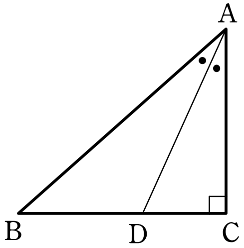
表題

1

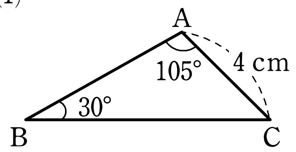
$\angle C=90^\circ$ である直角三角形 ABC の $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，BD＝3 cm，CD＝2 cm となった。
このとき，線分 AD の長さを求めなさい。



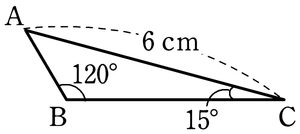
2

次の図で，辺 BC，AB の長さと △ABC の面積を求めなさい。

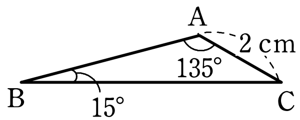
(1)



(2)



(3)



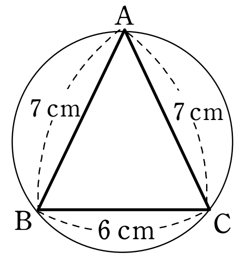
3

半径が 9 cm の円 O について，長さ 14 cm の弦と中心 O との距離を求めなさい。

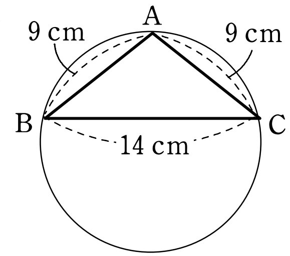
4

右の図の二等辺三角形 ABC について，外接円の半径を求めなさい。

(1)

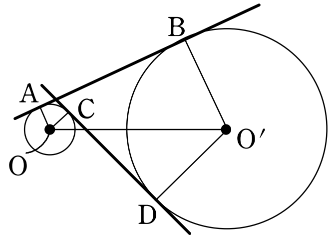


(2)



5

右の図において，A，B，C，D は，2 つの円 O，O′ の共通接線の接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 1 cm，4 cm，中心間の距離が 7 cm であるとき，線分 AB と CD の長さをそれぞれ求めなさい。



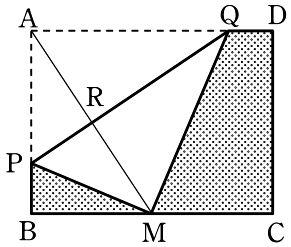
6

右の図のように，AB＝6 cm，AD＝8 cm の長方形 ABCD を，頂点 A が辺 BC の中点 M に重なるように折り返す。折り目を PQ とし，線分 PQ，AM の交点を R とする。

(1)　線分 PM，QM の長さを求めなさい。

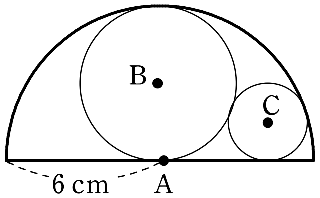
(2)　線分 PR の長さを求めなさい。

(3)　四角形 APMQ の面積を求めなさい。



7

右の図のように，半径 6 cm の半円 A に円 B が内接し，その接点の 1 つは点 A である。円 C が半円 A に内接し，円 B に外接しているとき，円 C の半径を求めなさい。



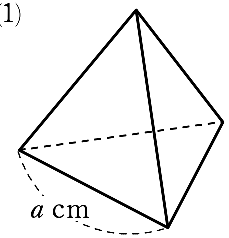
8

次の立体の体積を求めなさい。

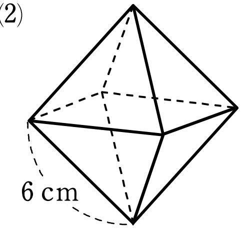
(1)　1 辺の長さが a cm の正四面体

(2)　1 辺の長さが 6 cm の正八面体

(1)



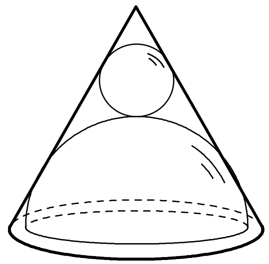
(2)



9

右の図のような，円錐の底面と面を共有している半径 6 cm の半球と，半径 2 cm の球がある。
半球と球は互いに外接し，円錐の側面にもそれぞれ接している。このとき，次のものを求めなさい。

(1)　円錐の高さ　　　　　(2)　円錐の体積



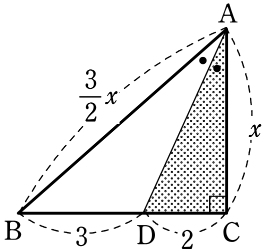
$\boxed{1}$

(解説)

線分 AD は，$\angle A$ の二等分線であるから

$$AB : AC = BD : DC = 3 : 2$$

よって，$AC = x$ cm とおくと，$AB = \frac{3}{2}x$ cm である。



直角三角形 ABC において，三平方の定理により

$$x^2 + (3+2)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2$$

よって　　$x^2 = 20$

$x > 0$ であるから　　$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

直角三角形 ADC において，三平方の定理により

$$(2\sqrt{5})^2 + 2^2 = AD^2$$

よって　　$AD^2 = 24$

$AD > 0$ であるから　　$AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (cm)

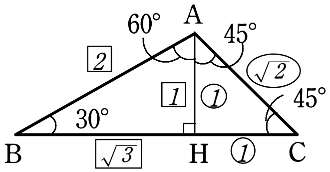
$\boxed{2}$

(解説)

(1)　　$\angle C = 180° - (30° + 105°) = 45°$

頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

$$\angle BAH = 60°,\quad \angle CAH = 45°$$



直角三角形 CHA において，

$AH : CH : AC = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから

$$AH = CH = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

直角三角形 ABH において，$AH : AB : BH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$AB = 2AH = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$BH = \sqrt{3}AH = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

よって　　$BC = BH + CH = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$ (cm)

また　　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2}$

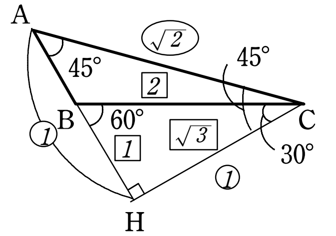
$$= 4\sqrt{3} + 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(2)　　$\angle A = 180° - (15° + 120°) = 45°$

頂点 C から線分 AB の延長に垂線 CH を引くと

$$\angle CBH = 60°$$

$$\angle ACH = 30° + 15° = 45°$$



直角三角形 ACH において，

$AH : CH : AC = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから

$$AH = CH = 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

直角三角形 BCH において，$BH : BC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$BC = \frac{2}{\sqrt{3}}CH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{3}}CH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

よって　　$AB = AH - BH = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ (cm)

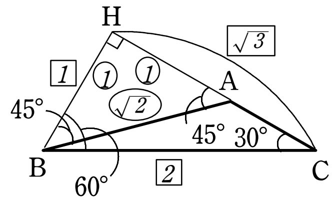
また　　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \times 3\sqrt{2}$

$$= 9 - 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

(3)　　$\angle C = 180° - (15° + 135°) = 30°$

頂点 B から線分 CA の延長に垂線 BH を引くと

$$\angle CBH = 60°,\quad \angle ABH = 45°$$



直角三角形 HBA において，

$HB : HA : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから

$$AB = \sqrt{2}HB \quad \cdots\cdots ①$$

また，$HB = HA$ であるから，この長さを x cm とする。

直角三角形 HBC において，$BH : BC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$BC = 2BH \quad \cdots\cdots ②$$

また　　$BH : CH = 1 : \sqrt{3}$

すなわち　　$x : (x+2) = 1 : \sqrt{3}$

よって　　$\sqrt{3}x = x + 2$

したがって　　$(\sqrt{3} - 1)x = 2$

よって　　$x = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$

② から　　$BC = 2(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 2$ (cm)

① から　　$AB=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (cm)

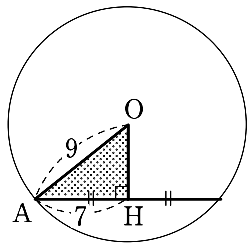
したがって　　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times AC\times BH=\dfrac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+1)$

$$=\sqrt{3}+1\ (\mathrm{cm}^2)$$

$\boxed{3}$

(解説)

円の中心 O から弦に垂線 OH を引く。
弦の一方の端点を A とする。



H は弦の中点であるから　　$AH=\dfrac{14}{2}=7$

直角三角形 OAH において　　$OH^2+7^2=9^2$

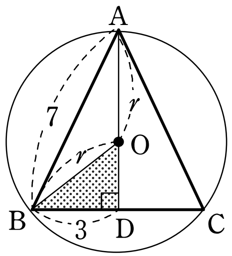
よって　　$OH^2=32$

OH>0 であるから　　$OH=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ (cm)

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　外接円の中心を O とし，半径を r cm とする。
辺 BC の垂直二等分線は，2 点 O，A を通る。
辺 BC の中点を D とすると，直角三角形 ABD において



$$AD=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

OA=OB=r であるから，直角三角形 OBD において

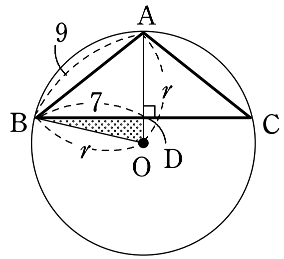
$$3^2+(2\sqrt{10}-r)^2=r^2$$

よって　　$4\sqrt{10}\,r=49$

したがって　　$r=\dfrac{49}{4\sqrt{10}}=\dfrac{49\sqrt{10}}{40}$

(答)　$\dfrac{49\sqrt{10}}{40}$ cm

(2)　外接円の中心を O とし，半径を r cm とする。
辺 BC の垂直二等分線は，2 点 O，A を通る。
辺 BC の中点を D とすると，直角三角形 ABD において



$$AD=\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

OA=OB=r であるから，直角三角形 OBD において

$$7^2+(r-4\sqrt{2})^2=r^2$$

よって　　$8\sqrt{2}\,r=81$

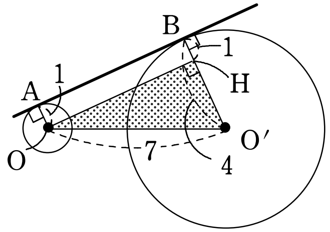
したがって　　$r=\dfrac{81}{8\sqrt{2}}=\dfrac{81\sqrt{2}}{16}$

(答)　$\dfrac{81\sqrt{2}}{16}$ cm

$\boxed{5}$

(解説)

O から線分 O′B に垂線 OH を引くと，四角形 AOHB は長方形であるから



AO=BH　……①

AB=OH　……②

① から　　$O'H=BO'-BH=4-1=3$

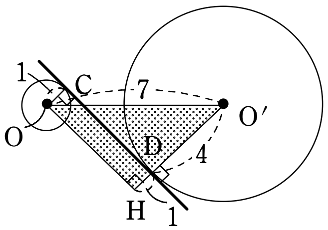
直角三角形 OO′H において　　$3^2+OH^2=7^2$

よって　　$OH^2=40$

OH>0 であるから　　$OH=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

② から　　$AB=OH=2\sqrt{10}$ (cm)

O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を引くと，四角形 OH′DC は長方形であるから



CO=DH′　……③

CD=OH′　……④

③ から　　$O'H'=O'D+DH'=4+1=5$

直角三角形 OO′H′ において　　$5^2+OH'^2=7^2$

よって　　$OH'^2=24$

OH′>0 であるから　　$OH'=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

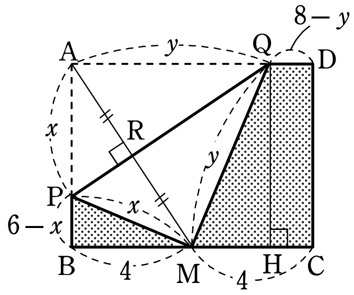
④ から　　$CD=OH'=2\sqrt{6}$ (cm)

6

(解説)

(1)　PM＝x cm とおくと，AP＝x であるから

$$BP=6-x$$



直角三角形 PBM において

$$(6-x)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2=x^2$$

これを解いて　$x=\frac{13}{3}$

したがって　PM＝$\frac{13}{3}$ cm

QM＝y cm とおくと，AQ＝y であるから　DQ＝$8-y$

点 Q から辺 CM に垂線 QH を引くと，四角形 QHCD は長方形であるから

QD＝HC　……①，　QH＝DC　……②

① から　MH＝MC－HC＝$\frac{8}{2}-(8-y)=y-4$

② から　QH＝DC＝6

よって，直角三角形 QMH において　$(y-4)^2+6^2=y^2$

これを解いて　$y=\frac{13}{2}$

したがって　QM＝$\frac{13}{2}$ cm

(2)　折り目 PQ は線分 AM の垂直二等分線である。

よって　RA＝RM　……③

また，直角三角形 ABM において　AM＝$\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

③ から　RM＝AM÷2＝$\sqrt{13}$

直角三角形 PMR において

$$PR=\sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2-(\sqrt{13})^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\ \text{(cm)}$$

(3)　△APQ≡△MPQ であるから四角形 APMQ の面積は

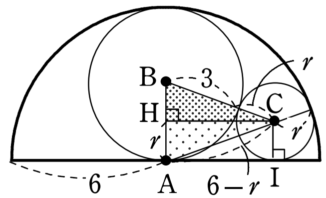
$$\triangle APQ+\triangle MPQ=2\times\triangle MPQ$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{13}{3}\times\frac{13}{2}=\frac{169}{6}\ (\text{cm}^2)$$

7

(解説)

円 B の半径は 3 cm である。



点 C から線分 AB に垂線 CH を引く。

円 C の半径を r cm とすると円 B，C は外接しているから

$$BC=3+r$$

円 C は半円 A に内接しているから　AC＝$6-r$

また，点 C から半円 A の半径に垂線 CI を引くと

$$BH=AB-HA=3-CI=3-r$$

直角三角形 BHC において，三平方の定理により

$$CH^2=(3+r)^2-(3-r)^2=12r$$

よって，直角三角形 HAC において，三平方の定理により　$r^2+12r=(6-r)^2$

よって　$24r=36$

したがって　$r=\frac{3}{2}$　　答　$\frac{3}{2}$ cm

$\boxed{8}$

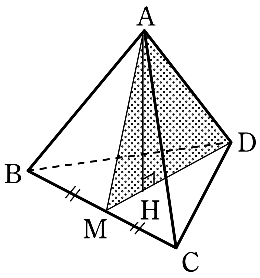
解説

(1)　図のように，正四面体の頂点を A，B，C，D とする。

△BCD は 1 辺 a cm の正三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

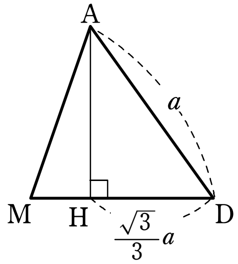
$$\mathrm{DM}=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって，△BCD の面積は　$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引くと，H は △BCD の重心であるから

$$\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$



よって，直角三角形 AHD において

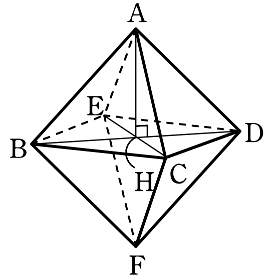
$$\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

したがって，正四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\ (\mathrm{cm}^3)$$

(2)　図のように，正八面体の頂点を A，B，C，D，E，F とする。



正四角錐 A－BCDE において，頂点 A から底面 BCDE に垂線 AH を引くと，H は線分 EC，BD の交点である。

よって，直角三角形 ABH において

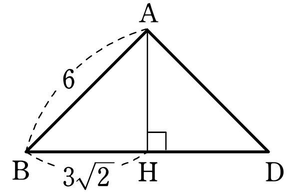
$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2$$

$$=6^2-\mathrm{BH}^2\quad\cdots\cdots①$$

ここで，直角三角形 BHC において，

BH：CH：BC＝1：1：$\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$



これと ① から　　$\mathrm{AH}^2=36-(3\sqrt{2})^2=18$

AH＞0 であるから　　$\mathrm{AH}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

よって，正四角錐 A－BCDE の体積は

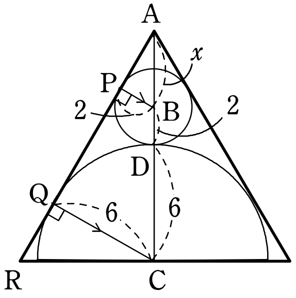
$$\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$$

したがって，正八面体の体積は　　$2\times36\sqrt{2}=72\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　円錐の頂点を A，球の中心を B，半球の中心を C，球と半球の接点を D とする。



A，B，C，D を通る平面で円錐を切断し，右の図のように，接点を P，Q とする。

線分 BP と線分 CQ は母線 AQ に垂直であるから

$$BP /\!/ CQ$$

よって　　$AB : AC = BP : CQ$

$AB = x$ cm とすると　　$x : (x + 2 + 6) = 2 : 6$

よって　　$x = 4$

したがって，円錐の高さは　　$4 + 2 + 6 = 12$ (cm)

(2)　直角三角形 ACQ において

$$AQ^2 = 12^2 - 6^2 = (6 \times 2)^2 - (6 \times 1)^2 = 6^2 \times 3$$

$AQ > 0$ であるから　　$AQ = \sqrt{6^2 \times 3} = 6\sqrt{3}$

円錐の底面の円周上の点で AP の延長上にある点を R とすると

$$\triangle ACQ \backsim \triangle ARC$$

よって　　$AQ : AC = CQ : RC$

すなわち　　$6\sqrt{3} : 12 = 6 : RC$

これを解くと　　$RC = 4\sqrt{3}$

したがって，円錐の体積は　　$\frac{1}{3} \times \{\pi \times (4\sqrt{3})^2\} \times 12 = 192\pi$ (cm³)