1

解答　$BP=\frac{5}{2}$，$PC=\frac{3}{2}$，$CQ=6$

解説

AP は ∠A の二等分線であるから

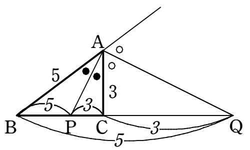
$BP:PC=AB:AC$

すなわち　$BP:(4-BP)=5:3$

よって　$5(4-BP)=3BP$

ゆえに　$BP=\frac{5}{2}$

また　$PC=4-BP=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$



AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから　$BQ:CQ=AB:AC$

すなわち　$(4+CQ):CQ=5:3$

よって　$5CQ=3(4+CQ)$　　ゆえに　$CQ=6$

2

解答　(1)　$\alpha=35°$，$\beta=34°$　(2)　$\alpha=30°$，$\beta=120°$　(3)　$\alpha=130°$

解説

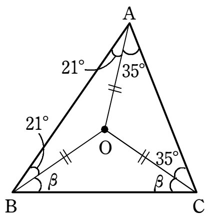
(1)　O は △ABC の外心であるから　$OA=OB=OC$

よって，△OCA は $OA=OC$ の二等辺三角形であるから

$\angle OAC=\angle OCA$

すなわち　$\alpha=35°$

同様に，△OAB は $OA=OB$ の二等辺三角形，△OBC は $OB=OC$ の二等辺三角形であるから，右の図のようになる。



△ABC の内角の和は 180° であるから

$2\times35°+2\times21°+2\times\beta=180°$

よって　$\beta=34°$

(2)　右の図のように，BH の延長と辺 CA の交点を D，CH の延長と辺 AB の交点を E とする。

H は △ABC の垂心であるから

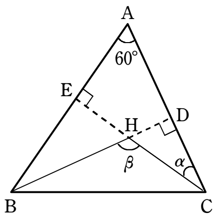
$CE\perp AB$，$BD\perp CA$

よって　$\angle AEC=90°$，$\angle BDC=90°$

△AEC の内角の和は 180° であるから

$60°+90°+\alpha=180°$

ゆえに　$\alpha=30°$



また，△CDH において，頂点 H における外角は ∠C と ∠D の和に等しいから

$\beta=\alpha+90°$　　よって　$\beta=30°+90°=120°$

(3)　$\angle B=2\angle IBC$，$\angle C=2\angle ICB$ であるから，

△ABC において

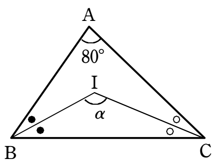
$80°+2\angle IBC+2\angle ICB=180°$

よって　$\angle IBC+\angle ICB=50°$

したがって，△IBC において

$\alpha=180°-(\angle IBC+\angle ICB)$

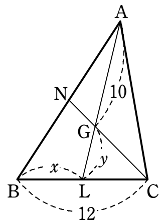
$=180°-50°=130°$



3

解答　$x=6$，$y=5$

解説



点 L は，辺 BC の中点であるから

$x=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times12=6$

$AG:GL=2:1$ であるから

$10:y=2:1$

$2y=10$

$y=\frac{10}{2}$

よって　$y=5$

4

解答　1：12

解説

点 G は △ABC の重心であるから

$AG:GM=2:1$

よって　$\triangle GNM=\frac{1}{3}\triangle ANM$　……①

また，点 M は辺 BC の中点であるから

$\triangle ANM=\frac{1}{2}\triangle ANC$　……②

更に，点 N は辺 AB の中点であるから

$\triangle ANC=\frac{1}{2}\triangle ABC$　……③

①，②，③ から

$\triangle GNM=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{12}\triangle ABC$

よって　$\triangle GNM:\triangle ABC=1:12$

5

解答　(1)　2：3　(2)　8：7

解説

(1)　仮定より

$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{4}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{1}=2$

チェバの定理により

$\frac{BP}{PC}\times\frac{3}{4}\times2=1$

$\frac{BP}{PC}=\frac{2}{3}$

よって　$BP:PC=2:3$

(2)　仮定より

$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{4+3}{3}=\frac{7}{3}$

チェバの定理により

$\frac{BP}{PC}\times\frac{3}{8}\times\frac{7}{3}=1$

$\frac{BP}{PC}=\frac{8}{7}$

よって　$BP:PC=8:7$

6

解答　(1)　2：9　(2)　2：21

解説

(1)　仮定から　$\frac{BP}{PC}=\frac{3}{1}$，　$\frac{AR}{RB}=\frac{3}{2}$

メネラウスの定理により　$\frac{3}{1}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{3}{2}=1$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{2}{9}$

よって　$CQ:QA=2:9$

(2)　仮定から　$\frac{BP}{PC}=\frac{2+1}{1}=\frac{3}{1}$，　$\frac{AR}{RB}=\frac{5+2}{2}=\frac{7}{2}$

メネラウスの定理により　$\frac{3}{1}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{7}{2}=1$

$\frac{CQ}{QA}=\frac{2}{21}$

よって　$CQ:QA=2:21$

7

解答　略

解説

証明　DE は ∠ADB の二等分線であるから

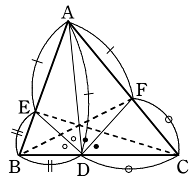
$AE:EB=DA:DB$

よって　$\frac{AE}{EB}=\frac{DA}{DB}$

DF は ∠ADC の二等分線であるから

$CF:FA=DC:DA$

よって　$\frac{CF}{FA}=\frac{DC}{DA}$



したがって　$\frac{BD}{DC}\times\frac{CF}{FA}\times\frac{AE}{EB}=\frac{BD}{DC}\times\frac{DC}{DA}\times\frac{DA}{DB}=1$

よって，チェバの定理の逆により，3 直線 AD，BF，CE は 1 点で交わる。　終

8

解答　略

解説

三角形の内角，外角の二等分線と比の定理により

$BP:PC=AB:AC$，$CQ:QA=BC:AB$，$AR:RB=AC:BC$

すなわち　$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$，　$\frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{AB}$，　$\frac{AR}{RB}=\frac{AC}{BC}$

よって　$\frac{BP}{PC}\times\frac{CQ}{QA}\times\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{AB}\times\frac{AC}{BC}$

$=1$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は一直線上にある。　終

9

解答　∠C＜∠B＜∠A

解説

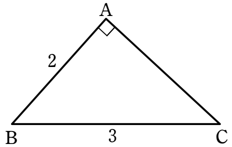
三平方の定理から

$$CA^2=BC^2-AB^2=3^2-2^2=5$$

よって　$CA=\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}<3$ であるから　$AB<CA<BC$

したがって　$\angle C<\angle B<\angle A$



10

解答　略

解説

$AB>AC$ であるから　$\angle C>\angle B$

また　$\angle APB=\angle C+\angle PAC>\angle C$

よって　$\angle APB>\angle B$

ゆえに，△ABP において　$AB>AP$

11

解答　(1)　$3<x<15$　(2)　$2<x<5$

解説

(1)　3 辺の長さが x，6，9 である三角形が存在するための条件は

$$|6-9|<x<6+9\quad すなわち\quad 3<x<15$$

(2)　3 辺の長さが x，6，9 である三角形が存在するための条件は

$$|2(x-2)|<6<2(2x-1)$$

すなわち　$|x-2|<3<2x-1$

$|x-2|<3$ から　$-3<x-2<3$

よって　$-1<x<5$

$3<2x-1$ から　$2<x$

共通範囲を求めて　$2<x<5$

1

解答　$DC=2$，$BE=\dfrac{27}{2}$

解説

BD は ∠B の二等分線であるから

$$BA:BC=AD:DC\quad すなわち\quad 9:6=3:DC$$

よって　$9DC=6\cdot 3$　ゆえに　$DC=2$

AE は頂点 A における外角の二等分線であるから

$$AB:AC=BE:EC\quad \cdots\cdots ①$$

ここで　$AB=9$，$AC=AD+DC=3+2=5$，$EC=BE-BC=BE-6$

これらを ① に代入して　$9:5=BE:(BE-6)$

よって　$9(BE-6)=5BE$　これを解いて　$BE=\dfrac{27}{2}$

2

解答　(1)　$\alpha=50°$，$\beta=20°$　(2)　$\alpha=40°$，$\beta=100°$

(3)　$\alpha=30°$，$\beta=120°$　(4)　$\alpha=50°$，$\beta=40°$

(5)　$\alpha=20°$　(6)　$\alpha=115°$　(7)　$\alpha=20°$，$\beta=120°$

解説

(1)　$OA=OB$ であるから

$$\angle OAB=\angle OBA=20°$$

ゆえに　$\angle OAC=50°$

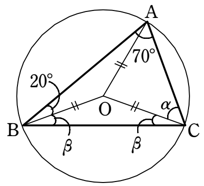
よって　$\alpha=\angle OAC=50°$

また，$OB=OC$ であるから

$$\angle OBC=\angle OCB=\beta$$

ゆえに　$20°+70°+50°+2\beta=180°$

よって　$\beta=20°$



(2)　$\angle A=180°-(30°+20°)=130°$　……①

$OA=OB=OC$ であるから

$\angle OAB=\angle OBA$，$\angle OAC=\angle OCA$，

$\angle OBC=\angle OCB=\alpha$

よって　$\angle A=\angle OAB+\angle OAC$

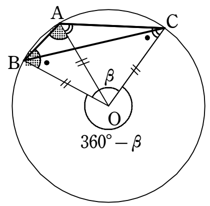
$=\angle OBA+\angle OCA$

$=(\alpha+30°)+(\alpha+20°)$

$=2\alpha+50°$　……②

①，② から　$2\alpha+50°=130°$

ゆえに　$\alpha=40°$　また　$\beta=180°-2\times 40°=100°$



別解　$\overset{\frown}{BA}$，$\overset{\frown}{AC}$ に対する中心角と円周角の関係から

$$\angle BOA=2\angle BCA=40°,\quad \angle AOC=2\angle ABC=60°$$

ゆえに　$\beta=\angle BOA+\angle AOC=100°$

また　$\alpha=\dfrac{1}{2}(180°-100°)=40°$

(3)　線分 BH の延長と辺 AC の交点を D，線分 CH の延長と辺 AB の交点を E とする。

H は △ABC の垂心であるから

$$\angle ADB=90°,\quad \angle AEC=90°$$

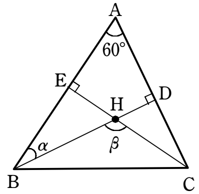
△ABD の内角の和は 180° であるから

$$\alpha+60°+90°=180°$$

よって　$\alpha=30°$

また，$\angle BHC=\angle BEH+\angle EBH$ であるから

$$\beta=90°+30°=120°$$



(4)　線分 AH の延長と辺 BC の交点を E とする。

H は △ABC の垂心であるから

$$\angle BDC=90°,\quad \angle AEB=90°$$

△BDC の内角の和は 180° であるから

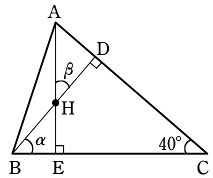
$$\alpha+90°+40°=180°$$

よって　$\alpha=50°$

また，$\angle AHD=\angle BHE$ であり，△BHE の内角の和は 180° であるから

$$50°+90°+\beta=180°$$

よって　$\beta=40°$



(5)　$\angle IAC=\angle IAB=34°$

$\angle IBA=\angle IBC=36°$

$\angle ICA=\angle ICB=\alpha$

△ABC において，内角の和は 180° であるから

$$\alpha=\frac{1}{2}\{180°-(34°\times 2+36°\times 2)\}=20°$$

(6)　$\angle ABC+\angle ACB=180°-50°=130°$

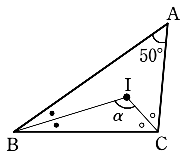
$\angle IBA=\angle IBC$

$\angle ICA=\angle ICB$

であるから

$$\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$$

$$=\frac{1}{2}\times 130°=65°$$



△IBC において，内角の和は 180° であるから

$$\alpha=180°-(\angle IBC+\angle ICB)=180°-65°=115°$$

(7)　$\angle IBC=\angle IBA=\alpha$

$\angle ICB=\angle ICA=40°$

三角形の内角の和は 180° であるから

△ABC において

$$\alpha=\frac{1}{2}\{180°-(40°\times 2+60°)\}=20°$$

△IBC において

$$\beta=180°-(\alpha+40°)=180°-(20°+40°)=120°$$

3

解答　$x=16$，$y=8$

解説

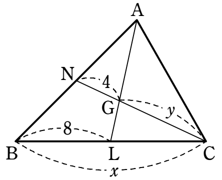
点Ｌは，辺 BC の中点であるから

$x=2\mathrm{BL}=2\times 8=16$

CG：GN＝2：1 であるから

$y:4=2:1$

よって　　$y=8$



4

解答　(1)　$\dfrac{5}{12}$ 倍　　(2)　36 cm²

解説

(1)　AO＝CO，BM＝CM より，点Ｐは△ABC の重心であるから　　BP：PO＝2：1

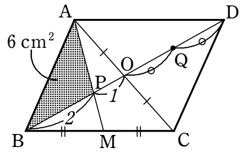
$\mathrm{PO}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BO}$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}$ であるから

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{PO}+\mathrm{OQ}=\frac{1}{3}\mathrm{BO}+\frac{1}{2}\mathrm{OD}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{BD}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\mathrm{BD}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{BD}$$

$$=\frac{5}{12}\mathrm{BD}$$

したがって　　$\dfrac{5}{12}$ 倍



(2)　PD＝PO＋OD＝PO＋3PO＝4PO

よって　　BP：PD＝2PO：4PO＝1：2

ゆえに　　△ABD＝3△ABP＝3×6＝18 (cm²)

したがって，四角形 ABCD の面積は　　2×△ABD＝36 (cm²)

5

解答　(1)　1：6　　(2)　1：3　　(3)　4：3

解説

(1)　△ABC において，チェバの定理により

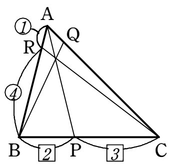
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

AR：RB＝1：4，BP：PC＝2：3 であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{1}{4}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=6$

したがって　　AQ：QC＝1：6



(2)　△ABC において，チェバの定理により

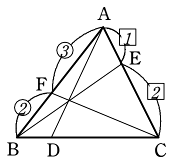
$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\times\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

AF：FB＝3：2，AE：EC＝1：2 であるから

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{3}$

したがって　　BD：DC＝1：3



(3)　△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

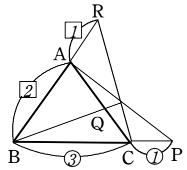
BP：PC＝(3＋1)：1＝4：1，

AR：RB＝1：(1＋2)＝1：3 であるから

$$\frac{4}{1}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{1}{3}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{3}{4}$

したがって　　AQ：QC＝4：3



6

解答　(1)　1：2　　(2)　1：4　　(3)　1：2

解説

(1)　△ABC と直線 QR において，メネラウスの定理により

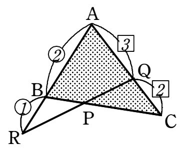
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

CQ：QA＝2：3，AR：RB＝(2＋1)：1＝3：1 であるから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{1}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{1}{2}$

したがって　BP：PC＝1：2



(2)　△ABC と直線 PQ において，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\times\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

BP：PC＝(1＋1)：1＝2：1，

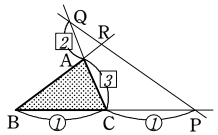
CQ：QA＝(3＋2)：2＝5：2 であるから

$$\frac{2}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1}{5}$

ゆえに　　AR：RB＝1：5

したがって　RA：AB＝1：(5−1)＝1：4



(3)　△BCE と直線 AD において，メネラウスの定理により

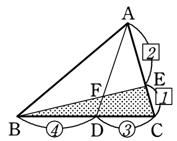
$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\times\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AE}}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$$

BD：DC＝4：3，CA：AE＝(1＋2)：2＝3：2 であるから

$$\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1$$

よって　　$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=\dfrac{1}{2}$

したがって　EF：FB＝1：2



7

解答　略

解説

△OBC において，OP は ∠BOC の二等分線であるから

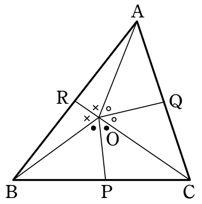
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots①$$

△OCA において，OQ は ∠COA の二等分線であるから

$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\quad\cdots\cdots②$$

△OAB において，OR は ∠AOB の二等分線であるから

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots③$$



よって，①，②，③の辺々を掛けて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}\cdot\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=1$$

したがって，チェバの定理の逆により，AP，BQ，CR は１点で交わる。

8

解答　略

解説

AP は ∠A の外角の二等分線であるから

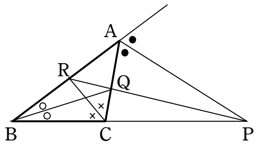
BP：PC＝AB：AC

よって　　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$　……①

BQ，CR はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから

CQ：QA＝BC：BA

AR：RB＝CA：CB



よって　　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}$　……②，　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$　……③

①，②，③の辺々を掛けて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=1$$

したがって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，Q，R は１つの直線上にある。

9

解答　(1)　∠C＜∠A＜∠B　　(2)　∠B＜∠C＜∠A　　(3)　AB＜BC＜CA

解説

(1)　$\sqrt{3}<2<3$ であるから　　AB＜BC＜CA

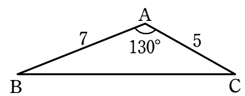
よって　　∠C＜∠A＜∠B

(2)　∠A が鈍角であるから，∠B と ∠C は鋭角である。

よって，∠A が最大の内角となる。

また，CA＜AB であるから　　∠B＜∠C

ゆえに　　∠B＜∠C＜∠A



(3)　∠A＋∠B＋∠C＝180° であるから

$\angle\mathrm{C}=180^\circ-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B})=180^\circ-(60^\circ+70^\circ)=50^\circ$

よって　　∠C＜∠A＜∠B　　　　ゆえに　　AB＜BC＜CA

10

解答　略

解説

△ABP において

$\angle APB < 90°$

ゆえに　$\angle APB < \angle ABP$

よって　$AB < AP$ ……①

次に，△ABC において

$\angle ACB + \angle CAB = 180° - 90°$

$= 90°$

よって，$\angle ACB < 90°$ であるから

$\angle ACP < 90°$ ……②

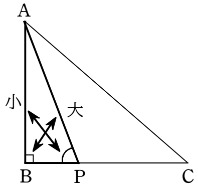
また，$\angle APC = 90° + \angle BAP$ であるから

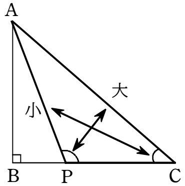
$\angle APC > 90°$ ……③

②，③から，△APC において　$\angle ACP < \angle APC$

ゆえに　$AP < AC$ ……④

①，④から　$AB < AP < AC$





11

解答　(1)　$4 < x < 8$　　(2)　$1 < x < 7$

解説

(1)　3 辺の長さが x，2，6 である三角形が存在するための条件は

$|2-6| < x < 2+6$

すなわち　$4 < x < 8$

(2)　3 辺の長さが $x+5$，$2x+1$，$4x-1$ である三角形が存在するための条件は

$x+5 < (2x+1)+(4x-1)$ ……①

$2x+1 < (x+5)+(4x-1)$ ……②

$4x-1 < (x+5)+(2x+1)$ ……③

を同時に満たすような x の値の範囲を求めればよい。

①から　$5 < 5x$　　よって　$x > 1$ ……①′

②から　$-3 < 3x$　　よって　$x > -1$ ……②′

③から　$x < 7$ ……③′

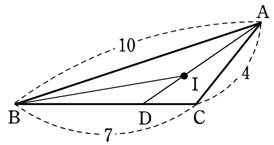
①′，②′，③′の共通範囲を求めて　$1 < x < 7$

1

解答　(1)　5　　(2)　2：1　　(3)　1：3　　(4)　5：21

解説

I は △ABC の内心であるから，3 つの内角の二等分線の交点である。



(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから　AB：AC＝BD：DC

すなわち　10：4＝BD：(7－BD)

よって　$10(7-BD) = 4BD$

これを解いて　$BD = 5$

(2)　△ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから

BA：BD＝AI：ID

よって　AI：ID＝10：5＝2：1

(3)　△IBD と △ABD は底辺をそれぞれ ID，AD とすると，高さが等しいから

△IBD：△ABD＝ID：AD＝1：3

(4)　△ABD と △ABC は底辺をそれぞれ BD，BC とすると，高さが等しいから

△ABD：△ABC＝BD：BC＝5：7

このことと (3) から　△IBD：△ABC＝5：21

2

解答　(1)　2　　(2)　3

解説

(1)　AD，BE は △ABC の中線であるから，その交点 F は △ABC の重心である。

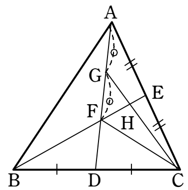
よって　BF：FE＝2：1

ゆえに　$FE = \dfrac{1}{2+1} \times BE = \dfrac{1}{3} \times 9 = 3$

また，C と F を結ぶと，CG，FE は △AFC の中線であるから，その交点 H は △AFC の重心である。

よって，FH：HE＝2：1 から

$FH = \dfrac{2}{2+1} \times FE = \dfrac{2}{3} \times 3 = 2$



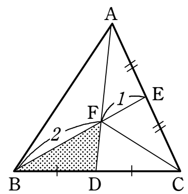
(2)　△FBC：△FBD＝BC：BD＝2：1

よって　△FBC＝2△FBD

また　△EBC：△FBC＝EB：FB＝3：2

ゆえに　$\triangle EBC = \dfrac{3}{2}\triangle FBC = \dfrac{3}{2} \times 2\triangle FBD$

$= 3\triangle FBD$



3

解答　略

解説

△ABC の重心を G とすると，直線 AG は △ABC の中線であるから，直線 AG は線分 BC を 2 等分する。　……①

また，G は △ABC の垂心でもあるから

$AG \perp BC$ ……②

①，②から，直線 AG は線分 BC の垂直二等分線である。

ゆえに　$AB = AC$ ……③

同様に，G が △ABC の重心であることから，直線 BG は線分 CA を 2 等分する。

また，G は △ABC の垂心でもあるから

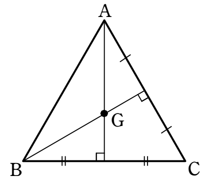
$BG \perp CA$

ゆえに，直線 BG は線分 CA の垂直二等分線であるから

$BC = BA$ ……④

③，④から　$AB = BC = CA$

したがって，△ABC は正三角形である。



4

解答　外心

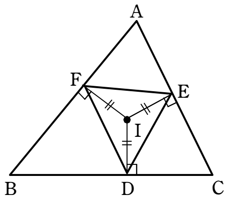
解説

I は △ABC の内心であるから，3 辺 BC，CA，AB から等距離にある。

よって　$ID = IE = IF$

ゆえに，I は 3 点 D，E，F から等距離にある。

したがって，I は △DEF の外心である。

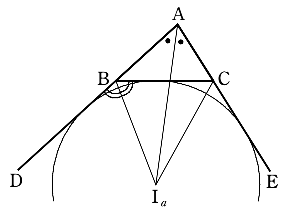


5

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

辺 AB，AC の B，C を越える延長上に，それぞれ点 D，E をとる。



(1)　$\angle AI_aB = \angle I_aBD - \angle I_aAB$

$= \dfrac{1}{2}\angle CBD - \dfrac{1}{2}\angle A$

$= \dfrac{1}{2}(\angle CBD - \angle A)$

$= \dfrac{1}{2}\angle C$

(2)　$\angle AI_aC = \angle I_aCE - \angle I_aAC = \dfrac{1}{2}\angle BCE - \dfrac{1}{2}\angle A$

$= \dfrac{1}{2}(\angle BCE - \angle A) = \dfrac{1}{2}\angle B$

よって　$\angle BI_aC = \angle AI_aB + \angle AI_aC = \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C)$

$= \dfrac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \dfrac{1}{2}\angle A$

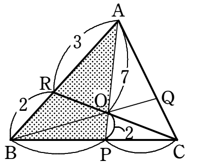
6

解答　(1)　4：3　　(2)　2：1

第１講　レベルA

解説

(1)　△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を用いると



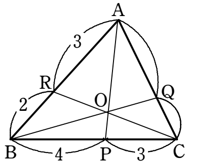
$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2}=1$

よって　$\frac{BC}{CP}=\frac{7}{3}$　　ゆえに　BC：CP＝7：3

したがって　BP：PC＝(7−3)：3＝4：3

(2)　△ABC にチェバの定理を用いると



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{4}{3}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{3}{2}=1$

よって　$\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{2}$

したがって　AQ：QC＝2：1

第１講　レベルB

$\boxed{1}$

解答　(1)　6：1　　(2)　7：2　　(3)　7 倍

解説

(1)　△BCF と直線 AE について，メネラウスの定理により　$\frac{BE}{EC}\times\frac{CA}{AF}\times\frac{FQ}{QB}=1$

仮定から　$\frac{BE}{EC}=\frac{2}{1}$，　$\frac{CA}{AF}=\frac{2+1}{1}=\frac{3}{1}$

よって　$\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}\times\frac{FQ}{QB}=1$

$$\frac{FQ}{QB}=\frac{1}{6}$$

したがって　BQ：QF＝6：1

(2)　(1) の結果より，BQ：QF＝6：1 であるから

△BQA：△ABF＝6：(6＋1)＝6：7

よって　$\triangle ABF=\frac{7}{6}\triangle BQA$　……①

また，CF：AF＝2：1 であるから

△ABF：△ABC＝1：(2＋1)＝1：3

したがって　△ABC＝3△ABF　……②

①，② から　$\triangle ABC=3\times\frac{7}{6}\triangle BQA=\frac{7}{2}\triangle BQA$

よって　△ABC：△BQA＝7：2

(3)　△CRB，△APC についても，(2) と同様に考えて

$$\triangle CRB=\triangle APC=\triangle BQA=\frac{2}{7}\triangle ABC$$

このとき　△PQR＝△ABC−△CRB−△APC−△BQA

$$=\triangle ABC-3\times\frac{2}{7}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$$

したがって　△ABC＝7△PQR

よって，△ABC の面積は，△PQR の面積の 7 倍である。

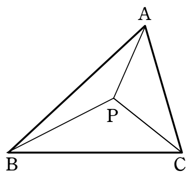
$\boxed{2}$

解答　略

解説

△PAB において

AP＋BP＞AB　……①



同様に，△PBC，△PCA において

BP＋CP＞BC　……②

CP＋AP＞CA　……③

①，②，③ の辺々を加えると

2(AP＋BP＋CP)＞AB＋BC＋CA

よって　$AP+BP+CP>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

第２講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=20^\circ$　　(2)　$\theta=55^\circ$　　(3)　$\theta=75^\circ$

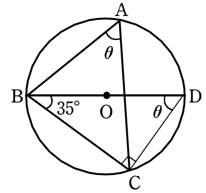
解説

(1)　円周角の定理により　　∠BOC＝2∠BAC＝2×70°＝140°

△OBC は OB＝OC の二等辺三角形であるから　　∠OBC＝∠OCB

よって　$\theta=\frac{180^\circ-140^\circ}{2}=20^\circ$

(2)　2 点 C，D を結ぶ。



BD は円の直径であるから　　∠BCD＝90°

円周角の定理により

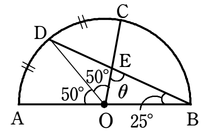
$\angle BDC=\angle BAC=\theta$

△BCD の内角の和は 180° であるから

$35^\circ+90^\circ+\theta=180^\circ$

よって　$\theta=55^\circ$

(3)　2 点 O，D を結ぶ。



$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ であるから

∠AOD＝∠DOC＝100°÷2＝50°

円周角の定理により

$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$

△EOB において，∠EOA＝∠BEO＋∠OBE であるから

$100^\circ=\theta+25^\circ$　　　よって　$\theta=75^\circ$

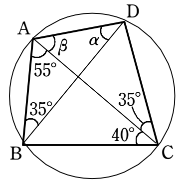
$\boxed{2}$

解答　$\alpha=40^\circ$，$\beta=50^\circ$

解説

∠ABD＝35°，∠ACD＝35° であるから　　∠ABD＝∠ACD

B と C は直線 AD に関して同じ側にあるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。



この円において，円周角の定理により

$\alpha=\angle ACB=40^\circ$

また，△ABD の内角の和は 180° であるから

$(\beta+55^\circ)+35^\circ+40^\circ=180^\circ$

よって　$\beta=50^\circ$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\angle x=85^\circ$　　(2)　$\angle x=46^\circ$

解説

(1)　△ABE の内角について　　∠BAE＝180°−(65°＋30°)＝85°

四角形 ABCD は円に内接しているから　　$\angle x=\angle BAD=85^\circ$

(2)　△ABF の内角と外角の関係から　　　$\angle EAD=\angle x+56^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから　　$\angle ADE=\angle x$

△ADE の内角について　　$32^\circ+(\angle x+56^\circ)+\angle x=180^\circ$

よって　$\angle x=46^\circ$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

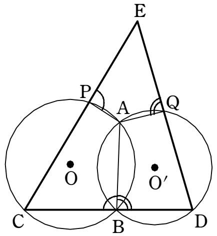
四角形 PCBA，ABDQ は，それぞれ円 O，O′ に内接するから　$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{APE}$

$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{AQE}$

よって　$\angle \mathrm{APE}+\angle \mathrm{AQE}=\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ABD}$

$=180°$

したがって，四角形 EPAQ は円に内接する。



5

解答　(1)　$\mathrm{AQ}=2$，$\mathrm{BC}=9$　(2)　$r=1$

解説

(1)　$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=2$

$\mathrm{BP}=\mathrm{BR}=6-2=4$，$\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=7-2=5$ から

$\mathrm{BC}=\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=4+5=9$

(2)　内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ P，Q，R とする。

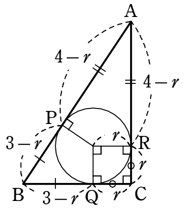
$\mathrm{RC}=r$，$\mathrm{QC}=r$ であるから

$\mathrm{AP}=\mathrm{AR}=4-r$，$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=3-r$

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AB}$ であるから

$(4-r)+(3-r)=5$

よって　$r=1$



6

解答　(1)　$x=80°$　(2)　$x=100°$　(3)　$x=80°$

解説

(1)　接線と弦の作る角により　$x=\angle \mathrm{ABC}=80°$

(2)　接線と弦の作る角により　$\angle \mathrm{CAB}=40°$

$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ より　$\angle \mathrm{DAC}=\angle \mathrm{CAB}=40°$

よって　$\angle \mathrm{BAD}=40°+40°=80°$

四角形 ABCD は円に内接するから　$x=180°-80°=100°$

(3)　接線と弦の作る角により　$\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{PBA}=50°$

よって　$x=180°-50°-50°=80°$

7

解答　(1)　$180°-2a$　(2)　略

解説

(1)　PA＝PB であるから

$\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{PBA}=a$

また，PA∥BC であるから

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{PAB}=a$

更に　$\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{PAB}=a$

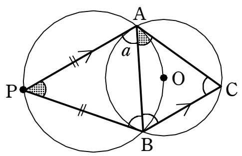
よって，△ABC において

$\angle \mathrm{BAC}=180°-2a$　……①

(2)　△APB において　$\angle \mathrm{APB}=180°-2a$　……②

①，② から　$\angle \mathrm{APB}=\angle \mathrm{BAC}$

したがって，直線 AC は △PAB の外接円の接線である。



8

解答　(1)　(ア)　$x=8$　(イ)　$x=5$　(ウ)　$x=3$　(2)　$\sqrt{3}$

解説

(1)　(ア)　方べきの定理により　$3x=4\cdot 6$　これを解いて　$x=8$

(イ)　方べきの定理により　$x(x+3)=4(4+6)$

ゆえに　$x^2+3x-40=0$　よって　$(x-5)(x+8)=0$

$x>0$ であるから　$x=5$

(ウ)　方べきの定理により　$x(x+2)=(\sqrt{15})^2$

ゆえに　$x^2+2x-15=0$　よって　$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$ であるから　$x=3$

(2)　点 P を通るこの円の直径を CD とする。

方べきの定理により

$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

$=(\mathrm{OC}-\mathrm{OP})(\mathrm{OD}+\mathrm{OP})$

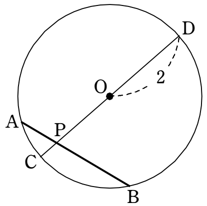
$=\mathrm{OD}^2-\mathrm{OP}^2$

$=4-\mathrm{OP}^2$

よって，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=1$ であるとき　$4-\mathrm{OP}^2=1$

ゆえに　$\mathrm{OP}^2=3$

$\mathrm{OP}>0$ であるから　$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$



9

解答　(1)　円 O′ が円 O の外部にある　(2)　2 点で交わる　(3)　内接する

解説

円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とすると

$r+r'=5+4=9$，　$r-r'=5-4=1$

(1)　$d=10$ のとき　$d>r+r'$

よって，円 O′ が円 O の外部にある。

(2)　$d=7$ のとき　$r-r'<d<r+r'$

よって，2 円で交わる。

(3)　$d=1$ のとき　$d=r-r'$

よって，2 円は内接する。

10

解答　$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{11}{2}$

解説

2 つの円の半径を r，r' $(r>r')$ とする。

2 つの円の中心間の距離が 7 のとき外接するから

$r+r'=7$　……①

2 つの円の中心間の距離が 4 のとき内接するから

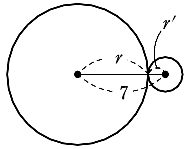
$r-r'=4$　……②

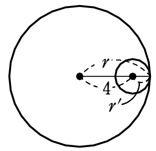
①＋② から　$2r=11$

よって　$r=\dfrac{11}{2}$

① から　$r'=\dfrac{3}{2}$

ゆえに，2 つの円の半径は　$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{11}{2}$





11

解答　(1)　$6\sqrt{2}$　(2)　$4\sqrt{2}$

解説

(1)　点 O′ から OA に垂線 O′H を下ろすと，四角形 AHO′B は長方形となり

$\mathrm{AB}=\mathrm{HO'}$　……①

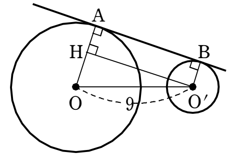
$\mathrm{HA}=\mathrm{O'B}=2$

よって　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}-\mathrm{HA}=5-2=3$

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$\mathrm{HO'}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

したがって，① から　$\mathrm{AB}=6\sqrt{2}$



(2)　点 O′ から OA の延長に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となり

$\mathrm{AB}=\mathrm{HO'}$　……①

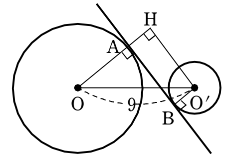
$\mathrm{HA}=\mathrm{O'B}=2$

よって　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}+\mathrm{HA}=5+2=7$

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$\mathrm{HO'}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

したがって，① から　$\mathrm{AB}=4\sqrt{2}$



1

解答　(1)　$\theta=25^\circ$　　(2)　$\theta=20^\circ$　　(3)　$\theta=25^\circ$

解説

(1)　円周角の定理により

$$\angle BOC=2\angle BAC=2\theta$$
$$\angle COD=2\angle CED=2\times50^\circ=100^\circ$$

$\angle BOC+\angle COD=\angle BOD$ であるから

$2\theta+100^\circ=150^\circ$　　　よって　$\theta=25^\circ$

(2)　円周角の定理により

$$\angle AOB=2\angle ACB=2\times30^\circ=60^\circ$$

また　$\angle ADB=\angle DBC+\angle DCB$

$$=50^\circ+30^\circ=80^\circ$$

$$\angle ADB=\angle OAD+\angle AOB$$
$$=\theta+60^\circ$$

よって　$\theta+60^\circ=80^\circ$　　　ゆえに　$\theta=20^\circ$

(3)　AB が直径であるから，円周角の定理により　$\angle ACB=90^\circ$

△ABC の内角の和は 180° であるから

$$\angle BAC=180^\circ-90^\circ-65^\circ=25^\circ$$

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$ であるから　$\theta=\angle BAD=\angle BAC=25^\circ$

2

解答　(1)　24°　　(2)　46°

解説

(1)　2 点 A，D は直線 BC について同じ側にあり，$\angle BAC=\angle BDC$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle x$ は $\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角であるから　$\angle x=\angle CBD=24^\circ$

(2)　△ABD において　$\angle BDA=180^\circ-(90^\circ+32^\circ)=58^\circ$

よって，2 点 C，D は直線 AB について同じ側にあり，$\angle BCA=\angle BDA$ であるから，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

このとき，$\angle ACD$ は $\overset{\frown}{DA}$ に対する円周角であるから　$\angle ACD=\angle ABD=32^\circ$

よって，△ECD の内角と外角について　$\angle x=78^\circ-32^\circ=46^\circ$

3

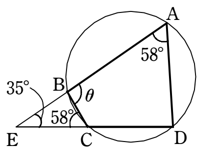
解答　(1)　$\theta=93^\circ$　　(2)　$\theta=50^\circ$　　(3)　$\theta=100^\circ$

解説

(1)　$\angle BCE=\angle A=58^\circ$

よって　$\theta=\angle E+\angle BCE$

$$=35^\circ+58^\circ$$
$$=93^\circ$$



(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BCE=\angle DAB=\theta$$

よって　$\angle ABF=\angle BCE+\angle BEC$

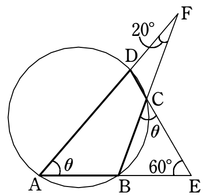
$$=\theta+60^\circ$$

△ABF において

$$\theta+20^\circ+(\theta+60^\circ)=180^\circ$$

整理して　$2\theta=100^\circ$

したがって　$\theta=50^\circ$



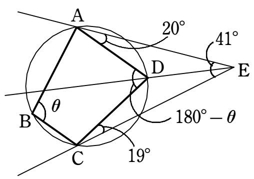
(3)　D と E を通る直線を引く。

$$\angle ADC=\angle DAE+\angle AED+\angle CED+\angle DCE$$
$$=20^\circ+\angle AEC+19^\circ$$
$$=20^\circ+41^\circ+19^\circ$$
$$=80^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接しているから，

$\theta+\angle ADC=180^\circ$ より

$$\theta=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-80^\circ=100^\circ$$



4

解答　略

解説

四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle BCD=\angle EAD$$

△ADE の外接円において，$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角より

$$\angle EAD=\angle EGD$$

したがって　$\angle EGD=\angle FCD$

よって，四角形 DGFC は，頂点 G の外角がそれと隣り合う内角の対角に等しいから，円に内接する。

5

解答　(1)　$AB=r+10$，$CA=r+3$　　(2)　$r=2$

解説

(1)　2 辺 CA，AB と円 O の接点を，それぞれ Q，R とおく。

$OQ\perp CA$，$OR\perp AB$，$OQ=OR=r$ であるから，四角形 AROQ は正方形である。

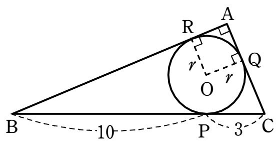
よって　$AR=AQ=r$

また，$BR=BP$ であるから　$BR=10$

ゆえに　$AB=AR+BR=r+10$

$CQ=CP$ であるから　$CQ=3$

ゆえに　$CA=AQ+CQ=r+3$



(2)　△ABC において，三平方の定理により

$AB^2+CA^2=BC^2$　　すなわち　$(r+10)^2+(r+3)^2=13^2$

整理すると　$r^2+13r-30=0$　　よって　$(r+15)(r-2)=0$

$r>0$ であるから　$r=2$

6

解答　(1)　$\angle x=74^\circ$，$\angle y=56^\circ$　　(2)　$\angle x=70^\circ$，$\angle y=40^\circ$

(3)　$\angle x=108^\circ$，$\angle y=34^\circ$

解説

(1)　$\angle x=\angle ACB=74^\circ$

$\angle y=\angle ABC=56^\circ$

(2)　$\angle x=70^\circ$

△ABC は，BA＝BC の二等辺三角形であるから　$\angle BAC=\angle BCA=70^\circ$

よって，△ABC の内角について　$\angle y=180^\circ-70^\circ\times2=40^\circ$

(3)　$\angle x=108^\circ$

△ABD の内角と外角について　$\angle BAD=108^\circ-70^\circ=38^\circ$

よって　$\angle y=180^\circ-(108^\circ+38^\circ)=34^\circ$

7

解答　略

解説

対頂角は等しいから

$$\angle APT=\angle BPO$$

△OPB は OP＝OB の二等辺三角形であるから

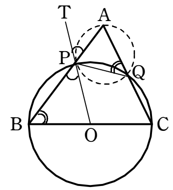
$$\angle BPO=\angle PBO$$

四角形 PBCQ は円 O に内接しているから

$$\angle PBO=\angle PQA$$

よって　$\angle APT=\angle PQA$

したがって，PT は △APQ の外接円に接する。



8

解答　(1)　(ア)　$x=\dfrac{11}{2}$　　(イ)　$x=\sqrt{21}$　　(ウ)　$x=15$　　(2)　5

解説

(1)　(ア)　方べきの定理から　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$　　すなわち　$(x-4)\cdot4=2\cdot3$

整理して　$4x=22$　　　よって　$x=\dfrac{11}{2}$

(イ)　CO は円 O の半径であるから　$CO=3$　　よって　$PC=x-3$

方べきの定理から　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$　　すなわち　$2\cdot(2+4)=(x-3)(x+3)$

整理して　$x^2=21$　　　$x>0$ であるから　$x=\sqrt{21}$

(ウ)　方べきの定理から　$PA\cdot PB=PT^2$　　すなわち　$5(5+x)=10^2$

整理して　$5x=75$　　　よって　$x=15$

(2)　直線 PO と円 O の 2 つの交点を，P に近い方から順に C，D とする。

方べきの定理から　$PC\cdot PD=PA\cdot PB$

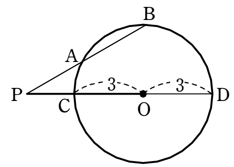
$PA\cdot PB=16$ から　$PC\cdot PD=16$

よって　$(OP-OC)(OP+OD)=16$

すなわち　$(OP-3)(OP+3)=16$

ゆえに　$OP^2-9=16$　　よって　$OP^2=25$

$OP>0$ であるから　$OP=5$



9

解答　(1)　内接する，1 本　　(2)　2 点で交わる，2 本　　(3)　外接する，3 本

(4)　一方が他方の外部にある，4 本

解説

(1)　$3=7-4$ であるから，2 つの円は内接する。

また，共通接線の本数は 1 本である。

(2)　$7-4<5<7+4$ であるから，2 つの円は 2 点で交わる。

また，共通接線の本数は２本である。

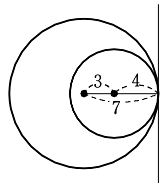
(3)　$11=7+4$ であるから，２つの円は外接する。

また，共通接線の本数は３本である。

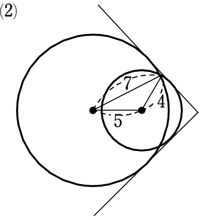
(4)　$13>7+4$ であるから，２つの円は一方が他方の外部にある。

また，共通接線の本数は４本である。

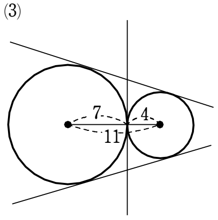
(1)



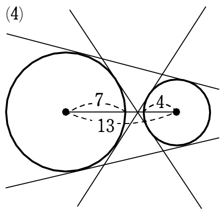
(2)



(3)



(4)



10

解答　$r=8$，$r'=3$

解説

中心間の距離が 11 のとき２円は外接するから

$r+r'=11$　……①

中心間の距離が５のとき２円は内接し，$r>r'$ であるから

$r-r'=5$　……②

①＋②から　$2r=16$　　よって　$r=8$

$r=8$ を①に代入して　$8+r'=11$　　よって　$r'=3$

11

解答　(1)　12　　(2)　$2\sqrt{7}$

解説

(1)　点 O′ から OA に垂線 O′H を下ろすと，四角形 AHO′B は長方形となり

$AB=HO'$　……①

$HA=O'B=4$

よって　$OH=OA-HA=9-4=5$

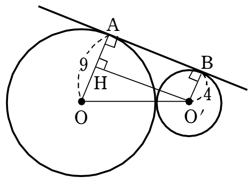
また，２円 O，O′ は外接しているから

$OO'=9+4=13$

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

ゆえに，①から　$AB=12$



(2)　直線 AB は２つの円 O，O′ の共通接線であるから

$OA\perp AB$，$O'B\perp AB$

ゆえに，点 O′ から直線 OA に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となる。

よって　$AB=HO'$，$AH=BO'=2$

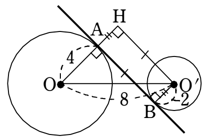
ゆえに　$OH=OA+AH=4+2=6$

△OO′H に三平方の定理を適用すると

$O'H=\sqrt{8^2-6^2}$

$=2\sqrt{7}$

よって　$AB=2\sqrt{7}$



1

解答　(1)　$\angle x=64°$　　(2)　$\angle x=112°$　　(3)　$\angle x=114°$

解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle ABC=180°-121°=59°$

よって　$\angle OBC=59°-33°=26°$

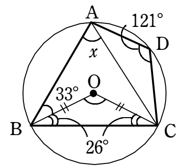
△OBC において，OB＝OC であるから

$\angle OCB=\angle OBC=26°$

よって　$\angle BOC=180°-2\times26°=128°$

$\angle x$ は $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角であるから

$\angle x=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times128°=64°$



(2)　２点 C，E を結ぶ。

BA＝CD より，$\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{CD}$ であるから

$\angle CED=\angle ACB=36°$

△ABC において

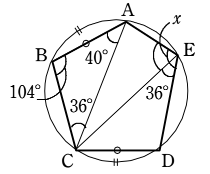
$\angle ABC=180°-(40°+36°)$

$=104°$

四角形 ABCE は円に内接しているから

$\angle AEC=180°-104°=76°$

よって　$\angle x=76°+36°=112°$



(3)　対角線 AD を引く。

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle BAD=180°-\angle BCD$

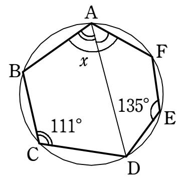
$=180-111°=69°$

四角形 ADEF は円に内接しているから

$\angle DAF=180°-\angle DEF$

$=180°-135°=45°$

よって　$\angle x=69°+45°=114°$



2

解答　116°

解説

円 O の半径 OB を引く。

$\angle AOB$ は，円 O の $\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角であるから

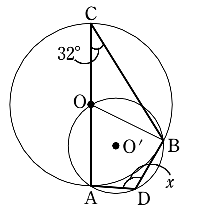
$\angle AOB=2\angle ACB=2\times32°=64°$

$\angle x$ の頂点を D とすると，四角形 OADB は円 O′ に内接しているから

$\angle AOB+\angle ADB=180°$

$64°+\angle x=180°$

よって　$\angle x=116°$



3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\angle AED+\angle AFD=90°+90°=180°$ により，１組の対角の和が 180° であるから，四角形 AEDF は円に内接する。

(2)　(1) より，$\angle AFE = \angle ADE$ ……①

△AED と △ADB において，

$\angle AED = \angle ADB\ (=90^\circ)$，$\angle EAD = \angle DAB$

よって　$\triangle AED \backsim \triangle ADB$

したがって　$\angle ADE = \angle DBE$ ……②

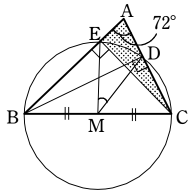
①，② から　$\angle DBE = \angle AFE$

1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，四角形 BCFE は円に内接する。

4

解答　36°

解説



$\angle BDC$ は直角であるから，3 点 B，D，C は BC を直径とする円周上にある。

また，$\angle BEC$ は直角であるから，3 点 B，E，C は BC を直径とする円周上にある。

よって，4 点 B，C，D，E は BC を直径とする円周上にある。

その円において，$\angle EMD$ は $\overset{\frown}{DE}$ の中心角であるから

$\angle EMD = 2\angle ECA$ ……①

ここで，△ACE において

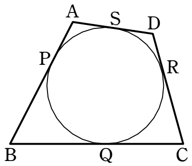
$\angle ECA = 180^\circ - (90^\circ + 72^\circ) = 18^\circ$

① に代入して　$\angle EMD = 2 \times 18^\circ = 36^\circ$

5

解答　略

解説



各辺と円の接点を，右の図のように定める。

円の外部の点から引いた 2 本の接線の長さは等しいから

$AP = AS$，　$BP = BQ$，

$CR = CQ$，　$DR = DS$

よって　$AB + CD = (AP + BP) + (CR + DR)$

$= (AS + BQ) + (CQ + DS)$

$= (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$= AD + BC$　終

6

解答　36°

解説

$\angle ADB = x$ とおく。

$AB = BD$ であるから　$\angle DAB = \angle ADB = x$

接線と弦のつくる角の定理により　$\angle ACB = x$

また，△ADB において　$\angle CBA = x + x = 2x$

△CAB において，CA＝CB から　$\angle CAB = \angle CBA = 2x$

よって，△CAD において　$x + 2x + x + x = 180^\circ$

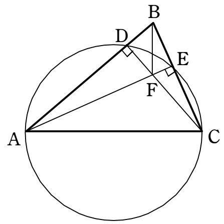
$x = 36^\circ$

したがって　$\angle ADB = 36^\circ$

7

解答　(1) $\dfrac{10}{7}$　(2) 2　(3) $3\sqrt{5}$　(4) $\dfrac{13\sqrt{5}}{5}$　(5) $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

解説



AC は直径であるから　$\angle ADC = \angle AEC = 90^\circ$

(1)　$BD = x$ とする。

△ACD において，三平方の定理から

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = (3\sqrt{6})^2 - (7-x)^2$

$= 5 + 14x - x^2$

△BCD において，三平方の定理から

$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$

よって　$5 + 14x - x^2 = 25 - x^2$

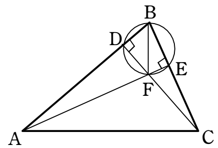
ゆえに　$x = \dfrac{10}{7}$　すなわち　$BD = \dfrac{10}{7}$

(2)　方べきの定理から　$BD \cdot BA = BE \cdot BC$

よって　$BE = \dfrac{BD \cdot BA}{BC} = \dfrac{\frac{10}{7} \cdot 7}{5} = 2$

(3)　△ABE において，三平方の定理により

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$



(4)　$\angle BDF = \angle BEF = 90^\circ$ であるから，4 点 B，D，E，F は 1 つの円周上にある。

この円について，方べきの定理から

$AF \cdot AE = AD \cdot AB$

よって　$AF = \dfrac{AD \cdot AB}{AE} = \dfrac{\left(7 - \frac{10}{7}\right) \cdot 7}{3\sqrt{5}}$

$= \dfrac{13}{\sqrt{5}} = \dfrac{13\sqrt{5}}{5}$

(5)　$FE = AE - AF = 3\sqrt{5} - \dfrac{13\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

△BEF において，三平方の定理から

$BF = \sqrt{BE^2 + FE^2} = \sqrt{4 + \dfrac{4}{5}} = \sqrt{\dfrac{24}{5}} = \dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

8

解答　(ア) 4　(イ) 3　(ウ) 6　$\dfrac{(エ)}{(オ)}$ $\dfrac{3}{2}$

解説

円 O について，方べきの定理から　$EP \cdot EQ = EA \cdot EB$

$EA = x+1$，$EB = x+3$ であるから　$EP \cdot EQ = (x+1)(x+3)$

よって　$EP \cdot EQ = x^2 + 4x + 3$

円 B について，方べきの定理から　$EP \cdot EQ = EC \cdot ED$

$ED = x+6$ であるから　$EP \cdot EQ = x(x+6)$

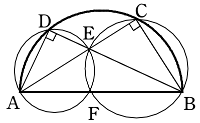
よって　$EP \cdot EQ = x^2 + 6x$

以上から　$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 6x$　これを解くと　$x = \dfrac{3}{2}$

9

解答　略

解説



直角三角形 EBC の外接円と AB の交点を F とすると，BE が直径であるから　$\angle BFE = 90^\circ$

方べきの定理から　$AE \cdot AC = AF \cdot AB$ ……①

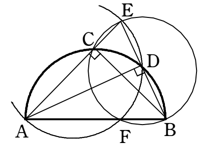
直角三角形 EAD の外接円と AB の交点は，$\angle AFE = 90^\circ$ から，点 F である。

方べきの定理から　$BE \cdot BD = BF \cdot AB$ ……②

①，② から

$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AF \cdot AB + BF \cdot AB$

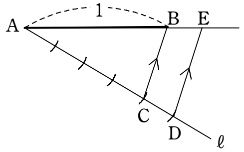
$= (AF + BF)AB = AB^2$



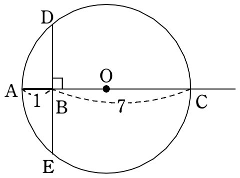
1

解答　(1)　図の線分AE　　(2)　図の線分 BD

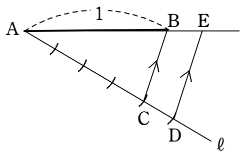
(1)



(2)



解説



(1)　①　点 A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。

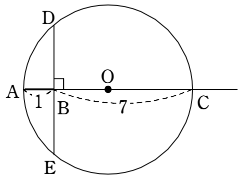
②　ℓ 上に AC：CD＝4：1 となるような点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。

③　点 D を通り，BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。線分 AE が求める線分である。

このとき，AE＝x とすると，BC∥ED から

$$1:x=4:5 \qquad \text{すなわち} \qquad x=\frac{5}{4}$$

よって，線分 AE は長さ $\frac{5}{4}$ の線分である。



(2)　①　線分 AB の B を越える延長上に，BC＝7 となるような点 C をとる。

②　線分 AC を直径とする円 O をかく。

③　点 B を通り，AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により

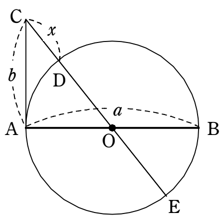
$$BA\cdot BC=BD\cdot BE$$

AB＝1，BC＝7，BD＝BE であるから　　$BD^2=7$

よって，線分 BD は長さが $\sqrt{7}$ の線分である。

2

解答　図の線分 CD

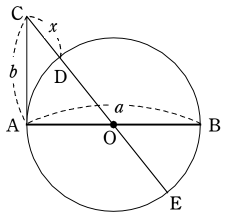


解説

①　長さ a の線分 AB を直径とする円 O をかく。

②　点 A を通り，AB に垂直な直線を引き，その上に AC＝b となるような点 C をとる。

③　直線 CO と円 O の 2 つの交点のうち，C に近い方から D，E とすると，線分 CD が求める線分である。



このとき，方べきの定理により　　$CD\cdot CE=CA^2$

CD＝x とおくと　　$x(x+a)=b^2$

すなわち　　$x^2+ax-b^2=0$

よって，線分 CD の長さが 2 次方程式 $x^2+ax-b^2=0$ の正の解となる。

3

解答　(1)　辺 GH，ED，KJ　　(2)　辺 CI，DJ，EK，FL，HI，IJ，KL，LG

(3)　辺 AG，DJ，EK，FL，FE，LK　　(4)　面 ABCDEF，GHIJKL

解説

(1)　面 AGHB は長方形であるから　　AB∥GH

面 ABCDEF は正六角形であるから　　AB∥ED

面 EKJD は長方形であるから　　ED∥KJ

これと AB∥ED から　　AB∥KJ

答　辺 GH，ED，KJ

(2)　辺 AB とねじれの位置にある辺は，辺 AB と同じ平面上にない辺であるから

辺 CI，DJ，EK，FL，HI，IJ，KL，LG

(3)　各辺を延ばしてできる直線のうち，平面 BHIC と共有点をもたない直線は

直線 AG，DJ，EK，FL，FE，LK

よって，面 BHIC と平行な辺は　　辺 AG，DJ，EK，FL，FE，LK

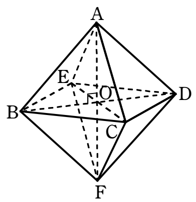
(4)　面 ABCDEF，GHIJKL は直線 BH と垂直であるから，面 ABCDEF，GHIJKL は面 BHIC と垂直である。

答　面 ABCDEF，GHIJKL

4

解答　(1)　$72\sqrt{2}$　　(2)　正六角形，$\frac{27\sqrt{3}}{2}$

解説



(1)　この正八面体を平面 BCDE で切ると，2 つの合同な正四角錐 A－BCDE，F－BCDE に分割される。

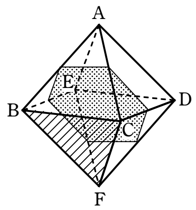
正方形 BCDE の対角線の交点を O とすると，△ABO は ∠AOB＝90° の直角二等辺三角形であるから　　$AO=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

よって，正四角錐 A－BCDE の体積は

$$\frac{1}{3}\times(\text{正方形 BCDE})\times AO=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$$

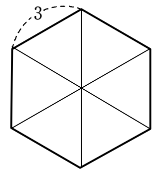
求める正八面体の体積は，正四角錐 A－BCDE の体積の 2 倍であるから

$$36\sqrt{2}\times 2=72\sqrt{2}$$



(2)　面 BCF に平行で，正八面体の体積を 2 等分する平面は，6 つの辺 AB，BE，EF，DF，CD，AC の中点を通る。

よって，切り口は 1 辺の長さが $\frac{6}{2}=3$ の正六角形となる。



1 辺の長さが 3 の正三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\right)=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

であるから，切り口の正六角形の面積は

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}\times 6=\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

5

解答　(1)　$\frac{512}{3}$　　(2)　$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解説

(1)　正四面体 BDEG は，立方体 ABCD－EFGH から合同な 4 つの四面体 ABDE，FBEG，CBDG，HDEG を除いたものである。

よって，求める体積 V は　　$V=8^3-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot 8\right)\times 4=\frac{512}{3}$

(2)　正四面体 BDEG に内接する球の中心を O とすると，正四面体は合同な 4 つの四面体 OBDE，OBEG，OBGD，ODEG に分割できる。

四面体 OBDE の体積を V_1 とすると

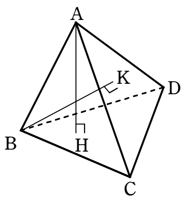
$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle BDE\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8\sqrt{2}\right)\right\}\cdot r=\frac{32\sqrt{3}}{3}r$$

$V=4V_1$ であるから　　$\frac{512}{3}=4\cdot\frac{32\sqrt{3}}{3}r$　　　よって　　$r=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6

解答　略

解説



H と B が一致するとき，2 つの垂線は点 B で交わり，K が A に一致するときは，2 つの垂線は点 A で交わる。

以下，H と B，K と A が一致しない場合について示す。

AH⊥CD，AB⊥CD であるから

CD⊥平面 ABH

BK⊥CD，AB⊥CD であるから

CD⊥平面 ABK

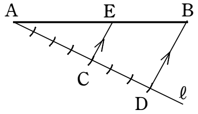
平面 ABH，ABK は辺 AB を含み，辺 CD に垂直であるから，同じ平面である。

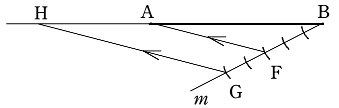
AH，BK は同じ平面上にあり，平面 BCD，CDA は平行でないから，AH，BK は平行でない。

よって，AH と BK は交わる。

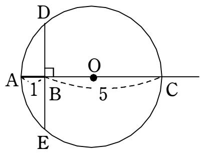
1

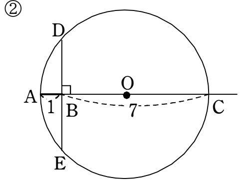
解答　(1)　①　図の点 E　　②　図の点 H

①


②


(2)　図の線分 BD

①


②


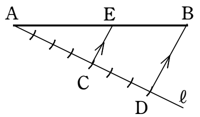
解説

(1)　①

(i)　A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

(ii)　ℓ 上に，AC：CD＝4：3 となるように点 C，D をとる。
　ただし，C は線分 AD 上にとる。

(iii)　C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。



このとき，EC∥BD から

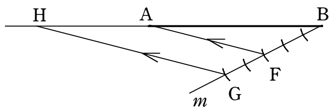
AE：EB＝AC：CD＝4：3

よって，点 E は線分 AB を 4：3 に内分する点である。

②　(i)　B を通り，直線 BA と異なる半直線 m を引く。

(ii)　m 上に，BF：FG＝3：2 となるように点 F，G をとる。
　ただし，F は線分 BG 上にとる。

(iii)　G を通り，直線 AF に平行な直線を引き，直線 BA との交点を H とする。点 H が求める点である。



このとき，AF∥HG から

AH：HB＝FG：GB＝2：5

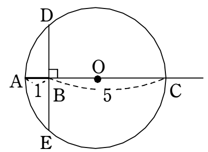
よって，点 H は線分 AB を 2：5 に外分する点である。

(2)　①

(i)　半直線 AB の B を越える延長上に，BC＝5 となる点 C をとる。

(ii)　線分 AC の垂直二等分線と AC との交点を O とし，O を中心として，半径 OA の円をかく。

(iii)　B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。
　線分 BD が求める線分である。



このとき，方べきの定理により

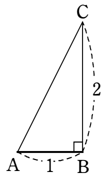
BA・BC＝BD・BE

AB＝1，BC＝5，BD＝BE であるから　　BD^2＝5

よって，線分 BD は長さ $\sqrt{5}$ の線分である。

別解　(i)　B を通り，線分 AB に垂直な直線を引き，その上に BC＝2 となる点 C をとる。

(ii)　A と C を線で結ぶ。
　線分 AC が求める線分である。



このとき，三平方の定理により

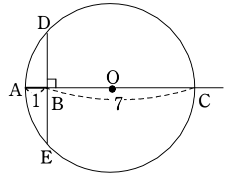
$$AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

よって，線分 AC は長さ $\sqrt{5}$ の線分である。

②　(i)　半直線 AB の B を越える延長上に，BC＝7 となる点 C をとる。

(ii)　線分 AC の垂直二等分線と AC との交点を O とし，O を中心として，半径 OA の円をかく。

(iii)　B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。
　線分 BD が求める線分である。



このとき，方べきの定理により

BA・BC＝BD・BE

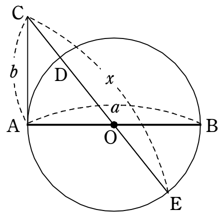
AB＝1，BC＝7，BD＝BE であるから

BD^2＝7

よって，線分 BD は長さ $\sqrt{7}$ の線分である。

2

解答　図の線分 CE

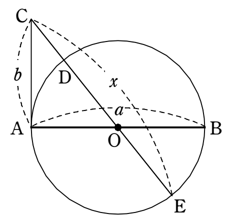


解説

①　長さ a の線分 AB を直径とする円 O をかく。

②　点 A を通り AB に垂直な直線を引き，その上に AC＝b となるような点 C をとる。

③　直線 CO と円 O の 2 つの交点のうち，C に近い方から D，E とすると，線分 CE が求める線分である。



このとき，方べきの定理により　　CD・CE＝CA^2

CE＝x とおくと　　$(x-a)x=b^2$

すなわち　　$x^2-ax-b^2=0$

よって，線分 CE の長さが 2 次方程式 $x^2-ax-b^2=0$ の正の解となる。

3

解答　(1)　辺 DC，EF，HG　　(2)　辺 BC，EH，DC，CG，HG，DH

(3)　面 ABFE，DCGH　　(4)　辺 EF，FG，HG，EH

(5)　面 ADHE，BCGF

解説

(1)　面 ABCD，ABFE は正方形であるから　　AB∥DC，AB∥EF

面 DCGH は正方形であるから　　DC∥HG

これと AB∥DC から　　AB∥HG

答　辺 DC，EF，HG

(2)　線分 AF とねじれの位置にある辺は，線分 AF と同じ平面上にない辺であるから

辺 BC，EH，DC，CG，HG，DH

(3)　BC⊥AB，BC⊥BF であるから，辺 BC は面 ABFE に垂直である。

BC⊥CD，BC⊥CG であるから，辺 BC は面 DCGH に垂直である。

答　面 ABFE，DCGH

(4)　各辺を延ばしてできる直線のうち，平面 ABCD と共有点をもたない直線は

直線 EF，FG，HG，EH

よって，面 ABCD と平行な辺は　　辺 EF，FG，HG，EH

(5)　面 ADHE，BCGF は直線 AB と垂直であるから，面 ADHE，BCGF は平面 ABGH と垂直である。

答　面 ADHE，BCGF

4

解答　(1)　面の数 8，辺の数 18，頂点の数 12　　(2)　略　　(3)　$\dfrac{23}{27}V$

解説

(1)　面の数は，正四面体の面の数と切り口の面の数の和に等しいから

$$4+4=8$$

辺の数は，正四面体の辺の数と切り口の辺の数の和に等しいから

$$6+3\times4=18$$

頂点の数は，切り口の頂点の数に等しいから　　$3\times4=12$

(2)　(1) から　　(頂点の数)−(辺の数)＋(面の数)＝12−18＋8＝2

よって，成り立つ。

(3)　切り取られる 4 つのかどの立体は，どれも正四面体であり，もとの正四面体との相似比は　　1：3

よって，体積比は　　$1^3:3^3=1:27$

したがって，求める多面体の体積は　　$V-\dfrac{1}{27}V\times4=\dfrac{23}{27}V$

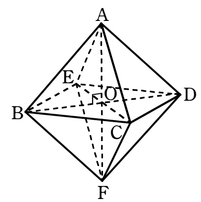
5

解答　(1)　$V=\dfrac{343\sqrt{2}}{3}$　　(2)　$r=\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

解説

(1)　この正八面体を平面 BCDE で切ると，2 つの合同な正四角錐 A−BCDE，F−BCDE に分割される。

正方形 BCDE の対角線の交点を O とすると，△ABO は ∠AOB＝90° の直角二等辺三角形であるから



$$AO=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

よって，正四角錐 A−BCDE の体積は

$$\frac{1}{3}\times(\text{正方形 BCDE})\times AO$$

$$=\frac{1}{3}\cdot7^2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{343\sqrt{2}}{6}$$

求める正八面体の体積 V は，正四角錐 A−BCDE の体積の２倍であるから

$$V=\frac{343\sqrt{2}}{6}\times 2=\frac{343\sqrt{2}}{3}$$

(2)　正八面体に内接する球の中心を O とすると，正八面体は合同な８つの四面体 OABC，OACD，OADE，OAEB，OFBC，OFCD，OFDE，OFEB に分割できる。

四面体 OABC の体積を V_1 とすると

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ABC}\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7\right)\right\}\cdot r=\frac{49\sqrt{3}}{12}r$$

$V=8V_1$ であるから　$\frac{343\sqrt{2}}{3}=8\cdot\frac{49\sqrt{3}}{12}r$　　よって　$r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

6

解答　略

解説

AO と 平面 BCD は垂直であるから

AO⊥CD　……①

△BCD において，BC＝BD であるから

BE⊥CD　……②

①，② から，辺 CD は，2 直線 AO，BE の定める平面 ABE に垂直である。

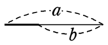
したがって，AE⊥CD である。

1

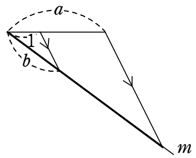
解答　(1)［図］　(2)［図］　(3)［図］　(4)［図］　(5)［図］　(6)［図］　(7)［図］　(8)［図］

(1)

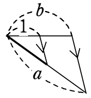
(2)



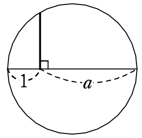
(3)



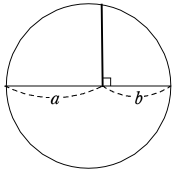
(4)



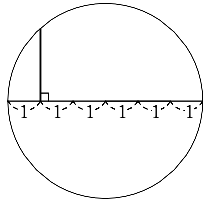
(5)



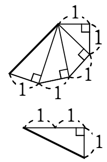
(6)



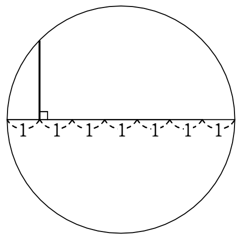
(7)



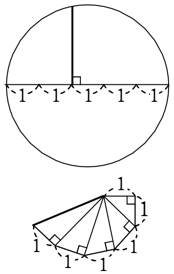
(7)　(別解)



(8)



(8)　(別解)

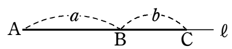


解説

(1)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝a となるように点 B をとる。

更に，BC＝b となる点 C を，A と反対側にとる。

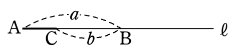
線分 AC が求める線分である。



(2)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝a となるように点 B をとる。

更に，BC＝b となる点 C を，線分 AB 上にとる。

線分 AC が求める線分である。



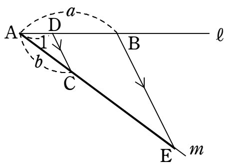
(3)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝a となるような点 B をとる。

更に，A から，ℓ と異なる直線 m を引き，AC＝b となる点 C を m 上にとる。

ℓ 上に，AD＝1 となる点 D をとる。

B を通り，DC に平行な直線を引き，直線 m との交点を E とする。

このとき，ab＝AE である。



(理由)

△ADC∽△ABE であるから，AD：AC＝AB：AE

すなわち　1：b＝a：AE

よって　　ab＝AE

したがって，線分 AE が求める線分である。

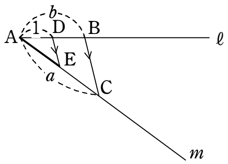
(4)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝b となるように点 B をとる。

更に，A から，ℓ と異なる直線 m を引き，AC＝a となる点 C を，m 上にとる。

ℓ 上に，AD＝1 となる点 D をとる。

D を通り，BC に平行な直線を引き，直線 m との交点を E とする。

このとき，$a\div b$＝AE である。



(理由)

△ADE∽△ABC であるから，AD：AE＝AB：AC

すなわち　1：AE＝b：a

よって　　AE＝$a\div b$

したがって，線分 AE が求める線分である。

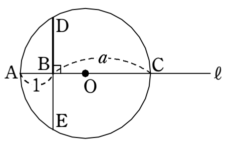
(5)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝1 となるように点 B をとる。

更に，ℓ 上に，BC＝a となるような点 C を，A と反対側にとる。

AC の垂直二等分線を引き，ℓ との交点を O とし，半径 OA の円をかく。

B を通り，AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。

このとき，$\sqrt{a}$＝BD である。



(理由)

方べきの定理により　BA・BC＝BD・BE

AB＝1，BC＝a，BD＝BE であるから　$\mathrm{BD}^2=a$

よって　BD＝$\sqrt{a}$

したがって，線分 BD が求める線分である。

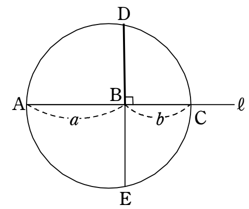
(6)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝a となる点 B をとる。

更に，ℓ 上に，BC＝b となる点を，A と反対側にとる。

線分 AC を直径とする円をかく。

B を通り，AB に垂直な直線を引き，円との交点を D，E とする。

このとき，$\sqrt{ab}$＝BD である。



(理由)

方べきの定理により　$BA \cdot BC = BD \cdot BE$

$AB = a$，$BC = b$，$BD = BE$ であるから　$ab = BD^2$

よって　$BD = \sqrt{ab}$

したがって，線分 BD が求める線分である。

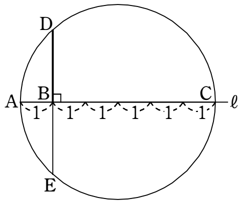
(7)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝1 となる点 B をとる。

更に，ℓ 上に，AC＝6 となる点 C を，B と同じ側にとる。

線分 AC を直径とする円 O をかく。

B を通り，AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。

このとき，$\sqrt{5} = BD$ である。



(理由)

方べきの定理により，$BA \cdot BC = BD \cdot BE$

$AB = 1$，$BC = 5$，$BD = BE$ であるから　$5 = BD^2$

よって　$BD = \sqrt{5}$

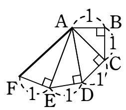
したがって，線分 BD が求める線分である。

別解 1.　長さ 1 の線分 AB を引き，B を通り，線分 AB に垂直で長さが 1 の線分 BC を引く。

線分 AC に垂直で長さが 1 の線分 CD を引く。

同様にして，繰り返し，DE，EF を引く。

このとき，$\sqrt{5} = AF$ である。



(理由)

三平方の定理により，$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$，$AD^2 = AC^2 + 1^2 = 3$

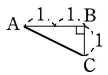
$AE^2 = AD^2 + 1^2 = 4$，$AF^2 = AE^2 + 1^2 = 5$

よって　$AF = \sqrt{5}$

したがって，線分 AF が求める線分である。

別解 2.　長さ 2 の線分 AB を引き，線分 AB に垂直で，長さが 1 の線分 BC を引く。

このとき，$\sqrt{5} = AC$ である。



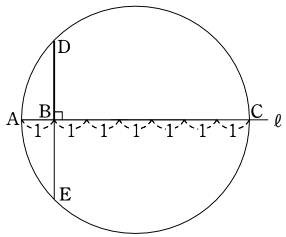
(8)　直線 ℓ 上に点 A をとり，AB＝1 となる点 B をとる。

更に，ℓ 上に，AC＝7 となる点 C を，B と同じ側にとる。

線分 AC を直径とする円をかく。

B を通り，AB に垂直な直線を引き，円との交点を D，E とする。

このとき，$\sqrt{6} = BD$ である。



(理由)

方べきの定理により　$BA \cdot BC = BD \cdot BE$

$AB = 1$，$BC = 6$，$BD = BE$ であるから　$6 = BD^2$

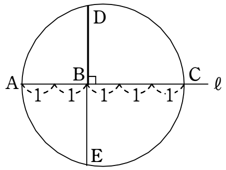
よって　$BD = \sqrt{6}$

したがって，線分 BD が求める線分である。

別解 1.　上の解答で AB＝2，BC＝3 としてもよい。

そのときは，右の図のようになる。

このとき，$\sqrt{6} = BD$である。



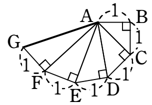
別解 2.　((7) の 別解 1 と同様)

長さ 1 の線分 AB を引き，B を通り，線分 AB に垂直で長さが 1 の線分 BC を引く。

線分 AC に垂直で長さが 1 の線分 CD を引く。

同様にして，繰り返し，DE，EF，FG を引く。

このとき，$\sqrt{6} = AG$ である。



(理由)

三平方の定理により，$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$，$AD^2 = AC^2 + 1^2 = 3$

$AE^2 = AD^2 + 1^2 = 4$，$AF^2 = AE^2 + 1^2 = 5$，$AG^2 = AF^2 + 1^2 = 6$

よって　$AG = \sqrt{6}$

したがって，線分 AG が求める線分である。

2

解答　(1)　$\theta = 60°$　　(2)　$\theta = 90°$　　(3)　$\theta = 30°$

解説

(1)　2 直線 AB，KL のなす角は，2 直線 AB，AD のなす角と等しい。

よって　　$\theta = 60°$

(2)　2 直線 AD，IK のなす角は，2 直線 AD，CE のなす角と等しい。

よって　　$\theta = 90°$

(3)　2 直線 AB，GI のなす角は，2 直線 AB，AC のなす角と等しい。

よって　　$\theta = 30°$

3

解答　(1)　辺 BC，FG，EH　　(2)　辺 BC，EH，DC，CG，GH，HD

(3)　面 ABCD，EFGH　　(4)　辺 AE，CG　　(5)　3 組

(6)　面 BCGF，ADHE

解説

(1)　面 ABCD，BCGF，ADHE は正方形であるから，辺 AD と平行な辺は

辺 BC，FG，EH

(2)　線分 AF とねじれの位置にある辺は，AF と同じ平面上にない辺であるから

辺 BC，EH，DC，CG，GH，HD

(3)　BF⊥AB，BF⊥BC であるから，辺 BF と面 ABCD は垂直である。

BF⊥EF，BF⊥FG であるから，辺 BF と面 EFGH は垂直である。

よって，辺 BF と垂直な面は　　面 ABCD，EFGH

(4)　平面 BFHD と平行な辺は，平面 BFHD と交わらない辺であるから

辺 AE，CG

(5)　平行な位置関係にある面は

面 ABCD と EFGH，　面 ABFE と DCGH，　面 ADHE と BCGF

よって　　3 組

(6)　直線 AB は，面 BCGF，ADHE のそれぞれと垂直であるから，平面 ABGH と垂直な面は　　面 BCGF，ADHE

4

解答　(1)　順に　14，24，12　　(2)　順に　26，48，24

解説

(1)　面は正六面体の各面で残った面が 6 面あり，切り取ることによって，できた面が正六面体の各頂点に 1 つずつできるから，面の数は　$6 + 8 = 14$

辺は切り取った三角錐によってできる辺だけあるから，

辺の数は　$3 \times 8 = 24$

1 つの頂点を 2 つの正方形が共有していて，正方形は 6 個あるから，

頂点の数は　$4 \times 6 \div 2 = 12$

(2)　多面体 Y には，1 辺の長さがもとの正六面体の半分の正方形が正六面体の側面に 8 面あり，その上側には，正方形の面が 5 つ，正三角形の面が 4 つある。下側も同様。

よって，面の数は　$8 + (5 + 4) \times 2 = 26$，

辺の数は　$8 \times 3 + (4 + 8) \times 2 = 48$，

頂点の数は　$8 \times 2 + 4 \times 2 = 24$

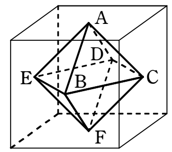
5

解答　(1)　$\dfrac{500}{3}$　　(2)　$72\sqrt{2}$

解説

右の図のように頂点を定める。

求める体積は，正四角錐 A－BCDE の体積の 2 倍である。



(1)　正方形 BCDE の面積は，1 辺の長さが 10 の正方形の面積の半分で

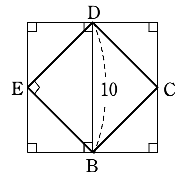
$10 \times 10 \div 2 = 50$

正四角錐 A－BCDE の高さは

$10 \div 2 = 5$

よって，求める体積は

$\left(\dfrac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5\right) \times 2 = \dfrac{500}{3}$



(2)　平面 BCDE で立方体を切ったときの断面は右の図のようになる。

四角形 BCDE は 1 辺の長さが 6 の正方形であるから，立方体の 1 辺の長さは $6\sqrt{2}$ である。

正四角錐 A－BCDE の高さは

$6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$

よって，求める体積は

$\left(\dfrac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2}\right) \times 2 = 72\sqrt{2}$