equiv 7, 23^4 \equiv 3^4 \equiv 1$$

よって、 $23^{23} \equiv (23^4)^5 \cdot 23^3 \equiv 1^5 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$

したがって、 23^{23} の一の位は 7

(6) 7^{50} の下2桁は、 7^{50} を100で割った余りに等しい。

100を法として考えると

$$7^2 \equiv 49, 7^3 \equiv 49 \cdot 7 \equiv 343 \equiv 43, 7^4 \equiv 43 \cdot 7 \equiv 301 \equiv 1$$

よって、 $7^{50} \equiv (7^4)^{12} \cdot 7^2 \equiv 1^{12} \cdot 49 \equiv 49 \pmod{100}$

したがって、 7^{50} の下2桁は 49

6

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略

解説

(1) [1] $n \equiv 0 \pmod{5}$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 0^2 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

[2] $n \equiv 1 \pmod{5}$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 1^2 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{5}$$

[3] $n \equiv 2 \pmod{5}$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5}$$

[4] $n \equiv 3 \pmod{5}$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 3^2 + 3 + 1 \equiv 13 \equiv 3 \pmod{5}$$

[5] $n \equiv 4 \pmod{5}$ のとき

$$n^2 + n + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{5}$$

よって、いずれの場合も $n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ でないから、 $n^2 + n + 1$ は5で割り切れない。

(2) $2^{6n-5} + 3^{2n} \equiv 2 \cdot 2^{6(n-1)} + (3^2)^n \equiv 2 \cdot 64^{n-1} + 9^n$

$$\equiv 2 \cdot (-2)^{n-1} + (-2)^n$$

$$\equiv -(-2)^n + (-2)^n \equiv 0 \pmod{11}$$

よって、 $2^{6n-5} + 3^{2n}$ は11の倍数である。

(3) $4^{n+1} + 5^{2n-1} \equiv 4^2 \cdot 4^{n-1} + 5 \cdot 5^{2(n-1)}$

$$\equiv 16 \cdot 4^{n-1} + 5 \cdot 25^{n-1}$$

$$\equiv -5 \cdot 4^{n-1} + 5 \cdot 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{21}$$

よって、 $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ は21の倍数である。

1

解答 略

解説

すべての整数 n は

$$n = 7k, \quad n = 7k \pm 1, \quad n = 7k \pm 2, \quad n = 7k \pm 3 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

[1] $n = 7k$ のとき

$$n^2 = (7k)^2 = 49k^2 = 7 \cdot 7k^2$$

[2] $n = 7k \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (7k \pm 1)^2 = 49k^2 \pm 14k + 1 \\ &= 7(7k^2 \pm 2k) + 1 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

[3] $n = 7k \pm 2$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (7k \pm 2)^2 = 49k^2 \pm 28k + 4 \\ &= 7(7k^2 \pm 4k) + 4 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

[4] $n = 7k \pm 3$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (7k \pm 3)^2 = 49k^2 \pm 42k + 9 \\ &= 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

よって、 n^2 を7で割ったときの余りは、0か1か2か4である。

2

解答 略

解説

連続する3つの奇数を $2k-1, 2k+1, 2k+3$ (k は整数) とすると

$$\begin{aligned} N &= (2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 + 1 \\ &= (4k^2 - 4k + 1) + (4k^2 + 4k + 1) + (4k^2 + 12k + 9) + 1 \\ &= 12k^2 + 12k + 12 = 12(k^2 + k + 1) \\ &= 12\{k(k+1) + 1\} \end{aligned}$$

$k(k+1)$ は連続する2つの整数の積であるから、2の倍数である。

よって、 $k(k+1) + 1$ は奇数である。

したがって、 N は12の倍数であるが、24の倍数ではない。

3

解答 略

解説

$m^3n - mn^3 = (m^3 - m)n - (n^3 - n)m = (m-1)m(m+1)n - (n-1)n(n+1)m$
 $(m-1)m(m+1), (n-1)n(n+1)$ はともに連続する3整数の積であるから、6の倍数である。

ゆえに、 k, l を整数として、次のように表される。

$$(m-1)m(m+1) = 6k, \quad (n-1)n(n+1) = 6l$$

よって $m^3n - mn^3 = 6(kn - lm)$

したがって、 $m^3n - mn^3$ は6の倍数である。

4 [お茶の水女子大]

解答 略

解説

a, b が3で割り切れないとき、 a, b は2つの整数 m, n を用いて

$$[1] \quad a = 3m + 1, \quad b = 3n + 1 \quad [2] \quad a = 3m + 1, \quad b = 3n + 2$$

$$[3] \quad a=3m+2, \quad b=3n+1 \qquad [4] \quad a=3m+2, \quad b=3n+2$$

のいずれかの形で表される。

このうち、 $a-b$ が3で割り切れないのは[2],[3]の場合である。

[2]の場合

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (3m+1)^3 + (3n+2)^3 \\ &= (27m^3+27m^2+9m+1) + (27n^3+54n^2+36n+8) \\ &= 9(3m^3+3m^2+m+3n^3+6n^2+4n+1) \end{aligned}$$

$3m^3+3m^2+m+3n^3+6n^2+4n+1$ は整数であるから、 a^3+b^3 は9の倍数、すなわち9で割り切れる。

[3]の場合も同様に、 a^3+b^3 は9で割り切れる。

よって、 $a, b, a-b$ がどれも3で割り切れないとき、 a^3+b^3 は9で割り切れる。

$$\text{[別解]} \quad a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \cdots \cdots \text{①}$$

[2],[3]の場合、 $a+b$ は3の倍数となるから、 $a+b=3q$ (q は整数)と表される。

これを①に代入して

$$a^3+b^3=(3q)^3-3ab \cdot 3q=27q^3-9abq=9(3q^3-abq)$$

$3q^3-abq$ は整数であるから、 a^3+b^3 は9で割り切れる。

[1]

[解答] (1) 略 (2) 略

[解説]

(1) [1] n が偶数 すなわち $n=2k$ (k は整数)のとき

$$N=2(2k)^3+4 \cdot 2k=16k^3+8k=8k(2k^2+1)$$

[A] $k=3l$ (l は整数)のとき

$$N=8 \cdot 3l\{2(3l)^2+1\}=24l\{2(3l)^2+1\}$$

[B] $k=3l+1$ (l は整数)のとき

$$\begin{aligned} N &= 8(3l+1)\{2(3l+1)^2+1\} = 8(3l+1)(18l^2+12l+3) \\ &= 24(3l+1)(6l^2+4l+1) \end{aligned}$$

[C] $k=3l+2$ (l は整数)のとき

$$\begin{aligned} N &= 8(3l+2)\{2(3l+2)^2+1\} = 8(3l+2)(18l^2+24l+9) \\ &= 24(3l+2)(6l^2+8l+3) \end{aligned}$$

以上から、 n が偶数のとき N は24で割り切れる。

[2] n が奇数 すなわち $n=2k+1$ (k は整数)のとき

$$\begin{aligned} N &= 2(2k+1)^3+4(2k+1) = 2(8k^3+12k^2+6k+1)+(8k+4) \\ &= 16k^3+24k^2+20k+6 = 4(4k^3+6k^2+5k+1)+2 \end{aligned}$$

以上から、 n が奇数のとき N は4で割り切れない。

(2) 自然数は k を自然数として $6k-5, 6k-4, 6k-3, 6k-2, 6k-1, 6k$ のどれかで表される。このうち、2でも3でも割り切れないのは $6k-5, 6k-1$ である。

[1] $P=6k-1$ のとき

$$P^2-1=(6k-1)^2-1=36k^2-12k=12k(3k-1)$$

k が偶数のとき、 $12k$ が24の倍数であり、 P^2-1 は24で割り切れる。また、 k が奇数のとき、 $3k-1$ は偶数となり、 P^2-1 は24で割り切れる。

[2] $P=6k-5$ のとき

$$P^2-1=(6k-5)^2-1=36k^2-60k+24=12(k-1)(3k-2)$$

k が偶数のとき、 $3k-2$ は偶数となり、 P^2-1 は24で割り切れる。また、 k が奇数のとき、 $k-1$ は偶数となり、 P^2-1 は24で割り切れる。

したがって、いずれの場合も題意は成り立つ。

[2]

[解答] 略

[解説]

$n=2$ のとき $n^2+2=2^2+2=6$ は素数ではない。

$n=3$ のとき $n^2+2=3^2+2=11$ は素数である。

3以外の素数はすべて3で割り切れないから、 n ($n \geq 4$)が素数であるとき、

$n=3k+1$ または $n=3k+2$ (k は自然数)と表される。

[1] $n=3k+1$ のとき

$$n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$$

[2] $n=3k+2$ のとき

$$n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$$

[1],[2]のいずれの場合も、 n^2+2 は3で割り切れて、しかも3より大きい自然数であるから、素数ではない。

したがって、2以上の自然数 n に対し、 n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限る。

[3]

[解答] 略

[解説]

すべての整数 n は $n=2k, n=2k+1$ (k は整数)のどちらかの形で表される。

$$n=2k \text{ のとき} \quad n^2=(2k)^2=4k^2$$

$$n=2k+1 \text{ のとき} \quad n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$$

よって、 n^2 を4で割ったときの余りは、0か1である。

ゆえに、 a, b がともに偶数でないとは仮定すると、 a^2, b^2 を4で割った余りは1であるから a^2+b^2 を4で割った余りは2

$$c^2 \text{ を4で割った余りは } 0 \text{ か } 1$$

したがって、 $a^2+b^2 \not\equiv c^2$ となり矛盾する。

よって、 a, b のうち少なくとも1つは偶数である。

[参考] 例題79の証明は、命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する方法を用いている。このような証明方法を「背理法」といい、数学I「集合と命題」で学習する。

[4]

[解答] (1) $n=3k+2$ (k は0以上の整数) (2) 略

[解説]

(1) n^3+1 が3で割り切れるものを考えるから、 $n^3+1 \equiv 0 \pmod{3}$ を満たす自然数 n を求めればよい。

3を法として、 $n \equiv 0, 1, 2$ の各場合に関し、 n^3+1 を計算すると、次の表のようになる。

n	0	1	2
n^3	$0^3 \equiv 0$	$1^3 \equiv 1$	$2^3 \equiv 8 \equiv 2$
n^3+1	$0+1 \equiv 1$	$1+1 \equiv 2$	$2+1 \equiv 3 \equiv 0$

よって、 $n^3+1 \equiv 0 \pmod{3}$ を満たすのは、 $n \equiv 2 \pmod{3}$ の場合である。

したがって $n=3k+2$ (k は0以上の整数)

(2) 3を法として、 $n \equiv 0, 1, 2$ の各場合に関し、 n^6+1 を計算すると、次の表のようになる。

n	0	1	2
n^6	$0^6 \equiv 0$	$1^6 \equiv 1$	$2^6 \equiv 64 \equiv 1$
n^6+1	$0+1 \equiv 1$	$1+1 \equiv 2$	$1+1 \equiv 2$

よって、いずれの場合も $n^6+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ を満たさない。

したがって、 n^6+1 は3で割り切れない。

第3講 例題

1

解答 ① 31 ② 17

解説

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 961 = 217 \cdot 4 + 93 \\ & 217 = 93 \cdot 2 + 31 \\ & 93 = 31 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

よって、最大公約数は 31

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & 833 = 646 \cdot 1 + 187 \\ & 646 = 187 \cdot 3 + 85 \\ & 187 = 85 \cdot 2 + 17 \\ & 85 = 17 \cdot 5 + 0 \end{aligned}$$

よって、最大公約数は 17

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 4 \\ 31 \overline{) 93} \quad 217 \overline{) 961} \\ \underline{93} \quad \underline{186} \quad \underline{868} \\ 0 \quad 31 \quad 93 \end{array}$$

最大公約数

$$\begin{array}{r} 5 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\ 17 \overline{) 85} \quad 187 \overline{) 646} \quad 833 \overline{) 833} \\ \underline{85} \quad \underline{170} \quad \underline{561} \quad \underline{646} \\ 0 \quad 17 \quad 85 \quad 187 \end{array}$$

2

解答 $n = 1, 11, 16, 26, 31, 41, 46$

解説

$7n + 3 = (2n + 3) \cdot 3 + n - 6$, $2n + 3 = (n - 6) \cdot 2 + 15$
よって、 $7n + 3$ と $2n + 3$ の最大公約数は、 $n - 6$ と 15 の最大公約数に等しい。
 $15 = 3 \cdot 5$ であるから、 $n - 6$ は 5 の倍数であるが、3 の倍数でない。
また、 $-5 \leq n - 6 \leq 44$ であるから $n - 6 = -5, 5, 10, 20, 25, 35, 40$
よって $n = 1, 11, 16, 26, 31, 41, 46$

3

解答 (1) $x = -2, y = 7$ (2) $x = -13, y = 9$ (3) $x = -30, y = -81$

解説

(1) 24 と 7 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 24 &= 7 \cdot 3 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 24 - 7 \cdot 3 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 3 \cdot 2 \\ \text{よって} \quad 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - (24 - 7 \cdot 3) \cdot 2 \\ &= 24 \cdot (-2) + 7 \cdot 7 \end{aligned}$$

すなわち $24 \cdot (-2) + 7 \cdot 7 = 1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -2, y = 7$$

(2) 29 と 42 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 42 &= 29 \cdot 1 + 13 \quad \text{移項すると} \quad 13 = 42 - 29 \cdot 1 \\ 29 &= 13 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 29 - 13 \cdot 2 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 13 - 3 \cdot 4 \\ \text{よって} \quad 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 13 - (29 - 13 \cdot 2) \cdot 4 \\ &= 13 \cdot 9 + 29 \cdot (-4) \\ &= (42 - 29 \cdot 1) \cdot 9 + 29 \cdot (-4) \\ &= 29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9 \end{aligned}$$

すなわち $29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9 = 1$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは

$$x = -13, y = 9$$

(3) 62 と 23 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$62 = 23 \cdot 2 + 16 \quad \text{移項すると} \quad 16 = 62 - 23 \cdot 2$$

$$23 = 16 \cdot 1 + 7 \quad \text{移項すると} \quad 7 = 23 - 16 \cdot 1$$

$$16 = 7 \cdot 2 + 2 \quad \text{移項すると} \quad 2 = 16 - 7 \cdot 2$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - (16 - 7 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 7 \cdot 7 + 16 \cdot (-3) = (23 - 16 \cdot 1) \cdot 7 + 16 \cdot (-3) \\ &= 23 \cdot 7 + 16 \cdot (-10) = 23 \cdot 7 + (62 - 23 \cdot 2) \cdot (-10) \\ &= 62 \cdot (-10) + 23 \cdot 27 = 62 \cdot (-10) - 23 \cdot (-27) \end{aligned}$$

すなわち $62 \cdot (-10) - 23 \cdot (-27) = 1$

両辺に 3 を掛けて $62 \cdot (-30) - 23 \cdot (-81) = 3$

よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -30, y = -81$

4

解答 k は整数とする。

$$(1) \quad x = 14k + 3, y = -33k - 7 \quad (2) \quad x = 42k - 65, y = -29k + 45$$

解説

$$(1) \quad 33x + 14y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = 3, y = -7$ は、 $\textcircled{1}$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって} \quad 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 33(x - 3) + 14(y + 7) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

33 と 14 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$x - 3 = 14k, y + 7 = -33k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、 $\textcircled{1}$ のすべての整数解は

$$x = 14k + 3, y = -33k - 7 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 33 と 14 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 33 &= 14 \cdot 2 + 5 \quad \text{移項すると} \quad 5 = 33 - 14 \cdot 2 \\ 14 &= 5 \cdot 2 + 4 \quad \text{移項すると} \quad 4 = 14 - 5 \cdot 2 \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 5 - 4 \cdot 1 \\ \text{よって} \quad 1 &= 5 - 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5 - (14 - 5 \cdot 2) \cdot 1 \\ &= 5 \cdot 3 + 14 \cdot (-1) \\ &= (33 - 14 \cdot 2) \cdot 3 + 14 \cdot (-1) \\ &= 33 \cdot 3 + 14 \cdot (-7) \end{aligned}$$

$$(2) \quad 29x + 42y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = -13, y = 9$ は、 $29x + 42y = 5$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって} \quad 29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9 = 5$$

両辺に 5 を掛けると

$$29 \cdot (-65) + 42 \cdot 45 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 29(x + 65) + 42(y - 45) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

29 と 42 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$x + 65 = 42k, y - 45 = -29k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、 $\textcircled{1}$ のすべての整数解は

$$x = 42k - 65, y = -29k + 45 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 29 と 42 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 42 &= 29 \cdot 1 + 13 \quad \text{移項すると} \quad 13 = 42 - 29 \cdot 1 \\ 29 &= 13 \cdot 2 + 3 \quad \text{移項すると} \quad 3 = 29 - 13 \cdot 2 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \quad \text{移項すると} \quad 1 = 13 - 3 \cdot 4 \\ \text{よって} \quad 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$= 13 - (29 - 13 \cdot 2) \cdot 4$$

$$= 13 \cdot 9 + 29 \cdot (-4)$$

$$= (42 - 29 \cdot 1) \cdot 9 + 29 \cdot (-4)$$

$$= 29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9$$

5

解答 949

解説

12 で割ると 1 余り、7 で割ると 4 余る整数を n とすると、 n は整数 x, y を用いて

$$n = 12x + 1, \quad n = 7y + 4$$

と表される。

$$\text{よって} \quad 12x + 1 = 7y + 4$$

$$\text{すなわち} \quad 12x - 7y = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = 3, y = 5$ は、 $12x - 7y = 1$ の整数解の 1 つであるから

$$12 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = 1$$

両辺に 3 を掛けると

$$12 \cdot 9 - 7 \cdot 15 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 12(x - 9) - 7(y - 15) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

12 と 7 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ を満たす整数 x は

$$x - 9 = 7k \quad \text{すなわち} \quad x = 7k + 9 \quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

$$\text{したがって} \quad n = 12x + 1 = 12(7k + 9) + 1 = 84k + 109$$

$84k + 109$ が 3 桁で最大となるのは、 $k = 10$ のときで

$$84 \cdot 10 + 109 = 949$$

6

解答 (1) $(x, y) = (2, 5), (7, 3), (12, 1)$

$$(2) \quad (x, y) = (4, 11), (8, 8), (12, 5), (16, 2)$$

$$(3) \quad (x, y, z) = (8, 1, 1), (6, 1, 2), (4, 1, 3), (2, 1, 4), (3, 2, 1), (1, 2, 2)$$

解説

$$(1) \quad 2x + 5y = 29 \text{ から} \quad 2x = 29 - 5y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x > 0 \text{ であるから} \quad 29 - 5y > 0 \quad \text{よって} \quad y < \frac{29}{5} = 5.8$$

また、 $\textcircled{1}$ において、 $2x$ は偶数であるから、 $29 - 5y$ も偶数になる。

ゆえに $y = 1, 3, 5$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad y = 1 \text{ のとき} \quad x = 12 \quad y = 3 \text{ のとき} \quad x = 7$$

$$y = 5 \text{ のとき} \quad x = 2$$

したがって $(x, y) = (2, 5), (7, 3), (12, 1)$

別解 $2x + 5y = 29 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x = 2, y = 5$ は $\textcircled{1}$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって} \quad 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 29 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から} \quad 2(x - 2) + 5(y - 5) = 0$$

すなわち $2(x - 2) = -5(y - 5)$

2 と 5 は互いに素であるから、 k を整数として $x - 2 = 5k, y - 5 = -2k$

$$\text{よって} \quad x = 5k + 2, y = -2k + 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$x \geq 1, y \geq 1$ であるから $5k + 2 \geq 1$ かつ $-2k + 5 \geq 1$

第3講 例題

ゆえに $-\frac{1}{5} \leq k \leq 2$ これを満たす整数 k は $k=0, 1, 2$

③から $k=0$ のとき $x=2, y=5$ $k=1$ のとき $x=7, y=3$
 $k=2$ のとき $x=12, y=1$
 したがって $(x, y)=(2, 5), (7, 3), (12, 1)$

(2) $3x+4y=56$ から $3x=4(14-y)$ ……①
 $3x>0$ であるから $4(14-y)>0$ よって $y<14$
 また、①において、3と4は互いに素であるから、 $14-y$ は3の倍数になる。
 ゆえに $y=2, 5, 8, 11$
 ①から $y=2$ のとき $x=16$ $y=5$ のとき $x=12$
 $y=8$ のとき $x=8$ $y=11$ のとき $x=4$
 したがって $(x, y)=(4, 11), (8, 8), (12, 5), (16, 2)$

別解 $3x+4y=56$ から $3x=4(14-y)$
 3と4は互いに素であるから $x=4k, 14-y=3k$ (k は整数) と表される。
 よって $x=4k, y=-3k+14$ ……①
 x は自然数であるから、 k も自然数である。
 また、 $y \geq 1$ であるから $-3k+14 \geq 1$
 ゆえに、 $k \leq \frac{13}{3} = 4.3\cdots$ であるから $k=1, 2, 3, 4$
 ①から $k=1$ のとき $x=4, y=11$ $k=2$ のとき $x=8, y=8$
 $k=3$ のとき $x=12, y=5$ $k=4$ のとき $x=16, y=2$
 したがって $(x, y)=(4, 11), (8, 8), (12, 5), (16, 2)$

(3) $x+5y+2z=15$ から $5y=15-x-2z$
 $x \geq 1, z \geq 1$ から $5y \leq 15-1-2 \cdot 1=12$
 よって、 $y \leq \frac{12}{5} = 2.4$ であるから $y=1, 2$
 [1] $y=1$ のとき $x+2z=10$
 これを満たす自然数 (x, z) の組は $(x, z)=(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)$
 [2] $y=2$ のとき $x+2z=5$
 これを満たす自然数 (x, z) の組は $(x, z)=(3, 1), (1, 2)$
 以上から
 $(x, y, z)=(8, 1, 1), (6, 1, 2), (4, 1, 3), (2, 1, 4), (3, 2, 1), (1, 2, 2)$

7

解答 (1) $(x, y)=(-5, 8), (-7, -2), (-1, 4), (-11, 2)$
 (2) $(x, y)=(-1, -4), (0, 5)$ (3) $(x, y)=(5, 2), (11, 10)$
 (4) $(x, y)=(3, 2)$

解説

(1) 方程式は次のように変形できる。
 $(x+6)(y-3)+18-23=0$
 すなわち $(x+6)(y-3)=5$
 x, y は整数であるから、 $x+6, y-3$ も整数である。
 ゆえに $(x+6, y-3)=(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$
 よって $(x, y)=(-5, 8), (-1, 4), (-7, -2), (-11, 2)$

(2) $3xy+3x+y=(3x+1)(y+1)-1$ であるから、
 $3xy+3x+y=5$ より $(3x+1)(y+1)=6$ ……①
 x が整数であるとき、 $3x+1$ は3で割ると1余る整数である。
 よって、①を満たす整数 $3x+1, y+1$ の組は

$(3x+1, y+1)=(-2, -3), (1, 6)$
 したがって $(x, y)=(-1, -4), (0, 5)$

(3) $x^2-y^2=21$ から $(x+y)(x-y)=21$ ……①
 x, y は自然数であるから、 $x+y, x-y$ は整数で $x+y \geq 2$
 また $x+y > x-y$
 よって、①から $(x+y, x-y)=(7, 3), (21, 1)$
 ゆえに $(x, y)=(5, 2), (11, 10)$

(4) $4x^2-y^2=32$ から $(2x+y)(2x-y)=32$ ……①
 x, y は自然数であるから、 $2x+y, 2x-y$ は整数で $2x+y \geq 3$
 また $2x+y > 2x-y$
 よって、①から $(2x+y, 2x-y)=(8, 4), (16, 2), (32, 1)$
 ここで、 $(2x+y)+(2x-y)=4x$ であるから、 $2x+y$ と $2x-y$ の和は4の倍数である。
 よって、 $(2x+y, 2x-y)=(8, 4)$ のみ適する。
 ゆえに $(x, y)=(3, 2)$

8

解答 (1) $(x, y, z)=(1, 2, 3)$ (2) $(x, y, z)=(1, 3, 6), (1, 4, 4), (2, 2, 2)$

解説

(1) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから $xyz = x+y+z \leq z+z+z=3z$
 ゆえに $xy \leq 3$ よって $(x, y)=(1, 1), (1, 2), (1, 3)$
 [1] $(x, y)=(1, 1)$ のとき、等式は $z=2+z$
 これを満たす自然数 z はない。
 [2] $(x, y)=(1, 2)$ のとき、等式は $2z=3+z$
 よって $z=3$ このとき $x \leq y \leq z$ を満たす。
 [3] $(x, y)=(1, 3)$ のとき、等式は $3z=4+z$
 よって $z=2$ このとき、 $y > z$ となり不適。
 [1]~[3]から $(x, y, z)=(1, 2, 3)$

(2) $x \leq y \leq z$ ……①

①より $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから、 $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ ……②

よって $\frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ から $x \leq 2$ により $x=1, 2$

$x=1$ のとき、与式から $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ……③

②、③より $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $y \leq 4$
 y は自然数で、 $1=x \leq y$ であるから $y=1, 2, 3, 4$
 $y=1, 2$ のとき ③を満たす自然数 z は存在しない。
 $y=3$ のとき ③から $z=6$ ($y \leq z$ を満たす)
 $y=4$ のとき ③から $z=4$ ($y \leq z$ を満たす)

$x=2$ のとき、与式から $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ……④

②、④より $1 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $y \leq 2$
 y は自然数で、 $2=x \leq y$ であるから $y=2$ このとき④から $z=2$
 以上から $(x, y, z)=(1, 3, 6), (1, 4, 4), (2, 2, 2)$

9

解答 (1) $(x, y)=(4, -3), (4, 3)$ (2) $(x, y)=(2, -1), (2, -7)$

解説

(1) $3x^2+4xy-4y^2=(3x-2y)(x+2y)$ であるから、 a, b を定数として
 (左辺) $= (3x-2y+a)(x+2y+b)$ と表される。
 これを展開して整理すると $3x^2+4xy-4y^2+(a+3b)x+(2a-2b)y+ab$
 $a+3b=4, 2a-2b=-16$ としてこれを解くと $a=-5, b=3$
 ゆえに $(3x-2y-5)(x+2y+3)=3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-15$
 よって、 $3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-28=0$ を変形すると
 $(3x-2y-5)(x+2y+3)-13=0$ すなわち $(x+2y+3)(3x-2y-5)=13$
 x, y は整数であるから、 $x+2y+3, 3x-2y-5$ も整数である。
 よって

$\begin{cases} x+2y+3=-13 \\ 3x-2y-5=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3=-1 \\ 3x-2y-5=-13 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3=1 \\ 3x-2y-5=13 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3=13 \\ 3x-2y-5=1 \end{cases}$
--	--	--	--

これらの連立方程式の解は、順に

$(x, y)=(-3, -\frac{13}{2}), (-3, -\frac{1}{2}), (4, -3), (4, 3)$

x, y がともに整数であるものは $(x, y)=(4, -3), (4, 3)$

(2) $5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$ を y について整理すると
 $y^2+2(x+2)y+5x^2-12x+11=0$ ……①
 この y についての2次方程式の判別式を D とすると
 $\frac{D}{4} = (x+2)^2 - 1 \cdot (5x^2 - 12x + 11) = -4x^2 + 16x - 7$
 $= -(4x^2 - 16x + 7) = -(2x-1)(2x-7)$
 ①の解は整数(実数)であるから $D \geq 0$
 ゆえに $(2x-1)(2x-7) \leq 0$ よって $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$
 x は整数であるから $x=1, 2, 3$
 $x=1$ のとき、①は $y^2+6y+4=0$
 これを解いて $y=-3 \pm \sqrt{5}$
 $x=2$ のとき、①は $y^2+8y+7=0$
 ゆえに $(y+1)(y+7)=0$ よって $y=-1, -7$
 $x=3$ のとき、①は $y^2+10y+20=0$
 これを解いて $y=-5 \pm \sqrt{5}$
 したがって、 x, y がともに整数であるものは $(x, y)=(2, -1), (2, -7)$

別解 ①から $\{y+(x+2)\}^2 - (x+2)^2 + 5x^2 - 12x + 11 = 0$
 ゆえに $(y+x+2)^2 + 4x^2 - 16x + 7 = 0$
 よって $(y+x+2)^2 + 4(x-2)^2 - 4 \cdot 2^2 + 7 = 0$
 ゆえに $(y+x+2)^2 + [2(x-2)]^2 = 9$
 x, y が整数のとき、 $y+x+2$ は整数、 $2(x-2)$ は偶数である。
 よって $(y+x+2, 2(x-2))=(3, 0), (-3, 0)$
 したがって $(x, y)=(2, -1), (2, -7)$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1) ① 17 ② 1 ③ 13 ④ 1 ⑤ 37

【解説】

- ① $408 = 119 \cdot 3 + 51$
 $119 = 51 \cdot 2 + 17$
 $51 = 17 \cdot 3 + 0$
 よって、最大公約数は 17
- ② $322 = 155 \cdot 2 + 12$
 $155 = 12 \cdot 12 + 11$
 $12 = 11 \cdot 1 + 1$
 $11 = 1 \cdot 11 + 0$
 よって、最大公約数は 1
- ③ $923 = 377 \cdot 2 + 169$
 $377 = 169 \cdot 2 + 39$
 $169 = 39 \cdot 4 + 13$
 $39 = 13 \cdot 3 + 0$
 よって、最大公約数は 13
- ④ $498 = 223 \cdot 2 + 52$
 $223 = 52 \cdot 4 + 15$
 $52 = 15 \cdot 3 + 7$
 $15 = 7 \cdot 2 + 1$
 $7 = 1 \cdot 7 + 0$
 よって、最大公約数は 1
- ⑤ $629 = 259 \cdot 2 + 111$
 $259 = 111 \cdot 2 + 37$
 $111 = 37 \cdot 3 + 0$
 よって、最大公約数は 37

2

- 【解答】 ① $n = 2, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 47$
 ② $n = 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88$

【解説】

- ① $11n + 28 = (4n + 7) \cdot 2 + 3n + 14$, $4n + 7 = (3n + 14) \cdot 1 + n - 7$,
 $3n + 14 = (n - 7) \cdot 3 + 35$
 よって、 $11n + 28$ と $4n + 7$ の最大公約数は、 $n - 7$ と 35 の最大公約数に等しい。
 $35 = 5 \cdot 7$ であるから、 $n - 7$ は 5 の倍数であるが、7 の倍数でない。
 また、 $-6 \leq n - 7 \leq 43$ であるから
 $n - 7 = -5, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$
 よって $n = 2, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 47$
- ② $6n + 4 = (5n + 1) \cdot 1 + n + 3$, $5n + 1 = (n + 3) \cdot 5 - 14$
 よって、 $5n + 1$ と $6n + 4$ の最大公約数は、 $n + 3$ と 14 の最大公約数に等しい。
 $14 = 2 \cdot 7$ であるから、 $n + 3$ は 7 の倍数であるが、2 の倍数でない。
 また、 $4 \leq n + 3 \leq 103$ であるから
 $n + 3 = 7, 21, 35, 49, 63, 77, 91$
 よって $n = 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88$
- 【参考】 -14 の約数のうち最大のものは 14 であるから、 $n + 3$ と -14 の最大公約数は、

$n + 3$ と 14 の最大公約数に等しい。

3

【解答】 (1) $x = 4, y = -5$ (2) $x = -9, y = 13$ (3) $x = -8, y = -22$

【解説】

- (1) 24 と 19 に互除法の計算を行うと、次のようになる。
 $24 = 19 \cdot 1 + 5$ 移項すると $5 = 24 - 19 \cdot 1$
 $19 = 5 \cdot 3 + 4$ 移項すると $4 = 19 - 5 \cdot 3$
 $5 = 4 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 5 - 4 \cdot 1$
 よって $1 = 5 - 4 \cdot 1$
 $= 5 - (19 - 5 \cdot 3) \cdot 1$
 $= 5 \cdot 4 + 19 \cdot (-1)$
 $= (24 - 19 \cdot 1) \cdot 4 + 19 \cdot (-1)$
 $= 24 \cdot 4 + 19 \cdot (-5)$
 すなわち $24 \cdot 4 + 19 \cdot (-5) = 1$
 よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = 4, y = -5$
- 【参考】 割り算の等式を利用して係数を小さくする方法を考えてみる。
 $24 = 19 \cdot 1 + 5$ より、方程式は次のようになる。
 $(19 \cdot 1 + 5)x + 19y = 1$
 整理すると $5x + 19(x + y) = 1$
 $19 = 5 \cdot 3 + 4$ より $5x + (5 \cdot 3 + 4)(x + y) = 1$
 すなわち $5(4x + 3y) + 4(x + y) = 1$
 $4x + 3y = m, x + y = n$ とおくと $5m + 4n = 1$
 この等式を満たす整数 m, n の組の 1 つは $m = 1, n = -1$
 $4x + 3y = 1, x + y = -1$ を解くと $x = 4, y = -5$
- (2) 36 と 25 に互除法の計算を行うと、次のようになる。
 $36 = 25 \cdot 1 + 11$ 移項すると $11 = 36 - 25 \cdot 1$
 $25 = 11 \cdot 2 + 3$ 移項すると $3 = 25 - 11 \cdot 2$
 $11 = 3 \cdot 3 + 2$ 移項すると $2 = 11 - 3 \cdot 3$
 $3 = 2 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 3 - 2 \cdot 1$
 よって $1 = 3 - 2 \cdot 1$
 $= 3 - (11 - 3 \cdot 3) \cdot 1$
 $= 3 \cdot 4 + 11 \cdot (-1)$
 $= (25 - 11 \cdot 2) \cdot 4 + 11 \cdot (-1)$
 $= 25 \cdot 4 + 11 \cdot (-9)$
 $= 25 \cdot 4 + (36 - 25 \cdot 1) \cdot (-9)$
 $= 36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13$
 すなわち $36 \cdot (-9) + 25 \cdot 13 = 1$
 よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -9, y = 13$
- (3) 184 と 67 に互除法の計算を行うと、次のようになる。
 $184 = 67 \cdot 2 + 50$ 移項すると $50 = 184 - 67 \cdot 2$
 $67 = 50 \cdot 1 + 17$ 移項すると $17 = 67 - 50 \cdot 1$
 $50 = 17 \cdot 2 + 16$ 移項すると $16 = 50 - 17 \cdot 2$
 $17 = 16 \cdot 1 + 1$ 移項すると $1 = 17 - 16 \cdot 1$
 よって $1 = 17 - 16 \cdot 1$
 $= 17 - (50 - 17 \cdot 2) \cdot 1$
 $= 17 \cdot 3 + 50 \cdot (-1)$

- $= (67 - 50 \cdot 1) \cdot 3 + 50 \cdot (-1)$
 $= 67 \cdot 3 + 50 \cdot (-4)$
 $= 67 \cdot 3 + (184 - 67 \cdot 2) \cdot (-4)$
 $= 184 \cdot (-4) - 67 \cdot (-11)$
 すなわち $184 \cdot (-4) - 67 \cdot (-11) = 1$
 両辺に 2 を掛けて
 $184 \cdot [2 \cdot (-4)] - 67 \cdot [2 \cdot (-11)] = 2$
 すなわち $184 \cdot (-8) - 67 \cdot (-22) = 2$
 よって、求める整数 x, y の組の 1 つは $x = -8, y = -22$

4

【解答】 k は整数とする。

- (1) $x = 17k + 8, y = -30k - 14$ (2) $x = 42k - 65, y = -29k + 45$
 (3) $x = 35k + 64, y = 46k + 84$

【解説】

- (1) $30x + 17y = 2$ …… ①
 ① の右辺を 1 とした方程式 $30x + 17y = 1$ について、 $x = 4, y = -7$ はその整数解の 1 つである。
 よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$
 両辺に 2 を掛けて $30 \cdot 8 + 17 \cdot (-14) = 2$ …… ②
 ① - ② から $30(x - 8) + 17(y + 14) = 0$
 すなわち $30(x - 8) = -17(y + 14)$ …… ③
 30 と 17 は互いに素であるから、 $x - 8$ は 17 の倍数である。
 よって、 k を整数として、 $x - 8 = 17k$ と表される。
 これを ③ に代入して $y + 14 = -30k$
 したがって、求める整数解は $x = 17k + 8, y = -30k - 14$ (k は整数)
- 【参考】 30 と 17 に互除法の計算を行うと、次のようになる。
 $30 = 17 \cdot 1 + 13$ 移項すると $13 = 30 - 17 \cdot 1$
 $17 = 13 \cdot 1 + 4$ 移項すると $4 = 17 - 13 \cdot 1$
 $13 = 4 \cdot 3 + 1$ 移項すると $1 = 13 - 4 \cdot 3$
 よって $1 = 13 - 4 \cdot 3$
 $= 13 - (17 - 13 \cdot 1) \cdot 3$
 $= 13 \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$
 $= (30 - 17 \cdot 1) \cdot 4 + 17 \cdot (-3)$
 $= 30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7)$
- (2) $29x + 42y = 5$ …… ①
 ① の右辺を 1 とした方程式 $29x + 42y = 1$ について、 $x = -13, y = 9$ はその整数解の 1 つである。
 よって $29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9 = 1$
 両辺に 5 を掛けて $29 \cdot (-65) + 42 \cdot 45 = 5$ …… ②
 ① - ② から $29(x + 65) + 42(y - 45) = 0$
 すなわち $29(x + 65) = -42(y - 45)$ …… ③
 29 と 42 は互いに素であるから、 $x + 65$ は 42 の倍数である。
 よって、 k を整数として、 $x + 65 = 42k$ と表される。
 これを ③ に代入して $y - 45 = -29k$
 したがって、求める整数解は $x = 42k - 65, y = -29k + 45$ (k は整数)
- 【参考】 29 と 42 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

第3講 例題演習

$$42=29 \cdot 1+13 \quad \text{移項すると} \quad 13=42-29 \cdot 1$$

$$29=13 \cdot 2+3 \quad \text{移項すると} \quad 3=29-13 \cdot 2$$

$$13=3 \cdot 4+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=13-3 \cdot 4$$

$$\text{よって} \quad 1=13-3 \cdot 4$$

$$=13-(29-13 \cdot 2) \cdot 4$$

$$=13 \cdot 9+29 \cdot (-4)$$

$$=(42-29 \cdot 1) \cdot 9+29 \cdot (-4)$$

$$=29 \cdot (-13)+42 \cdot 9$$

(3) $46x-35y=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ の右辺を1とした方程式 $46x-35y=1$ について、 $x=16, y=21$ はその整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 46 \cdot 16-35 \cdot 21=1$$

$$\text{両辺に4を掛けて} \quad 46 \cdot 64-35 \cdot 84=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から} \quad 46(x-64)-35(y-84)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 46(x-64)=35(y-84) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

46と35は互いに素であるから、 $x-64$ は35の倍数である。
よって、 k を整数として、 $x-64=35k$ と表される。

$$\text{これを}\textcircled{3}\text{に代入して} \quad y-84=46k$$

$$\text{したがって、求める整数解は} \quad x=35k+64, y=46k+84 \quad (k \text{ は整数})$$

【参考】 46と35に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$46=35 \cdot 1+11 \quad \text{移項すると} \quad 11=46-35 \cdot 1$$

$$35=11 \cdot 3+2 \quad \text{移項すると} \quad 2=35-11 \cdot 3$$

$$11=2 \cdot 5+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=11-2 \cdot 5$$

$$\text{よって} \quad 1=11-2 \cdot 5$$

$$=11-(35-11 \cdot 3) \cdot 5$$

$$=11 \cdot 16-35 \cdot 5$$

$$=(46-35 \cdot 1) \cdot 16-35 \cdot 5$$

$$=46 \cdot 16-35 \cdot 21$$

【5】

【解答】 最大のものと最小のものは順に (1) 957, 117 (2) 997, 115

【解説】

(1) 求める自然数を n とすると、 n は x, y を整数として、次のように表される。

$$n=5x+2, \quad n=14y+5$$

$$\text{よって} \quad 5x+2=14y+5$$

$$\text{すなわち} \quad 5x-14y=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ の右辺を1とした方程式 $5x-14y=1$ について、 $x=3, y=1$ はその整数解の1つである。

$$\text{よって} \quad 5 \cdot 3-14 \cdot 1=1$$

$$\text{両辺に3を掛けて} \quad 5 \cdot 9-14 \cdot 3=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から} \quad 5(x-9)-14(y-3)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 5(x-9)=14(y-3)$$

5と14は互いに素であるから、 $x-9$ は14の倍数である。
よって、 k を整数として、 $x-9=14k$ と表される。

$$\text{ゆえに} \quad x=14k+9$$

$$\text{したがって} \quad n=5(14k+9)+2=70k+47$$

$$70k+47 \text{ が3桁で最大となるのは、} k=13 \text{ のとき} \quad n=70 \cdot 13+47=957$$

$$70k+47 \text{ が3桁で最小となるのは、} k=1 \text{ のとき} \quad n=70 \cdot 1+47=117$$

【別解】 $x=-5, y=-2$ が $\textcircled{1}$ の整数解の1つであることに気がつけば、次のようになる。

$$x=-5, y=-2 \text{ は、}\textcircled{1}\text{の整数解の1つであるから}$$

$$5 \cdot (-5)-14 \cdot (-2)=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{3} \text{ から} \quad 5(x+5)-14(y+2)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 5(x+5)=14(y+2)$$

5と14は互いに素であるから、 $x+5$ は14の倍数である。

$$\text{よって、} k \text{ を整数として、} x+5=14k \text{ と表される。}$$

$$\text{ゆえに} \quad x=14k-5$$

$$\text{したがって} \quad n=5(14k-5)+2=70k-23$$

$$70k-23 \text{ が3桁で最大となるのは、} k=14 \text{ のとき} \quad n=70 \cdot 14-23=957$$

$$70k-23 \text{ が3桁で最小となるのは、} k=2 \text{ のとき} \quad n=70 \cdot 2-23=117$$

【参考】 $n+23$ は5でも14でも割り切れるから、 k を整数として、 $n+23=5 \cdot 14k$ と表される。

$$\text{よって} \quad n=70k-23$$

(2) 求める自然数を n とすると、 n は x, y を整数として、次のように表される。

$$n=3x+1, \quad n=7y+3$$

$$\text{よって} \quad 3x+1=7y+3$$

$$\text{すなわち} \quad 3x-7y=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x=3, y=1 \text{ は、}\textcircled{1}\text{の整数解の1つであるから}$$

$$3 \cdot 3-7 \cdot 1=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から} \quad 3(x-3)-7(y-1)=0$$

$$\text{すなわち} \quad 3(x-3)=7(y-1)$$

3と7は互いに素であるから、 $x-3$ は7の倍数である。

$$\text{よって、} k \text{ を整数として、} x-3=7k \text{ と表される。}$$

$$\text{ゆえに} \quad x=7k+3$$

$$\text{したがって} \quad n=3(7k+3)+1=21k+10$$

$$21k+10 \text{ が3桁で最大となるのは、} k=47 \text{ のとき} \quad n=21 \cdot 47+10=997$$

$$21k+10 \text{ が3桁で最小となるのは、} k=5 \text{ のとき} \quad n=21 \cdot 5+10=115$$

【参考】 $n-10$ は3でも7でも割り切れるから、 k を整数として、 $n-10=3 \cdot 7k$ と表される。

$$\text{よって} \quad n=21k+10$$

【6】

- 【解答】** (1) $(x, y)=(1, 17), (3, 10), (5, 3)$
 (2) $(x, y)=(5, 16), (10, 12), (15, 8), (20, 4)$
 (3) $(x, y, z)=(1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$

【解説】

(1) $7x+2y=41$ から $2y=41-7x \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$y>0 \text{ であるから} \quad 41-7x>0 \quad \text{ゆえに} \quad x<\frac{41}{7}=5.8\dots\dots$$

$\textcircled{1}$ において、 $2y$ は偶数であるから、 $41-7x$ は偶数である。
よって $x=1, 3, 5$

$\textcircled{1}$ から $x=1$ のとき $y=17, x=3$ のとき $y=10,$
 $x=5$ のとき $y=3$

$$\text{したがって} \quad (x, y)=(1, 17), (3, 10), (5, 3)$$

(2) $4x+5y=100$ から $4x=5(20-y) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$x>0 \text{ であるから} \quad 5(20-y)>0 \quad \text{ゆえに} \quad y<20$$

$\textcircled{1}$ において、 $4x$ は4の倍数であるから、 $5(20-y)$ は4の倍数である。
よって $y=4, 8, 12, 16$

$\textcircled{1}$ から $y=4$ のとき $x=20, y=8$ のとき $x=15,$
 $y=12$ のとき $x=10, y=16$ のとき $x=5$

$$\text{したがって} \quad (x, y)=(5, 16), (10, 12), (15, 8), (20, 4)$$

(3) $y \geq 1, z \geq 1$ であるから $4x=15-2y-z \leq 15-2 \cdot 1-1=12$
 ゆえに $x \leq 3$

$$x \text{ は自然数であるから} \quad x=1, 2, 3$$

[1] $x=1$ のとき $2y+z=11$
 $z \geq 1$ であるから $2y=11-z \leq 11-1=10$

$$\text{ゆえに} \quad y \leq 5$$

$$y \text{ は自然数であるから} \quad y=1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{よって} \quad (y, z)=(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)$$

[2] $x=2$ のとき $2y+z=7$
 $z \geq 1$ であるから $2y=7-z \leq 7-1=6$

$$\text{ゆえに} \quad y \leq 3$$

$$y \text{ は自然数であるから} \quad y=1, 2, 3$$

$$\text{よって} \quad (y, z)=(1, 5), (2, 3), (3, 1)$$

[3] $x=3$ のとき $2y+z=3$
 $z \geq 1$ であるから $2y=3-z \leq 3-1=2$

$$\text{ゆえに} \quad y \leq 1$$

$$y \text{ は自然数であるから} \quad y=1$$

$$\text{よって} \quad (y, z)=(1, 1)$$

$$\text{以上から} \quad (x, y, z)=(1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$$

【7】

- 【解答】** (1) $(x, y)=(2, 10), (6, 6), (0, 0), (-4, 4)$
 (2) $(x, y)=(-4, -4), (-11, 3), (-3, -1), (-8, 4), (-6, 8), (1, 1), (-7, 5), (-2, 0)$
 (3) $(x, y)=(3, 14), (8, 4)$ (4) $(x, y)=(6, 1), (18, 17)$
 (5) $(x, y)=(5, 1), (11, 5)$

【解説】

(1) 方程式は次のように変形できる。

$$(x-1)(y-5)-5=0$$

$$\text{すなわち} \quad (x-1)(y-5)=5$$

$$x, y \text{ は整数であるから、} x-1, y-5 \text{ も整数である。}$$

$$\text{ゆえに} \quad (x-1, y-5)=(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$$

$$\text{よって} \quad (x, y)=(2, 10), (6, 6), (0, 0), (-4, 4)$$

(2) 方程式は次のように変形できる。

$$(x+5)(y-2)+10-4=0$$

$$\text{すなわち} \quad (x+5)(y-2)=-6$$

$$x, y \text{ は整数であるから、} x+5, y-2 \text{ も整数である。}$$

$$\text{ゆえに} \quad (x+5, y-2)=(1, -6), (-6, 1), (2, -3), (-3, 2), (-1, 6), (6, -1), (-2, 3), (3, -2)$$

第3講 例題演習

- よって $(x, y) = (-4, -4), (-11, 3), (-3, -1), (-8, 4), (-6, 8), (1, 1), (-7, 5), (-2, 0)$
- (3) $2xy + 6x + y = (2x+1)(y+3) - 3$ であるから $(2x+1)(y+3) - 3 = 119$
すなわち $(2x+1)(y+3) = 119$
 $2x+1 \geq 3, y+3 \geq 4, 119 = 7 \cdot 17$ であるから、これを満たす整数 $2x+1, y+3$ の組は
 $(2x+1, y+3) = (7, 17), (17, 7)$
よって $(x, y) = (3, 14), (8, 4)$
- (4) 左辺を因数分解して $(x+y)(x-y) = 35$
 x, y は自然数であるから、 $x+y$ は2以上の自然数、 $x-y$ は整数である。
ゆえに $(x+y, x-y) = (5, 7), (7, 5), (35, 1)$
よって $(x, y) = (6, -1), (6, 1), (18, 17)$
 x, y は自然数であるから $(x, y) = (6, 1), (18, 17)$
- (5) 左辺を因数分解して $(x+2y)(x-2y) = 21$
 x, y は自然数であるから、 $x+2y$ は3以上の自然数、 $x-2y$ は整数である。
ゆえに $(x+2y, x-2y) = (3, 7), (7, 3), (21, 1)$
よって $(x, y) = (5, -1), (5, 1), (11, 5)$
 x, y は自然数であるから $(x, y) = (5, 1), (11, 5)$

8

- 【解答】 (1) $(x, y, z) = (1, 3, 5), (2, 2, 2)$
(2) $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$
(3) $(x, y, z) = (4, 5, 20), (4, 6, 12)$

【解説】

- (1) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから $2xyz = x+3y+4z \leq z+3z+4z = 8z$
よって $xy \leq 4$
この不等式を満たす自然数 x, y ($x \leq y$) の組は
 $(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2)$
これらの各組 (x, y) に対して、等式 $x+3y+4z = 2xyz$ を満たす z の値は次のようになる。
 $(x, y) = (1, 1)$ のとき $z = -2$ $(x, y) = (1, 2)$ のとき 解 z はない。
 $(x, y) = (1, 3)$ のとき $z = 5$ $(x, y) = (1, 4)$ のとき $z = \frac{13}{4}$
 $(x, y) = (2, 2)$ のとき $z = 2$
したがって $(x, y, z) = (1, 3, 5), (2, 2, 2)$
- (2) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから $\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ …… ①
よって $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ ゆえに $x \leq 3$
 x は自然数であるから $x = 1, 2, 3$
- [1] $x = 1$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ これを満たす自然数 y, z はない。
- [2] $x = 2$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ …… ②
①より $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $y \leq 4$
 y は自然数で、 $2 = x \leq y$ であるから $y = 2, 3, 4$
 $y = 2$ のとき、②から $\frac{1}{z} = 0$ これを満たす自然数 z はない。

- $y = 3$ のとき、②から $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$ よって $z = 6$ ($y \leq z$ を満たす)
- $y = 4$ のとき、②から $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z = 4$ ($y \leq z$ を満たす)
- [3] $x = 3$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ …… ③
①より $\frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $y \leq 3$
 y は自然数で、 $3 = x \leq y$ であるから $y = 3$
このとき、③から $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ よって $z = 3$ ($y \leq z$ を満たす)
- 以上から $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

- (3) 与式の両辺を $2xyz$ で割って $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

- $0 < x < y < z$ であるから $\frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
よって $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$
ゆえに $\frac{1}{2} < \frac{3}{x}$ よって $\frac{1}{x} > \frac{1}{6}$
ゆえに $x < 6$ $4 \leq x$ であるから $x = 4, 5$

- [1] $x = 4$ のとき、等式は $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ …… ①

- ここで $\frac{1}{4} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $\frac{1}{4} < \frac{2}{y}$
よって $\frac{1}{y} > \frac{1}{8}$ ゆえに $y < 8$
 $4 < y$ であるから $y = 5, 6, 7$
 $y = 5$ のとき、①は $\frac{1}{5} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z = 20$
これは $y < z$ を満たす。
 $y = 6$ のとき、①は $\frac{1}{6} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z = 12$
これは $y < z$ を満たす。
 $y = 7$ のとき、①は $\frac{1}{7} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z = \frac{28}{3}$
これは自然数でないから条件を満たさない。

- [2] $x = 5$ のとき、等式は $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$ …… ②

- ここで $\frac{3}{10} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$
ゆえに $\frac{3}{10} < \frac{2}{y}$ よって $\frac{1}{y} > \frac{3}{20}$
ゆえに $y < \frac{20}{3} = 6.6\cdots$ $5 < y$ であるから $y = 6$
このとき、②は $\frac{1}{6} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$ よって $z = \frac{15}{2}$
これは自然数でないから条件を満たさない。

- [1], [2] から $(x, y, z) = (4, 5, 20), (4, 6, 12)$

9

- 【解答】 (1) $(x, y) = (-1, 0), (1, 2)$ (2) $(x, y) = (2, 1), (5, 4)$

【解説】

- (1) $(2x - y + a)(x + 2y + b) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 + (a + 2b)x + (2a - b)y + ab$
となり、 $a + 2b = -3, 2a - b = 4$ を解くと
 $a = 1, b = -2$

- ゆえに $(2x - y + 1)(x + 2y - 2) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3x + 4y - 2$
 $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3x + 4y - 5 = 0$ を変形すると
 $(2x - y + 1)(x + 2y - 2) - 3 = 0$

- よって $(x + 2y - 2)(2x - y + 1) = 3$
 x, y は整数であるから、 $x + 2y - 2, 2x - y + 1$ も整数である。

- したがって $\begin{cases} x + 2y - 2 = -3 \\ 2x - y + 1 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y - 2 = -1 \\ 2x - y + 1 = -3 \end{cases}$
 $\begin{cases} x + 2y - 2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y - 2 = 3 \\ 2x - y + 1 = 1 \end{cases}$

これらの連立方程式の解は、順に

- $(x, y) = (-1, 0), \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 2)$

- x, y がともに整数であるものは
 $(x, y) = (-1, 0), (1, 2)$

- (2) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 3y + 5 = 0$ を x について整理すると

- $x^2 - 2(y+1)x + 2y^2 - 3y + 5 = 0$ …… ①

①を x について解くと

- $x = y + 1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - (2y^2 - 3y + 5)}$
 $= y + 1 \pm \sqrt{-y^2 + 5y - 4}$ …… ②

②は実数であるから

- $-y^2 + 5y - 4 \geq 0$
よって $-(y-1)(y-4) \geq 0$ ゆえに $1 \leq y \leq 4$

y は整数であるから $y = 1, 2, 3, 4$

$y = 1$ のとき、①は $x^2 - 4x + 4 = 0$

よって $(x-2)^2 = 0$ ゆえに $x = 2$

$y = 2$ のとき、①は $x^2 - 6x + 7 = 0$

これを解いて $x = 3 \pm \sqrt{2}$

$y = 3$ のとき、①は $x^2 - 8x + 14 = 0$

これを解いて $x = 4 \pm \sqrt{2}$

$y = 4$ のとき、①は $x^2 - 10x + 25 = 0$

よって $(x-5)^2 = 0$ ゆえに $x = 5$

x, y がともに整数であるものは

- $(x, y) = (2, 1), (5, 4)$

第3講 レベルA

1

【解答】 $n=5, 13$

【解説】

$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるとき、 k を自然数として、次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+56}=k$$

両辺を2乗して移項すると $k^2-n^2=56$

すなわち $(k+n)(k-n)=56 \dots\dots ①$

ここで、 k, n は $k>n$ を満たす自然数であるから、 $k+n, k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから、①を満たす自然数 $k+n, k-n$ の組は次のようになる。

$$(k+n, k-n)=(56, 1), (28, 2), (14, 4), (8, 7)$$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$$(k+n, k-n)=(28, 2), (14, 4)$$

これを満たす自然数 k, n の組は次のようになる。

$$(k, n)=(15, 13), (9, 5)$$

したがって、求める自然数 n は $n=5, 13$

2

【解答】 16

【解説】

自然数 n は、 x, y を整数として

$$n=7x+2, n=9y+7 \quad \text{と表される。}$$

よって $7x+2=9y+7$

すなわち $7x-9y=5 \dots\dots ①$

$x=2, y=1$ は①の整数解の1つである。

よって $7 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = 5 \dots\dots ②$

①-②から $7(x-2) - 9(y-1) = 0$

すなわち $7(x-2) = 9(y-1)$

7と9は互いに素であるから、 $x-2$ は9の倍数である。

よって、 k を整数として、 $x-2=9k$ と表される。

ゆえに、 $x=9k+2$ であるから $n=7(9k+2)+2=63k+16$

したがって、 n を63で割ったときの余りは 16

3

【解答】 1, 2, 3, 6

【解説】

$$\begin{aligned} n^2+3n+8 &= (n+2)(n+1)-2+8 \\ &= (n+2)(n+1)+6 \end{aligned}$$

よって、 n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数は、 $n+2$ と6の最大公約数に等しい。

したがって、最大公約数として考えられる数は、6の正の約数の1, 2, 3, 6である。

4

【解答】 (1) $(x, y)=(-7, 1), (-3, 4), (1, 7)$

(2) $(a, b)=(9, 8), (12, 6)$ のとき最大値 72

【解説】

(1) $3x-4y+25=0$ から $3x-4y=-25 \dots\dots ①$

$x=-3, y=4$ は、①の整数解の1つであるから

$$3(x+3)-4(y-4)=0 \quad \text{すなわち} \quad 3(x+3)=4(y-4)$$

3と4は互いに素であるから、 k を整数として $x+3=4k, y-4=3k$ と表される。

よって $x=4k-3, y=3k+4$ (k は整数) $\dots\dots ②$

$x^2+y^2 \leq 50$ に代入して $(4k-3)^2+(3k+4)^2 \leq 50$

ゆえに $25k^2+25 \leq 50$ よって $k^2 \leq 1$

この不等式を満たす整数 k の値は $k=-1, 0, 1$

②から $k=-1$ のとき $(x, y)=(-7, 1)$

$k=0$ のとき $(x, y)=(-3, 4)$

$k=1$ のとき $(x, y)=(1, 7)$

よって、解は $(x, y)=(-7, 1), (-3, 4), (1, 7)$

(2) $2a+3b=42$ から $2a=3(14-b)$

2と3は互いに素であるから、 $a=3k, 14-b=2k$ (k は整数) と表される。

$$\text{したがって} \quad ab=3k(14-2k)=-6k^2+42k=-6\left(k-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{147}{2}$$

$y=-6\left(k-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{147}{2}$ のグラフは上に凸の放物線で、軸は直線 $k=\frac{7}{2}$ である。

この軸に最も近い整数値は $k=3, 4$

ゆえに、 ab は $k=3, 4$ のとき最大となり、その値は 72

よって $(a, b)=(9, 8), (12, 6)$ のとき最大値 72

5

【解答】 $(x, y, z)=(5, 10, 4), (10, 1, 8)$

【解説】

$$\begin{cases} x+y+z=19 & \dots\dots ① \\ x+5y+10z=95 & \dots\dots ② \end{cases} \quad \text{とする。}$$

②-①から $4y+9z=76 \dots\dots ③$

よって $9z=4(19-y) \dots\dots ④$

9と4は互いに素であるから、 z は4の倍数である。

したがって、 k を整数として、 $z=4k$ と表される。

これを④に代入すると

$$9 \cdot 4k = 4(19-y) \quad \text{すなわち} \quad 19-y=9k$$

よって、③の整数解は $y=-9k+19, z=4k$

これを①に代入すると

$$x+(-9k+19)+4k=19 \quad \text{すなわち} \quad x=5k$$

x, y, z がすべて正の整数となるような整数 k は $k=1, 2$

したがって、求める解は

$$(x, y, z)=(5, 10, 4), (10, 1, 8)$$

6

【解答】 $(p, q, r)=(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)$

【解説】

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1 \quad \dots\dots ① \quad \text{とする。}$$

$$2 \leq p < q < r \text{ から} \quad \frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{ゆえに} \quad 1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$$

$$\text{よって} \quad 1 < \frac{3}{p} \quad \text{すなわち} \quad p < 3$$

p は $2 \leq p < 3$ を満たす整数であるから $p=2$

$$p=2 \text{ のとき、} ① \text{ は} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

$$② \text{ から} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{2}{q}$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{q} \quad \text{すなわち} \quad q < 4$$

q は $2 < q < 4$ を満たす整数であるから $q=3$

$p=2, q=3$ を①に代入して整理すると

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{6} \quad \text{すなわち} \quad r \leq 6$$

r は $3 < r \leq 6$ を満たす整数であるから $r=4, 5, 6$

以上から、求める整数 p, q, r の組は

$$(p, q, r)=(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)$$

1

【解答】 896

【解説】

n は x, y, z を整数として、次のように表される。

$$n = 3x + 2, n = 5y + 1, n = 11z + 5$$

$$3x + 2 = 5y + 1 \text{ から } 3x - 5y = -1 \dots\dots ①$$

$x = 3, y = 2$ は、①の整数解の1つであるから

$$3(x - 3) - 5(y - 2) = 0 \text{ すなわち } 3(x - 3) = 5(y - 2)$$

3と5は互いに素であるから、 k を整数として、 $x - 3 = 5k$ と表される。

$$\text{よって } x = 5k + 3 \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$\text{次に、} 3x + 2 = 11z + 5 \text{ に } x = 5k + 3 \text{ を代入して } 3(5k + 3) + 2 = 11z + 5$$

$$\text{ゆえに } 11z - 15k = 6 \dots\dots ②$$

$z = 6, k = 4$ は、②の整数解の1つであるから

$$11(z - 6) - 15(k - 4) = 0 \text{ すなわち } 11(z - 6) = 15(k - 4)$$

11と15は互いに素であるから、 l を整数として、 $z - 6 = 15l$ と表される。

$$\text{よって } z = 15l + 6 \text{ (} l \text{ は整数)}$$

$$n = 11z + 5 \text{ に代入して } n = 11(15l + 6) + 5 = 165l + 71$$

$165l + 71 < 1000$ すなわち $165l < 929$ を満たす最大の整数 l は、 $l = 5$ である。

$$\text{このとき } n = 165 \cdot 5 + 71 = 896$$

2

【解答】 891

【解説】

$$9x + 11y = n \dots\dots ①$$

$x = 5n, y = -4n$ は①の整数解の1つであるから

$$9(x - 5n) + 11(y + 4n) = 0 \text{ すなわち } 9(x - 5n) = -11(y + 4n)$$

9と11は互いに素であるから、 k を整数として、

$$x - 5n = 11k, y + 4n = -9k$$

と表される。したがって、①の解は

$$x = 5n + 11k, y = -4n - 9k \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$x \geq 0 \text{ とすると } 5n + 11k \geq 0 \dots\dots ②$$

$$y \geq 0 \text{ とすると } -4n - 9k \geq 0 \dots\dots ③$$

$$\text{②から } k \geq -\frac{5}{11}n \quad \text{③から } k \leq -\frac{4}{9}n$$

$$n \text{ は自然数であるから、②、③の共通範囲は } -\frac{5}{11}n \leq k \leq -\frac{4}{9}n \dots\dots ④$$

方程式①がちょうど10個の負でない整数解をもつための条件は、④を満たす整数 k がちょうど10個存在することである。

$$-\frac{4}{9}n - \left(-\frac{5}{11}n\right) = \frac{n}{99} \text{ であるから、④を満たす整数 } k \text{ がちょうど10個存在するとき}$$

$$9 \leq \frac{n}{99} < 10 \text{ すなわち } 891 \leq n < 990$$

ここで、 $n = 891$ のとき、④は $-405 \leq k \leq -396$

この不等式を満たす整数 k は、 $-396 - (-405) + 1 = 10$ (個) がある。

よって、求める自然数 n は $n = 891$

3 [名古屋大]

【解答】 (1) $(x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$

$$(2) (x, y) = (4p, 2p)$$

【解説】

$$(1) \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \text{ から } 8y + 4x = xy$$

$$\text{ゆえに } xy - 4x - 8y = 0$$

$$\text{よって } (x - 8)(y - 4) = 32 \dots\dots ①$$

x, y は正の整数であるから、 $x - 8, y - 4$ は整数である。

$$\text{また、} x \geq 1, y \geq 1 \text{ であるから } x - 8 \geq -7, y - 4 \geq -3$$

ゆえに、①から

$$(x - 8, y - 4) = (1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1)$$

$$\text{よって } (x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$$

$$(2) \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} \text{ から } 2py + px = xy$$

$$\text{ゆえに } xy - px - 2py = 0 \quad \text{よって } (x - 2p)(y - p) = 2p^2 \dots\dots ①$$

x, y は正の整数、 p は素数であるから、 $x - 2p, y - p$ は整数である。

$$\text{また、} x \geq 1, y \geq 1 \text{ であるから } x - 2p \geq 1 - 2p, y - p \geq 1 - p \dots\dots ②$$

p は3以上の素数であるから、 $2p^2$ の正の約数は $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$

ゆえに、①、②を満たす整数 $x - 2p, y - p$ の組と、そのときの $x, y, 2x + 3y$ の値は、次の表のようになる。

$x - 2p$	1	2	p	$2p$	p^2	$2p^2$
$y - p$	$2p^2$	p^2	$2p$	p	2	1
x	$2p + 1$	$2p + 2$	$3p$	$4p$	$p^2 + 2p$	$2p^2 + 2p$
y	$2p^2 + p$	$p^2 + p$	$3p$	$2p$	$p + 2$	$p + 1$
$2x + 3y$	$6p^2 + 7p + 2$	$3p^2 + 7p + 4$	$15p$	$14p$	$2p^2 + 7p + 6$	$4p^2 + 7p + 3$

ここで、 $p \geq 3$ であるから

$$(6p^2 + 7p + 2) - (4p^2 + 7p + 3) = 2p^2 - 1 > 0$$

$$(4p^2 + 7p + 3) - (3p^2 + 7p + 4) = p^2 - 1 > 0$$

$$(3p^2 + 7p + 4) - (2p^2 + 7p + 6) = p^2 - 2 > 0$$

$$(2p^2 + 7p + 6) - 15p = 2p^2 - 8p + 6 = 2(p - 1)(p - 3) \geq 0$$

$$15p - 14p = p > 0$$

$$\text{よって } 6p^2 + 7p + 2 > 4p^2 + 7p + 3 > 3p^2 + 7p + 4 > 2p^2 + 7p + 6 \geq 15p > 14p$$

表より、 $2x + 3y = 14p$ のとき $(x, y) = (4p, 2p)$

したがって、 $2x + 3y$ を最小にする (x, y) は $(x, y) = (4p, 2p)$

1

【解答】 (1) (ア) 順に 45, 143 (イ) 順に 101001₍₂₎, 131₍₅₎

$$(2) \text{ (ア) } 3.625 \quad \text{(イ) } 0.0101_{(2)}$$

【解説】

$$(1) \text{ (ア) } 101101_{(2)}$$

$$= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 45$$

$$12022_{(3)} = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 143$$

(イ) 右の計算から

$$41 = 101001_{(2)}$$

$$41 = 131_{(5)}$$

$$(2) \text{ (ア) } 11.101_{(2)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3}$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$= 3 + \frac{5}{8} = 3.625$$

$$(イ) \quad 0.3125 \times 2 = 0.625$$

$$0.625 \times 2 = 1.25$$

$$(1.25 - 1) \times 2 = 0.5$$

$$0.5 \times 2 = 1$$

よって、0.3125 を2進法で表すと 0.0101₍₂₎

2

【解答】 (1) 1110₍₃₎ (2) 11311₍₅₎ (3) 314₍₆₎ (4) 4512₍₇₎ (5) 302022₍₄₎

$$(6) 123_{(5)}$$

【解説】

$$(1) 212_{(3)} + 121_{(3)} = 1110_{(3)}$$

$$\begin{array}{r} 212 \\ + 121 \\ \hline 1110 \end{array}$$

10進法で計算すると
23
+ 16
39

$$(2) 3412_{(5)} + 2344_{(5)} = 11311_{(5)}$$

$$\begin{array}{r} 3412 \\ + 2344 \\ \hline 11311 \end{array}$$

10進法で計算すると
482
+ 349
831

$$(3) 543_{(6)} - 225_{(6)} = 314_{(6)}$$

$$\begin{array}{r} 543 \\ - 225 \\ \hline 314 \end{array}$$

10進法で計算すると
207
- 89
118

$$(4) 6241_{(7)} - 1426_{(7)} = 4512_{(7)}$$

$$\begin{array}{r} 6241 \\ - 1426 \\ \hline 4512 \end{array}$$

10進法で計算すると
2185
- 559
1626

第4講 例題

(5) $3112_{(4)} \times 33_{(4)} = 302022_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 3112 \\ \times 33 \\ \hline 22002 \\ 22002 \\ \hline 302022 \end{array}$$

10進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 214 \\ \times 15 \\ \hline 1070 \\ 214 \\ \hline 3210 \end{array}$$

(6) $3434_{(5)} \div 23_{(5)} = 123_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 123 \\ 23 \overline{) 3434} \\ \underline{23} \\ 113 \\ \underline{101} \\ 124 \\ \underline{124} \\ 0 \end{array}$$

10進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 38 \\ 13 \overline{) 494} \\ \underline{39} \\ 104 \\ \underline{104} \\ 0 \end{array}$$

3

【解答】 (1) $a=2, b=4, N=102$ (2) $a=2, b=3, c=1, N=66$

【解説】

(1) $a0b_{(7)}$ は7進数であるから $1 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6$

$b0a_{(5)}$ は5進数であるから $1 \leq b \leq 4, 0 \leq a \leq 4$

よって $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$ ……①

N を10進法で表すと

$$N = a0b_{(7)} = a \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49a + b$$

$$N = b0a_{(5)} = b \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + a \cdot 5^0 = 25b + a$$

ゆえに $49a + b = 25b + a$ 整理すると $2a = b$

これと①を満たす整数 a, b の組は $(a, b) = (1, 2), (2, 4)$

[1] $(a, b) = (1, 2)$ のとき

$$N = 49 \cdot 1 + 2 = 51$$

これは2桁の数であり、適さない。

[2] $(a, b) = (2, 4)$ のとき

$$N = 49 \cdot 2 + 4 = 102$$

これは3桁の数であり、適する。

したがって $a=2, b=4, N=102$

(2) $abc_{(5)}$ は3桁の5進数であるから $1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 4$ ……①

$cab_{(7)}$ は3桁の7進数であるから $1 \leq c \leq 6, 0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6$ ……②

①, ②から $1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4$ ……③

N を10進法で表すと

$$N = abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0 = 25a + 5b + c$$

$$N = cab_{(7)} = c \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49c + 7a + b$$

よって $25a + 5b + c = 49c + 7a + b$

整理すると $9a + 2b = 24c$ ……④

ここで, ③より $24c = 9a + 2b \leq 9 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 44$

ゆえに $c \leq \frac{11}{6} = 1.8 \dots\dots$

よって, ③から $c=1$

④に代入すると $9a + 2b = 24$

ゆえに $2b = 3(8 - 3a)$ ……⑤

2と3は互いに素であるから, b は3の倍数である。

よって, ③より $b=0, 3$

[1] $b=0$ のとき

⑤を満たす整数 a は存在しないから不適。

[2] $b=3$ のとき

⑤から $a=2$ これは③を満たす。

以上から $a=2, b=3, c=1$

したがって $N = 25 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 66$

4

【解答】 (1) 72個 (2) 148個

【解説】

(1) 1から150までの自然数のうち,

3の倍数の個数は, 150を3で割った商で 50

$3^2 (=9)$ の倍数の個数は, 150を 3^2 で割った商で 16

$3^3 (=27)$ の倍数の個数は, 150を 3^3 で割った商で 5

$3^4 (=81)$ の倍数の個数は, 150を 3^4 で割った商で 1

よって, N を素因数分解したときの素因数3の個数は

$$50 + 16 + 5 + 1 = 72 \text{ (個)}$$

(2) 末尾に続く0の個数は, $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 600$ に含まれる因数10の個数であり, 10は $2 \cdot 5$ と素因数分解される。

1, 2, 3, …… , 600に含まれる素因数2の個数は, 明らかに素因数5の個数より多いから, 因数10の個数は素因数5の個数と一致する。

1から600までの自然数のうち,

5の倍数の個数は, 600を5で割った商で 120

$5^2 (=25)$ の倍数の個数は, 600を 5^2 で割った商で 24

$5^3 (=125)$ の倍数の個数は, 600を 5^3 で割った商で 4

よって, 素因数5の個数は, 全部で $120 + 24 + 4 = 148$ (個)

したがって, N を計算すると, 末尾には0が連続して148個並ぶ。

5

【解答】 $n=3, 11$

【解説】

$$n^2 - 14n + 40 = (n-4)(n-10)$$

$$= (4-n)(10-n)$$

$n-4 > n-10, 4-n < 10-n$ であるから, $n^2 - 14n + 40$ が素数であるとき

$$n-10=1 \text{ または } 4-n=1$$

$$n-10=1 \text{ より } n=11 \quad 4-n=1 \text{ より } n=3$$

$n=11$ のとき $n^2 - 14n + 40 = 7 \cdot 1 = 7$ (素数)

$n=3$ のとき $n^2 - 14n + 40 = 1 \cdot 7 = 7$ (素数)

よって, $n^2 - 14n + 40$ が素数となるような n は $n=3, 11$

6 ★★★

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $a-2b, b$ の最大公約数を k とすると, 互いに素な自然数 m, n を用いて $a-2b = km, b = kn$

と表される。

$a-2b = km$ から $a = km + 2b = km + 2 \cdot kn = k(m + 2n)$

$m + 2n$ は自然数であるから, k は a の約数である。

よって, k は a と b の公約数である。

a, b は互いに素であるから, $k=1$ のみ。

よって, $a-2b$ と b の公約数は1だけであるから, $a-2b$ と b の最大公約数は1

したがって, $a-2b$ と b は互いに素である。

(2) $2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数を g とすると

$$2n-1 = ga, 2n+1 = gb \text{ (} a, b \text{ は互いに素である自然数)}$$

と表される。この2式から n を消去して $2 = g(b-a)$

$2n-1 < 2n+1$ より $b-a > 0$ であり, g, a, b は自然数であるから

$$g=1 \text{ または } 2$$

$2n-1, 2n+1$ は奇数であるから g も奇数である。よって $g=1$

ゆえに, $2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数は1であるから, $2n-1$ と $2n+1$ は互いに素である。

第4講 例題演習

1

- 【解答】 (1) (ア) 順に 101, 520
 (イ) 順に 11100₍₂₎, 1001₍₃₎
 (2) (ア) 9.656 (イ) 0.111₍₅₎

【解説】

(1) (ア) 1100101₍₂₎
 $= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ (1) (イ)
 $= 101$
 $201021_{(3)} = 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$
 $= 520$
 (イ) 右の計算から
 $28 = 11100_{(2)}$
 $28 = 1001_{(3)}$

(2) (ア) $14.312_{(5)} = 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 3 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5^2} + 2 \cdot \frac{1}{5^3} = 5 + 4 + \frac{3}{5} + \frac{1}{25} + \frac{2}{125}$
 $= 9 + \frac{82}{125} = 9.656$

(イ) $0.248 \times 5 = 1.24$
 $(1.24 - 1) \times 5 = 1.2$
 $(1.2 - 1) \times 5 = 1$
 よって、0.248 を 5 進法で表すと
 $0.111_{(5)}$

2

- 【解答】 (1) 1100₍₃₎ (2) 3203₍₅₎ (3) 12633₍₇₎ (4) 325₍₆₎ (5) 1667₍₈₎
 (6) 33114₍₅₎ (7) 6523₍₈₎ (8) 111222₍₄₎ (9) 30423₍₅₎ (10) 32₍₇₎
 (11) 121₍₅₎ (12) 421₍₅₎

【解説】

(1) $201_{(3)} + 122_{(3)} = 1100_{(3)}$

$$\begin{array}{r} 201 \\ + 122 \\ \hline 1100 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 17 \\ \hline 36 \end{array}$$

(2) $1044_{(5)} + 2104_{(5)} = 3203_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 1044 \\ + 2104 \\ \hline 3203 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 149 \\ + 279 \\ \hline 428 \end{array}$$

(3) $6354_{(7)} + 3246_{(7)} = 12633_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 6354 \\ + 3246 \\ \hline 12633 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 2244 \\ + 1161 \\ \hline 3405 \end{array}$$

(4) $453_{(6)} - 124_{(6)} = 325_{(6)}$

$$\begin{array}{r} 453 \\ - 124 \\ \hline 325 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 177 \\ - 52 \\ \hline 125 \end{array}$$

(5) $7654_{(8)} - 5765_{(8)} = 1667_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 7654 \\ - 5765 \\ \hline 1667 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 4012 \\ - 3061 \\ \hline 951 \end{array}$$

(6) $42031_{(5)} - 3412_{(5)} = 33114_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 42031 \\ - 3412 \\ \hline 33114 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 2766 \\ - 482 \\ \hline 2284 \end{array}$$

(7) $573_{(8)} \times 11_{(8)} = 6523_{(8)}$

$$\begin{array}{r} 573 \\ \times 11 \\ \hline 573 \\ 573 \\ \hline 6523 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 379 \\ \times 9 \\ \hline 3411 \end{array}$$

(8) $3012_{(4)} \times 13_{(4)} = 111222_{(4)}$

$$\begin{array}{r} 3012 \\ \times 13 \\ \hline 21102 \\ 3012 \\ \hline 111222 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 7 \\ \hline 1386 \end{array}$$

(9) $1032_{(5)} \times 24_{(5)} = 30423_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 1032 \\ \times 24 \\ \hline 4233 \\ 2114 \\ \hline 30423 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times 14 \\ \hline 568 \\ 142 \\ \hline 1988 \end{array}$$

(10) $1163_{(7)} \div 25_{(7)} = 32_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 25 \overline{) 1163} \\ \underline{111} \\ 53 \\ \underline{53} \\ 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 23 \\ 19 \overline{) 437} \\ \underline{38} \\ 57 \\ \underline{57} \\ 0 \end{array}$$

(11) $3041_{(5)} \div 21_{(5)} = 121_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 21 \overline{) 3041} \\ \underline{21} \\ 44 \\ \underline{42} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 36 \\ 11 \overline{) 396} \\ \underline{33} \\ 66 \\ \underline{66} \\ 0 \end{array}$$

(12) $43021_{(5)} \div 101_{(5)} = 421_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 421 \\ 101 \overline{) 43021} \\ \underline{404} \\ 212 \\ \underline{202} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

10 進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 111 \\ 26 \overline{) 2886} \\ \underline{26} \\ 26 \\ \underline{26} \\ 0 \end{array}$$

3

- 【解答】 (1) $a=0, b=4, N=19$ (2) $a=3, b=3, c=4, N=220$

【解説】

(1) 2 進数 $10a11_{(2)}$ において $0 \leq a \leq 1$

5 進数 $3b_{(5)}$ において $0 \leq b \leq 4$

$10a11_{(2)}$, $3b_{(5)}$ のそれぞれを 10 進法で表すと

$$10a11_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 4a + 19$$

$$3b_{(5)} = 3 \cdot 5 + b = b + 15$$

よって $N = 4a + 19 = b + 15$

整理すると $4(a+1) = b$

ゆえに $a=0$ のとき $b=4$ これは $0 \leq b \leq 4$ を満たす。

$a=1$ のとき $b=8$ これは $0 \leq b \leq 4$ を満たさない。

したがって $a=0, b=4$ また $N=4 \cdot 0 + 19 = 19$

(2) $abc_{(8)}$ と $cba_{(7)}$ はともに 3 桁の数であり、底について $7 < 8$ であるから

$$1 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6$$

$$abc_{(8)} = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c \cdot 8^0 = 64a + 8b + c \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$cba_{(7)} = c \cdot 7^2 + b \cdot 7 + a \cdot 7^0 = 49c + 7b + a$$

この 2 数は同じ数であるから $64a + 8b + c = 49c + 7b + a$

ゆえに $b = 48c - 63a$ すなわち $b = 3(16c - 21a) \quad \dots \dots \textcircled{2}$

b は 3 の倍数であり、 $0 \leq b \leq 6$ から $b=0, 3, 6$

[1] $b=0$ のとき、 $\textcircled{2}$ から $16c = 21a$

16 と 21 は互いに素であるから、 k を整数とすると $a = 16k, c = 21k$

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq c \leq 6$ を満たす整数 k は存在しない。

したがって、 $b=0$ は不適である。

[2] $b=3$ のとき、 $\textcircled{2}$ から $1 = 16c - 21a$

ゆえに $16c = 21a + 1 \quad \dots \dots \textcircled{3}$

この等式の左辺は偶数であるから、 $21a$ は奇数である。

よって、 a は奇数であり、 $1 \leq a \leq 6$ から $a=1, 3, 5$
 ③に $a=1, 3, 5$ を代入すると、それぞれ $16c=22, 16c=64, 16c=106$
 これらを解いて、 $1 \leq c \leq 6$ を満たすものは $c=4$
 したがって $a=3, c=4$

[3] $b=6$ のとき、②から $2=16c-21a$

ゆえに $21a=2(8c-1)$

21 と 2 は互いに素であるから、 $8c-1$ は 21 の倍数である。

$1 \leq c \leq 6$ より、 $7 \leq 8c-1 \leq 47$ であるから $8c-1=21, 42$

この等式を満たす整数 c は存在しない。

したがって、 $b=6$ は不適である。

以上から $a=3, b=3, c=4$

この値を①に代入して $N=64 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 4 = 220$

4

【解答】 (1) 18回 (2) 6個

【解説】

(1) $20!$ が 2 で割り切れる回数は、 $20!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。 1 から 20 までの自然数のうち、

2 の倍数の個数は、 20 を 2 で割った商で 10

2^2 の倍数の個数は、 20 を 2^2 で割った商で 5

2^3 の倍数の個数は、 20 を 2^3 で割った商で 2

2^4 の倍数の個数は、 20 を 2^4 で割った商で 1

$20 < 2^5$ であるから、 $2^n (n \geq 5)$ の倍数はない。

よって、素因数 2 の個数は、全部で $10+5+2+1=18$ (個)

したがって、 $20!$ は 2 で 18 回割り切れる。

(2) $25!$ を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は、 $25!$ を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。 1 から 25 までの自然数のうち、

5 の倍数の個数は、 25 を 5 で割った商で 5

5^2 の倍数の個数は、 25 を 5^2 で割った商で 1

$25 < 5^3$ であるから、 $5^n (n \geq 3)$ の倍数はない。

よって、素因数 5 の個数は、全部で $5+1=6$ (個)

したがって、 0 は 6 個連続して現れる。

5

【解答】 (1) $n=7, 21$ (2) $n=1, 21$

【解説】

(1) $n^2 - 28n + 160 = (n-8)(n-20)$
 $= (8-n)(20-n)$

$n-8 > n-20, 8-n < 20-n$ であるから、 $n^2 - 28n + 160$ が素数であるとき

$n-20=1$ または $8-n=1$

$n-20=1$ より $n=21$ $8-n=1$ より $n=7$

$n=21$ のとき $n^2 - 28n + 160 = 13 \cdot 1 = 13$ (素数)

$n=7$ のとき $n^2 - 28n + 160 = 1 \cdot 13 = 13$ (素数)

よって、 $n^2 - 28n + 160$ が素数となるような n は $n=7, 21$

(2) $n^2 - 22n + 40 = (n-2)(n-20)$

n は自然数であるから $n-20 < n-2$

ゆえに、 $n^2 - 22n + 40$ が素数であるとき

$n-20 > 0, n-2 > 0$ ならば $n-20=1$ すなわち $n=21$

$n-20 < 0, n-2 < 0$ ならば $n-2=-1$ すなわち $n=1$

$n=1$ のとき $n^2 - 22n + 40 = (-1) \cdot (-19) = 19$ (素数)

$n=21$ のとき $n^2 - 22n + 40 = 19 \cdot 1 = 19$ (素数)

よって、 $n^2 - 22n + 40$ が素数となるような n は $n=1, 21$

6

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) $a+2b, b$ の最大公約数を k とすると、互いに素な自然数 m, n を用いて

$$a+2b=km, \quad b=kn$$

と表される。

$a+2b=km$ から $a=km-2b=km-2 \cdot kn=k(m-2n)$

$m-2n$ は自然数であるから、 k は a の約数である。

よって、 k は a と b の公約数である。

a, b は互いに素であるから、 $k=1$ のみ。

よって、 $a+2b$ と b の公約数は 1 だけであるから、 $a+2b$ と b の最大公約数は 1

したがって、 $a+2b$ と b は互いに素である。

(2) $4n-1$ と $4n+1$ の最大公約数を g とすると、 $4n-1=ga, 4n+1=gb$ (a, b は互いに素な自然数で、 $a < b$) と表される。

この2式から n を消去して $2=g(b-a)$

$b-a > 0$ であり、 g, a, b は自然数であるから $g=1$ または 2

$4n-1$ と $4n+1$ は奇数であるから g も奇数である。よって $g=1$

ゆえに、 $4n-1$ と $4n+1$ の最大公約数は 1 であるから、 $4n-1$ と $4n+1$ は互いに素である。

(3) a と $ka+1$ の最大公約数を d とし、

$$a=md, \quad ka+1=nd \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数})$$

とする。

このとき $kmd+1=nd$

すなわち $(n-km)d=1$

$n-km, d$ は自然数であるから、この等式を満たすのは、

$n-km=1, d=1$ の場合だけである。

したがって、 a と $ka+1$ の最大公約数が 1 となるから、 a と $ka+1$ は互いに素である。

1

【解答】 (1) $11111101_{(2)}$ (2) $1111_{(2)}$

【解説】

(1) $10111_{(2)} \times 1011_{(2)}$

$$= 11111101_{(2)}$$

10進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 10111_{(2)} \\ \times 1011_{(2)} \\ \hline 10111_{(2)} \\ 10111_{(2)} \\ 10111_{(2)} \\ \hline 11111101_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times 11 \\ \hline 23 \\ 23 \\ \hline 253 \end{array}$$

(2) $11000011_{(2)} \div 1101_{(2)}$

$$= 1111_{(2)}$$

10進法で計算すると

$$\begin{array}{r} 1111_{(2)} \\ 1101_{(2)} \overline{) 11000011_{(2)}} \\ \underline{1101}_{(2)} \\ 10110_{(2)} \\ \underline{1101}_{(2)} \\ 10011_{(2)} \\ \underline{1101}_{(2)} \\ 1101_{(2)} \\ \underline{1101}_{(2)} \\ 0_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 13 \overline{) 195} \\ \underline{13} \\ 65 \\ \underline{65} \\ 0 \end{array}$$

2

【解答】 500個

【解説】

5進法で表したとき、4桁となる数は、 $\square\square\square\square_{(5)}$ の \square に $1, 2, 3, 4$ のどれかを入れ、3個の \square のそれぞれに $0, 1, 2, 3, 4$ のどれかを入れた数である。

このような数の個数は $4 \times 5^3 = 500$ (個)

3

【解答】 $64 \leq N < 128$ のとき 7桁、 $128 \leq N < 256$ のとき 8桁、 $256 \leq N \leq 511$ のとき 9桁

【解説】

8進法で表すと 3桁になる整数を N とする。

N のうち、最大の数は $777_{(8)}$ 、最小の数は $100_{(8)}$ である。

$$777_{(8)} = 7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 = 511$$

511 を 2進法で表すと $511 = 111111111_{(2)}$

よって、 511 を 2進法で表すと 9桁の数である。

$$100_{(8)} = 1 \cdot 8^2 = 64$$

64 を 2進法で表すと $64 = 1000000_{(2)}$

よって、 64 を 2進法で表すと 7桁の数である。

また、 $2 \times 64 = 128 = 10000000_{(2)}$ 、 $2 \times 128 = 256 = 100000000_{(2)}$

したがって、 N を 2進法で表したときの桁数は

$$64 \leq N < 128 \text{ のとき } 7 \text{ 桁,}$$

$128 \leq N < 256$ のとき 8桁,
 $256 \leq N \leq 511$ のとき 9桁

4

解答 $n=8$

解説

条件から $145 = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n^1 + 1 \cdot n^0$

整理すると $2n^2 + 2n - 144 = 0$ すなわち $2(n+9)(n-8) = 0$

n は 3 以上の自然数であるから $n=8$

5

解答 (1) 順に 288, 184 (2) 順に $BB_{(16)}, CD4_{(16)}$

解説

(1) $120_{(16)} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 256 + 32 = 288$

$B8_{(16)} = 11 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 176 + 8 = 184$

(2) $10111011_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$= 2^4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = (2^3 + 2 + 1) \cdot 2^4 + 8 + 2 + 1$

$= 11 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = BB_{(16)}$

$6324_{(8)} = 6 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 6 \cdot (2^3)^3 + 3 \cdot (2^3)^2 + 2 \cdot 2^3 + 4$

$= 6 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2^6 + 2^4 + 4 = 6 \cdot (2^4)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 + 2^4 + 4$

$= 12 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 4 = CD4_{(16)}$

別解 それぞれの数を 10 進法で表し, 16 進数に直す

(1) $10111011_{(2)} = 187$ (2) $6324_{(8)} = 3284$

$\begin{array}{r} 16 \overline{) 187} \text{ 余り} \\ 16 \overline{) 11} \dots 11 \\ \underline{ 0} \dots 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \overline{) 3284} \text{ 余り} \\ 16 \overline{) 205} \dots 4 \\ 16 \overline{) 12} \dots 13 \\ \underline{ 0} \dots 12 \end{array}$
---	---

よって $BB_{(16)}$

よって $CD4_{(16)}$

6

解答 (1) 7 (2) 18

解説

(1) $30!$ を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は, $30!$ を素因数分解したときの素因数 5 の個数に一致する。

1 から 30 までの自然数のうち,

5 の倍数の個数は, 30 を 5 で割った商で 6

5^2 の倍数の個数は, 30 を 5^2 で割った商で 1

$30 < 5^3$ であるから, $5^n (n \geq 3)$ の倍数はない。

よって, 素因数 5 の個数は, 全部で $6 + 1 = 7$ (個)

ゆえに, 0 は 7 個連続して現れるから $m=7$

(2) $2=10_{(2)}$ であるから, $20!$ を 2 進法で表したときの末尾に並ぶ 0 の個数は, $20!$ が 2 で割り切れる回数に一致する。

また, $20!$ が 2 で割り切れる回数は, $20!$ を素因数分解したときの素因数 2 の個数に一致する。

1 から 20 までの自然数のうち,

2 の倍数の個数は, 20 を 2 で割った商で 10

2^2 の倍数の個数は, 20 を 2^2 で割った商で 5

2^3 の倍数の個数は, 20 を 2^3 で割った商で 2

2^4 の倍数の個数は, 20 を 2^4 で割った商で 1

$20 < 2^5$ であるから, $2^n (n \geq 5)$ の倍数はない。

よって, 素因数 2 の個数は, 全部で $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ (個)

ゆえに, $20!$ は 2 で 18 回割り切れるから $n=18$

7

解答 略

解説

$\frac{2a+3b}{3a+4b}$ が既約分数でないとは仮定すると, $2a+3b$ と $3a+4b$ に 1 以外の公約数が存在する。それを g とすると

$$2a+3b = gh \quad \dots\dots ① \quad 3a+4b = gk \quad \dots\dots ②$$

と表される。ただし, h, k は自然数である。

$$① \times 3 - ② \times 2 \text{ から } b = g(3h - 2k) \quad \dots\dots ③$$

$$② \times 3 - ① \times 4 \text{ から } a = g(3k - 4h) \quad \dots\dots ④$$

③, ④において, $3h-2k, 3k-4h$ はともに整数であるから, a, b は公約数 g をもつ。

これは, a, b が互いに素な自然数であることに矛盾する。

したがって, $\frac{2a+3b}{3a+4b}$ は既約分数である。

1

解答 (1) 略 (2) 略

解説

$M_p = a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \dots + a_2 \cdot p + a_1$ (a_1, a_2, \dots, a_n は 0 以上 $p-1$ 以下の整数) とすると $m_p = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

また, 以下では, k は自然数とする。

(1) $M_{10} = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1$

10 を 9 で割ったときの余りは 1 であるから, 10^k を 9 で割ったときの余りは 1^k すなわち 1 である。

よって (M_{10} を 9 で割った余り) $= (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$ を 9 で割った余り)
 $= (m_{10}$ を 9 で割った余り)

したがって, M_{10} と m_{10} をそれぞれ 9 で割ったときの余りは一致する。

また, 10 を 3 で割ったときの余りは 1 であるから, 10^k を 3 で割ったときの余りは 1 である。

よって (M_{10} を 3 で割った余り) $= (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$ を 3 で割った余り)
 $= (m_{10}$ を 3 で割った余り)

したがって, M_{10} と m_{10} をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致する。

(2) [1] p が偶数のとき

$a_n \cdot p^{n-1}, a_{n-1} \cdot p^{n-2}, \dots, a_2 \cdot p$ はすべて偶数であるから, M_p が偶数であるための条件は, a_1 が偶数であること。

すなわち, M_p の一の位の数字が偶数であることである。

[2] p が奇数のとき

p^k を 2 で割ったときの余りは 1 であるから,

$$(M_p \text{ を } 2 \text{ で割った余り}) = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \text{ を } 2 \text{ で割った余り}) \\ = (m_p \text{ を } 2 \text{ で割った余り}) \quad \text{である。}$$

よって, M_p が偶数であるための条件は, m_p が偶数であることである。

以上により, 題意は証明された。

参考 [剰余系で考える] 以下では, k は自然数とする。

(1) $10 \equiv 1 \pmod{9}$ であるから $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{9}$

よって $a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1 \\ \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod{9}$

したがって, M_{10} と m_{10} をそれぞれ 9 で割ったときの余りは一致する。

次に, $10 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{3}$

よって $a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1 \\ \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod{3}$

したがって, M_{10} と m_{10} をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致する。

(2) [1] p が偶数のとき

$p \equiv 0 \pmod{2}$ であるから $p^k \equiv 0 \pmod{2}$

よって $a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \dots + a_2 \cdot p + a_1 \equiv a_1 \pmod{2}$

M_p が偶数であるための条件は, a_1 が偶数であること。

すなわち, M_p の一の位の数字が偶数であることである。

[2] p が奇数のとき

$p \equiv 1 \pmod{2}$ であるから $p^k \equiv 1 \pmod{2}$

第4講 レベルB

したがって $a_k p^{k-1} \equiv a_k \pmod{2}$

ゆえに $a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + \dots + a_2 \cdot p + a_1$
 $\equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod{2}$

よって、 M_p が偶数であるための条件は、 m_p が偶数であることである。

2

【解答】 略

【解説】

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$$

$$= (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

$n \geq 2$ であるから $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 \geq 3^2 + 1 = 10$

$$n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \geq 1^2 + 1 = 2$$

よって、 $n^4 + 4$ は2以上の2つの自然数の積で表される。

したがって、 $n^4 + 4$ は素数にならない。

3

【解答】 (1) 略 (2) 5で割ると3余る自然数 (3) 5で割ると2余る自然数

【解説】

(1) $(n^2 + 1) - (n + 2)(n - 2) = 5 \dots\dots$ ① とする。

$n + 2$ と $n^2 + 1$ の公約数を g とすると、①の左辺は g の倍数であり、右辺は5であるから、 g は5の約数である。

よって、 g すなわち $n + 2$ と $n^2 + 1$ の公約数は1または5に限る。

(2) $n + 2$ と $n^2 + 1$ の1以外の公約数は、(1)より5のみであるから、 $n + 2 = 5k$ (k は自然数) とおける。よって $n = 5k - 2$

このとき、①から $n^2 + 1$ も5を約数にもち、確かに1以外に公約数5をもつ。

したがって、 n は、5で割ると3余る自然数である。

(3) 恒等式 $4(n^2 + 1) - (2n + 1)(2n - 1) = 5 \dots\dots$ ② が成り立つ。

よって、(1)と同様にして、 $2n + 1$ と $n^2 + 1$ の公約数は1または5に限る。

したがって、 $2n + 1$ と $n^2 + 1$ が1以外の公約数をもつとき、それは5に限るから、 $2n + 1 = 5m$ (m は自然数) とおける。

このとき、②および4と5が互いに素であることから、 $n^2 + 1$ も5を約数にもち、確かに1以外の公約数5をもつ。

ここで、 $2n + 1 = 5m$ において、 $2n + 1$ は奇数であるから、 m は奇数である。

よって $2n + 1 = 5(2l - 1)$ (l は自然数) 整理して $n = 5l - 3$

したがって、 n は、5で割ると2余る自然数である。

4

【解答】 (1) $f(2^k) = 1, f(2^k - 1) = k$ (ア) $1000101_{(2)}$ (イ) 3

(3) 7, 11, 13, 14 (4) 57×2^{1999}

【解説】

(1) $f(2^k) = f(2^{k-1}) = \dots\dots = f(2) = f(1) = f(0) + 1 = 1$

$$f(2^k - 1) = f\left(\frac{2^k - 2}{2}\right) + 1 = f(2^{k-1} - 1) + 1$$

よって $f(2^k - 1) = f(2 - 1) + (k - 1) = f(1) + k - 1 = k$

(2) (ア) $69 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^2 + 1 = 1000101_{(2)}$

(イ) $f(69) = f(34) + 1 = f(17) + 1 = f(8) + 2 = 1 + 2 = 3$

(3) $f(n)$ は n を2進法で表した数に含まれる1の個数を表す。

したがって、 $f(n) = 3$ となる n を小さいものから順に4つ求めると

$$111_{(2)} = 7, 1011_{(2)} = 11, 1101_{(2)} = 13, 1110_{(2)} = 14$$

(4) (3)と同様に考えて、 $f(n) = 4$ となる n を大きい順に2進法で書いてみると

1番目 $11110 \dots\dots 0_{(2)}$,

0が2001個

2番目 $111010 \dots\dots 0_{(2)}$,

0が2000個

3番目 $1110010 \dots\dots 0_{(2)}$

0が1999個

したがって $1 \times 2^{2004} + 1 \times 2^{2003} + 1 \times 2^{2002} + 1 \times 2^{1999} = (32 + 16 + 8 + 1) \times 2^{1999}$
 $= 57 \times 2^{1999}$