

第6章 相似 例題

1★

- (1) 四角形 ABCD \sim 四角形 HGFE
 (2) (ア) 辺 AB と対応する辺は 辺 EF
 (イ) $\angle G$ と対応する角は $\angle C$

2★

- (1) 2つの三角形の対応する辺の長さの比は、 $BC : EF = 5 : 8$ であるから、
 相似比は $5 : 8$
 (2) (1)より、相似比は $5 : 8$ であるから $AB : DE = 5 : 8$
 $DE = x$ cm とすると $4 : x = 5 : 8$ これを解くと $x = \frac{32}{5}$
 よって $DE = \frac{32}{5}$ cm
 (3) 相似な図形では、対応する角の大きさは等しいから $\angle C = \angle F = 47^\circ$

3★

- ① $\triangle ABC$ と $\triangle PRQ$ において
 $AB : PR = 8 : 4 = 2 : 1$,
 $BC : RQ = 6 : 3 = 2 : 1$,
 $CA : QP = 9 : 4.5 = 2 : 1$
 3組の辺の比がすべて等しいから $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$
 ② $\triangle DEF$ と $\triangle OMN$ において
 $DF : ON = 6 : 3 = 2 : 1$,
 $EF : MN = 4 : 2 = 2 : 1$,
 $\angle F = \angle N = 60^\circ$
 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle DEF \sim \triangle OMN$
 ③ $\triangle GHI$ において
 $\angle H = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$
 $\triangle GHI$ と $\triangle LKJ$ において
 $\angle I = \angle J = 50^\circ$, $\angle H = \angle K = 60^\circ$
 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle GHI \sim \triangle LKJ$

4★★

- (1) $\triangle ACE$ と $\triangle BDE$ において
 $AE : BE = CE : DE = 1 : 2$
 $\angle AEC = \angle BED$ (対頂角)
 よって、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ACE \sim \triangle BDE$
 (2) $\triangle ADE$ と $\triangle ACB$ において
 $\angle DAE = \angle CAB$ (共通)
 $\angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$
 よって、2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$
 (3) $\triangle ABD$ と $\triangle CBA$ において
 $CB = 9 + 3 = 12$ であるから
 $AB : CB = BD : BA = 1 : 2$
 また $\angle ABD = \angle CBA$ (共通)
 よって、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$

5★★

- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において
 $\angle ABC = \angle AED$
 $\angle BAC = \angle EAD$ (共通)
 よって、2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABC \sim \triangle AED$
 相似な三角形の対応する辺の長さの比は等しいから
 $AB : AE = AC : AD$
 $(6+x) : 9 = 12 : 6$
 これを解いて $x = 12$
 (2) $\triangle ABD$ と $\triangle ACB$ において
 $AB : AC = AD : AB = 3 : 4$ ……①
 $\angle BAD = \angle CAB$ (共通)
 よって、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$
 ①より、相似比は $3 : 4$ であるから
 $BD : CB = 3 : 4$
 $x : 18 = 3 : 4$
 これを解いて $x = \frac{27}{2}$

6★

- $\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ において
 仮定より $\angle BCA = \angle DCE$ ……①
 また、 $BA = BE$ より $\angle BAC = \angle BEA$
 対頂角は等しいから $\angle BEA = \angle DEC$
 よって $\angle BAC = \angle DEC$ ……②
 ①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

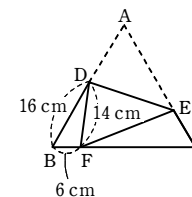
7★★★

- $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において
 $\angle ACB = \angle ADE$ (仮定)
 $\angle CAB = \angle DAE$ (共通)
 よって、2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABC \sim \triangle AED$
 したがって、 $AB : AE = AC : AD$ であるから
 $AD : AE = AC : AB$ ……①
 $\triangle ADC$ と $\triangle AEB$ において
 $\angle CAD = \angle BAE$ (共通) ……②
 ①, ②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ADC \sim \triangle AEB$

8★★

- (1) $\triangle BFD$ と $\triangle CEF$ において
 $\triangle ABC$ は正三角形であるから
 $\angle DBF = \angle FCE = 60^\circ$ ……①
 $\triangle BFD$ において、内角と外角の関係から
 $\angle BDF + \angle DBF = \angle DFC$
 よって $\angle BDF + \angle DBF = \angle CFE + \angle DFE$

- $\angle DBF = \angle DFE = 60^\circ$ であるから
 $\angle BDF = \angle CFE$ ……②
 ①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle BFD \sim \triangle CEF$
 (2) $\triangle FED$ をもどすと $\triangle AED$ と重なるから
 $AD = FD = 14$ cm
 よって $AB = 14 + 16 = 30$ (cm)
 $\triangle ABC$ は正三角形であるから
 $AC = BC = AB = 30$ cm
 $\triangle BFD \sim \triangle CEF$ より $BD : CF = BF : CE$
 $16 : (30 - 6) = 6 : CE$
 $CE = 9$ cm
 したがって $AE = 30 - 9 = 21$ (cm)



9★

- (1) $AB : BD = AC : CE$
 $9 : x = 12 : 8$
 $12x = 72$
 よって $x = 6$
 また $AC : AE = BC : DE$
 $12 : 20 = 6 : y$
 $12y = 120$
 よって $y = 10$
 (2) $AD : AB = DE : BC$
 $16 : 20 = 24 : x$
 $16x = 480$
 よって $x = 30$
 また $AD : AB = AE : AC$
 $16 : 20 = y : 15$
 $20y = 240$
 よって $y = 12$

10★

- (1) $l \parallel m \parallel n$ より
 $5 : x = 4 : 8$
 よって $x = 10$
 (2) $l \parallel m \parallel n$ より
 $4 : (9 - 4) = x : 4$
 よって $x = \frac{16}{5}$
 (3) $l \parallel m \parallel n$ より
 $20 : 16 = (x - 20) : 20$
 $20 \times 20 = 16 \times (x - 20)$
 よって $x = 45$

11★★

BE//CFであるから

$$BE : CF = AE : AF$$

よって $x : 6 = AE : AF$ …… ①

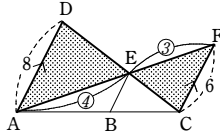
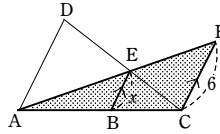
AD//CFであるから

$$AE : EF = AD : FC$$

よって $AE : EF = 8 : 6 = 4 : 3$ …… ②

①, ②から $x : 6 = 4 : (4+3)$

これを解くと $x = \frac{24}{7}$ 図



12★★

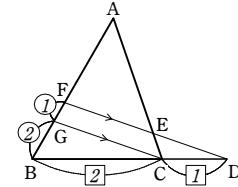
Cを通りDFに平行に引いた直線とABとの交点をGとする。

CG//DFであるから $BG : GF = BC : CD = 2 : 1$

よって $GF = \frac{1}{3}BF = \frac{2}{3}$ (cm)

FE//GCであるから

$$AE : EC = AF : FG = 3 : \frac{2}{3} = 9 : 2$$
 図



【参考】メネラウスの定理を利用すると、 $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ が成り立つことから

$$\frac{6}{2} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{3}{2} = 1$$

よって、 $\frac{CE}{EA} = \frac{2}{9}$ から $AE : EC = 9 : 2$

13★

(1) $BF = 6 - 4 = 2$ (cm)

AB//EF, AE//BFであるから、四角形ABFEは平行四辺形である。

よって $AE = BF = 2$ cm

AE//FCであるから $AG : GC = AE : FC$

したがって $AG : GC = 2 : 4 = 1 : 2$

(2) $EF = AB = 4$ cm

AE//FCであるから $EG : GF = AE : FC$

よって $EG : GF = 1 : 2$

したがって、 $EG = \frac{1}{1+2}EF = \frac{1}{3}EF$ であるから $EG = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ (cm)

14★★

辺DAの延長と線分CEの延長の交点をHとする。

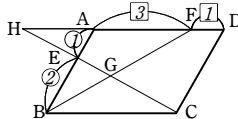
HF//BCであるから $FG : GB = HF : BC$

HA//BCであるから $HA : BC = AE : EB = 1 : 2$

ここで、辺BCの長さを a とすると $HA = \frac{1}{2}a$

また、 $AD = BC$ であるから $AF = \frac{3}{4}a$

よって $HF = HA + AF = \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}a = \frac{5}{4}a$



したがって $FG : GB = HF : BC = \frac{5}{4}a : a = 5 : 4$ 図

15★

(1) $\triangle ABC$ において、ADは $\angle A$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$$5 : x = 10 : 8$$

$$x \times 10 = 5 \times 8$$

よって $x = 4$

(2) $\triangle ABC$ において、ADは $\angle A$ の外角の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$$(5+x) : x = 8 : 6$$

$$(5+x) \times 6 = x \times 8$$

よって $x = 15$

16★

(1) $\triangle CBD$ において、点E, Fは、それぞれ辺CD, CBの中点であるから、中点連結定理により

$$EF // BD \quad \dots\dots ①$$

$$EF = \frac{1}{2}BD$$

よって $BD = 2EF = 16$ (cm)

(2) $\triangle AEF$ において、①より $DG // EF$ であるから

$$DG : EF = AD : AE = 1 : 2$$

よって $DG = \frac{1}{2}EF = 4$ (cm)

17★★

BとDを結ぶ。

$\triangle ABD$ において、中点連結定理により

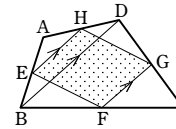
$$EH // BD, EH = \frac{1}{2}BD$$

$\triangle CDB$ において、中点連結定理により

$$FG // BD, FG = \frac{1}{2}BD$$

したがって $EH // FG, EH = FG$

よって、1組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形EFGHは平行四辺形である。 図



18★★

$\triangle ADF \sim \triangle ABC$ であり、相似比は $AF : AC = 6 : (6+8) = 3 : 7$

よって $\triangle ADF : \triangle ABC = 3^2 : 7^2 = 9 : 49$

したがって $\triangle ADF = \frac{9}{49} \triangle ABC = \frac{9}{49} \times 98 = 18$ (cm²)

また、 $\triangle FEC \sim \triangle ABC$ であり、相似比は $FC : AC = 8 : (6+8) = 4 : 7$

よって $\triangle FEC : \triangle ABC = 4^2 : 7^2 = 16 : 49$

したがって $\triangle FEC = \frac{16}{49} \triangle ABC = \frac{16}{49} \times 98 = 32$ (cm²)

よって (四角形BEFD) = $\triangle ABC - \triangle ADF - \triangle FEC = 98 - 18 - 32 = 48$ (cm²)

19★★

3等分された立体を、上から順にA, B, Cとする。また、AとBを合わせた円錐をD, もとの円錐をEとする。

$A \sim D$ で、相似比は1:2であるから

$$(A \text{の体積}) : (D \text{の体積}) = 1^3 : 2^3 = 1 : 8 \quad \dots\dots ①$$

$A \sim E$ で、相似比は1:3であるから

$$(A \text{の体積}) : (E \text{の体積}) = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

Eの体積が 54π cm³ であるから

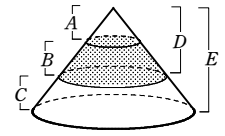
$$(A \text{の体積}) = \frac{1}{27} \times (E \text{の体積}) = \frac{1}{27} \times 54\pi = 2\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

よって、①から

$$(D \text{の体積}) = 8 \times (A \text{の体積}) = 8 \times 2\pi = 16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

したがって (Bの体積) = (Dの体積) - (Aの体積)

$$= 16\pi - 2\pi = 14\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



第6章 相似 例題演習

1

- (1) 四角形 ABCD ∽ 四角形 ILKJ
 (2) (ア) 辺 BC と対応する辺は 辺 LK
 (イ) 辺 IJ と対応する辺は 辺 AD
 (ウ) ∠C と対応する角は ∠K
 (エ) ∠I と対応する角は ∠A

2

- (1) 2つの四角形の対応する辺の長さの比は、 $BC : FG = 10 : 5 = 2 : 1$ であるから、相似比は $2 : 1$
 (2) (1)より、相似比は $2 : 1$ であるから $CD : GH = 2 : 1$
 $GH = x$ cm とすると $8 : x = 2 : 1$ これを解くと $x = 4$
 よって $GH = 4$ cm
 (3) 相似な図形では、対応する角の大きさは等しいから $\angle H = \angle D$
 ここで、四角形 ABCD において
 $\angle D = 360^\circ - (104^\circ + 90^\circ + 107^\circ) = 59^\circ$
 よって $\angle H = 59^\circ$

3

- [1] $\triangle ABC$ と $\triangle XWV$ において
 $AB : XW = 2 : 3, CA : VX = 3 : 4.5 = 2 : 3, \angle A = \angle X = 70^\circ$
 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle XWV$
 [2] $\triangle DEF$ と $\triangle TSU$ において
 $DE : TS = 4 : 6 = 2 : 3, EF : SU = 6 : 9 = 2 : 3, FD : UT = 8 : 12 = 2 : 3$
 3組の辺の比がすべて等しいから $\triangle DEF \sim \triangle TSU$
 [3] $\triangle GHI$ において $\angle G = 180^\circ - (78^\circ + 50^\circ) = 52^\circ$
 $\triangle GHI$ と $\triangle PQR$ において
 $\angle G = \angle P = 52^\circ, \angle I = \angle R = 50^\circ$
 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle GHI \sim \triangle PQR$
 ($\triangle JKL$ と $\triangle MNO$ は、どの三角形とも相似でない)

4

- (1) $\triangle ABE$ と $\triangle DCE$ において
 $AE : DE = BE : CE = 3 : 1,$
 $\angle AEB = \angle DEC$ (対頂角)
 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \sim \triangle DCE$
 (2) $\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ において $AC = 4 + 5 = 9$ (cm) であるから
 $AB : AD = AC : AB = 3 : 2$
 また $\angle BAC = \angle DAB$ (共通)
 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle ADB$
 (3) $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において
 $\angle BAC = \angle EAD$ (共通)
 $\angle ABC = \angle AED = 40^\circ$
 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle AED$

5

- (1) $\triangle AEC$ と $\triangle BED$ において
 $AE : BE = 6 : 12 = 1 : 2$
 $CE : DE = 4 : 8 = 1 : 2$

$$\angle AEC = \angle BED$$

よって、2組の辺の比が等しく、その間の角が等しいから

$$\triangle AEC \sim \triangle BED$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$AC : BD = 1 : 2$$

$$5 : x = 1 : 2$$

$$x \times 1 = 5 \times 2$$

よって $x = 10$

- (2) $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ において

$$\angle ADE = \angle ABC$$

$$\angle DAE = \angle BAC \text{ (共通)}$$

よって、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$DE : BC = AE : AC$$

$$6 : x = 8 : (8 + 4)$$

$$6 : x = 2 : 3$$

$$x \times 2 = 6 \times 3$$

よって $x = 9$

- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において

$$\angle ABC = \angle AED$$

$$\angle BAC = \angle EAD \text{ (共通)}$$

よって、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle AED$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$AB : AE = AC : AD$$

$$(4 + x) : 6 = 8 : 4$$

$$(4 + x) \times 4 = 6 \times 8$$

$$4 + x = 6 \times 2$$

よって $x = 8$

- (4) $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ において

$$AC : DC = 24 : 16 = 3 : 2$$

$$BC : AC = 36 : 24 = 3 : 2$$

$$\angle ACB = \angle DCA \text{ (共通)}$$

よって、2組の辺の比が等しく、その間の角が等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC$$

相似な三角形の対応する辺の比は等しいから

$$AB : DA = 3 : 2$$

$$21 : x = 3 : 2$$

$$3x = 21 \times 2$$

よって $x = 14$

6

$\triangle ABE$ と $\triangle CBD$ において

$$\text{仮定より } \angle ABE = \angle CBD \text{ …… ①}$$

また、 $CD = CE$ であるから、二等辺三角形 CDE の底角

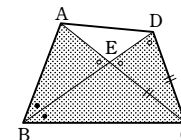
$$\text{について } \angle CED = \angle CDB \text{ …… ②}$$

対頂角は等しいから

$$\angle AEB = \angle CED \text{ …… ③}$$

$$\text{②, ③より } \angle AEB = \angle CDB \text{ …… ④}$$

①, ④より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ 図



7

[証明] $\triangle AEB$ と $\triangle ADC$ において

$$\angle AEB = \angle ADC, \angle EAB = \angle DAC \text{ (共通)}$$

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle AEB \sim \triangle ADC$ …… ①

$\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において

$$\text{①から } AB : AC = AE : AD$$

$$\text{よって } AB : AE = AC : AD$$

$$\text{また } \angle CAB = \angle DAE \text{ (共通)}$$

したがって、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle AED \text{ 図}$$

8

(1) $\triangle ACQ$ と $\triangle QBP$ において

$$\angle ACQ = \angle QBP = 60^\circ \text{ …… ①}$$

$\triangle ACQ$ において、内角と外角の関係から

$$\angle CAQ + \angle ACQ = \angle BQA$$

$$\angle CAQ + 60^\circ = \angle BQP + 60^\circ$$

$$\text{よって } \angle CAQ = \angle BQP \text{ …… ②}$$

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ACQ \sim \triangle QBP$

$$\text{(2) } BQ = 4 \text{ cm であるから } CQ = 10 - 4 = 6 \text{ (cm)}$$

$$\triangle ACQ \sim \triangle QBP \text{ から } CQ : BP = CA : BQ$$

$$6 : BP = 10 : 4 \text{ よって } BP = 2.4 \text{ cm}$$

9

- (1) $DE \parallel BC$ より
 $AD : DB = AE : EC$
 $6 : 3 = 4 : x$
 $6 \times x = 3 \times 4$
 よって $x = 2$
 また $AD : AB = DE : BC$
 $6 : 9 = y : 8$
 $9 \times y = 6 \times 8$
 よって $y = \frac{16}{3}$

- (2) $DE \parallel BC$ より
 $AB : AD = BC : DE$
 $x : (x+6) = 12 : 18$
 $x \times 18 = (x+6) \times 12$
 よって $x = 12$
 また $AB : BD = AC : CE$
 $12 : 6 = 9 : y$
 $12 \times y = 6 \times 9$
 よって $y = \frac{9}{2}$

- (3) $DE \parallel BC$ より
 $AE : AC = DE : BC$
 $8 : (x-8) = 16 : 20$
 $16 \times (x-8) = 8 \times 20$
 よって $x = 18$

10

- (1) $l \parallel m \parallel n$ より
 $3 : 9 = 4 : x$
 $3 \times x = 9 \times 4$
 よって $x = 12$
- (2) $l \parallel m \parallel n$ より
 $x : (24-x) = 6 : 9$
 $x : (24-x) = 2 : 3$
 $x \times 3 = (24-x) \times 2$
 よって $x = \frac{48}{5}$
- (3) $l \parallel m \parallel n$ より
 $4 : (x-4) = 3 : 5$
 $(x-4) \times 3 = 4 \times 5$
 よって $x = \frac{32}{3}$

11

- (1) $AB \parallel CD$ より $BE : EC = AB : CD$
 よって $BE : EC = 4 : 8 = 1 : 2$
 さらに、 $EF \parallel CD$ より $BF : FD = BE : EC$

$$4 : x = 1 : 2$$

$$4 \times 2 = x \times 1$$

$$x = 8$$

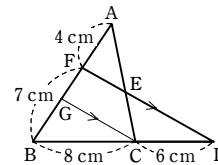
- したがって $x = 8$
 また、 $EF \parallel CD$ より $EF : CD = BE : BC$
 $y : 8 = 1 : (1+2)$
 $y \times 3 = 8 \times 1$
 よって $y = \frac{8}{3}$

- (2) 直線 CE と線分 BF の交点を G とする。
 $EF \parallel CD$ より $GF : GD = EF : CD$
 $x : (x+12) = 4 : 16$
 $x : (x+12) = 1 : 4$
 $x \times 4 = (x+12) \times 1$

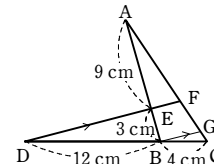
- したがって $x = 4$
 また、 $EF \parallel AB$ より $DF : DB = EF : AB$
 $12 : (12+4+y) = 4 : 7$
 $12 \times 7 = (16+y) \times 4$
 よって $y = 5$

12

- (1) C を通り DF に平行に引いた直線と AB との交点を G とする。
 $CG \parallel DF$ であるから $BG : GF = BC : CD = 4 : 3$
 よって $GF = \frac{3}{7}BF = 3$ (cm)
 $FE \parallel GC$ であるから $AE : EC = AF : FG = 4 : 3$



- (2) B を通り DF に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。
 $BG \parallel DF$ であるから $CG : GF = CB : BD = 1 : 3$
 よって $CG = \frac{1}{3}FG$
 よって $FC = FG + \frac{1}{3}FG = \frac{4}{3}FG$
 $EF \parallel BG$ であるから $AF : FG = AE : EB = 3 : 1$
 よって $AF = 3FG$
 よって $AF : FC = 3FG : \frac{4}{3}FG = 9 : 4$

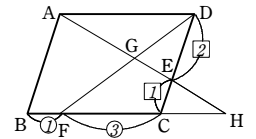


13

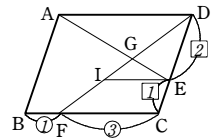
- (1) $EB \parallel DC$ であるから $BF : FD = EB : DC$ よって $BF : FD = 2 : (3+2) = 2 : 5$
- (2) $EB \parallel DC$ であるから $EF : FC = EB : DC$ よって $EF : FC = 2 : 5$
 よって $EF = \frac{2}{2+5}EC = \frac{2}{7}EC$ であるから $EF = \frac{2}{7} \times 14 = 4$ (cm)

14

- 線分 AE , BC を延長して、その交点を H とする。
 $AD \parallel CH$ であるから $AD : HC = DE : CE$
 よって $AD : HC = 2 : 1$
 よって $HC = \frac{1}{2}AD$ …… ①
 仮定から $BF : FC = 1 : 3$
 よって $FC = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}AD$ …… ②
 ①, ② から $FH = FC + CH = \frac{3}{4}AD + \frac{1}{2}AD = \frac{5}{4}AD$
 $AD \parallel FH$ であるから $DG : GF = AD : FH = AD : \frac{5}{4}AD = 4 : 5$



- 別解 点 E を通り、 AD , BC に平行な線分を引き、線分 DF との交点を I とする。
 $IE \parallel FC$ であるから $DI : IF = DE : EC = 2 : 1$
 すなわち $DI = \frac{2}{3}DF$ …… ③
 $IE : FC = DE : DC = 2 : (2+1) = 2 : 3$



- すなわち $IE = \frac{2}{3}FC$
 $FC = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}AD$ であるから $IE = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}AD = \frac{1}{2}AD$
 $AD \parallel IE$ であるから $DG : GI = AD : IE = AD : \frac{1}{2}AD = 2 : 1$
 すなわち $DG = \frac{2}{3}DI$
 これと ③ から $DG = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}DF = \frac{4}{9}DF$
 よって $GF = DF - DG = DF - \frac{4}{9}DF = \frac{5}{9}DF$
 よって $DG : GF = \frac{4}{9}DF : \frac{5}{9}DF = 4 : 5$

15

(1) $\triangle ABC$ において、 AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$$5 : x = 10 : 8$$

$$5 \times 8 = x \times 10$$

よって $x = 4$

(2) $\triangle ABC$ において、 AD は $\angle A$ の外角の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$$(3+x) : x = 5 : 3$$

$$(3+x) \times 3 = x \times 5$$

よって $x = \frac{9}{2}$

(3) $AB \parallel ED$ より $CD : CB = ED : AB$

よって、 $CD : CB = 6 : 18 = 1 : 3$ であるから $BD : DC = (3-1) : 1 = 2 : 1$

$\triangle ABC$ において、 AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

$$2 : 1 = 18 : x$$

$$2 \times x = 1 \times 18$$

したがって $x = 9$

16

(1) $\triangle ABE$ において、中点連結定理により

$$MD \parallel AE \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad MD = \frac{1}{2}AE \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②より $AE = 2MD = 8(\text{cm})$

(2) ①より、 $MD \parallel FE$ であるから $FE : MD = CE : CD$

$$FE : 4 = 1 : 2$$

よって $FE = 2$ したがって $AF = 8 - 2 = 6(\text{cm})$

17

$\triangle ABC$ において、中点連結定理により $MP \parallel BC$, $MP = \frac{1}{2}BC$

$\triangle DBC$ において、中点連結定理により $QN \parallel BC$, $QN = \frac{1}{2}BC$

したがって $MP \parallel QN$, $MP = QN$

よって、1組の対辺が平行でその長さが等しいから、四角形 $MPNQ$ は平行四辺形である。

18

四角形 $ARPQ$ は平行四辺形であるから $AB \parallel QP$, $AC \parallel RP$

よって $\triangle ABC \sim \triangle RBP \sim \triangle QPC$

また、 $BP : PC = 3 : 2$ であるから、相似比は $BC : BP : PC = (3+2) : 3 : 2 = 5 : 3 : 2$

したがって、面積比は $\triangle ABC : \triangle RBP : \triangle QPC = 5^2 : 3^2 : 2^2 = 25 : 9 : 4$

よって $\triangle RBP = \frac{9}{25} \triangle ABC$, $\triangle QPC = \frac{4}{25} \triangle ABC$

したがって、 $\square ARPQ$ の面積を S とおくと

$$S = \triangle ABC - \frac{9}{25} \triangle ABC - \frac{4}{25} \triangle ABC = \frac{12}{25} \triangle ABC$$

よって、 $\square ARPQ$ の面積は、 $\triangle ABC$ の面積の $\frac{12}{25}$ 倍である。

19

もとの円錐を A , A から一番下の立体を取り除いた円錐を B , 一番上の円錐を C とする。

A と B と C は相似で、その相似比は $3 : 2 : 1$

したがって、体積比は $3^3 : 2^3 : 1^3 = 27 : 8 : 1$

(1) 一番上の円錐の体積を $V \text{ cm}^3$ とすると

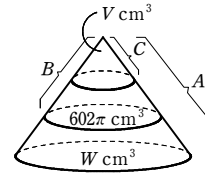
$$602\pi : V = (8-1) : 1 = 7 : 1$$

よって $V = 602\pi \times \frac{1}{7} = 86\pi (\text{cm}^3)$

(2) 一番下の立体の体積を $W \text{ cm}^3$ とする。

(1)の結果から $W : 86\pi = (27-8) : 1 = 19 : 1$

よって $W = 86\pi \times 19 = 1634\pi (\text{cm}^3)$



1

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

$\triangle ABD \sim \triangle ACE$ から

$$AB : AC = AD : AE$$

よって $AB : AD = AC : AE \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$$

$$\angle DAE = \angle DAC + \angle CAE$$

$\angle BAD = \angle CAE$ であるから

$$\angle BAC = \angle DAE \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

2

[1] $BD : DA = 6 : (3+9) = 1 : 2$, $BF : FC = 2 : (1+6) = 2 : 7$

よって、 DF と AC は平行でない。

[2] $BD : DA = 1 : 2$, $BG : GC = (2+1) : 6 = 1 : 2$

よって、 DG と AC は平行である。

[3] $BE : EA = (6+3) : 9 = 1 : 1$, $BF : FC = 2 : 7$

よって、 EF と AC は平行でない。

[4] $BE : EA = 1 : 1$, $BG : GC = 1 : 2$

よって、 EG と AC は平行でない。

以上から、辺 AC に平行な線分は DG

3

$EQ \parallel AD$ より $EQ : AD = BE : BA$

$$2 : x = 3 : (3+4)$$

よって $x = \frac{14}{3}$

$ER \parallel BC$ より $ER : BC = AE : AB$

$$(2+y) : 14 = 4 : (4+3)$$

よって $y = 6$

$RF \parallel AD$, $AD \parallel EF \parallel BC$ より

$$RF : AD = CF : CD = BE : BA$$

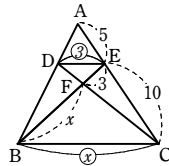
$$z : \frac{14}{3} = 3 : (3+4)$$

よって $z = 2$

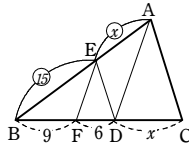
4

- (1) $BE \parallel CF$ であるから $BE : CF = AE : AF$
 よって $x : 2 = AE : AF$ ……①
 $AD \parallel CF$ であるから $AE : EF = AD : FC$
 よって $AE : EF = 4 : 2 = 2 : 1$ ……②
 ①, ② から $x : 2 = 2 : (2+1)$
 これを解くと $x = \frac{4}{3}$

- (2) $DE \parallel BC$ であるから
 $EF : BF = DE : BC$
 よって $3 : x = DE : BC$ ……①
 $DE \parallel BC$ であるから
 $DE : BC = AE : AC$
 $= 5 : (5+10) = 1 : 3$ ……②



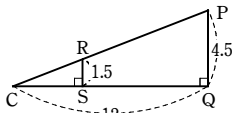
- ①, ② から $3 : x = 1 : 3$
 これを解くと $x = 9$
- (3) $AC \parallel ED$ であるから
 $BD : DC = BE : EA$
 よって $(9+6) : x = BE : EA$ ……①
 $AD \parallel EF$ であるから
 $BE : EA = BF : FD$
 よって $BE : EA = 9 : 6 = 3 : 2$ ……②



- ①, ② から $15 : x = 3 : 2$
 これを解くと $x = 10$

5

- 歩き始めてから x 秒後に A 君の影の先端がちょうど C に到達するとする。
 このとき、A 君を線分 RS とみると、
 $\triangle CRS \sim \triangle CPQ$ であるから
 $CS : CQ = RS : PQ$
 よって $(12-x) : 12 = 1.5 : 4.5$
 これを解いて $x = 8$ したがって 8 秒後



6

- $DF \parallel AC$ より、 $BF : FC = BD : DA = 3 : 2$ であるから $BF = \frac{3}{3+2}BC = \frac{3}{5}BC$
 $EG \parallel AB$ より、 $CG : GB = CE : EA = 4 : 3$ であるから $CG = \frac{4}{4+3}BC = \frac{4}{7}BC$
 よって $GF = \frac{3}{5}BC + \frac{4}{7}BC - BC = \frac{6}{35}BC$
 したがって $BC : GF = BC : \frac{6}{35}BC = 35 : 6$

7

- (1) $AD \parallel BG$ であるから $AD : BG = AE : BE = 2 : 1$ よって $AD = 2BG$
 $BC = AD$ であるから $CG = 2BG + BG = 3BG$
 また、 $DF = \frac{1}{2}AD$ であるから $DF = BG$
 したがって $DF : CG = BG : 3BG = 1 : 3$

$DF \parallel CG$ であるから $FH : HC = DF : CG = 1 : 3$

- (2) $DH : GH = DF : CG = 1 : 3$ であるから $DH = \frac{1}{1+3}DG = \frac{1}{4}DG$
 また、 $DE : GE = AE : BE = 2 : 1$ であるから $DE = \frac{2}{2+1}DG = \frac{2}{3}DG$
 よって $HE = \frac{2}{3}DG - \frac{1}{4}DG = \frac{5}{12}DG$
 したがって $DH : HE = \frac{1}{4}DG : \frac{5}{12}DG = 3 : 5$

8

- (1) $AG : GD = 3 : 2$ であるから
 $AG = \frac{3}{3+2}AD = \frac{3}{5}BC$
 よって $AG = \frac{3}{5} \times 7 = \frac{21}{5}$

- $EH \parallel AG$ であるから
 $EH : AG = BE : BA$
 $EH : \frac{21}{5} = 3 : (3+4)$
 $EH \times 7 = \frac{21}{5} \times 3$

- よって $EH = \frac{9}{5}$

- (2) $EF \parallel BC$ より
 $EF : BC = AE : AB$
 $EF : 7 = 4 : (4+3)$
 $EF \times 7 = 7 \times 4$

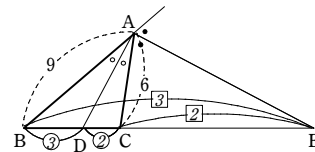
- よって $EF = 4$
 したがって $HF = EF - EH = 4 - \frac{9}{5} = \frac{11}{5}$

9

- (1) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから
 $BD : DC = AB : AC$
 よって $BD : DC = 9 : 6 = 3 : 2$
 したがって $BD = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5}$
 BI は $\angle ABD$ の二等分線であるから
 $AI : ID = BA : BD$
 よって $AI : ID = 9 : \frac{24}{5} = 15 : 8$

- (2) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから
 $BD : DC = AB : AC$
 よって $BD : DC = 9 : 6 = 3 : 2$
 したがって $BD = \frac{3}{5}BC$, $DC = \frac{2}{5}BC$ ……①

- AE は $\angle BAC$ の外角の二等分線であるから
 $BE : EC = AB : AC$



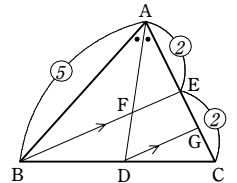
- よって $BE : EC = 3 : 2$
 すなわち $BC : CE = (3+2) : 2 = 5 : 2$
 したがって $CE = 2BC$ ……②
 ①, ② から $DE = DC + CE = \frac{2}{5}BC + 2BC = \frac{12}{5}BC$
 よって $BD : DE = \frac{3}{5}BC : \frac{12}{5}BC = 1 : 4$

10

- $\triangle ABM$ において、 MD は $\angle AMB$ の二等分線であるから
 $AD : DB = MA : MB$
 $\triangle ACM$ において、 ME は $\angle AMC$ の二等分線であるから
 $AE : EC = MA : MC$
 $MB = MC$ であるから $AD : DB = AE : EC$
 よって、 $DE \parallel BC$ である。

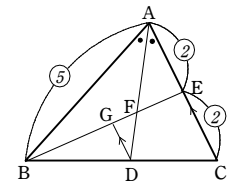
11

- $AE = 2a$ とすると、仮定から
 $EC = 2a$, $AB = 5a$
 $\triangle ABC$ において、 AD は $\angle A$ の二等分線であるから
 $BD : DC = AB : AC = 5a : (2a+2a) = 5 : 4$
 D を通り BE に平行に引いた直線と AC との交点を G とする。
 $DG \parallel BE$ であるから $EG : GC = BD : DC = 5 : 4$
 よって $EG = \frac{5}{5+4}EC = \frac{5}{9}EC = \frac{10}{9}a$
 $FE \parallel DG$ であるから $AF : FD = AE : EG = 2a : \frac{10}{9}a = 9 : 5$



別解 上の解答と同様に $AE = 2a$ とすると

- $EC = 2a$, $AB = 5a$
 $BD : DC = 5 : 4$
 D を通り AC に平行に引いた直線と BE との交点を G とする。
 $EC \parallel GD$ であるから
 $EC : GD = BC : BD = (5+4) : 5 = 9 : 5$
 $AE \parallel GD$, $AE = EC$ であるから
 $AF : FD = AE : GD = EC : GD = 9 : 5$



12

- $\triangle ABC$ において、中点連結定理により $ED \parallel AB$
 平行線の同位角は等しいから $\angle CED = \angle CAB = 80^\circ$
 $\triangle EDC$ において $\angle EDC = 180^\circ - (26^\circ + 80^\circ) = 74^\circ$
 よって、 $\triangle FBD$ において、内角と外角の関係から $\angle x = 74^\circ - 42^\circ = 32^\circ$

13

△ABC, △BCD, △CDE, △DEA, △EABにおいて、中点連結定理により
 $PQ = \frac{1}{2}AC, QR = \frac{1}{2}BD, RS = \frac{1}{2}CE, ST = \frac{1}{2}DA, TP = \frac{1}{2}EB$

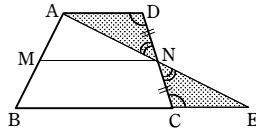
よって $PQ + QR + RS + ST + TP = \frac{1}{2}(AC + BD + CE + DA + EB)$
 $= \frac{1}{2} \times 30 = 15 \text{ (cm)}$

したがって、五角形PQRSTの周の長さは15 cmである。

14

(1) **[証明]** 直線ANとBCの交点をEとする。

△ADNと△ECNにおいて
 $DN = CN$ (仮定)
 $\angle AND = \angle ENC$ (対頂角)



AD//BEから
 $\angle ADN = \angle ECN$ (錯角)

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから △ADN≌△ECN
 したがって $AN = EN$ ……①, $AD = EC$ ……②

△ABEにおいて、①から、M, Nはそれぞれ辺AB, AEの中点である。

よって、中点連結定理により $MN // BE$ ……③, $MN = \frac{1}{2}BE$ ……④

③から $MN // BC$

②, ④から $MN = \frac{1}{2}(BC + EC) = \frac{1}{2}(AD + BC)$ 図

(2) ①から $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(4 + 8) = 6 \text{ (cm)}$ 図

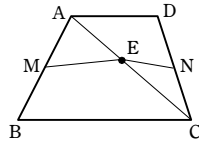
(1)の別証

[証明] 対角線ACの中点をEとする。

△ABCにおいて、M, Eはそれぞれ辺AB, ACの中点であるから、中点連結定理により

$ME // BC$ ……①

$ME = \frac{1}{2}BC$ ……②



△CDAにおいて、N, Eはそれぞれ辺CD, CAの中点であるから、中点連結定理により

$EN // AD$ ……③, $EN = \frac{1}{2}AD$ ……④

BC//ADであるから、①, ③より $ME // EN$

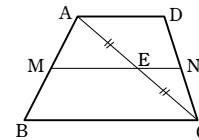
すなわち、3点M, E, Nは一直線上にあり、点Eは線分MN上にある。

よって、①から $MN // BC$

また $MN = ME + EN$

②, ④から $MN = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

$= \frac{1}{2}(AD + BC)$ 図



15

MとNを結ぶ。

四角形ABNMにおいて、 $AM // BN, AM = BN$ であるから、四角形ABNMは平行四角形である。

平行四角形の対角線はそれぞれの中点で交わるから $MP = PB$

同様に、四角形MNCDは平行四角形であるから $MQ = QC$

よって、△MBCにおいて、中点連結定理により $PQ // BC$

16

△ABC, △ACDにおいて、中点連結定理により

$EF // AC, EF = \frac{1}{2}AC$ $HG // AC, HG = \frac{1}{2}AC$

よって $EF // HG, EF = HG = \frac{1}{2}AC$ ……①

また、△ABD, △BCDにおいて、中点連結定理により

$EH // BD, EH = \frac{1}{2}BD$ $FG // BD, FG = \frac{1}{2}BD$

よって $EH // FG, EH = FG = \frac{1}{2}BD$ ……②

(1) $AC = BD$ のとき、①, ②より $EF = HG = EH = FG$

したがって、四角形EFGHの4辺はすべて等しいから、ひし形である。

(2) 線分BDと線分ACの交点をI, 線分BDと線分EFの交点をJ, 線分ACと線分EHの交点をKとする。

四角形EJIKは平行四角形であるから、 $\angle AIB = 90^\circ$ のとき $\angle HEF = 90^\circ$ である。

同様に、 $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90^\circ$ であるから、四角形EFGHは長方形である。

17

△ABCの面積をSとする。

△ABC∞△AEDであり、相似比は

$BC : ED = 3 : 2$

よって、面積比は

$\triangle ABC : \triangle AED = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$

したがって $\triangle AED = \frac{4}{9}S$

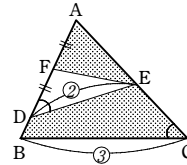
よって (四角形DBCEの面積) = $\triangle ABC - \triangle AED$

$= S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$

また $\triangle AFE : \triangle AED = AF : AD = 1 : (1+1) = 1 : 2$

ゆえに $\triangle AFE = \frac{1}{2}\triangle AED = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}S = \frac{2}{9}S$

したがって $\frac{2}{9}S \div \frac{5}{9}S = \frac{2}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$ 図 $\frac{2}{5}$ 倍



18

AB//IF, BC//EH, CA//GDであるから、△DEP,

△PFG, △IPHは、△ABCと相似である。

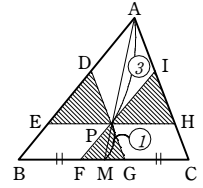
[1] △PFGと△ABCの相似比は

$PF : AB = PM : AM = 1 : (3+1) = 1 : 4$

よって、面積比は

$\triangle PFG : \triangle ABC = 1^2 : 4^2 = 1 : 16$

したがって $\triangle PFG = \frac{1}{16}\triangle ABC = \frac{1}{16} \times 320 = 20 \text{ (cm}^2\text{)}$



[2] △DEPと△ABCの相似比は

$EP : BC = EP : 2BM$

ここで、 $EP : BM = 3 : (3+1) = 3 : 4$ であるから $EP : BC = 3 : (2 \times 4) = 3 : 8$

よって、面積比は $\triangle DEP : \triangle ABC = 3^2 : 8^2 = 9 : 64$

したがって $\triangle DEP = \frac{9}{64}\triangle ABC = \frac{9}{64} \times 320 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$

[3] [2]と同様にして、△IPHと△ABCの面積比が9 : 64と求められる。

したがって $\triangle IPH = \frac{9}{64}\triangle ABC = \frac{9}{64} \times 320 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$

[1]~[3]から、求める面積の和は $20 + 45 + 45 = 110 \text{ (cm}^2\text{)}$

19 [常総学院]

(1) $BG : GD = CH : HD$ より $GH // BC$

よって $GH : BC = DG : DB$

$GH : 6 = 2 : 3$

したがって $GH = 4 \text{ cm}$

(2) △DGH∞△DBCであり、相似比は

$DG : DB = 2 : 3$

よって、面積の比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

したがって、△DBCと四角形GHCBの面積の比は

$9 : (9 - 4) = 9 : 5$

三角錐D-ABCの体積をV, 立体ABCHGの体積をWとすると

$V : W = 9 : 5$

$W = \frac{5}{9}V$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 5 = 30 \text{ (cm}^3\text{)}$ であるから、求める立体の体積は

$\frac{5}{9} \times 30 = \frac{50}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

20 [福島県]

高さが8 cmの円錐をX, 切ったときの上側の円錐をYとする。

円錐Xの体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

XとYは相似で、その相似比は

$2 : 1$

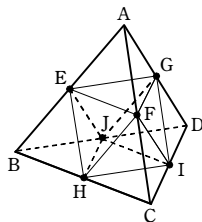
よって、体積の比は $2^3 : 1^3 = 8 : 1$

したがって、求める立体の体積は

$96\pi \times \frac{8-1}{8} = 84\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

21

点 E, F, G は、それぞれ辺 AB, AC, AD の中点であるから、面 EFG と面 BCD は平行である。
 よって、正四面体 ABCD と立体 AEFG は相似で、その相似比は 2 : 1
 したがって、体積比は $2^3 : 1^3 = 8 : 1$
 よって、立体 AEFG の体積は $\frac{1}{8}V$
 同様に、立体 BHJE, CIHF, DJIG の体積もそれぞれ $\frac{1}{8}V$ であることがわかる。



したがって $V : V' = V : (V - \frac{1}{8}V \times 4) = V : \frac{1}{2}V = 2 : 1$

22

三角錐 P-QDR と三角錐 A-CDE は相似で、その相似比は 2 : (2+1) = 2 : 3
 したがって、体積比は $2^3 : 3^3 = 8 : 27$
 立体 A-BCDE は正四角錐であるから、三角錐 A-CDE と A-CBE は合同である。
 よって、三角錐 P-QDR と正四角錐 A-BCDE の体積比は 8 : (2×27) = 4 : 27
 したがって $V : V' = 4 : (27 - 4) = 4 : 23$

23

図のように、AP, EF, HQ の交点を O とする。

PF // AE であるから

$$OF : OE = PF : AE = 1 : 2$$

$$OF : (OF + 12) = 1 : 2$$

よって OF = 12

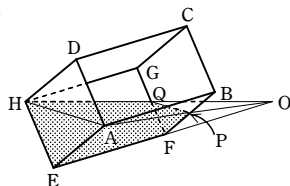
このとき、三角錐 O-AEH の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \right) \times (12 + 12) = 256 \text{ (cm}^3\text{)}$$

三角錐 O-PFQ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 12 = 32 \text{ (cm}^3\text{)}$$

したがって、求める体積は 256 - 32 = 224 (cm³)



1

△AFE と △GHE において

$$\angle AEF = \angle GEH \text{ (共通)} \dots\dots ①$$

△ABC ≡ △ADE であるから

$$\angle FBG = \angle FDA$$

△FDA と △FBG において、内角と外角の関係から

$$\angle FDA + \angle FAD = \angle FBG + \angle FGB$$

よって

$$\angle FAD = \angle FGB$$

また、AB は ∠DAE を 2 等分しているから

$$\angle FAD = \angle EAF$$

対頂角は等しいから ∠FGB = ∠EGH

$$\angle EAF = \angle EGH \dots\dots ②$$

①, ② より、2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFE \sim \triangle GHE$$

2

点 A から辺 BC に引いた垂線の足を F、辺 AC と線分 BE の交点を G とする。

△BCG と △ACF において

$$\angle BCG = \angle ACF \text{ (共通)}, \angle BGC = \angle AFC = 90^\circ$$

よって、2 組の角がそれぞれ等しいから、残りの角も等しくなり

$$\angle CBG = \angle CAF \dots\dots ①$$

△BCE と △ADC において

$$AD = \frac{1}{2}BC \text{ から } BC : AD = 2 : 1$$

$$BE = 2CA \text{ から } BE : AC = 2 : 1$$

$$\text{よって } BC : AD = BE : AC \dots\dots ②$$

①, ② より、2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCE \sim \triangle ADC$$

相似比は 2 : 1 であるから CE : CD = 2 : 1

3

まず、△ACE ≡ △DCB を証明する。

△ACE と △DCB において

$$\triangle ACD \text{ は正三角形であるから } AC = DC \dots\dots ①$$

$$\triangle CBE \text{ は正三角形であるから } CE = CB \dots\dots ②$$

$$\text{また } \angle ACE = 180^\circ - \angle BCE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle DCB = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{よって } \angle ACE = \angle DCB \dots\dots ③$$

①, ②, ③ より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから △ACE ≡ △DCB

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから ∠AEC = ∠DBC …… ④

次に、△ADF と △BCH において ∠ADF = ∠BCH = 60° …… ⑤

∠DAC = ∠ECB = 60° より、同位角が等しいから AD // CE

よって、錯角が等しいから ∠DAF = ∠AEC …… ⑥

④, ⑥ より ∠DAF = ∠CBH …… ⑦

⑤, ⑦ より、2 組の角がそれぞれ等しいから △ADF ≡ △BCH

4

まず、△CBE ≡ △CDE と △BCM ≡ △ADM を証明する。

△CBE と △CDE において CE = CE (共通)

四角形 ABCD は正方形であるから

$$CB = CD, \angle BCE = \angle DCE = 45^\circ$$

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから △CBE ≡ △CDE

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから ∠CBE = ∠CDE …… ①

また、△BCM と △ADM において

仮定から CM = DM

四角形 ABCD は正方形であるから BC = AD, ∠BCM = ∠ADM = 90°

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから △BCM ≡ △ADM

合同な図形では対応する角の大きさは等しいから ∠CBM = ∠DAM …… ②

①, ② より ∠FDM = ∠DAM …… ③

次に、△DFM と △ADM において ∠DMF = ∠AMD (共通) …… ④

③, ④ より、2 組の角がそれぞれ等しいから △DFM ≡ △ADM

5

【証明】 垂直二等分線上の点から線分の 2 つの端点までの距離は等しいから、△DAC は DA = DC の二等辺三角形である。

$$\text{よって } \angle DAC = \angle DCA$$

したがって、△DAC において、内角と外角の性質から

$$\angle BDC = 2\angle DAC$$

また、仮定より ∠BDC = 2∠BDE

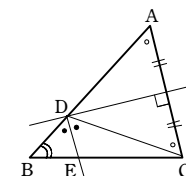
$$\text{よって } \angle DAC = \angle BDE$$

$$\text{すなわち } \angle BAC = \angle BDE$$

また ∠ABC = ∠DBE (共通)

したがって、△ABC と △DBE において、2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \quad \square$$



6

△ABF と △FCE において

$$\angle ABF = \angle FCE = 90^\circ \dots\dots ①$$

△ABF において ∠BAF + ∠AFB = 90° …… ②

∠AFE = 90° であるから

$$\angle CFE + \angle AFB = 90^\circ \dots\dots ③$$

②, ③ から ∠BAF = ∠CFE …… ④

①, ④ より、2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle FCE$$

AF = AD = 10 cm, FE = DE = 5 cm であるから、△ABF と △FCE の相似比は

$$AF : FE = 10 : 5 = 2 : 1 \quad \text{よって } AB : FC = 2 : 1$$

AB = x cm とすると x : FC = 2 : 1 したがって FC = $\frac{1}{2}x$ cm

また、BF : CE = 2 : 1 で、CE = (x - 5) cm であるから BF = 2(x - 5) cm

BC = 10 cm であるから 2(x - 5) + $\frac{1}{2}x = 10$ これを解いて x = 8

よって AB = 8 cm

7

△FGI と △DBC において

$$\angle FIG = \angle DCB = 90^\circ \quad \dots\dots ①$$

線分 BD と FG の交点を P とする。

$$\angle IGB = 90^\circ \text{ であるから } \angle FGI + \angle BGP = 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

線分 FG を折り目として、点 B が移る点が E であるから $BE \perp FG$

$$\text{よって, } \angle BPG = 90^\circ \text{ であるから } \angle DBC + \angle BGP = 90^\circ \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ から } \angle FGI = \angle DBC \quad \dots\dots ④$$

①, ④ より, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle FGI \sim \triangle DBC$

$$\text{よって } IF : CD = GI : BC$$

$$IF : 3 = 3 : 6$$

$$\text{したがって } IF = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

8

DR = x cm とおく。

$$QR \parallel BC \text{ より } QR : BC = DR : DC$$

$$QR : 10 = x : 8$$

$$\text{よって } QR = \frac{5}{4}x \text{ cm}$$

また, $AD \parallel PR \parallel BC$ より

$$BP : BA = CR : CD = (8-x) : 8$$

PQ // AD より

$$PQ : AD = BP : BA$$

$$PQ : 5 = (8-x) : 8$$

$$\text{よって } PQ = \frac{5}{8}(8-x) \text{ cm}$$

PQ : QR = 1 : 3 より, $3PQ = QR$ であるから

$$3 \times \frac{5}{8}(8-x) = \frac{5}{4}x$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{24}{5}$$

$$\text{したがって } DR = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

9

直線 AF と直線 DC の交点を J とする。

$$AB \parallel CJ \text{ であるから } AB : JC = BF : CF = 3 : 1$$

$$\text{よって } JC = \frac{1}{3}AB$$

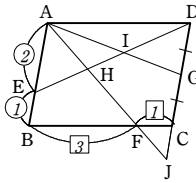
$$\text{したがって } JD = JC + CD = \frac{1}{3}AB + AB = \frac{4}{3}AB$$

$$\text{また } AE = \frac{2}{2+1}AB = \frac{2}{3}AB$$

$$AE \parallel DJ \text{ であるから } EH : DH = AE : JD = \frac{2}{3}AB : \frac{4}{3}AB = 1 : 2$$

$$\text{よって } EH = \frac{1}{1+2}ED = \frac{1}{3}ED \quad \dots\dots ①$$

また, $AE \parallel DG$ であるから



$$EI : DI = AE : GD = \frac{2}{3}AB : \frac{1}{2}AB = 4 : 3$$

よって

$$DI = \frac{3}{4+3}ED = \frac{3}{7}ED \quad \dots\dots ②$$

①, ② より

$$EH : ID = \frac{1}{3}ED : \frac{3}{7}ED = 7 : 9$$

10

△ABC と △ADB において

$$\text{仮定から } \angle DBC = \angle ACB, \quad \angle DBC = \angle ABD$$

$$\text{よって } \angle ACB = \angle ABD$$

$$\text{また } \angle BAC = \angle DAB \quad (\text{共通})$$

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle ADB$

$$\text{したがって } AB : AD = AC : AB$$

$$AD = x \text{ cm とすると } 6 : x = 8 : 6$$

$$\text{よって } 6 \times 6 = x \times 8$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{9}{2}$$

$$\text{したがって } CD = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} \text{ (cm)}$$

$\angle DBC = \angle DCB$ であるから $BD = CD$

$$\text{よって } BD = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ であるから $BC : DB = AC : AB$

$$BC = y \text{ cm とすると } y : \frac{7}{2} = 8 : 6$$

$$\text{したがって } y \times 6 = \frac{7}{2} \times 8$$

$$\text{これを解くと } y = \frac{14}{3}$$

$$\text{よって } BC = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

11

BA と CH の交点を D とする。

△ACH と △ADH において

$$AH = AH$$

$$\angle CAH = \angle DAH$$

$$\angle CHA = \angle DHA$$

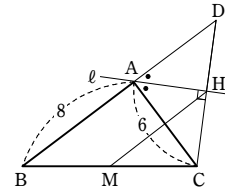
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACH \cong \triangle ADH$$

$$\text{よって } AD = AC = 6 \text{ cm}$$

$$CH = DH$$

$$\triangle BCD \text{ において, 中点連結定理により } MH = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times (8+6) = 7 \text{ (cm)}$$



12

【証明】 線分 BD の延長と線分 AC の延長の交点を

B', 線分 CE の延長と辺 AB の交点を C' とする。

△C'AC の二等分線が底辺 C'C に垂直であるから,

△AC'C は AC' = AC の二等辺三角形である。

同様に, △ABB' は AB = AB' の二等辺三角形

である。

$$\text{したがって } BC' = B'C \quad \dots\dots ①$$

△CC'B において, 点 E, M はそれぞれ辺 CC',

CB の中点であるから, 中点連結定理により

$$ME = \frac{1}{2}BC' \quad \dots\dots ②$$

$$\text{同様にして } MD = \frac{1}{2}B'C \quad \dots\dots ③$$

$$\text{①, ②, ③ から } MD = ME$$

$$\text{また } MD = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}(AB' - AC) = \frac{1}{2}(AB - AC) \quad \text{図}$$

13

△ABD において, 点 N, G は, それぞれ辺 AB, AD の中点であるから, 中点連結定理により

$$NG \parallel BD$$

すなわち $GC \parallel BD \quad \dots\dots ①$

また, △ADC において, 点 G, M は, それぞれ辺 AD, AC の中点であるから, 中点連結定理により

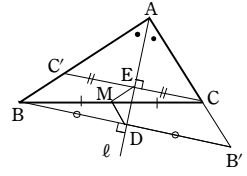
$$GM \parallel DC$$

すなわち $BG \parallel DC \quad \dots\dots ②$

①, ② より, 四角形 BDCG は, 2組の対辺がそれぞれ平行であるから, 平行四辺形である。

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから, E は辺 BC の中点である。

よって, AE は △ABC の中線であるから, 三角形の3つの中線は1点で交わる。



14 [開明]

- (1) $AD \parallel BE$ より $BP : PD = BE : AD$
 $= 3 : 5 \dots\dots ①$
- (2) $AB \parallel DF$ より $BQ : QD = AB : DF$
 $= 3 : 2 \dots\dots ②$
- ① より $BP = \frac{3}{8}BD, PD = \frac{5}{8}BD$
- ② より $BQ = \frac{3}{5}BD, QD = \frac{2}{5}BD$
- よって $PQ = \frac{3}{5}BD - \frac{3}{8}BD = \frac{9}{40}BD \dots\dots ③$
- したがって $BP : PQ : QD = \frac{3}{8} : \frac{9}{40} : \frac{2}{5}$
 $= 15 : 9 : 16$

- (3) $AB \parallel DF$ より $AQ : QF = 3 : 2$
 よって、 $AQ : QF = BE : EC$ であるから
 $AB \parallel QE$
 したがって $\triangle ABQ = \triangle ABE$
 よって $\triangle APQ = \triangle PBE$
 したがって $\triangle APQ : \triangle PBE = 1 : 1$
- (4) ③ より $\triangle APQ = \frac{9}{40} \triangle ABD = \frac{9}{40} \times \frac{1}{2} S_1$
 $= \frac{9}{80} S_1$

- (3) より $\triangle PBE = \triangle APQ = \frac{9}{80} S_1 \dots\dots ④$

- $QE \parallel DF$ より $\triangle FQD = \triangle EFD$
 $\triangle EFD = \frac{2}{3} \triangle DEC$ で、 $\triangle DEC = \frac{2}{5} \triangle BCD$ であるから
 $\triangle EFD = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} S_1 = \frac{2}{15} S_1$

- よって $\triangle FQD = \frac{2}{15} S_1 \dots\dots ⑤$

- ④, ⑤ より $S_2 = \frac{1}{2} S_1 - \left(\frac{9}{80} S_1 + \frac{2}{15} S_1 \right)$
 $= \frac{61}{240} S_1$

- したがって $S_1 : S_2 = 240 : 61$

15 [三重県]

- (1) $\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ において
 正三角形 ABC の 3 つの角はすべて等しいので
 $\angle EBD = \angle DCF = 60^\circ \dots\dots ①$
 $\angle BED = 180^\circ - \angle EBD - \angle BDE$
 $= 180^\circ - 60^\circ - \angle BDE$
 $= 120^\circ - \angle BDE \dots\dots ②$
 $\angle CDF = 180^\circ - \angle EDF - \angle BDE$
 $= 180^\circ - 60^\circ - \angle BDE$
 $= 120^\circ - \angle BDE \dots\dots ③$

- ②, ③ より $\angle BED = \angle CDF \dots\dots ④$
 ①, ④ より、2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$

- (2) (ア) (1) で $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ が証明されて折り返しているの
 $ED : DF = AE : AF = 2 : 3$
 相似な図形の面積比は、相似比の 2 乗と等しいので
 $\triangle BDE : \triangle CFD = 2^2 : 3^2$
 $= 4 : 9$

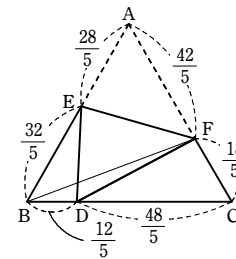
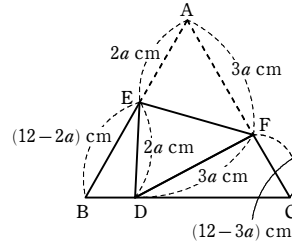
- (イ) $AE : AF = 2 : 3$ で $AE = 2a$ より
 $AF = 3a$
 $BE = 12 - 2a, CF = 12 - 3a$ となる。
 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ で
 $AE : AF = ED : DF = 2 : 3$ より
 $BD : CF = 2 : 3$
 $BD : (12 - 3a) = 2 : 3$
 $BD = \frac{2}{3}(12 - 3a)$
 $BD = 8 - 2a$

同様にして

- $BE : CD = 2 : 3$
 $(12 - 2a) : CD = 2 : 3$
 $CD = \frac{3}{2}(12 - 2a)$
 $CD = 18 - 3a$
 $BC = BD + CD = 12$ より
 $(8 - 2a) + (18 - 3a) = 12$
 $26 - 5a = 12$
 $-5a = -14$
 $a = \frac{14}{5}$

- よって $a = \frac{14}{5}$

- (ウ) 右の図の B と F を結ぶ。
 $\triangle ABF$ の辺 AB 上に点 E がある。
 $AE : EB = \frac{28}{5} : \frac{32}{5} = 7 : 8$ であり、
 高さが共通しているから
 $\triangle AEF : \triangle BEF = 7 : 8 \dots\dots ①$
 また、 $\triangle ABC$ の辺 AC 上に点 F がある。
 $AF : FC = \frac{42}{5} : \frac{18}{5} = 7 : 3$ であり、
 高さが共通しているの
 $\triangle ABF : \triangle BCF = 7 : 3 \dots\dots ②$
 ① より $\triangle ABF : \triangle AEF = 15 : 7 \dots\dots ③$
 ② より $\triangle ABC : \triangle ABF = 10 : 7 \dots\dots ④$
 ③, ④ より $\triangle ABC : \triangle ABF : \triangle AEF = 150 : 105 : 49$
 $\triangle DEF = \triangle AEF$ であるので
 $\triangle ABC : \triangle DEF = 150 : 49$



$$\triangle DEF = \frac{49}{150} \times \triangle ABC$$

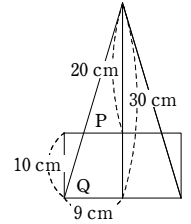
よって、 $\triangle ABC$ の面積の $\frac{49}{150}$ 倍になる。

16 [愛知県]

- (1) 容器 A の体積は $\pi \times 9^2 \times 10 = 810\pi$ (cm^3)
 鉄のおもり B の高さを h cm とすると
 $\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times h = 810\pi$

よって $h = 30$ (cm)

- (2) 鉄のおもり B の容器 A に入っていない部分を P, それ以外を Q とする。
 P と鉄のおもり B は相似で
 相似比は $(30 - 10) : 30 = 2 : 3$
 よって、体積比は $2^3 : 3^3 = 8 : 27$
 あふれ出た水の体積は Q の体積と等しいから
 $810\pi \times \frac{27 - 8}{27} = 570\pi$ (cm^3)



17

(1) 3点 A, M, N を通る平面と辺 BF, DH との交点をそれぞれ I, J とする。

また, AI, EF, NM の交点を K とし, AJ, EH, MN の交点を O とする。

△KMF と △NMG において

$$FM = GM$$

$$\angle MFK = \angle MGN$$

$$\angle KMF = \angle NMG$$

より, 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから △KMF ≅ △NMG

よって KF = NG = 3 cm

IF // AE であるから IF : AE = KF : KE = 3 : (3+6) = 1 : 3

したがって IF = 2 cm

このとき, 三角錐 K-IFM の体積は $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3\right) \times 3 = 3 \text{ (cm}^3\text{)}$

同様に三角錐 O-JHN の体積を求めると, 3 cm³ である。

また, 三角錐 A-EKO の体積は $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 9\right) \times 6 = 81 \text{ (cm}^3\text{)}$

よって, 求める体積は 81 - (3+3) = 75 (cm³)

(2) 3点 L, M, N を通る平面と

直線 AE, EF, EH, AD, BF, DH との交点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。

(1) と同様に考えると, 三角錐 Q-TFM の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 3 = \frac{9}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

同様に, 三角錐 P-LAS の体積, 三角錐 R-UHN

の体積を求めると, ともに $\frac{9}{2} \text{ cm}^3$ である。

また, 三角錐 P-EQR の体積は $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 9\right) \times 9 = \frac{243}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$

よって, 求める体積は $\frac{243}{2} - \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) = 108 \text{ (cm}^3\text{)}$

別解 3点 L, M, N を通る平面で立方体を切断し, 2つの立体に分けると, 2つの立体は合同になる。

よって, 求める体積は立方体の体積の半分であり $\frac{1}{2} \times (6 \times 6 \times 6) = 108 \text{ (cm}^3\text{)}$

18

CJ, GF, KL を延長し, その交点を M とする。

また, CI, GH, KL を延長し, その交点を N とする。

さらに, 三角錐 MGNC, MFKJ, NHLI の体積をそれぞれ V, V', V'' とする。

三角錐 MGNC と三角錐 MFKJ は相似で, 相似比は

$$GC : FJ = 12 : 3 = 4 : 1$$

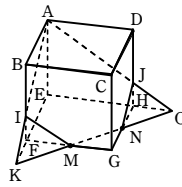
よって, 体積比は $V : V' = 4^3 : 1^3 = 64 : 1$

また, 三角錐 NGMC と三角錐 NHLI は相似で, 相似比は

$$GC : HI = 12 : 3 = 4 : 1$$

よって, 体積比は $V : V'' = 4^3 : 1^3 = 64 : 1$

したがって, 求める体積は



$$V - V' - V'' = V - \frac{1}{64}V - \frac{1}{64}V = \frac{31}{64}V \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, JF // CG であるから

$$MF : MG = JF : CG$$

よって MF : (MF+12) = 3 : 12

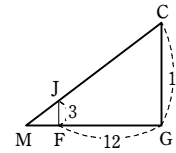
したがって MF = 4

同じように考えて NH = 4

よって, 三角錐 MGNC の体積 V は

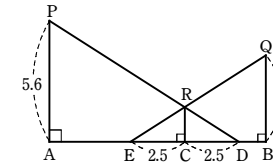
$$V = \frac{1}{3} \times \triangle MGN \times CG = \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{1}{2} \times (12+4) \times (12+4) \right\} \times 12 = 512$$

① から, 求める体積は $\frac{31}{32}V = \frac{31}{32} \times 512 = 496 \text{ (cm}^3\text{)}$



19

下の図のように, 5秒後に花子さんが到着した地点を C とし, このときにできる影の先端をそれぞれ D, E とする。また, 街灯をそれぞれ線分 PA, QB とし, 花子さんを線分 RC とする。



(1) 花子さんは毎秒 x m の速さで歩くとすると AC = 5x m, BC = 3x m

△DRE は RD = RE の二等辺三角形であるから ∠ADP = ∠BEQ

よって, △ADP ∽ △BEQ であるから AD : BE = AP : BQ

$$(5x+2.5) : (3x+2.5) = 5.6 : 4$$

これを解いて $x = \frac{5}{4}$

求める距離は 5x + 3x = 8x (m) であるから $8 \times \frac{5}{4} = 10 \text{ (m)}$

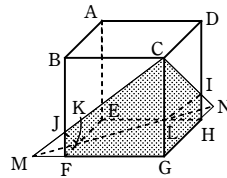
(2) $BC = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} \text{ (m)}$

RC // QB であるから RC : QB = CE : BE

$$RC : 4 = 2.5 : \left(\frac{15}{4} + 2.5\right)$$

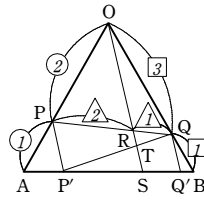
これを解いて RC = 1.6

よって, 花子さんの身長は 1.6 m



2

- (1) $PP' \parallel RS \parallel QQ'$ であるから
 $PS : SQ' = PR : RQ = 2 : 1$
 (2) $PP' \parallel OS$ であるから
 $AP' : P'S = AP : PO = 1 : 2$ ①
 また, $QQ' \parallel OS$ であるから
 $BQ' : Q'S = BQ : QO = 1 : 3$ ②
 ここで, $SQ' = x$ とおく。
 (1) より $P'S = 2x$ ③
 ①, ③ より $AP' = x$ ④
 ② より $BQ' = \frac{1}{3}x$ ⑤



③, ④, ⑤ より $AS = AP' + P'S = x + 2x = 3x$
 $SB = SQ' + Q'B = x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$
 したがって $AS : SB = 3x : \frac{4}{3}x = 9 : 4$

- (3) $P'Q$ と RS の交点を T とする。
 $PP' \parallel OS \parallel QQ'$ であるから, 次の関係が, それぞれ成り立つ。

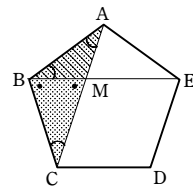
$PP' : OS = AP : AO = 1 : 3$ より $PP' = \frac{1}{3}OS$
 $RT : PP' = QR : QP = 1 : 3$ より $RT = \frac{1}{3}PP' = \frac{1}{9}OS$ ⑥
 $QQ' : OS = BQ : BO = 1 : 4$ より $QQ' = \frac{1}{4}OS$
 $TS : QQ' = P'S : P'Q' = 2 : 3$ より $TS = \frac{2}{3}QQ' = \frac{1}{6}OS$ ⑦

⑥, ⑦ より $RS = RT + TS = \frac{1}{9}OS + \frac{1}{6}OS = \frac{5}{18}OS$
 $OR = OS - RS = \frac{13}{18}OS$
 したがって $OR : RS = \frac{13}{18}OS : \frac{5}{18}OS = 13 : 5$

3

- (1) 五角形の内角の和は $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$
 正五角形の内角は等しいから $\angle ABC = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$
 また, $\triangle BAC$ は $BA = BC$ の二等辺三角形であるから
 $\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$

- (2) [証明] $\triangle BAC$ と $\triangle MAB$ において
 $\angle BCA = \angle BAC = 36^\circ$
 同様に $\angle ABE = 36^\circ$
 よって $\angle BCA = \angle MBA$
 また $\angle BAC = \angle MAB$ (共通)
 したがって, 2組の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle BAC \sim \triangle MAB$ [図]



- (3) [証明] $\angle CBM = \angle CBA - \angle ABM = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$
 $\triangle MAB$ において, 内角と外角の性質から

$\angle CMB = \angle ABM + \angle MAB = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

よって, $\angle CBM = \angle CMB$ であるから, $\triangle CBM$ は $CB = CM$ の二等辺三角形である。

- (4) $\triangle BAC \sim \triangle MAB$ であるから
 $AB : AM = AC : AB$
 正五角形 $ABCDE$ の1辺を x cm とすると,
 $CM = CB = x$ であるから
 $x : 1 = (1+x) : x$
 よって $x \times x = 1 \times (1+x)$
 すなわち $x^2 - x - 1 = 0$
 これを解くと $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ であるから, 正五角形の1辺の長さは $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ cm

[参考] $AM : MC = AM : AB = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は黄金比である。

4 [2016 巣鴨]

$\angle B$ の二等分線と AC との交点を D とする。
 $\angle B = 2\angle C$ より, $\triangle DBC$ は $DB = DC$ の二等辺三角形である。

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ ①

ここで, $BC = x$, $DB = DC = y$ とおく

① より $AC : AB = BC : DB$

$5 : 3 = x : y$
 $x = \frac{5}{3}y$ ②

同じく ① より $AB : AD = AC : AB$

$3 : (5-y) = 5 : 3$
 $5(5-y) = 3 \times 3$
 $y = \frac{16}{5}$

これを ② に代入して $x = \frac{5}{3} \times \frac{16}{5} = \frac{16}{3}$

したがって, 辺 BC の長さは $\frac{16}{3}$

5

点 C から直線 AE に引いた垂線の足を F とする。

$\triangle ABE$ と $\triangle ACF$ において

$\angle BAE = \angle CAF$
 $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$

よって, 2組の角がそれぞれ等しいから

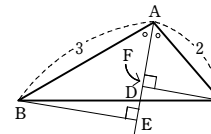
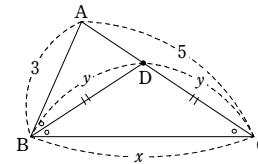
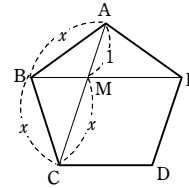
$\triangle ABE \sim \triangle ACF$

したがって $AE : AF = AB : AC = 3 : 2$

よって $AF = \frac{2}{3}AE$, $EF = \frac{1}{3}AE$

$\triangle BDE$ と $\triangle CDF$ において

$\angle BDE = \angle CDF$ (対頂角)



$\angle BED = \angle CFD = 90^\circ$

よって, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle BDE \sim \triangle CDF$

[図] したがって $DE : DF = BD : CD$

ここで, 直線 AE は $\angle BAC$ の二等分線であるから, $BD : CD = AB : AC = 3 : 2$ であり

$DE : DF = 3 : 2$

よって $DE = \frac{3}{5}EF = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{1}{5}AE$

$DF = \frac{2}{5}EF = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}AE = \frac{2}{15}AE$

$AD = AF + DF = \frac{2}{3}AE + \frac{2}{15}AE = \frac{4}{5}AE$ であるから

$AD : DE = \frac{4}{5}AE : \frac{1}{5}AE = 4 : 1$

6 [岡山白陵]

P から AB にひいた垂線を PH , Q から AC にひいた垂線を QI とする。

$\triangle HMP$ と $\triangle IQM$ において

$\triangle ABP$, $\triangle ACQ$ は直角二等辺三角形であるから

$AH = BH = PH$ ①

$AI = IC = QI$ ②

仮定から $BM = CM$ ③

中点連結定理により

①, ②, ③ から $HM = \frac{1}{2}AC = AI$
 $= IQ$ ④

同様に $IM = HP$ ⑤

また, 中点連結定理により

$HM \parallel AC$

$IM \parallel AB$

平行線の同位角は等しいから

$\angle BHM = \angle BAC = \angle MIC$

$\angle PHM = 90^\circ + \angle BHM$

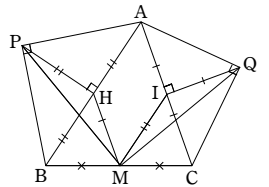
$\angle MIQ = 90^\circ + \angle MIC$

よって $\angle PHM = \angle MIQ$ ⑥

④, ⑤, ⑥ より, 2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle HMP \cong \triangle IQM$

よって $PM = QM$



7

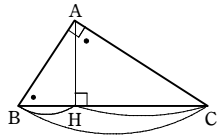
【証明】 $\triangle ABH \sim \triangle CAH$ で、相似比は $AB : AC$ に等しいから

$$\begin{aligned} \triangle ABH : \triangle CAH &= AB^2 : AC^2 \quad \dots\dots ① \\ \triangle ABH \text{ と } \triangle CAH \text{ は高さが等しいから} \\ \triangle ABH : \triangle CAH &= BH : CH \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ② から $AB^2 : AC^2 = BH : CH$ $\dots\dots ③$
また, $\triangle CAH \sim \triangle CBA$ で、相似比は $AC : BC$ に等しいから

$$\begin{aligned} \triangle CAH : \triangle CBA &= AC^2 : BC^2 \quad \dots\dots ④ \\ \triangle CAH \text{ と } \triangle CBA \text{ は高さが等しいから} \\ \triangle CAH : \triangle CBA &= CH : BC \quad \dots\dots ⑤ \\ ④, ⑤ \text{ から } AC^2 : BC^2 &= CH : BC \quad \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

③, ⑥ から $AB^2 : AC^2 : BC^2 = BH : CH : BC$ ☒



8 [花園]

正六角形の1つの内角の大きさは

$$\frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ$$

よって, $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCD, \triangle ODE, \triangle OEF, \triangle OFA$ は合同な正三角形である。

(1) $CI \parallel BO$ より $CQ : QO = CI : BO = 1 : 2$

(2) 直線 AH と OC の交点を R とする。

$$\begin{aligned} CH \parallel OA \text{ より} \\ RC : RO = CH : OA = 1 : 2 \\ \text{よって } CR = OC \end{aligned}$$

OC = a とおくと, $CQ = \frac{1}{3}a$ であるから

$$RQ = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$$

BA \parallel RQ より

$$\begin{aligned} BP : PQ = AB : RQ = a : \frac{4}{3}a \\ = 3 : 4 \end{aligned}$$

(3) $\triangle OAB = S$ とおく。

BP : PQ = 3 : 4 より BP : BQ = 3 : 7

$$\text{よって } \triangle ABP = \frac{3}{7} \triangle ABQ$$

AB \parallel OC より, $\triangle ABQ = \triangle OAB$ であるから

$$\triangle ABP = \frac{3}{7} S$$

線分 AH, BI, CJ, DK, EL, FG によって囲まれてできる正六角形の面積は、正六角形 ABCDEF の面積から、 $\triangle ABP$ の面積の 6 倍をひけばよいから

$$6S - \frac{3}{7} S \times 6 = \frac{24}{7} S$$

$\frac{24}{7} S \div 6S = \frac{4}{7}$ より, $\frac{4}{7}$ 倍である。

9 [鎌倉学園]

(1) 右の図のように点 D, E, F, G, H, I,

J を定める。
LF = x とすると

$$BM = 4x, MC = 12x$$

$$HN = 12x \times \frac{3}{4} = 9x$$

LE \parallel ID \parallel JN \parallel BC であるから

$$HQ : QM = HN : BM = 9 : 4$$

$$FP : PM = LF : MC = 1 : 12$$

FG = GH = HM より, QM = 4a とおくと

$$HQ = 9a, AF = FG = GH = HM = 13a$$

$$FP = 13a \times 3 \times \frac{1}{1+12} = 3a$$

$$PM = 13a \times 3 - 3a = 36a$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AP : PQ : QM &= (13a + 3a) : (36a - 4a) : 4a \\ &= 16a : 32a : 4a \\ &= 4 : 8 : 1 \end{aligned}$$

(2) (1) と同様にして CR : RP : PL = BQ : QR : RN = 4 : 8 : 1

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle PQR &= \frac{8}{8+1} \triangle LQR \\ &= \frac{8}{9} \times \frac{8}{8+4} \triangle LBR \\ &= \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1+8}{1+8+4} \triangle LBC \\ &= \frac{8}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{9}{13} \times \frac{3}{4} \triangle ABC \\ &= \frac{4}{13} \triangle ABC \end{aligned}$$

したがって, $\triangle PQR$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の $\frac{4}{13}$ 倍

10

線分 BS と線分 DP の交点を M, 線分 BR と線分 DQ の交点を N とする。

$\triangle EFH$ において, 中点連結定理により

$$PS \parallel FH, PS = \frac{1}{2} FH$$

BD \parallel FH, BD = FH であるから

$$PS \parallel BD, PS = \frac{1}{2} BD$$

PS \parallel BD より DM : MP = BD : PS = 2 : 1

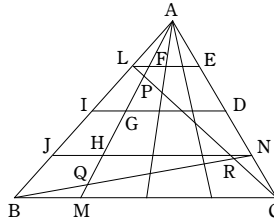
同様に, QR \parallel FH, QR = $\frac{1}{2}$ FH であるから QR \parallel BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD

QR \parallel BD より DN : NQ = BD : QR = 2 : 1

よって, DM : MP = DN : NQ であるから MN \parallel PQ

したがって MN : PQ = DM : DP = 2 : 3

よって, 線分 MN の長さは, 線分 PQ の長さの $\frac{2}{3}$ 倍である。



11

(1) H は正方形 ABCD の対角線の交点である。

$\triangle PAC$ において, 2 点 F, H は, それぞれ辺 CP, CA の中点であるから, 中点連結定理により

$$FH \parallel PA \quad \dots\dots ①, \quad FH = \frac{1}{2} PA \quad \dots\dots ②$$

PA = 3PE であるから, ② により $FH = \frac{3}{2} PE$

① により, PE \parallel FH であるから

$$PG : GH = PE : FH = PE : \frac{3}{2} PE = 2 : 3$$

(2) H を通り AI に平行に引いた直線と PC との交点を J とする。

GI \parallel HJ であるから PI : IJ = PG : GH

(1) により PI : IJ = 2 : 3

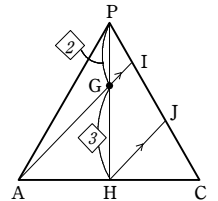
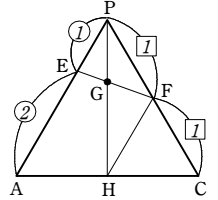
$$\text{よって } PI = \frac{2}{3} IJ$$

また, AI \parallel HJ であるから

$$IJ : JC = AH : HC = 1 : 1$$

よって IC = 2IJ

$$\text{したがって } PI : IC = \frac{2}{3} IJ : 2IJ = 1 : 3$$



12

頂点 P から底面 ABCD に引いた垂線を PG とし, PG と MN の交点を H とする。このとき, G は正方形 ABCD の対角線 AC, BD の交点で, H は AQ 上の点である。

$\triangle PBD$ において, 中点連結定理により MN \parallel BD

よって PH : HG = PM : MB = 1 : 1

G を通り AQ に平行に引いた直線と PC との交点を R とする。

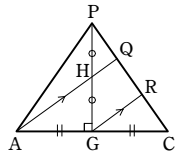
GR \parallel AQ であるから CR : RQ = CG : GA = 1 : 1

したがって CR = RQ $\dots\dots ①$

HQ \parallel GR であるから PQ : QR = PH : HG = 1 : 1

よって PQ = QR $\dots\dots ②$

①, ② より, PQ = QR = RC であるから PQ : QC = 1 : 2



13

図[1]のように、辺 BC の中点を P、AC と BD の交点を Q、FC と BG の交点を R とする。

このとき、図[2]のように、合同な立体 ABF-QPR と DCG-QPR を考えると、頂点 E を含まない方の立体は、この 2 つの立体を合わせたものになる。

立体 ABF-QPR について、この立体は、三角錐 C-ABF から相似な三角錐 C-QPR を取り除いたものである。

三角錐 C-ABF と三角錐 C-QPR の相似比は 2 : 1

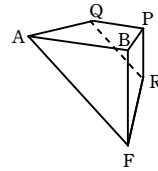
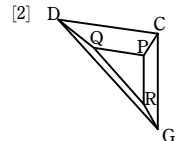
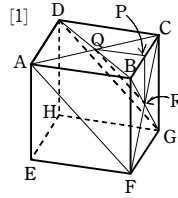
したがって

$$\begin{aligned} (\text{立体 ABF-QPR の体積}) : (\text{三角錐 C-ABF の体積}) \\ = (2^3 - 1^3) : 2^3 = 7 : 8 \end{aligned}$$

$$\text{三角錐 C-ABF の体積は } \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \right) \times 6 = 36 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{よって、立体 ABF-QPR の体積は } 36 \times \frac{7}{8} = \frac{63}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{したがって、求める立体の体積は } 6^3 - \frac{63}{2} \times 2 = 153 \text{ (cm}^3\text{)}$$



14

展開図を組み立てて、右の図のように点 B、C を定めると、小さい方の立体は、立体 PFQ-ABC である。

AP、BF の延長の交点を R とし、立方体の 1 辺の長さを a とする。

仮定より、 $PF = FQ = \frac{3}{4}a$ であるから

$$PF : AB = \frac{3}{4}a : a = 3 : 4$$

$$\text{よって } FR : BR = 3 : 4$$

$$FR : BF = 3 : 1$$

$$\text{したがって } FR = 3a$$

三角錐 R-PFQ と三角錐 R-ABC は相似で、その相似比は 3 : 4

$$\text{よって、体積比は } 3^3 : 4^3 = 27 : 64$$

$$\text{したがって、立体 PFQ-ABC と三角錐 R-ABC の体積比は } (64 - 27) : 64 = 37 : 64$$

$$\text{よって } V_1 = \frac{37}{64} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times a \times (a + 3a) \right) = \frac{37}{96} a^3$$

$$\text{したがって } V_2 = a^3 - \frac{37}{96} a^3 = \frac{59}{96} a^3$$

$$\text{よって } V_1 : V_2 = \frac{37}{96} a^3 : \frac{59}{96} a^3 = 37 : 59$$

