1

解答　$-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

解説

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ から

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

$\qquad=\dfrac{(\sqrt{3}\,i)^2-1^2}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$2014=3\times671+1$ から　$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2014}=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right\}^{671}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

$\qquad=(-1)^{671}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

別解　$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2014}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2014}=\cos\dfrac{2014}{3}\pi+i\sin\dfrac{2014}{3}\pi$

$\qquad=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\qquad=-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

注意　別解は，数学 III で学習する「複素数平面」の内容を利用している。

2

解答　(ア)　-2　　(イ)　$-2\sqrt{3}$　　(ウ)　8　　(エ)　0
　　(オ)　n が 3 の倍数であること

解説

$(-1+\sqrt{3}\,i)^2=1-2\sqrt{3}\,i+3i^2=-2-2\sqrt{3}\,i$

よって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^2$ の実部は $^{ア}-2$，虚部は $^{イ}-2\sqrt{3}$ である。

また　$(-1+\sqrt{3}\,i)^3=(-1+\sqrt{3}\,i)^2(-1+\sqrt{3}\,i)$

$\qquad=-2(1+\sqrt{3}\,i)(-1+\sqrt{3}\,i)=8$

よって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^3$ の実部は $^{ウ}8$，虚部は $^{エ}0$ である。

ゆえに，k を自然数とすると，$n=3k$ のとき　$(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}=8^k$

このとき，実部は 8^k，虚部は 0 でともに整数である。

また，$n=3k+1$，$3k+2$ のとき

$(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k+1}=(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}(-1+\sqrt{3}\,i)$

$\qquad=8^k(-1+\sqrt{3}\,i)=-8^k+8^k\sqrt{3}\,i$

$(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k+2}=(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}(-1+\sqrt{3}\,i)^2$

$\qquad=8^k(-2-2\sqrt{3}\,i)=-2\cdot8^k-2\cdot8^k\sqrt{3}\,i$

よって，$n=3k+1$，$3k+2$ のとき，実部と虚部がともに整数となることはない。

また，$n=1$，2 のときも実部と虚部はともに整数ではない。

したがって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ の実部と虚部がともに整数となるために自然数 n が満たすべき必要十分条件は ^{オ}n が 3 の倍数であることである。

3

解答　略

解説

x の 2 次方程式

$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0$　……①，　$x^2+2(\tan\theta)x+3=0$　……②

の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=\cos^2\theta+\cos\theta-1=\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$　……③

$\dfrac{D_2}{4}=\tan^2\theta-3$

[1]　$D_2<0$ のとき　② は虚数解をもつ。

[2]　$D_2\geqq0$　すなわち　$\tan^2\theta\geqq3$ のとき

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ より，$\tan\theta\geqq0$ であるから　$\tan\theta\geqq\sqrt{3}$

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ の範囲で解くと　$60^\circ\leqq\theta<90^\circ$　このとき　$0<\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

③ から　$\dfrac{D_1}{4}\leqq\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}$

よって，$D_1<0$ であるから，① は虚数解をもつ。

[1]，[2] から，与えられた 4 次方程式は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

4

解答　(ア)　-2　　(イ)　2　　(ウ)　2

解説

(1)　$x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(3p^2-8)=8-2p^2=-2(p+2)(p-2)$$

x が実数であるための条件は

$D\geqq0$　すなわち　$-2(p+2)(p-2)\geqq0$

これを解いて　$^{ア}-2\leqq p\leqq{}^{イ}2$　……①

(2)　$x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて解くと

$$x=-p\pm\sqrt{8-2p^2}\quad\cdots\cdots②$$

p は整数であるから，① より p のとりうる値は　-2，-1，0，1，2

② は，$p=-2$ のとき　$x=2$　　$p=-1$ のとき　$x=1\pm\sqrt{6}$

$p=0$　のとき　$x=\pm2\sqrt{2}$　　$p=1$　のとき　$x=-1\pm\sqrt{6}$

$p=2$　のとき　$x=-2$

よって，整数の組 $(x,\ p)$ は $(2,\ -2)$，$(-2,\ 2)$ の $^{ウ}2$ 通りある。

5

解答　(1)　$k=\dfrac{3}{4}$，$\alpha=-\dfrac{3}{2}$　　(2)　$x=-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}-2i$

解説

(1)　$\alpha^2+(3+2i)\alpha+k(2+i)^2=0$ から　$(\alpha^2+3\alpha+3k)+(2\alpha+4k)i=0$

$\alpha^2+3\alpha+3k$，$2\alpha+4k$ は実数であるから

$\alpha^2+3\alpha+3k=0$　……①，$2\alpha+4k=0$　……②

② から　$\alpha=-2k$

これを ① に代入して　$(-2k)^2+3\cdot(-2k)+3k=0$

すなわち　$k(4k-3)=0$

$k\neq0$ であるから　$k=\dfrac{3}{4}$　このとき　$\alpha=-\dfrac{3}{2}$

(2)　$k=\dfrac{3}{4}$ であるから　$x^2+(3+2i)x+\dfrac{3}{4}(2+i)^2=0$

すなわち　$x^2+(3+2i)x+\dfrac{9}{4}+3i=0$

$x=-\dfrac{3}{2}$ がこの等式を満たすことを利用して，左辺を因数分解すると

$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}+2i\right)=0$

よって，等式を満たす複素数は　$x=-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}-2i$

6

解答　$a=-2$，0

解説

2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+4=0$ ……① の判別式を D とすると，条件から

$\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-4<0$

よって　$(a+3)(a-1)<0$ から　$-3<a<1$　……②

また，① の虚数解を α とおくと $\alpha^2-2(a+1)\alpha+4=0$ から

$\alpha^2=2(a+1)\alpha-4$

したがって

$\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2=\alpha\{2(a+1)\alpha-4\}=2(a+1)\alpha^2-4\alpha$

$\quad=2(a+1)\{2(a+1)\alpha-4\}-4\alpha=4(a+1)^2\alpha-8(a+1)-4\alpha$

$\quad=\{4(a+1)^2-4\}\alpha-8(a+1)$

条件より，a，α^3 は実数であり，α は虚数であるから

$4(a+1)^2-4=0$

ゆえに，$(a+1)^2=1$ から　$a=-2$，0

これらはともに ② を満たす。

したがって　$a=-2$，0

7

解答　$0\leqq t<4$

解説

方程式は，異なる 2 つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$D=p^2-4(p^2+p-1)=-(3p^2+4p-4)$

$\quad=-(p+2)(3p-2)>0$

よって　$(p+2)(3p-2)<0$

ゆえに　$-2<p<\dfrac{2}{3}$　……①

また，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=p^2+p-1$

よって　$t=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$\quad=p^2+p-1-p+1=p^2$

ゆえに，① の範囲において　$0\leqq t<4$

8

解答　(1)　$\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3-3^n}{2}$　　(2)　$a=-2$，余り 1

解説

(1)　x^n を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$

とすると，次の等式が成り立つ。

$$x^n=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると　$a+b=1$

$x=3$ を代入すると　$3a+b=3^n$

この連立方程式を解いて　$a=\dfrac{3^n-1}{2}$，$b=\dfrac{3-3^n}{2}$

したがって，求める余りは　$\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3-3^n}{2}$

(2)　$f(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $2x-1$ であるから，このときの商を $Q_1(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x-1$$

この等式の両辺に $x=1$，2 を代入すると

$f(1)=1$，　$f(2)=3$　……①

また，$f(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは $ax+7$ であるから，このときの商を $Q_2(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+ax+7$$

この等式の両辺に $x=2$，3 を代入すると

$f(2)=2a+7$，　$f(3)=3a+7$　……②

更に，$f(x)$ を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $bx+c$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-1)(x-3)Q_3(x)+bx+c$$

この等式の両辺に $x=1$，3 を代入すると

$f(1)=b+c$，$f(3)=3b+c$　……③

①，②，③ から　$b+c=1$，$2a+7=3$，$3b+c=3a+7$

この連立方程式を解いて　$a=-2$，$b=0$，$c=1$

したがって，求める余りは　1

9

解答　(1)　$a=-1$ のとき　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$；$a=1$ のとき　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　$-\dfrac{1}{4}<a<2$，$2<a$　(3)　$a=-\dfrac{1}{4}$，2

解説

$f(x)=x^3-(a+1)x+a$ とおく。

$f(1)=1^3-(a+1)\cdot1+a=0$ から，$f(x)$ は $x-1$を因数にもつ。

$$f(x)=(x-1)(x^2+x-a)$$

よって，① は　$(x-1)(x^2+x-a)=0$

(1)　[1]　$a=-1$ のとき，① は　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，① の解は　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[2]　$a=1$ のとき，① は　$(x-1)(x^2+x-1)=0$

よって，① の解は　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　① の異なる実数解の個数が 3 個となるためには，$x^2+x-a=0$ が 1 でない異なる 2 つの実数解をもてばよい。

$x^2+x-a=0$ において $x=1$ とすると，$1+1-a=0$ から

$a=2$　　よって　$a\neq2$　……②

また，$x^2+x-a=0$ の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a)=4a+1$$

よって，$x^2+x-a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$D=4a+1>0$ から

$a>-\dfrac{1}{4}$ ……③

②，③ から，求める a の条件は　$-\dfrac{1}{4}<a<2$，$2<a$

(3)　① の異なる実数解の個数が 2 個となるためには，次の条件 [1]，[2] のどちらか一方を満たせばよい。

[1]　$x^2+x-a=0$ が 1 でない重解をもつ

[2]　$x^2+x-a=0$ が $x=1$ と 1 でない解を 1 つずつもつ

[1] の場合

(2) から　$D=4a+1=0$　かつ　$a\neq2$

$4a+1=0$ から　$a=-\dfrac{1}{4}$

これは $a\neq2$ を満たす。

[2] の場合

(2) から　$D=4a+1>0$　かつ　$a=2$

$a=2$ のとき $D=4\cdot2+1=9$ となり，$D>0$ を満たす。

[1]，[2] から，求める a の条件は　$a=-\dfrac{1}{4}$，2

1

解答　$a=1$，$\dfrac{5}{3}$

解説

方程式は，異なる 2 つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$$D=a^2-4(a-1)^2=-3a^2+8a-4$$
$$=-(3a-2)(a-2)>0$$

ゆえに　$(3a-2)(a-2)<0$　　よって　$\dfrac{2}{3}<a<2$　……①

次に，方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=(a-1)^2$$

ゆえに　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-a)^2-4(a-1)^2$

$=-3a^2+8a-4>0$

$|\alpha-\beta|$ が整数であるとき，$(\alpha-\beta)^2$ も整数である。

よって，$-3a^2+8a-4$ が整数の平方になる場合を考える。

$b=-3a^2+8a-4$ とすると　$b=-3\left(a-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

① の範囲における b のとりうる値の範囲は　$0<b\leqq\dfrac{4}{3}$

b が整数の平方となるのは，$b=1$ のときである。

ゆえに　$-3a^2+8a-4=1$　　整理して　$3a^2-8a+5=0$

よって　$(a-1)(3a-5)=0$　　したがって　$a=1$，$\dfrac{5}{3}$

これはともに ① を満たす。

2

解答　$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

解説

$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$　……①

① を y について整理すると　$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$　……②

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が ① を満たすということは，① を満たす実数 x，y があるということであり，y についての 2 次方程式 ② が実数解をもつことと同値である。

そのための必要十分条件は，② の判別式を D とすると，$D\geqq0$ である。

$$D=(4x+5)^2-4\cdot3\cdot(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73$$

$D\geqq0$ から　$-8x^2-8x+73\geqq0$　　よって　$8x^2+8x-73\leqq0$

これを解くと　$\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって，x のとりうる最大の値は　$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

3

解答　略

解説

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とする。

$a>0$ であるから　$D_1=1+4a>0$，　$D_2=a^2+4>0$

よって，①，② はいずれも異なる 2 つの実数解をもつ。

① の 2 つの解を α，β とすると　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-a$

また，$\alpha^2=\alpha+a$，$\beta^2=\beta+a$ が成り立つ。

② の左辺について，$f(x)=x^2+ax-1$ とすると

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=(\alpha^2+a\alpha-1)(\beta^2+a\beta-1)\\&=\{(a+1)\alpha+a-1\}\{(a+1)\beta+a-1\}\\&=(a+1)^2\alpha\beta+(a^2-1)(\alpha+\beta)+(a-1)^2\\&=(a+1)^2\cdot(-a)+(a^2-1)\cdot1+(a-1)^2=-a(a^2+3)\end{aligned}$$

条件 $a>0$ から　　$f(\alpha)f(\beta)<0$

よって，放物線 $y=f(x)$ は $\alpha<x<\beta$ の範囲で x 軸と交点を 1 つもつ。

したがって，② の解のうち 1 つだけが ① の解の間にある。

$\boxed{4}$

解答　-8

解説

$\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき　　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$

よって，α，β は 2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解である。

ゆえに　　$\alpha^2-2\alpha+4=0$，　$\beta^2-2\beta+4=0$　……①

したがって，① から

$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+4)=\alpha^{n-1}(\alpha+1)(\alpha^2-2\alpha+4)=0$

$\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2=\alpha(\alpha^2-2\alpha+4)+\alpha-2=\alpha-2=-\beta$

$\beta^2-4\beta+8=(\beta^2-2\beta+4)-2\beta+4=0-2(\beta-2)=2\alpha$

よって，値を求める式を P とすると　　$P=\left(\dfrac{2\alpha}{-\beta}\right)^3=-\dfrac{8\alpha^3}{\beta^3}$

ここで，① より $\alpha^2=2\alpha-4$ であるから

$\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2=\alpha(2\alpha-4)=2\alpha^2-4\alpha=2(2\alpha-4)-4\alpha=-8$

同様に　　$\beta^3=-8$

したがって　　$P=-\dfrac{8\cdot(-8)}{-8}=-8$

参考　$x=1\pm\sqrt{3}\,i$ のとき，$x+2\neq0$ であるから，$x^2-2x+4=0$ の両辺に $x+2$ を掛けると　　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

すなわち　　$x^3+8=0$

よって，α，β は -8 の 3 乗根で　　$\alpha^3=-8$，$\beta^3=-8$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\alpha^3=14-3\alpha$　　(2)　略

解説

(1)　
$$\begin{aligned}\alpha^3&=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3\\&=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3-(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3\\&\qquad-3\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\times(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})\\&=(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)-3\times\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}\times\alpha\\&=14-3\times\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}\times\alpha=14-3\times\sqrt[3]{1}\times\alpha\\&=14-3\alpha\end{aligned}$$

(2)　(1) より　　$\alpha^3+3\alpha-14=0$

よって，α は 3 次方程式 $x^3+3x-14=0$ の実数解である。

$x^3+3x-14=0$ から　　$(x-2)(x^2+2x+7)=0$

ここで，$x^2+2x+7=0$ の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot7=-6<0$

ゆえに，$x^2+2x+7=0$ は実数解をもたない。

よって，3 次方程式 $x^3+3x-14=0$ の実数解は $x=2$ だけである。

したがって，$\alpha=2$ であるから，α は整数である。

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\omega^2+\omega^4=-1$，$\omega^5+\omega^{10}=-1$

(2)　k を正の整数とすると $n=3k-2$，$3k-1$ のとき -1，$n=3k$ のとき 2

(3)　略

解説

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ から　　$2\omega+1=\sqrt{3}\,i$

両辺を 2 乗すると　　$(2\omega+1)^2=-3$

整理すると　　$\omega^2+\omega+1=0$　……①

両辺に $\omega-1$ を掛けると　　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

よって　　$\omega^3-1=0$　　すなわち　　$\omega^3=1$　……②

①，② より　　$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

$\omega^5+\omega^{10}=\omega^3\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(2)　①，② より，k を正の整数とすると

[1]　$n=3k-2$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k-2}+\omega^{6k-4}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega+(\omega^3)^{2k-2}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

[2]　$n=3k-1$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k-1}+\omega^{6k-2}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{2k-1}\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

[3]　$n=3k$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k}+\omega^{6k}=(\omega^3)^k+(\omega^3)^{2k}=1+1=2$

[1]～[3] から，k を正の整数とすると

$n=3k-2$，$3k-1$ のとき　　$\omega^n+\omega^{2n}=-1$

$n=3k$ のとき　　$\omega^n+\omega^{2n}=2$

(3)　$(\omega+2)^n$，$(\omega^2+2)^n$ をそれぞれ二項定理により展開すると

$$(\omega+2)^n=\omega^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\omega^{n-1}\cdot2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\omega^{n-2}\cdot2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\omega\cdot2^{n-1}+2^n\quad\cdots\cdots③$$

$$(\omega^2+2)^n=(\omega^2)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot(\omega^2)^{n-1}\cdot2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot(\omega^2)^{n-2}\cdot2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\omega^2\cdot2^{n-1}+2^n\quad\cdots\cdots④$$

③+④ より

$$\begin{aligned}&(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n\\&=\{\omega^n+(\omega^2)^n\}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot2\cdot\{\omega^{n-1}+(\omega^2)^{n-1}\}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot2^{n-1}\cdot(\omega+\omega^2)+2\cdot2^n\\&=(\omega^n+\omega^{2n})+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1\cdot(\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)})+\cdots\cdots+2^{n-1}\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot(\omega+\omega^2)+2^{n+1}\end{aligned}$$

ここで (2) から，$\omega^n+\omega^{2n}$，$\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)}$，……，$\omega+\omega^2$ は 2 または -1 であり，整数である。

また，${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，……，${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ も整数である。

よって，n を正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ は整数である。

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　　(2)　$p=3$

解説

(1)　$x^3+nx^2+n^2x=p$ ……① とする。

① は $x=\alpha$ を解にもつから　　$\alpha(\alpha^2+n\alpha+n^2)=p$

右辺の p は 2 以上の整数で，α は正の整数，$\alpha^2+n\alpha+n^2$ は整数であるから，α は素数 p の正の約数である。

よって　　$\alpha=1$　または　$\alpha=p$

$\alpha=p$ のとき　　$p^2+np+n^2=1$　……②

ところが，p は 2 以上であるから

$$n^2+pn+p^2=\left(n+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{3}{4}p^2\geqq\frac{3}{4}p^2\geqq3$$

これは ② の右辺が 1 であることに矛盾する。

したがって　　$\alpha=1$

(2)　実数係数の 3 次方程式が虚数解 $k+\sqrt{2}\,i$ をもつから，それと共役な複素数 $k-\sqrt{2}\,i$ もこの方程式の解である。

$x=1$ も解であるから，3 次方程式の解と係数の関係により

$1+(k+\sqrt{2}\,i)+(k-\sqrt{2}\,i)=-n$　……①

$1\cdot(k+\sqrt{2}\,i)+(k+\sqrt{2}\,i)(k-\sqrt{2}\,i)+(k-\sqrt{2}\,i)\cdot1=n^2$　……②

$1\cdot(k+\sqrt{2}\,i)(k-\sqrt{2}\,i)=p$　すなわち　$k^2+2=p$　……③

① から　　$2k+1=-n$　すなわち　$n=-(2k+1)$　……④

② から　　$k^2+2k+2=n^2$　……⑤

④，⑤ から n を消去して整理すると　　$3k^2+2k-1=0$

ゆえに　　$(k+1)(3k-1)=0$　　よって　　$k=-1$，$\dfrac{1}{3}$

③ から，$k=-1$ のとき　　$p=3$（素数となり適する）

$k=\dfrac{1}{3}$ のとき　　$p=\dfrac{19}{9}$（整数でないから不適）

したがって，求める p の値は　　$p=3$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$a+b+c=0$　　(2)　$c=a-1$　　(3)　$b=7$

解説

(1)　$x^3f(x)=(x-1)g(x)$ から

$x^3(ax^2+bx+c)=(x-1)g(x)$　……①

① に $x=1$ を代入すると　$a+b+c=0$　……②

(2)　② から　$c=-a-b$　……③

① に代入すると　$x^3(ax^2+bx-a-b)=(x-1)g(x)$

よって　$x^3\{a(x+1)(x-1)+b(x-1)\}=(x-1)g(x)$

両辺を $x-1$ で割ると　$x^3(ax+a+b)=g(x)$　……④

④ に $x=1$ を代入すると　$2a+b=g(1)$

$g(1)=1$ であるから　$2a+b=1$

よって　$b=1-2a$　……⑤

⑤ を ③ に代入して　$c=-a-(1-2a)=a-1$

(3)　④ から　$g(x)-1=x^3(ax+a+b)-1$

⑤ を代入すると

$$\begin{aligned}g(x)-1&=x^3(ax+a+1-2a)-1=ax^4-(a-1)x^3-1\\&=(x-1)(ax^3+x^2+x+1)\end{aligned}$$

よって，$g(x)-1$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，ax^3+x^2+x+1 は $x-1$ で割り切れる。

ゆえに，$h(x)=ax^3+x^2+x+1$ とすると　$h(1)=0$

よって　$a\cdot 1^3+1^2+1+1=0$　　ゆえに　$a=-3$

このとき，⑤から　$b=7$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{4}$　　(2)　$a=2$，$b=2$　　(3)　$\alpha^3=8$，$\beta^3=8$

(4)　n が 3 の倍数のとき $c(n)=\dfrac{i}{2}$，n が 3 の倍数でないとき $c(n)=-i$

解説

(1)　解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

よって　$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(-2)^2-2\cdot 4}{4^2}=-\frac{1}{4}$$

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が $2x^2+ax+b=0$ の解であるから　　$2\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+a\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}+b=0$

よって　　$2\beta^2+a\alpha\beta+b\alpha^2=0$　……①

α，β は $x^2+2x+4=0$ の解であるから　　$\alpha^2=-2\alpha-4$，$\beta^2=-2\beta-4$

① に代入して　　$2(-2\beta-4)+a\alpha\beta+b(-2\alpha-4)=0$

$\alpha\beta=4$，$\beta=-2-\alpha$ を代入して　　$-4(-2-\alpha)-8+4a-2b\alpha-4b=0$

α について整理して　　$4a-4b+(4-2b)\alpha=0$

a，b は実数，α は虚数であるから　　$4a-4b=0$，$4-2b=0$

よって　　$a=2$，$b=2$

(3)　$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=(-2\alpha-4)\cdot\alpha=-2\alpha^2-4\alpha=-2(-2\alpha-4)-4\alpha=8$

同様に　　$\beta^3=8$

(4)　$$c(n)=\frac{1}{\left\{i-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right\}\left\{i-\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}}=\frac{1}{-1-\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}i+\left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)^n}$$

$\alpha\beta=4$ から　　$$c(n)=-\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\right\}i}$$

(3) から　　$\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^3=1$，$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^3=1$

[1]　$n=3k$（k は自然数）のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}=\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\right\}^k=1$$

同様に　　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=1$

よって　　$c(n)=-\dfrac{1}{(1+1)i}=-\dfrac{1}{2i}=\dfrac{i}{2}$

[2]　$n=3k+1$（k は 0 以上の整数）のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+1}=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

同様に　　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=\dfrac{\beta}{2}$

よって　　$$c(n)=-\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{\beta}{2}\right)\right\}i}=-\frac{1}{\frac{\alpha+\beta}{2}i}=\frac{1}{i}=-i$$

[3]　$n=3k+2$（k は 0 以上の整数）のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+2}=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

同様に　　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2$

よって　　$$c(n)=-\frac{1}{\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}i}=-\frac{1}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}i}$$

$$=-\frac{1}{\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{4}i}=\frac{1}{i}=-i$$

[1]～[3] から　　n が 3 の倍数のとき　　$c(n)=\dfrac{i}{2}$

n が 3 の倍数でないとき　　$c(n)=-i$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　$n=4$，解は $x=2$（重解）

解説

(1)　$\alpha\beta-(\alpha+\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1=(\alpha-1)(\beta-1)$

$\alpha\geqq 1$，$\beta\geqq 1$ より，$\alpha-1\geqq 0$，$\beta-1\geqq 0$ であるから　　$(\alpha-1)(\beta-1)\geqq 0$

したがって　　$\alpha\beta\geqq\alpha+\beta-1$

(2)　解と係数の関係により　　$p+q=m$　……①，　$pq=k$　……②

① より　　$q=m-p$

m，p は整数であるから，q も整数である。

p，q が整数であるから，② より k も整数である。

(3)　2 次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ ……③ が整数の解 p をもつと仮定する。

③ の x の係数は整数であるから，(2) より，③ のもう 1 つの解 q も整数である。

また，③ において，解と係数の関係により　　$p+q=n^2$　……④，　$pq=n$　……⑤

$p+q=n^2>0$，$pq=n>0$ より　　$p>0$，$q>0$

p，q は整数であるから　　$p\geqq 1$，$q\geqq 1$

よって，(1) より　　$pq\geqq p+q-1$

これに ④，⑤ を代入して　　$n\geqq n^2-1$　　したがって　　$n^2-n-1\leqq 0$

これを解いて　　$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq n\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

n は自然数であるから　　$n=1$

これを ④ に代入すると　　$p+q=1$

これは $p\geqq 1$，$q\geqq 1$ に矛盾する。

したがって，2 次方程式 ③ は整数の解をもたない。

(4)　2 次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ ……⑥ が整数の解 p をもつとする。

⑥ の x の係数は整数であるから，(2) より，⑥ のもう 1 つの解 q も整数である。

また，⑥ において，解と係数の関係により

$p+q=(n-2)^2$　……⑦，　$pq=n$　……⑧

$p+q=(n-2)^2\geqq 0$，$pq=n>0$ より　　$p>0$，$q>0$

p，q は整数であるから　　$p\geqq 1$，$q\geqq 1$

よって，(1) より　　$pq\geqq p+q-1$

これに ⑦，⑧ を代入して　　$n\geqq(n-2)^2-1$　　したがって　　$n^2-5n+3\leqq 0$

これを解いて　　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\leqq n\leqq\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

n は自然数であるから　　$n=1$，2，3，4

$p\geqq 1$，$q\geqq 1$ より　　$p+q\geqq 2$

したがって，⑦ より　　$(n-2)^2\geqq 2$

$n=1$，2，3，4 のうち，これを満たす自然数は $n=4$ のみである。

$n=4$ のとき，⑥ は　　$x^2-4x+4=0$

これを解くと $x=2$ となり，2 次方程式 ⑥ は整数解をもつ。

したがって，求める n の値と 2 次方程式の解は　　$n=4$，解は $x=2$ (重解)

3

解答　(1)　$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left[(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right.$ でもよい$\left.\right]$

(2)　$(y,\ z)=(3,\ 4)$ [$(y,\ z)=(4,\ 3)$ でもよい]　　(3)　$x=-7,\ \dfrac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1)　等式の両辺に $x=1$，$y=1$，$z=1$ を代入すると　　$0=3(2a+1)^2$

ゆえに　　$a=-\dfrac{1}{2}$ ……①

また，両辺に $x=0$，$y=0$，$z=1$ を代入すると　　$1=a^2+b^2$

① から　　$b^2+\dfrac{1}{4}=1$　　　よって　　$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ②

したがって，①，② が $(a,\ b)$ の必要条件である。ここで

$$\{x+(a+bi)y+(a-bi)z\}\{x+(a-bi)y+(a+bi)z\}$$
$$=\{x+(y+z)a+(y-z)bi\}\{x+(y+z)a-(y-z)bi\}$$
$$=\{x+(y+z)a\}^2-(y-z)^2(bi)^2$$
$$=x^2+2a(y+z)x+a^2(y+z)^2+b^2(y-z)^2\quad (=P\text{ とする})$$

であり，P に ①，② を代入すると

$$P=x^2-(y+z)x+\frac{(y+z)^2+3(y-z)^2}{4}=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

ゆえに，与えられた等式の右辺は

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

よって，すべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して与えられた等式は成り立つ。

したがって，求める 1 組の $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \left[(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{でもよい}\right]$$

(2)　1 組求めればよいから，$yz=12$ を満たす正の整数で $y<z$ のものについて考えると

$(y,\ z)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$

$y^3+z^3=91$ を満たすものは　　$(y,\ z)=(3,\ 4)$

これが求める 1 組である。　　[$(y,\ z)=(4,\ 3)$ でもよい]

(3)　(1) の等式において，$y=3$，$z=4$ とすると

$$x^3-36x+91=(x+7)\left\{x+3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$\times\left\{x+3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$=(x+7)\left(x-\frac{7+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

よって，求める解は　　$x=-7,\ \dfrac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$

4

解答　(1)　x　　(2)　x

解説

(1)　条件から，剰余の定理により　$P(1)=1$，$P(2)=2$，$P(3)=3$ …… ①

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは 0 または 2 次以下の整式であるから

ax^2+bx+c とおけて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

よって，① から　$a+b+c=1$，$4a+2b+c=2$，$9a+3b+c=3$

これを解いて　$a=0$，$b=1$，$c=0$

したがって，求める余りは　x

(2)　$Q(x)=P(x)-x$ とおくと

$Q(1)=P(1)-1=0$，$Q(2)=P(2)-2=0$，……，$Q(n)=P(n)-n=0$

よって，$Q(x)$ は $(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)$ で割り切れるから

$Q(x)=P(x)-x=(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)S(x)$

とおける。

ゆえに　$P(x)=(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)S(x)+x$

したがって，求める余りは　x

5

解答　$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-3,\ 4,\ -3),\ (3,\ 4,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

解説

方程式 $f(x)=0$ の整数解の 1 つを $x=n$ とすると

$n(n^3+an^2+bn+c)=-1$

$a,\ b,\ c,\ n$ はすべて整数であるから　$n=\pm1$

[1]　$f(x)=0$ が $x=1$ を重解にもつとき $f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$ と表される。

よって　$f(x)=x^4+(p-2)x^3-2(p-1)x^2+(p-2)x+1$ …… ①

ゆえに，$a,\ b,\ c$ は整数であるから p は整数。

また　$x^2+px+1=0$ は虚数解をもつ。

よって　$D=p^2-4<0$　かつ　p は整数。

ゆえに　$p=\pm1,\ 0$

① から，$p=1$ のとき　$a=c=-1$，$b=0$

$p=0$ のとき　$a=c=-2$，$b=2$

$p=-1$ のとき　$a=c=-3$，$b=4$

[2]　$f(x)=0$ が $x=\pm1$ を解にもつとき $f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$ と表される。

このとき，$x^2+qx-1=0$ は虚数解をもたない。

よって，不適。

[3]　$f(x)=0$ が $x=-1$ を重解にもつとき $f(x)=(x+1)^2(x^2+rx+1)$ と表される。

よって　$f(x)=x^4+(r+2)x^3+2(r+1)x^2+(r+2)x+1$ …… ②

[1] と同様にして　$r=\pm1,\ 0$

② から $r=1$ のとき　$a=c=3$，$b=4$

$r=0$ のとき　$a=b=c=2$

$r=-1$ のとき　$a=c=1$，$b=0$

以上から　$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-3,\ 4,\ -3),\ (3,\ 4,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

6

解答　(1)　$a=0$ のとき $z=-1$，$a\neq0$ のとき $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$　　(2)　$a\geqq-\dfrac{1}{4}$

(3)　$a>0$

解説

(1)　[1]　$a=0$ のとき　　$z+1=0$ から　　$z=-1$

[2]　$a\neq0$ のとき

$z+1-\dfrac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　　$z^2+z-a=0$

よって　　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

したがって　　$a=0$ のとき　　$z=-1$，

$a\neq0$ のとき　　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(2)　$z=x+yi$ (x，y は実数) とおく。

$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　　$z\overline{z}+z-a=0$

すなわち　　$x^2+y^2+x+yi-a=0$

整理して　　$x^2+y^2+x-a+yi=0$

x，y，a は実数であるから　　$x^2+y^2+x-a=0$，　$y=0$

よって　　$x^2+x-a=0$ …… ①

$z\neq0$ であるから，① が $x\neq0$ である実数解を少なくとも 1 つもつような a の値の範囲が求めるものである。

$x=0$ は ① の重解ではないから，判別式を D とすると

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a)\geqq0$　　　ゆえに　　$a\geqq-\dfrac{1}{4}$

(3)　$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　　$(z\overline{z})^2+z\overline{z}-a=0$

$z\overline{z}$ は実数であるから，X を実数として，$z\overline{z}=X$ とおく。

すなわち　　$X^2+X-a=0$ …… ②

$z\neq0$ により，$X=z\overline{z}>0$ であるから，② が正の実数解をもつような a の値の範囲が求めるものである。

② が実数解をもつための条件は，判別式を D とすると

$D=1+4a\geqq0$　　　ゆえに　　$a\geqq-\dfrac{1}{4}$ …… ③

このとき，2 つの実数解を α，β とすると，$\alpha+\beta=-1<0$ より，α，β がともに正であることはないから，正の実数解をもつためには

$\alpha\beta=-a<0$　すなわち　$a>0$ …… ④

③，④ の共通範囲をとって　　$a>0$

7

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ (a，b，c，d は実数) とし，$\alpha\beta=0$ とすると

$(a+bi)(c+di)=0$

よって　　$(ac-bd)+(ad+bc)i=0$

$ac-bd$，$ad+bc$ は実数であるから　　$ac-bd=0$ かつ $ad+bc=0$

[1]　$a=0$ のとき　　$bd=0$ かつ $bc=0$

ゆえに　　$b=0$ または $c=d=0$

[2]　$a\neq0$ のとき，$c=\dfrac{bd}{a}$ であるから

$ad+b\cdot\dfrac{bd}{a}=0$　　　すなわち　　$\dfrac{d(a^2+b^2)}{a}=0$

$a\neq0$ より $a^2+b^2\neq0$ であるから　　$d=0$

ゆえに　　$c=0$

[1]，[2] から，$\alpha\beta=0$ ならば，$\alpha=0$ または $\beta=0$ である。

(別証)「$\alpha\beta=0$ ならば，$\alpha=0$ または $\beta=0$」を ① とする。

[1]　$\alpha=0$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$\alpha\neq 0$ のとき，複素数 $\dfrac{1}{\alpha}$ が存在するから，$\alpha\beta=0$ ならば

$$\beta=\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)\beta=\frac{1}{\alpha}(\alpha\beta)=\frac{1}{\alpha}\cdot 0=0$$

[1]，[2] から，① は成り立つ。

(2)　$\alpha=a+bi$（a，b は実数）とすると

$$\alpha^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

よって，α^2 が正の実数ならば　$a^2-b^2>0$ かつ $ab=0$

$ab=0$ から　$a=0$ または $b=0$

[1]　$a=0$ のとき

$a^2-b^2>0$ は $-b^2>0$ となり，不適。

[2]　$a\neq 0$ のとき

$ab=0$ から　$b=0$

このとき，$a^2-b^2=a^2>0$ である。

よって　$\alpha=a$（実数）

[1]，[2] から，α^2 が正の実数ならば，α は実数である。

(別証)　$\alpha^2=r$（r は正の実数）とすると　$\alpha^2-r=0$

r は正の実数であるから　$(\alpha+\sqrt{r})(\alpha-\sqrt{r})=0$

(1) より　$\alpha+\sqrt{r}=0$ または $\alpha-\sqrt{r}=0$

ゆえに　$\alpha=-\sqrt{r}$ または $\alpha=\sqrt{r}$

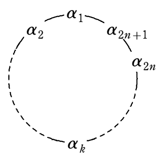
$-\sqrt{r}$ と $\sqrt{r}$ は実数であるから，α は実数である。

(3)　正の実数 $\alpha_1\alpha_2$，……，$\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$，$\alpha_{2n+1}\alpha_1$ のすべての積 $(\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1})^2$ は，正の実数である。

よって，(2) により，$\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$ は実数である。

この実数を P とする。

次に，α_1，α_2，……，α_k，……，α_{2n+1} を右の図のように円形に並べる。



このとき，どの α_k $(1\leqq k\leqq 2n+1)$ についても α_k 以外の数は $2n$ 個あり，α_k の隣から順に 2 個ずつをとって掛けた積は，仮定からすべて正の実数である。

よって，α_k を除く $2n$ 個の複素数の積は正の実数であり，これを Q_k とすると，$\dfrac{P}{Q_k}=\alpha_k$ は実数である。

したがって，α_1，α_2，……，α_{2n+1} はすべて実数である。

$\boxed{8}$

解答　略

解説

[A]　$P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りが，それぞれ，$P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った商と余りに一致する

[B]　$a=c$，$b=d$

とする。

[B] $\Longrightarrow$ [A] は明らかに成り立つ。

次に，[A] $\Longrightarrow$ [B] を示す。

[A] のとき，商を $x-e$，余りを $mx+n$ とすると

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-e)+mx+n,$$
$$P(x)=(x-c)(x-d)(x-e)+mx+n$$

と表される。

よって　$(x-a)(x-b)(x-e)=(x-c)(x-d)(x-e)$

$\{(x-a)(x-b)-(x-c)(x-d)\}(x-e)=0$

これが x の恒等式であり，$x\neq e$ のとき

$(x-a)(x-b)-(x-c)(x-d)=0$

x について整理すると

$\{(a+b)-(c+d)\}x-(ab-cd)=0$

これが，$x\neq e$ のとき常に成り立つための条件は

$a+b=c+d$　かつ　$ab=cd$

$a+b=c+d=u$，$ab=cd=v$ とおくと，a と b，c と d はともに t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの解である。

$a<b$ および $c<d$ であるから　$a=c$，$b=d$

したがって，[A] $\Longrightarrow$ [B] が成り立つ。

以上から，[A] $\Longleftrightarrow$ [B] が成り立つ。

$\boxed{9}$

解答　$a=-4$，$b=4$

解説

$x^3+ax^2+bx-1=0$　……①　とする。

$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のどれかは整数であるから，整数解は $x=1$ または $x=2$ である。

一方，整数解を $x=n$ とすると　$n^3+an^2+bn-1=0$

よって　$n(n^2+an+b)=1$

n，n^2+an+b は整数で，$n>0$ であるから　$n=1$

ゆえに，① は $x=1$ を解にもつ。

よって　$1+a+b-1=0$　ゆえに　$b=-a$　……②

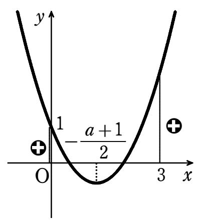
このとき　$x^3+ax^2+bx-1=x^3+ax^2-ax-1$

$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}$

条件から，$x^2+(a+1)x+1=0$ は $0<x<3$ において，$x=1$ でない異なる 2 つの実数解をもつ。

$f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} D=(a+1)^2-4\cdot1\cdot1>0 & \cdots\cdots③ \\ f(0)=1>0 & \cdots\cdots④ \\ f(3)=9+3(a+1)+1>0 & \cdots\cdots⑤ \\ \text{軸について}\quad 0<-\dfrac{a+1}{2}<3 & \cdots\cdots⑥ \\ f(1)=1+a+1+1\neq 0 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$

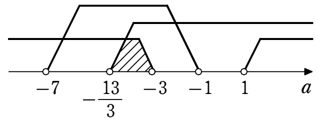


③ から　$(a+3)(a-1)>0$　よって　$a<-3$，$1<a$

④ は常に成り立つ。⑤ から　$a>-\dfrac{13}{3}$

⑥ から　$-7<a<-1$　⑦ から　$a\neq -3$

共通範囲を求めて　$-\dfrac{13}{3}<a<-3$



a は整数であるから　$a=-4$

このとき，② から　$b=4$

ゆえに　$a=-4$，$b=4$

$\boxed{10}$

解答　略

解説

$P(x)$ を 2 次式 $Q(x)$ で割ったときの商を $f(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=Q(x)f(x)+ax+b$$

と表せる。ただし，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから

$$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$$

ここで　$\{P(x)\}^2=\{Q(x)f(x)+ax+b\}^2$

$=\{Q(x)f(x)\}^2+2Q(x)f(x)(ax+b)+(ax+b)^2$

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから，$(ax+b)^2$ が 2 次式 $Q(x)$ で割り切れる。

よって　$(ax+b)^2=kQ(x)$　（k は定数）

$Q(x)$ は 2 次式で，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ であるから，$k\neq 0$ であり，$a\neq 0$ となる。

したがって　$Q(x)=\dfrac{1}{k}(ax+b)^2=\dfrac{a^2}{k}\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2$

よって，$Q(x)=0$ は重解 $x=-\dfrac{b}{a}$ をもつ。

別解　$Q(x)=0$ の解を α，β とすると，$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq 0)$ と表せる。

ここで，$\alpha\neq\beta$ と仮定する。

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから，$\{P(x)\}^2=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$ を満たす整式 $g(x)$ が存在する。

$\{P(\alpha)\}^2=0$，$\{P(\beta)\}^2=0$ であるから　$P(\alpha)=0$，$P(\beta)=0$

よって，$\alpha\neq\beta$ のとき，$P(x)$ は $x-\alpha$，$x-\beta$ を因数にもち，$P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れることになるが，これは矛盾である。

したがって　$\alpha=\beta$　すなわち，$Q(x)=0$ は重解をもつ。