

第9章 三平方の定理 例題

1

解説

- (1) 三平方の定理より $(\sqrt{5})^2 + x^2 = 3^2$
 よって $x^2 = 4$
 $x > 0$ であるから $x = 2$
- (2) 三平方の定理より $(2\sqrt{3})^2 + 4^2 = x^2$
 よって $x^2 = 28$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

2

解説

- (1) $BD = a$ cm とおく。
 直角三角形 ABD において
 $3^2 + 4^2 = a^2$
 $a^2 = 25$
 $a > 0$ であるから $a = 5$
 直角三角形 BCD において
 $(\sqrt{5})^2 + x^2 = 5^2$
 $x^2 = 20$
 $x > 0$ であるから $x = 2\sqrt{5}$
- (2) $BC = a$ cm とおく。
 直角三角形 ABC において
 $4^2 + 5^2 = a^2$
 $a^2 = 41$
 $a > 0$ であるから $a = \sqrt{41}$
 直角三角形 BCD において
 $(\sqrt{41})^2 + 2^2 = x^2$
 $x^2 = 45$

- $x > 0$ であるから $x = 3\sqrt{5}$
- (3) $AB = a$ cm とおく。
 直角三角形 ABD において
 $a^2 + 2^2 = 6^2$
 $a^2 = 32$
 $a > 0$ であるから $a = 4\sqrt{2}$
 直角三角形 ABC において
 $(4\sqrt{2})^2 + (2+4)^2 = x^2$
 $x^2 = 68$
 $x > 0$ であるから $x = 2\sqrt{17}$

3

解説

- この直角三角形の斜辺の長さは $x+2$ であるから、三平方の定理により
 $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$

$x > 0$ であるから $x = 3$

4

解説

- ① $4^2 + 6^2 = 52, 8^2 = 64$
 $4^2 + 6^2$ と 8^2 が等しくないから、直角三角形ではない。
- ② $8^2 + 15^2 = 289, 17^2 = 289$
 $8^2 + 15^2 = 17^2$ であるから、17 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。
- ③ $(2\sqrt{3})^2 = 12, 6^2 = 36, (4\sqrt{3})^2 = 48$
 $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = 48$
 $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = (4\sqrt{3})^2$ であるから、 $4\sqrt{3}$ cm の辺を斜辺とする直角三角形である。
- ④ $(3\sqrt{2})^2 = 18, (4\sqrt{3})^2 = 48, (2\sqrt{5})^2 = 20$
 $(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 38$
 $(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2$ と $(4\sqrt{3})^2$ が等しくないから、直角三角形ではない。
 以上から、直角三角形であるのは ② と ③

5

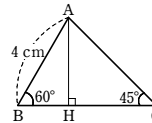
解説

- (1) $x : 2 : y = 1 : 1 : \sqrt{2}$ が成り立っている。
 $x : 2 = 1 : 1$ から $x = 2$
 $2 : y = 1 : \sqrt{2}$ から $y = 2\sqrt{2}$
- (2) $2 : x : y = 1 : 2 : \sqrt{3}$ が成り立っている。
 $2 : x = 1 : 2$ から $x = 4$
 $2 : y = 1 : \sqrt{3}$ から $y = 2\sqrt{3}$
- (3) $x : y : 6 = 1 : 2 : \sqrt{3}$ が成り立っている。
 $x : 6 = 1 : \sqrt{3}$ から $x = 2\sqrt{3}$
 $y : 6 = 2 : \sqrt{3}$ から $y = 4\sqrt{3}$

6

解説

- (1) 点 A から辺 BC に垂線 AH を引く。
 $\triangle ABH$ において、
 $BH : AB : AH = 1 : 2 : \sqrt{3}$
 であるから
 $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ (cm)
 $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$ (cm)
 $\triangle ACH$ において、 $AH : CH = 1 : 1$ であるから
 $CH = AH = 2\sqrt{3}$ (cm)
 よって $BC = 2 + 2\sqrt{3}$ (cm)
 したがって、 $\triangle ABC$ の面積は



$$\frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

- (2) 点 C から辺 BA の延長に引いた垂線を CH とする。

$\triangle ABC$ の内角と外角について
 $\angle CAH = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$
 よって、 $\triangle ACH$ において
 $AH : AC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$
 であるから

$$HA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ (cm)}$$

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

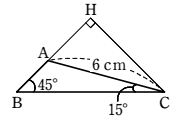
$\triangle BCH$ において、 $BH : CH = 1 : 1$ であるから

$$BH = CH = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって } AB = 3\sqrt{3} - 3 \text{ (cm)}$$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times (3\sqrt{3} - 3) \times 3\sqrt{3} = \frac{27 - 9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$



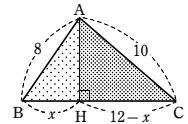
7

解説

- $BH = x$ cm とすると、 $CH = (12 - x)$ cm である。
 直角三角形 ABH において、三平方の定理により
 $x^2 + AH^2 = 8^2$
 よって $AH^2 = 64 - x^2$ …… ①
 直角三角形 ACH において、三平方の定理により
 $(12 - x)^2 + AH^2 = 10^2$
 よって $AH^2 = 100 - (12 - x)^2$ …… ②
 ①、② から $64 - x^2 = 100 - (12 - x)^2$
 よって $24x = 108$
 したがって $x = \frac{9}{2}$

$$\text{① に代入して } AH^2 = 64 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{175}{4}$$

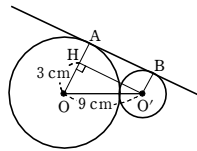
$$AH > 0 \text{ であるから } AH = \sqrt{\frac{175}{4}} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ (cm) } \text{ 答}$$



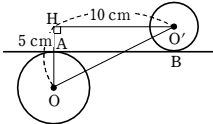
8

解説

- (1) O' から、線分 OA に引いた垂線の足を H とすると
 $OH = 6 - 3 = 3$ (cm)
 $\triangle OO'H$ において
 $O'H = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ (cm)
 $AB = O'H$ であるから $AB = 6\sqrt{2}$ cm



- (2) O' から、直線 OA に引いた垂線の足を H とすると
 $OH = 3 + 2 = 5$ (cm)
 $O'H = AB = 10$ (cm)
 $\triangle OO'H$ において
 $OO' = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ (cm)



9

解説

- $PC = x$ cm とする。
 $AP = PC = x$ (cm) であるから
 $PB = 8 - x$ (cm)
 $\triangle PBC$ において $(8 - x)^2 + 6^2 = x^2$
これを解いて $x = \frac{25}{4}$
よって $PC = \frac{25}{4}$ cm

10

解説

- (1) 円の外部の点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しいから
 $AR = AP = 3$ cm, $BQ = BP = 10$ cm
四角形 $OQCR$ は 1 辺 x cm の正方形であるから $CQ = CR = x$ cm
よって $BC = (x + 10)$ cm, $CA = (x + 3)$ cm
(2) $AB = 3 + 10 = 13$ (cm)
直角三角形 ABC において、三平方の定理により
 $(x + 10)^2 + (x + 3)^2 = 13^2$
 $x^2 + 13x - 30 = 0$
 $(x - 2)(x + 15) = 0$
 $x > 0$ であるから $x = 2$
よって、円 O の半径は 2 cm

11

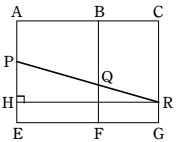
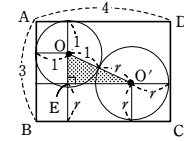
解説

- 円 O' の半径を r cm とする。
また、 O を通り辺 AB に平行な直線と、 O' を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。
2 つの円 O, O' は外接しているから
 $OO' = r + 1$
また、図から $OE = 3 - 1 - r = 2 - r$ ①
 $O'E = 4 - 1 - r = 3 - r$ ②
直角三角形 OEO' において
 $(2 - r)^2 + (3 - r)^2 = (r + 1)^2$
すなわち $r^2 - 12r + 12 = 0$
これを解くと $r = \frac{12 \pm \sqrt{96}}{2} = 6 \pm 2\sqrt{6}$
①, ② から $r < 2$
したがって $r = 6 - 2\sqrt{6}$
☞ $(6 - 2\sqrt{6})$ cm

12

解説

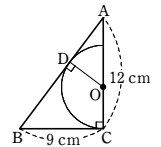
- 右の図のような展開図の一部において、 $PQ + QR$ の長さが最小となるのは、3 点 P, Q, R が一直線上にあるとき、すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。
 R から AE に垂線 RH を引くと
 $PH = 5 - 2 - 1 = 2$ (cm)
 $RH = 4 + 3 = 7$ (cm)
よって、直角三角形 RPH において
 $RP = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$ (cm)
したがって、求める $PQ + QR$ の長さは $\sqrt{53}$ cm



13

解説

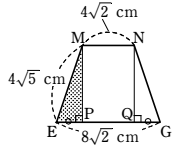
- 円錐の底面と球との接点を C 、円錐の母線 AB と球との接点を D とする。
直角三角形 ABC において $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$
 $\triangle AOD \sim \triangle ABC$ であるから $AO : AB = OD : BC$
球 O の半径を x cm とすると、 $AO = (12 - x)$ cm で
 $(12 - x) : 15 = x : 9$
よって $x = \frac{9}{2}$ ☞ $\frac{9}{2}$ cm



14

解説

- $MN = \sqrt{2} MD = 4\sqrt{2}$, $EG = \sqrt{2} EF = 8\sqrt{2}$
また、直角三角形 MAE において $ME^2 = 4^2 + 8^2 = 80$
 $ME > 0$ であるから $ME = 4\sqrt{5}$
同様に $NG = 4\sqrt{5}$
よって $ME = NG$ ①
また $MN \parallel EG$ ②
①, ② から、四角形 $MEGN$ は等脚台形である。
 M, N から辺 EG に引いた垂線の足を、それぞれ P, Q とすると、 $PQ = 4\sqrt{2}$ 。
 $EP = GQ$ であるから $EP = (8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$
直角三角形 MEP において $(2\sqrt{2})^2 + MP^2 = (4\sqrt{5})^2$
 $MP^2 = 72$
 $MP > 0$ であるから $MP = 6\sqrt{2}$
よって、求める面積は $\frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = 72$ ☞ 72 cm^2



15

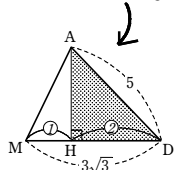
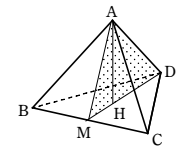
解説

- 底面の対角線 AC, BD の交点を H とすると
 $\angle OHA = 90^\circ$
 $AC = 6\sqrt{2}$ cm で、点 H は線分 AC の中点であるから
 $AH = 3\sqrt{2}$ cm
よって、 $\triangle OAH$ において
 $OH^2 = 5^2 - (3\sqrt{2})^2 = 7$
 $OH > 0$ であるから $OH = \sqrt{7}$ cm
したがって、求める体積は
 $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \sqrt{7} = 12\sqrt{7}$ (cm^3)

16

解説

- $\triangle BCD$ は 1 辺 6 cm の正三角形であるから、辺 BC の中点を M とすると
 $DM = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
よって、 $\triangle BCD$ の面積は
 $\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ (cm^2)
 H は $\triangle BCD$ の重心であるから $DH = \frac{2}{3} DM = 2\sqrt{3}$
よって、直角三角形 AHD において
 $AH = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$
したがって、正三角錐の体積は
 $\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times \sqrt{13}$
 $= 3\sqrt{39}$ (cm^3) ☞



第9章 三平方の定理 例題演習

1

解説

三平方の定理を用いる。

- (1) $3^2 + 2^2 = x^2$
 $x^2 = 13$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{13}$
- (2) $4^2 + 8^2 = x^2$
 $x^2 = 80$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
- (3) $9^2 + x^2 = 15^2$
 $x^2 = 144$
 $x > 0$ であるから $x = 12$
- (4) $x^2 + 4^2 = 6^2$
 $x^2 = 20$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- (5) $(\sqrt{15})^2 + x^2 = 8^2$
 $x^2 = 49$
 $x > 0$ であるから $x = 7$
- (6) $(\sqrt{6})^2 + x^2 = (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 = 12$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

2

解説

- (1) AC = a cm とおく。
 直角三角形 ABC において
 $(4\sqrt{2})^2 + 3^2 = a^2$
 $a^2 = 41$
 $a > 0$ であるから $a = \sqrt{41}$
 直角三角形 ACD において
 $4^2 + x^2 = (\sqrt{41})^2$
 $x^2 = 25$
 $x > 0$ であるから $x = 5$
- (2) BC = a cm とおく。
 直角三角形 ABC において
 $6^2 + 7^2 = a^2$
 $a^2 = 85$
 $a > 0$ であるから $a = \sqrt{85}$
 直角三角形 DBC において
 $(\sqrt{85})^2 + 6^2 = x^2$
 $x^2 = 121$
 $x > 0$ であるから $x = 11$
- (3) 直角三角形 OAB において
 $OB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

直角三角形 OBC において

$$OC^2 = OB^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$$

直角三角形 OCD において

$$OD^2 = OC^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$$

直角三角形 ODE において

$$OE^2 = OD^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$x > 0$ であるから $x = \sqrt{5}$

3

解説

この直角三角形の斜辺の長さは $x + 6$ であるから、三平方の定理より

$$x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$$

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$(x + 3)(x - 9) = 0$$

$x > 0$ であるから $x = 9$

4

解説

- ① $5^2 + 7^2 = 74$, $9^2 = 81$
 $5^2 + 7^2$ と 9^2 が等しくないから、直角三角形ではない。
- ② $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$, $6^2 = 36$
 $3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 6^2$ であるから、6 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。
- ③ $21^2 + 20^2 = 841$, $29^2 = 841$
 $21^2 + 20^2 = 29^2$ であるから、29 cm の辺を斜辺とする直角三角形である。
- ④ $(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{10})^2 = 21$, $(2\sqrt{5})^2 = 20$
 $(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{10})^2$ と $(2\sqrt{5})^2$ が等しくないから、直角三角形ではない。
- 以上から、直角三角形であるのは ② と ③

5

解説

- (1) $5 : x : y = 1 : 2 : \sqrt{3}$ が成り立っている。
 $5 : x = 1 : 2$ から $x = 10$
 $5 : y = 1 : \sqrt{3}$ から $y = 5\sqrt{3}$
- (2) $4 : x : y = 1 : 1 : \sqrt{2}$ が成り立っている。
 $4 : x = 1 : 1$ から $x = 4$
 $4 : y = 1 : \sqrt{2}$ から $y = 4\sqrt{2}$
- (3) $x : 6 : y = 1 : 2 : \sqrt{3}$ が成り立っている。
 $x : 6 = 1 : 2$ から $x = 3$
 $6 : y = 2 : \sqrt{3}$ から $y = 3\sqrt{3}$

6

解説

(1) 点 A から辺 BC に引いた垂線の足を H とする。
 $\triangle AHC$ において、

$$AH : HC : CA = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

であるから

$$AH = 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$HC = AH = 3\sqrt{2}$$

$\triangle ABH$ において、 $BH : AH = 1 : \sqrt{3}$ であるから

$$BH = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

よって $BC = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times (\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} + 9$$

(2) 点 C から直線 BA に引いた垂線の足を H とすると

$$\angle HAC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

したがって、 $\triangle ACH$ において、

$$HA : AC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

であるから

$$HA = 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$CH = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$\triangle BCH$ において、 $HB : CH = 1 : 1$ であるから

$$HB = CH = 4\sqrt{6}$$

よって $AB = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \times (4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}) \times 4\sqrt{6} = 48 - 16\sqrt{3}$

7

解説

BH = x cm とする。

直角三角形 ABH において

$$x^2 + AH^2 = 7^2$$

よって $AH^2 = 7^2 - x^2$ …… ①

直角三角形 ACH において

$$(9 - x)^2 + AH^2 = 8^2$$

よって $AH^2 = 8^2 - (9 - x)^2$ …… ②

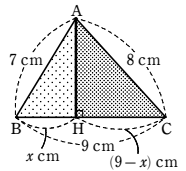
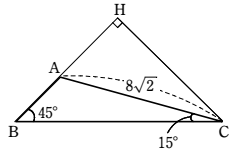
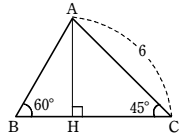
①, ② から $7^2 - x^2 = 8^2 - (9 - x)^2$

これを解いて $x = \frac{11}{3}$

よって、① から $AH^2 = 7^2 - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{320}{9}$

AH > 0 であるから $AH = \frac{8\sqrt{5}}{3}$

⊗ $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm



8

解説

(1) O'から、線分OAに垂線O'Hを引くと

$$\begin{aligned} OH &= 5 - 2 \\ &= 3 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

△OO'Hにおいて

$$O'H^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$

O'H > 0 であるから

$$O'H = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

AB = O'H であるから

$$AB = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

(2) O'から、直線OAに垂線O'Hを引くと

$$\begin{aligned} OH &= 5 + 3 \\ &= 8 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$OO' = 10 \text{ (cm)}$$

△OO'Hにおいて

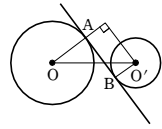
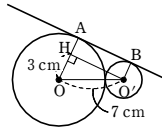
$$O'H^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

O'H > 0 であるから

$$O'H = 6 \text{ (cm)}$$

AB = O'H であるから

$$AB = 6 \text{ cm}$$



9

解説

AE = x とすると EF = EB = 5 - x

また FC = BC = 13

△CDFにおいて、三平方の定理により

$$CF^2 = CD^2 + DF^2$$

$$13^2 = 5^2 + DF^2$$

$$DF^2 = 144$$

DF > 0 より DF = 12

$$AF = 13 - 12 = 1$$

△AEFにおいて、三平方の定理により

$$EF^2 = AE^2 + AF^2$$

$$(5-x)^2 = x^2 + 1^2$$

$$25 - 10x + x^2 = x^2 + 1$$

$$-10x = -24$$

$$x = \frac{12}{5}$$

よって AE = $\frac{12}{5}$

10

解説

(1) 右の図のように、接点 D, E, F を定め、AE = a cm,

CE = b cm とおくと

$$AB = (a+3) \text{ cm}$$

$$BC = (b+3) \text{ cm}$$

△ABCの周の長さについて

$$(a+3) + (b+3) + (a+b) = 40$$

$$a + b = 17$$

よって、斜辺の長さは 17 cm 圏

(2) (1)の結果から b = 17 - a

このとき AB = a + 3, BC = b + 3 = 20 - a, CA = 17

三平方の定理により (a+3)^2 + (20-a)^2 = 17^2

整理して

$$a^2 - 17a + 60 = 0$$

$$(a-5)(a-12) = 0$$

よって、a = 5, 12 から (a, b) = (5, 12), (12, 5)

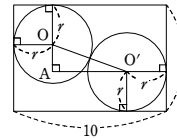
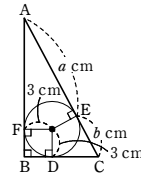
(a, b) = (5, 12) のとき AB = 8 cm, BC = 15 cm

これは AB > AC を満たさず適さない。

(a, b) = (12, 5) のとき AB = 15 cm, BC = 8 cm

これは AB > AC を満たす。

したがって、AB = 15 cm, BC = 8 cm



右の図のように、円の中心を O, O' とし、線分 OO' を斜辺とする直角三角形 OAO' をつくる。

円の半径を r とすると

$$OO' = 2r$$

$$OA = 6 - 2r$$

$$AO' = 10 - 2r$$

よって、△OAO'において

$$36 - 24r + 4r^2 + 100 - 40r + 4r^2 = 4r^2$$

$$4r^2 - 64r + 136 = 0$$

$$r^2 - 16r + 34 = 0$$

$$r = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 1 \times 34}}{2 \times 1}$$

$$= 8 \pm \sqrt{30}$$

0 < r < 3 であるから、r = 8 - √30 は問題に適するが、r = 8 + √30 は問題に適さない。

したがって、求める円の半径は 8 - √30

12

解説

右の図のような展開図の一部において、PQ + QR の長さが最小となるのは、3点 P, Q, R が一直線上にあるとき、すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。

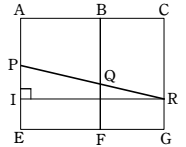
R から AE に引いた垂線の足を I とすると

$$PI = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}, RI = 5 + 4 = 9 \text{ (cm)}$$

したがって、直角三角形 RPI において

$$RP = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85} \text{ (cm)}$$

よって、求める PQ + QR の長さは √85 cm



13

解説

右の図のように、球の底面との接点を C, 母線 AB

における接点を D とする。

直角三角形 ABC において

$$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (cm)}$$

△AOD ∽ △ABC であるから

$$AO : AB = OD : BC$$

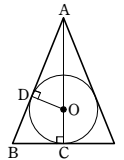
球 O の半径を x cm とすると

$$(12-x) : 13 = x : 5$$

$$5(12-x) = 13x$$

$$x = \frac{10}{3}$$

よって、球 O の半径は $\frac{10}{3}$ cm



14

解説

四角形 MNFH は MH = NF であるから、等脚台形である。

$$MN = CN \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$HF = GF \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

M, N から辺 HF にそれぞれ垂線 MI, NJ を引くと

$$IJ = MN = 2\sqrt{2}$$

$$HI = FJ = (HF - IJ) \div 2 = \sqrt{2}$$

直角三角形 MHI において

$$MI^2 = MH^2 - (\sqrt{2})^2 = MH^2 - 2 \dots \dots \textcircled{1}$$

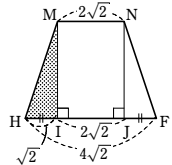
ここで、直角三角形 DHM において MH^2 = 2^2 + 4^2 = 20

①に代入して MI^2 = 20 - 2 = 18

MI > 0 であるから MI = √18 = 3√2

よって、台形 MNFH の面積は

$$\begin{aligned} (MN + HF) \times MI \div 2 &= (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} \div 2 \\ &= 18 \text{ (cm}^2\text{)} \text{ 圏} \end{aligned}$$



15

解説

底面の対角線の交点を H とすると、 OH と面 $ABCD$ は垂直になるから、線分 OH の長さは、正四角錐の高さである。

底面 $ABCD$ は正方形であるから

$$AC = \sqrt{2} AB = 6\sqrt{2}$$

$$\text{よって } AH = \frac{1}{2} AC = 3\sqrt{2}$$

$$\triangle OAH \text{ は直角三角形であるから } (3\sqrt{2})^2 + OH^2 = 7^2 \\ OH^2 = 31$$

$$OH > 0 \text{ であるから } OH = \sqrt{31}$$

$$\text{よって、求める体積は } \frac{1}{3} \times 6^2 \times \sqrt{31} = 12\sqrt{31}$$

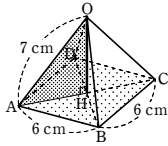


図 $12\sqrt{31} \text{ cm}^3$

16

解説

正四面体の頂点から底面に引いた垂線は、底面の正三角形の重心を通る。 O から底面 ABC に引いた垂線を OH 、 AH と BC の交点を M とする。

$\triangle ABC$ は正三角形で、 M は辺 BC の中点であるから

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

H は $\triangle ABC$ の重心で、 $AH : HM = 2 : 1$ であるから

$$AH = \frac{2}{3} AM = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

直角三角形 OAH において

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 24$$

$OH > 0$ であるから $OH = 2\sqrt{6}$ cm

よって、正四面体 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \right) \times 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

1

解説

$$(1) \quad 3^2 + 2^2 = x^2 \\ x^2 = 13$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{13}$$

$$(2) \quad (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = x^2 \\ x^2 = 28$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 2\sqrt{7}$$

$$(3) \quad 6^2 + x^2 = 10^2 \\ x^2 = 64$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 8$$

$$(4) \quad (\sqrt{5})^2 + x^2 = 3^2 \\ x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 2$$

$$(5) \quad x^2 + 6^2 = 8^2 \\ x^2 = 28$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 2\sqrt{7}$$

$$(6) \quad (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2 = x^2 \\ x^2 = 25$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 5$$

$$(7) \quad AB : AC = 1 : \sqrt{2} \text{ であるから} \\ 6 : x = 1 : \sqrt{2}$$

$$\text{よって } x = 6\sqrt{2}$$

$$(8) \quad AC : BC = 1 : \sqrt{2} \text{ であるから} \\ x : 4 = 1 : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}x = 4$$

$$\text{よって } x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$(9) \quad AC : BC = 1 : \sqrt{3} \text{ であるから} \\ \sqrt{6} : x = 1 : \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$(10) \quad BC : AC = 2 : \sqrt{3} \text{ であるから} \\ x : 9 = 2 : \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}x = 18$$

$$\text{よって } x = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$(11) \quad \triangle BCD \text{ において} \\ BC^2 + 1^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$BC^2 = 7$$

$$BC > 0 \text{ であるから } BC = \sqrt{7}$$

$\triangle ABC$ において

$$(\sqrt{7})^2 + 3^2 = x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 4$$

(12) A から辺 BC にひいた垂線を AH とする。

$\triangle ABH$ において

$$AB : AH = 2 : \sqrt{3} \text{ から } AH = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

よって、 $\triangle AHC$ において

$$AH : AC = 1 : \sqrt{2} \text{ から } x = 4\sqrt{6}$$

(13) A から直線 BC にひいた垂線を AH とする。

このとき、 $\triangle AHB$ において、 $\angle ABH = 60^\circ$ 、 $\angle BAH = 30^\circ$ である。

よって、 $HB : AB = 1 : 2$ から $HB = 6$ cm

$$HB : AH = 1 : \sqrt{3} \text{ から } AH = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle AHC$ は直角二等辺三角形になるから

$$CH = AH = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } x = 6\sqrt{3} - 6$$

(14) $AB : AH = 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$10 : x = 2 : \sqrt{3}$$

$$2x = 10\sqrt{3}$$

$$\text{よって } x = 5\sqrt{3}$$

(15) H は弦 AB の中点になる。

直角三角形 AOH において

$$AH^2 + 4^2 = 6^2$$

$$AH^2 = 20$$

$AH > 0$ であるから $AH = 2\sqrt{5}$

$$\text{よって } x = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

(16) H は弦 AB の中点になるから

$$BH = 6 \text{ cm}$$

直角三角形 BOH において

$$6^2 + x^2 = 7^2$$

$$x^2 = 13$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \sqrt{13}$$

(17) 円の接線は、接点を通る半径に垂直である。

よって、直角三角形 AOP において

$$x^2 + 2^2 = 8^2$$

$$x^2 = 60$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 2\sqrt{15}$$

(18) 円の接線は、接点を通る半径に垂直である。

よって、直角三角形 AOP において

$$6^2 + x^2 = (2\sqrt{15})^2$$

$$x^2 = 24$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = 2\sqrt{6}$$

2

解説

$$a^2 = (m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

$$b^2 = (2\sqrt{mn})^2 = 4mn$$

$$c^2 = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } a^2 + b^2 &= (m^2 - 2mn + n^2) + 4mn \\ &= m^2 + 2mn + n^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

したがって、 $a^2 + b^2 = c^2$ であるから、長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。

3

解説

頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を引く。

また、頂点 A を通り、辺 DC に平行な直線と辺 BC の交点を E とすると、四角形 $AECD$ は平行四辺形である。

$$\text{よって } BE = 12 - 5 = 7$$

$$BH = x \text{ cm とおくと } HE = BE - BH = 7 - x$$

$$\text{直角三角形 } ABH \text{ において } x^2 + AH^2 = 6^2$$

$$\text{よって } AH^2 = 36 - x^2 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{直角三角形 } AEH \text{ において } (7 - x)^2 + AH^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$\text{よって } AH^2 = 29 - (7 - x)^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② から } 36 - x^2 = 29 - (7 - x)^2$$

$$\text{よって } 14x = 56$$

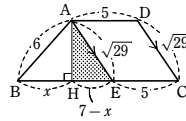
$$\text{したがって } x = 4$$

$$\text{① に代入して } AH^2 = 36 - 4^2 = 20$$

$$AH > 0 \text{ であるから } AH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

よって、台形 $ABCD$ の面積は

$$(5 + 12) \times AH \div 2 = 17 \times 2\sqrt{5} \div 2 = 17\sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)}$$



4

解説

$$(1) AP = x \text{ cm とすると } PD = 9 - x \text{ (cm)}$$

$$\text{また } PE = AP = x \text{ (cm)}$$

$$\triangle PED \text{ において } (9 - x)^2 + 3^2 = x^2$$

$$\text{これを解いて } x = 5$$

$$\text{よって } AP = 5 \text{ cm}$$

(2) 正方形 $ABCD$ を折り返したとき、 B が移った点を F とし、 EF と QC の交点を G とする。

$\triangle PED$ と $\triangle EGC$ において

$$\angle PDE = \angle ECG = 90^\circ \quad \dots\dots ①$$

$\triangle PED$ において

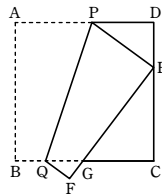
$$\angle DPE + \angle PED = 90^\circ \quad \dots\dots ②$$

$\angle PEG = 90^\circ$ であるから

$$\angle CEG + \angle PED = 90^\circ \quad \dots\dots ③$$

$$\text{②, ③ から } \angle DPE = \angle CEG \quad \dots\dots ④$$

①, ④ より、2組の角がそれぞれ等しいから



$\triangle PED \sim \triangle EGC$

したがって $EG : GC : CE = 5 : 3 : 4$

$$CE = 9 - 3 = 6 \text{ (cm) であるから } EG = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2} \text{ (cm)}$$

$$GC = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \text{ (cm)}$$

$$EF = 9 \text{ cm であるから } GF = 9 - \frac{15}{2} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{ここで、} BQ = y \text{ cm とすると } QF = y \text{ cm, } QG = 9 - \left(y + \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} - y \text{ (cm)}$$

$$\triangle QFG \text{ において } y^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2} - y\right)^2 \quad \text{これを解いて } y = 2$$

$$\text{よって } BQ = 2 \text{ cm}$$

例解 Q と E を結ぶ。

$BQ = y \text{ cm}$ とすると

$$QF = BQ = y \text{ (cm)}$$

$$CQ = 9 - y \text{ (cm)}$$

また $EF = AB = 9 \text{ (cm)}$

$$EC = 9 - DE = 6 \text{ (cm)}$$

$$\triangle EFQ \text{ において } y^2 + 9^2 = QE^2 \quad \dots\dots ①$$

$$\triangle ECQ \text{ において } (9 - y)^2 + 6^2 = QE^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② から } y^2 + 9^2 = (9 - y)^2 + 6^2$$

$$\text{これを解いて } y = 2$$

$$\text{よって } BQ = 2 \text{ cm}$$

5

解説

$$(1) \angle C = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$$

頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

$$\angle BAH = 60^\circ, \angle CAH = 45^\circ$$

直角三角形 CHA において、

$$AH : CH : AC = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$AH = CH = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

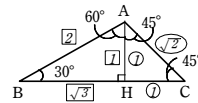
直角三角形 ABH において、 $AH : AB : BH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$AB = 2AH = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$BH = \sqrt{3}AH = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{よって } BC = BH + CH = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{3} + 4 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



$$(2) \angle A = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) = 45^\circ$$

頂点 C から線分 AB の延長に垂線 CH を引くと

$$\angle CBH = 60^\circ$$

$$\angle ACH = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$$

直角三角形 ACH において、

$$AH : CH : AC = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$AH = CH = 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

直角三角形 BCH において、 $BH : BC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$BC = \frac{2}{\sqrt{3}}CH = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{3}}CH = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\text{よって } AB = AH - BH = 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \times 3\sqrt{2} \\ &= 9 - 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$(3) \angle C = 180^\circ - (15^\circ + 135^\circ) = 30^\circ$$

頂点 B から線分 CA の延長に垂線 BH を引くと

$$\angle CBH = 60^\circ, \angle ABH = 45^\circ$$

直角三角形 HBA において、

$$HB : HA : AB = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$AB = \sqrt{2}HB \quad \dots\dots ①$$

また、 $HB = HA$ であるから、この長さを $x \text{ cm}$ とする。

直角三角形 HBC において、 $BH : BC : CH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから

$$BC = 2BH \quad \dots\dots ②$$

$$\text{また } BH : CH = 1 : \sqrt{3}$$

$$\text{すなわち } x : (x + 2) = 1 : \sqrt{3}$$

$$\text{よって } \sqrt{3}x = x + 2$$

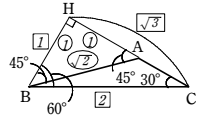
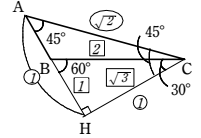
$$\text{したがって } (\sqrt{3} - 1)x = 2$$

$$\text{よって } x = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{② から } BC = 2(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 2 \text{ (cm)}$$

$$\text{① から } AB = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} + \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{3} + 1) \\ &= \sqrt{3} + 1 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



6 [2016 鎌倉学園]

解説

円の中心を O 、内接する三角形を $\triangle ABC$ とする。
 O から AB へ垂線をひき、 AB との交点を D とする。
 $\triangle OAD$ は 3 つの角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形であるから

$$OD = \frac{1}{\sqrt{3}} AD = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$OC = OA = 2OD = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって、円の半径は $2\sqrt{3}$ cm

正三角形の高さ CD は $3\sqrt{3}$ cm

したがって、求める面積は

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

7 [2014 大阪星光学院]

解説

右の図のように、正方形を $ABCD$ 、おうぎ形の中心を O 、正方形の 1 辺の長さを a とする。

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形であるから

$$OB = AB = a$$

$\triangle OCD$ において、三平方の定理により

$$(2a)^2 + a^2 = 1^2$$

$$5a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{5}$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって、求める長さは } \frac{\sqrt{5}}{5}$$

8 [2014 専修大学松戸]

解説

円の中心を C 、円と OB 、 \widehat{AB} との接点をそれぞれ D 、

E とし、円 C の半径を r cm とする。

OA 、 OB は円 C の接線であるから

$$\angle CDO = 90^\circ$$

$$\angle BOC = \angle AOC = 30^\circ$$

よって、 $\triangle COD$ は 3 つの角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形であるから

$$OC = 2r \text{ cm}$$

$$OE = OC + CE$$

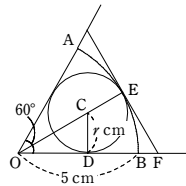
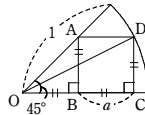
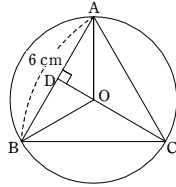
$$= 2r + r$$

$$= 3r$$

$$\text{よって } 3r = 5$$

$$r = \frac{5}{3} \text{ (cm)}$$

したがって、円の半径は $\frac{5}{3}$ cm



9

解説

$IJ = AB$ であるから

$$AB^2 + EI^2 = IJ^2 + EI^2$$

$\angle EIJ = 90^\circ$ であるから

$$IJ^2 + EI^2 = EJ^2$$

$JB = IA$ であるから

$$BE^2 + IA^2 = BE^2 + JB^2$$

$\angle JBE = 90^\circ$ であるから

$$BE^2 + JB^2 = EJ^2$$

正十角形 $ABCDEFGHIJ$ の外接円の半径は 1 であるから

$$EJ = 1 \times 2 = 2$$

したがって

$$AB^2 + BE^2 + EI^2 + IA^2 = EJ^2 + EJ^2 = 2 \times 2^2 = 8$$

10

解説

$$AB = 6 - (1 + 1) = 4 \text{ (cm)}$$

C から線分 AB に引いた垂線の足を H とする。

$\triangle ACB$ は $CA = CB$ の二等辺三角形であるから、

H は辺 AB の中点で

$$AH = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

円 C の半径を r cm とすると

$$AC = 1 + r \text{ (cm)}$$

$$CH = 4 - (1 + r) = 3 - r \text{ (cm)}$$

$\triangle ACH$ において

$$2^2 + (3 - r)^2 = (1 + r)^2$$

これを解いて

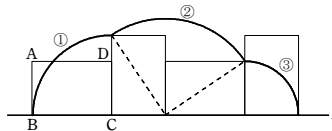
$$r = \frac{3}{2}$$

よって、円 C の半径は $\frac{3}{2}$ cm

11

解説

(1) B の軌跡は、次の図ようになる。



長方形の対角線の長さは

$$\sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13} \text{ (cm)}$$

①の部分は半径 6 cm、中心角 90° の扇形の弧、

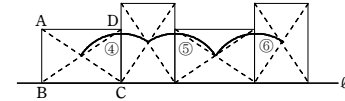
②の部分は半径 $2\sqrt{13}$ cm、中心角 90° の扇形の弧、

③の部分は半径 4 cm、中心角 90° の扇形の弧である。

よって、求める軌跡の長さは

$$2\pi \times 6 \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 2\sqrt{13} \times \frac{90}{360} + 2\pi \times 4 \times \frac{90}{360} = (5 + \sqrt{13})\pi \text{ (cm)}$$

(2) O の軌跡は、次の図ようになる。



④、⑤、⑥の部分は、それぞれ半径 $\sqrt{13}$ cm、中心角 90° の扇形の弧であるから、

$$\text{求める軌跡の長さは } \left(2\pi \times \sqrt{13} \times \frac{90}{360} \right) \times 3 = \frac{3\sqrt{13}}{2} \pi \text{ (cm)}$$

12 [2014 花園]

解説

(1) $O_1O_2 = 1 + 3 = 4$

点 O_1 から線分 O_2B に垂線をひき、線分 O_2B との交点を E とする。

四角形 $ABEO_1$ は長方形となり

$$BE = AO_1 = 1$$

よって $EO_2 = 3 - 1 = 2$

したがって、 $\triangle O_1O_2E$ は 3 辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形となるから

$$\angle O_1O_2B = 60^\circ$$

(2) $O_1E = \sqrt{3}EO_2 = 2\sqrt{3}$ であるから

$$AB = 2\sqrt{3}$$

(3) $\angle AO_1O_2 = \angle DO_1O_2 = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ であるから、 \widehat{AD} の中心角は $360^\circ - 120^\circ \times 2 = 120^\circ$

$\angle BO_2O_1 = \angle CO_2O_1 = 60^\circ$ であるから、 \widehat{BC} の中心角は

$$360^\circ - 60^\circ \times 2 = 240^\circ$$

よって、求めるひもの長さは

$$2\sqrt{3} \times 2 + 2\pi \times 1 \times \frac{120}{360} + 2\pi \times 3 \times \frac{240}{360} = 4\sqrt{3} + \frac{14}{3}\pi$$

(4) 台形 ABO_2O_1 の面積は

$$\frac{1}{2} \times (1 + 3) \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

よって、求める面積は

$$4\sqrt{3} \times 2 + \pi \times 1^2 \times \frac{120}{360} + \pi \times 3^2 \times \frac{240}{360} = 8\sqrt{3} + \frac{19}{3}\pi$$

13

解説

△ABCにおいて $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (cm)

よって、 $AE = 5$ cm であるから

$$DE = 5 - 3 = 2 \text{ (cm)}$$

△DCEにおいて $CE = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ (cm)

線分 AC は直径であるから $\angle APC = 90^\circ$

△ACE は、 $AC = AE$ の二等辺三角形であるから、P は辺 CE の中点で

$$CP = 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \sqrt{5} \text{ (cm)}$$

△ACPにおいて $AP = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$ (cm)

また、 $\angle DAQ = \angle PAE$, $\angle ADQ = \angle APE$ より、△AQD ≡ △AEP であるから

$$AQ : AE = AD : AP$$

$$AQ : 5 = 3 : 2\sqrt{5}$$

よって

$$AQ = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

14 [2016 青雲]

解説

右の図のように、正四角錐の底面を IJKL, EG と IJ, LK との交点をそれぞれ M, N とする。

AD = 3 cm, MN = 1 cm より、EM = NG = 1 cm である。

展開図を組み立てた正四角錐の高さを EO とする。

△EMO において、三平方の定理により

$$EO^2 = EM^2 - \left(\frac{1}{2}MN\right)^2$$

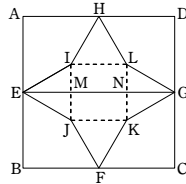
$$EO^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$EO^2 = \frac{3}{4}$$

EO > 0 より $EO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cm)

よって、求める体積は

$$\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ (cm}^3\text{)}$$



15

解説

△FIJ は FI = FJ の二等辺三角形である。

また、直角三角形 DIJ において、DI : DJ : IJ = 1 : 1 : $\sqrt{2}$ であるから

$$IJ = DI \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

F から辺 IJ に垂線 FK を引くと、K は線分 BD, IJ の交点である。

直角三角形 BFK において

$$FK^2 = BF^2 + BK^2 = 6^2 + BK^2 \quad \dots\dots ②$$

ここで $BK = BD - DK$

$$= AD \times \sqrt{2} - DI \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

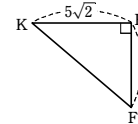
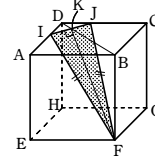
$$= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

①, ② から $FK^2 = 36 + (5\sqrt{2})^2 = 86$

FK > 0 であるから $FK = \sqrt{86}$

よって、△IJF の面積は

$$\frac{1}{2} \times IJ \times FK = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{86} = 2\sqrt{43} \text{ (cm}^2\text{)}$$



16

解説

(1) 四面体 DBEG は直方体 ABCD - EFGH から 4 つの四面体 ABDE, BCDG, BEFG,

DEGH を取り除いたものである。

直方体の体積は $3 \times 3 \times 4 = 36$

4 つの四面体の体積はすべて $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 4 = 6$

したがって、四面体 DBEG の体積は $36 - 4 \times 6 = 12 \text{ (cm}^3\text{)}$

(2) 直角三角形 ABD, ABE, ADE において

$$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad BE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad DE = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

よって、△BDE は BD = BE の二等辺三角形である。

頂点 B から辺 DE に垂線 BI を引く。

直角三角形 BDI において

$$BI = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{82}}{2}$$

よって、△BDE の面積は

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{82}}{2} = \frac{3\sqrt{41}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

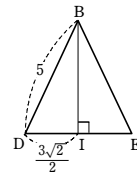
点 G から △BDE に引いた垂線を GJ とすると、四面体

DBEG の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle BDE \times GJ = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{41}}{2} \times GJ = \frac{\sqrt{41}}{2} GJ$$

これと (1) から $12 = \frac{\sqrt{41}}{2} GJ$

よって $GJ = \frac{24\sqrt{41}}{41}$ cm



17 [2016 函館ラ・サール]

解説

(1) △ABD において

$$AB^2 + AD^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$$

$$BD^2 = 2^2 = 4$$

よって、 $AB^2 + AD^2 = BD^2$ が成り立つから

$$\angle BAD = 90^\circ$$

(2) △ABC において、 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ が成り立つから

$$\angle BAC = 90^\circ$$

さらに、△ACD において、 $AC^2 + AD^2 = CD^2$ が成り立つから

$$\angle CAD = 90^\circ$$

したがって、求める立体の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

(3) △BCD = $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (cm²)

(4) 求める高さを h cm とすると

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times h = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって、求める高さは $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm

18

解説

(1) 母線 AB の長さは

$$AB = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6$$

よって、展開図における側面の扇形の中心角の大きさは

$$360^\circ \times \frac{2\pi \times 2}{2\pi \times 6} = 120^\circ$$

よって、右の展開図における線分 BC に糸が一致するとき、糸の長さは最も短くなる。

図のように、B から CA の延長に引いた垂線の足を H とすると

$$AH = \frac{1}{2} AB = 3$$

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 3\sqrt{3}$$

したがって、直角三角形 BCH において

$$BC = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3+2)^2} = 2\sqrt{13}$$

よって、求める糸の長さは $2\sqrt{13}$

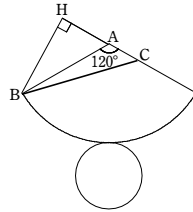
(2) 条件から、線分 BC 上の点 D について、 $AD \perp BC$ となる。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times AD = 3\sqrt{3}$$

$$\text{これを解いて } AD = \frac{3\sqrt{39}}{13}$$



19

解説

(1) A から BC に引いた垂線の足を H とする。

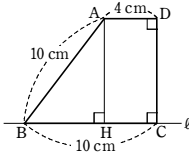
直角三角形 ABH において

$$AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$

1 回転させてできる立体は、底面の半径 8 cm、高さ 4 cm の円柱と、底面の半径 8 cm、高さ 6 cm の円錐を組み合わせたものになる。

よって、求める体積は

$$\pi \times 8^2 \times 4 + \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 6 = 384\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



(2) E から FG に引いた垂線の足を K とする。

$FK = x$ cm とすると、直角三角形 EFK において

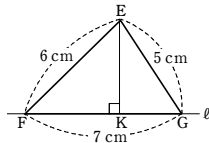
$$EK^2 = 6^2 - x^2$$

直角三角形 EKG において

$$EK^2 = 5^2 - (7-x)^2$$

よって $6^2 - x^2 = 5^2 - (7-x)^2$

$$\text{これを解いて } x = \frac{30}{7}$$



$$\text{したがって } EK = \sqrt{6^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2} = \frac{12\sqrt{6}}{7} \text{ (cm)}$$

1 回転させてできる立体は、底面の半径 EK、高さ FK の円錐と、底面の半径 EK、高さ GK の円錐を組み合わせたものになる。

よって、求める体積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \pi \times EK^2 \times FK + \frac{1}{3} \times \pi \times EK^2 \times GK = \frac{1}{3} \times \pi \times EK^2 \times (FK + GK) \\ & = \frac{1}{3} \times \pi \times EK^2 \times FG = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2 \times 7 \\ & = \frac{288}{7} \pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

したがって、球 O の半径は $\frac{3}{2}$ cm

20 [2014 福岡大学附属大濠]

解説

(1) 正方形の 1 辺の長さとお角線の長さの比は $1 : \sqrt{2}$ であるから、求める長さは

$$6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(2) \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 4 = 48 \text{ (cm}^3\text{)}$$

(3) 底面 BCDE の対角線 BD の中点を H とする。

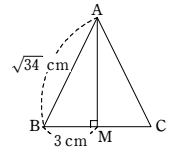
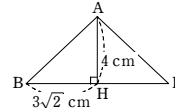
$$\begin{aligned} BH &= \frac{1}{2} BD \\ &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$\triangle ABH$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{34} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$\triangle ABM$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} \\ &= 5 \text{ (cm)} \end{aligned}$$



$$(4) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15 \text{ (cm}^2\text{)}$$

よって、求める表面積は

$$6 \times 6 + 15 \times 4 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

(5) 辺 DE の中点を N、球 O と AM の交点を P とし、面 AMN について考える。

$\triangle APO$ と $\triangle AHM$ において

$$\angle APO = \angle AHM = 90^\circ$$

共通であるから

$$\angle PAO = \angle HAM$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle APO \sim \triangle AHM$$

よって $AO : AM = PO : HM$

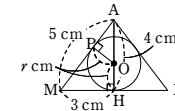
球 O の半径を r cm とすると

$$(4-r) : 5 = r : 3$$

$$3(4-r) = 5r$$

$$12 - 3r = 5r$$

$$8r = 12$$

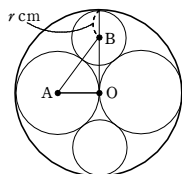


第9章 三平方の定理 レベルB

1

解説

中円2個の接点をOとすると、Oは大円の中心である。
右の図のように、中円の中心をA、小円の中心をBとし、
小円の半径をr cm とする。



$$OA = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ (cm)}$$

$$OB = 10 - r \text{ (cm)}$$

$$AB = 5 + r \text{ (cm)}$$

$\angle AOB = 90^\circ$ であるから、 $\triangle AOB$ において

$$5^2 + (10 - r)^2 = (5 + r)^2$$

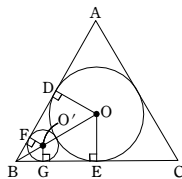
これを解いて $r = \frac{10}{3}$

よって、小円の半径は $\frac{10}{3}$ cm

2 [2014 開明]

解説

右の図のように、正三角形ABCに内接する大円の中心
をO、小円の中心をO'とする。また、辺ABと2つの
円O、O'との接点をD、F、辺BCと2つの円O、O'
との交点をE、Gとする。



円Oの半径をrとすると、 $\triangle ABC$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times 6 \times r \times 3 = \frac{1}{2} \times 6 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{3}$$

$\triangle OBD \cong \triangle OBE$ より、 $\angle OBD = \angle OBE = 30^\circ$ であるから

$$OB = 2OE = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

円O'の半径をr'とする。

$\triangle O'BF \cong \triangle O'BG$ より、 $\angle O'BF = \angle O'BG = 30^\circ$ であるから、3点B、O'、Oは一直
線上にある。

$BO' = 2O'G = 2r'$ であるから

$$2r' + r' + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$3r' = \sqrt{3}$$

$$r' = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、小円の半径は $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3

解説

(1) Aから辺BCに引いた垂線の足をHとする。

BH = x とすると

$$\triangle ABH \text{ において } AH^2 = 13^2 - x^2$$

$$\triangle ACH \text{ において } AH^2 = 20^2 - (21 - x)^2$$

よって $13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$

これを解いて $x = 5$

このとき $AH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

したがって、求める垂線の長さは 12

(2) 求める円の半径をrとする。

$\triangle ABC$ を右の図のように分けて考えると、
 $\triangle ABC$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times 13 \times r + \frac{1}{2} \times (2r + 21) \times r + \frac{1}{2} \times 20 \times r$$

$$+ \frac{1}{2} \times 2r \times (12 - r)$$

$$= \frac{1}{2} \times 21 \times 12$$

これを解いて $r = \frac{42}{13}$

よって、円の半径は $\frac{42}{13}$

4 [2016 久留米大学附設]

解説

右の図のように、円の中心をO、Pとし、O、PからBCに
垂線OR、PQをひく。

このとき、A、O、Rは1つの直線上にあり、 $\triangle ARB$ と
 $\triangle ARC$ はARについて対称である。

よって $BR = CR = 6 \div 2 = 3$ (cm)

$\triangle OBR$ は3つの角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形であるから

$$OR = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

また $OB = 2OR = 2\sqrt{3}$ cm

$\triangle PBQ$ は3つの角が 30° 、 60° 、 90° の直角三角形であるから、 $PQ = x$ cm とすると、
 $BP = 2x$ cm と表される。

図において $OB = OS + SP + PB$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{3} + x + 2x$$

$$3x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

円Oの周の長さは $2\pi \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$ (cm)

円Pの周の長さは $2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm)

3つの小さい円の半径はすべて等しいから、求める長さの和は

$$2\sqrt{3}\pi + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \times 3 = 4\sqrt{3}\pi \text{ (cm)}$$

5

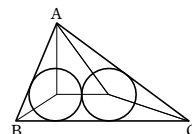
解説

(1) Bのy座標は $y = \frac{2}{3} \times 3 = 2$

Bは関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点であるから、 $x = 3$ 、 $y = 2$ を $y = ax^2$ に代入して

$$2 = a \times 3^2$$

よって $a = \frac{2}{9}$



(2) Aのy座標は、 $y = \frac{2}{9} \times (-3)^2 = 2$ であるから A(-3, 2)

Cのy座標は、 $y = \frac{2}{9} \times 6^2 = 8$ であるから C(6, 8)

よって、直線ACの傾きは $\frac{8-2}{6-(-3)} = \frac{2}{3}$

したがって、直線ACとOBの傾きは等しいから AC//OB

よって、四角形OBCAは台形である。

台形OBCAの高さをhとすると、hは辺ACを底辺とみたときの $\triangle ABC$ の高さに
等しい。

$AC = \sqrt{[6-(-3)]^2 + (8-2)^2} = 3\sqrt{13}$ であるから、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{3\sqrt{13}}{2} h \dots\dots ①$$

一方、点Bの座標は(3, 2)であるから、辺ABを底辺とみたときの $\triangle ABC$ の高さは
(Cのy座標)-(Bのy座標)=8-2=6

よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times AB \times 6 = \frac{1}{2} \times (3+3) \times 6 = 18 \dots\dots ②$$

①、②から $\frac{3\sqrt{13}}{2} h = 18$

これを解いて $h = \frac{12\sqrt{13}}{13}$

したがって、台形OBCAの高さは $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

6

解説

内接円の中心をOとし、内接円Oと辺DA、AB、
BC、CDとの接点を、それぞれK、L、M、Nとする。

AD//BCより、KM=AB=8であるから、円Oの
半径は4である。

よって、AK=4であるから

$$DK = 6 - 4 = 2$$

$\triangle ODK$ において

$$OD^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

CN=xとおくと、 $\triangle OCN$ において

$$OC^2 = x^2 + 4^2$$

また、DN=DK=2であるから $CD = x + 2$

$\angle KOD = \angle DON$ 、 $\angle NOC = \angle COM$ 、 $\angle KOM = 180^\circ$ であるから $\angle COD = 90^\circ$

したがって、 $\triangle OCD$ において

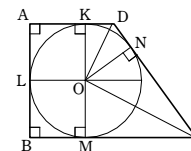
$$20 + (x^2 + 4^2) = (x + 2)^2$$

これを解いて $x = 8$

CM=CN=8であるから $BC = 4 + 8 = 12$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \times (6 + 12) \times 8 - \pi \times 4^2 = 72 - 16\pi$$



7

解説

 \widehat{AB} に対する円周角より

$$\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$$

 \widehat{AD} に対する円周角より

$$\angle ACD = \angle ABD = 60^\circ$$

よって、 $\angle ACB = \angle ACD$ であるから

$$BE : ED = BC : CD = 1 : 2$$

したがって $BE = \frac{1}{3}BD = 1$ (cm)A から辺 BD に引いた垂線の足を H とすると

$$AH = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

また、 $BH = \frac{3}{2}$ cm であるから

$$EH = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ (cm)}$$

よって、 $\triangle AEH$ において

$$AE = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$

8 [2014 筑紫女学園]

解説

(1) おうぎ形 MEF の半径は $MN = AB = 2$ 、中心角は 120° であるから、面積は

$$\pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$$

(2) M, N はそれぞれ辺 AD, BC の中点であるから

$$NM \parallel AB, \angle BNM = \frac{1}{2}\angle BNC = \frac{1}{2}a^\circ$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABN = \angle BNM = \frac{1}{2}a^\circ$$

(3) $NM \parallel AB$ より $\angle BEM = \angle ENM$

$$= \frac{1}{2}\angle EMF$$

$$= 60^\circ$$

よって、 $\triangle BEM$ は3つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$BE = \frac{1}{2}EM = \frac{1}{2}MN = 1$$

したがって $EP : PM = BE : MN = 1 : 2$ (4) (3) から $BM = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}$

$$BP : PN = BE : MN = 1 : 2$$

よって $\triangle MNP = \frac{2}{3}\triangle BMN$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2\right) \\ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle BEP = \frac{1}{3}\triangle BME$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}\right) \\ = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって、求める面積の和は

$$2 \times (\triangle BEP + \triangle MNP) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

9 [2014 専修大学松戸]

解説

(1) 円の接線の性質から

$$DE = DA = 3 \text{ (cm)}$$

$$CE = CB = 6 \text{ (cm)}$$

よって $CD = 3 + 6 = 9$ (cm)(2) 半円の半径を r cm とする。D から BC に垂線 DH をひくと $DH = AB = 2r$ cm $\triangle CDH$ において、三平方の定理より

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} \\ = \sqrt{81 - (6 - 3)^2} \\ = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

よって $2r = 6\sqrt{2}$
 $r = 3\sqrt{2}$ したがって、半円の半径は $3\sqrt{2}$ cm(3) BC, CD は、半円 O の接線であるから

$$\angle OBC = \angle OEC = 90^\circ$$

よって、4点 O, B, C, E は OC を直径とする円周上にある。 $\triangle OBC$ において、三平方の定理より

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} \\ = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} \\ = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

したがって、求める円の半径は $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm

10 [2014 渋谷教育学園幕張]

解説

(1) 点 R が x 軸上にあるとき、 PQ と x 軸の頂点を H とすると $PH = QH$ よって $x^2 = -(x-6)$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2, -3$$

ここで、 $\triangle PHR$ は3つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$PH : HR = 1 : \sqrt{3}$$

$$HR = \sqrt{3}PH$$

 $x = 2$ のとき、 $PH = 4$ であるから $HR = \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$ よって、点 R の座標は $(2 + 4\sqrt{3}, 0)$ $x = -3$ のとき、 $PH = 9$ であるから $HR = \sqrt{3} \times 9 = 9\sqrt{3}$ よって、点 R の座標は $(-3 + 9\sqrt{3}, 0)$ (2) 点 R から PQ に下ろした垂線と PQ との交点を I とすると、 $\triangle PHR$ は3つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$PI : IR = 1 : \sqrt{3}$$

 $PQ = t$ とすると $PI = \frac{1}{2}t$

$$\frac{1}{2}t : IR = 1 : \sqrt{3}$$

$$IR = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

正三角形 PQR の面積が $9\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2} \times t \times \frac{\sqrt{3}}{2}t = 9\sqrt{3}$$

$$t^2 = 36$$

 $t > 0$ であるから $t = 6$ $t = 6$ のとき $IR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ $t = 6$ となる P, Q の x 座標は

$$x^2 - (x-6) = 6$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

 $x = 0$ のとき、 I の座標は $(0, -3)$ であるから、 R の座標は $(3\sqrt{3}, -3)$ $x = 1$ のとき、 I の座標は $(1, -2)$ であるから、 R の座標は $(1 + 3\sqrt{3}, -2)$

11 [2014 大阪教育大学附属池田]

解説

- (1) おうぎ形の半径を r cm とすると、中心角が 90° であるから、おうぎ形の弧の長さは

$$2\pi r \times \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}\pi r \text{ (cm)}$$

底面の円の半径を x cm とすると

$$2\pi x = \frac{1}{2}\pi r$$

$$x = \frac{1}{4}r \text{ (cm)}$$

右の図から、三平方の定理により

$$\left(\frac{3}{4}r\right)^2 + \left(10 - \frac{1}{4}r\right)^2 = \left(\frac{5}{4}r\right)^2$$

$$3r^2 + 16r - 320 = 0$$

解の公式により

$$\begin{aligned} r &= \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 3 \times 320}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-16 \pm 64}{6} \\ &= -\frac{40}{3}, 8 \end{aligned}$$

$r > 0$ より $r = 8$

よって、底面の半径は $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ (cm)

- (2) 円錐の高さは $\sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$ (cm)

よって、円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 2\sqrt{15} = \frac{8\sqrt{15}}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

- (3) 底面との接点と側面との接点を通る面で円錐を切り、球の半径を t cm とすると、右の図のような直角三角形ができるから、三平方の定理により

$$6^2 + t^2 = (2\sqrt{15} - t)^2$$

$$4\sqrt{15}t = 24$$

$$t = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

よって、球の半径は $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ (cm)

12 [2016 城西大学附属川越]

解説

- (1) $AT \parallel EF$ より

$$AT : EF = AS : SE$$

$$AT : 12 = 1 : 3$$

よって $AT = 4$ cm

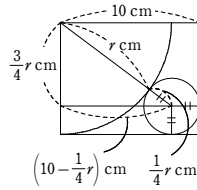
- (2) 直線 BC と直線 FP との交点を U とする。

(1) と同様に考えると、線分 CU の長さは 4 cm である。

直線 TU 上に線分 RQ があり、 $\triangle BTU$ は直角二等辺三角形である。

よって、 $\triangle ATR$ も直角二等辺三角形であるから

$$AR = AT = 4 \text{ cm}$$



- (3) $DR = DQ = 12 - 4 = 8$ (cm)

よって $RQ = 8\sqrt{2}$ cm

$AS : SE = 1 : 3$ より

$$AS = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \text{ (cm)}$$

$$SE = 12 \times \frac{3}{4} = 9 \text{ (cm)}$$

$\triangle ARS$ において

$$RS = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}$$

$\triangle SEF$ において

$$SF = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ (cm)}$$

したがって、求める弧の長さは

$$(5 + 15) \times 2 + 8\sqrt{2} = 40 + 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

13 [2014 東北学院榴ヶ岡]

解説

- (1) 円錐の高さを HO 、母線を HC とすると、 $\triangle OCH$ において、三平方の定理により

$$HO = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

- (2) 側面のおうぎ形の中心角の大きさを a° とすると

$$2\pi \times 4 \times \frac{a}{360} = 2\pi \times 2$$

$$a = 180$$

よって、中心角の大きさは 180°

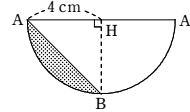
- (3) (ア) かけたひもは、右の側面の展開図の線分 AB である。

$\triangle ABH$ は直角二等辺三角形より、ひもの長さは

$$\sqrt{2} AH = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

- (イ) 求める面積は右の図の弦 AB と弧 AB に囲まれた部分の面積であるから

$$\pi \times 4^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4\pi - 8 \text{ (cm}^2\text{)}$$



14

解説

- (1) 点 P が辺 BF の中点の位置にあるとき、切り口は正三角形になる。

したがって $5 \div 1 = 5$ (秒後)

また、このとき切り口は、1 辺の長さが $5\sqrt{2}$ 、高さが $5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ の正三角形になるから、その面積は

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

- (2) 点 P が辺 CD の中点の位置にあるとき、切り口は正六角形になる。

したがって $(10 + 10 + 5) \div 1 = 25$ (秒後)

また、このとき切り口は、1 辺の長さが $5\sqrt{2}$ の正六角形になるから、その面積は、

- (1) で求めた正三角形の面積の 6 倍で

$$\frac{25\sqrt{3}}{2} \times 6 = 75\sqrt{3}$$

- (3) 点 P は 17 秒後に、辺 BC 上の $BP = 7$ の位置にある。

このとき、切断面と辺 AB の交点を Q とすると、 $IJ \parallel QP$ で

$$BQ = 7$$

このとき $IJ = \sqrt{2} FJ = 5\sqrt{2}$

$$PQ = \sqrt{2} BP = 7\sqrt{2}$$

また、 P から辺 FG に引いた垂線の足を K とすると、直角三角形 PJK において

$$PJ = \sqrt{10^2 + (7-5)^2} = 2\sqrt{26}$$

同様に

$$QI = 2\sqrt{26}$$

よって、切り口は、右の図のような等脚台形である。

ここで、 I から PQ に引いた垂線の足を L とすると

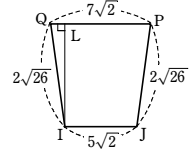
$$LQ = (7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}) \div 2 = \sqrt{2}$$

直角三角形 ILQ において

$$IL = \sqrt{(2\sqrt{26})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{102}$$

したがって、求める面積は

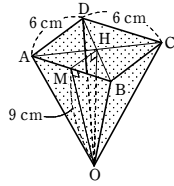
$$\frac{1}{2} \times (7\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \times \sqrt{102} = 12\sqrt{51}$$



15

解説

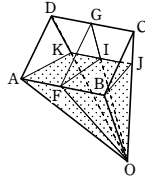
- (1) O から辺 AB に引いた垂線の足を M とする。
 $\triangle OAB$ は AB を底辺とする二等辺三角形であるから、M は辺 AB の中点である。
 また、O から水面 ABCD に引いた垂線の足を H とすると、H は正方形 ABCD の対角線の交点、すなわち対角線 AC の中点である。



よって $HM=3$ cm
 このとき、直角三角形 OHM において
 $OH=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

したがって、求める高さは $6\sqrt{2}$ cm

- (2) 辺 AB, DC の中点をそれぞれ F, G とし、OG と水面の交点を I とする。



また、水面と OC, OD の交点をそれぞれ J, K とする。
 このとき、 $JK \perp OG$, $FI \perp OG$ であるから、線分 OI の長さが求める高さである。

OI = x cm とすると $GI=9-x$ (cm)

$$\triangle OFI \text{ において } FI^2 = 9^2 - x^2$$

$$\triangle FIG \text{ において } FI^2 = 6^2 - (9-x)^2$$

よって $9^2 - x^2 = 6^2 - (9-x)^2$

これを解いて $x=7$

したがって、水面までの高さは 7 cm

- (3) (2) において、 $JK \parallel CD$ であるから

$$JK : CD = OJ : OC \\ = OI : OG = 7 : 9$$

よって $JK = \frac{14}{3}$ cm

$$JK = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

また $FI = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}$ (cm)

したがって、水面がつくる図形は、上底が $\frac{14}{3}$ cm、下底が 6 cm、

高さが $4\sqrt{2}$ cm の台形である。

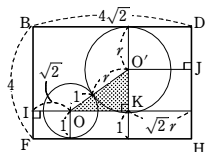
よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{14}{3} + 6 \right) \times 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

16

解説

半径 1 cm の球の中心を O とし、もう一方の球の中心を O' とし、半径を r cm とする。
 与えられた立体を、4 点 B, F, H, D を通る平面で切断すると、右の図ようになる。



2 つの球は外接しているから

$$OO' = r + 1$$

O から線分 BF に垂線 OI を引き、O' から線分 DH

に垂線 O'J を引く。

また、O を通り線分 BD に平行な直線と、O' を通り線分 BF に平行な直線の交点を K とする。

OI = $\sqrt{2}$, O'J = $\sqrt{2}r$ であるから、図より

$$OK = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2}r = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}r$$

$$O'K = 4 - 1 - r = 3 - r$$

よって、直角三角形 OO'K において、次の等式が成り立つ。

$$(1+r)^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{2}r)^2 + (3-r)^2$$

したがって $r^2 - 10r + 13 = 0$

これを解いて $r = \frac{10 \pm \sqrt{48}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{3}$

$r < 4$ であるから $r = 5 - 2\sqrt{3}$ 圏 $(5 - 2\sqrt{3})$ cm

17 [2014 日本大学第二]

解説

- (1) $\triangle ABD$ の面積について、次の等式が成り立つ。

$$\triangle ABD = \triangle OAB + \triangle OBD + \triangle OAD$$

BD と CE の交点を H とすると

$$AH = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

よって、球の半径を r とすると

$$8\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times r + \frac{1}{2} \times 4 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r$$

$$8\sqrt{2} = 8r$$

$$r = \sqrt{2}$$

したがって、球の半径は $\sqrt{2}$

- (2) 面 ABD において、円 O の外部の点 B から円 O にひいた接線の長さは等しいから

$$BF = BC = 2$$

よって、最も短くなるときの線は、右の図の側面の展開図で、線分 BF となる。

側面のおうぎ形の中心角の大きさを x° とすると、おうぎ形の弧の長さとお底面の円周の長さは等しいから

$$2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 2$$

$$x = 120$$

したがって、点 F から線分 BA の延長にひいた垂線を FI とすると、 $\triangle AFI$ は 3 つの角が 30° , 60° , 90° の直角三角形となる。

AF = 6 - 2 = 4 であるから

$$AI = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$FI = \sqrt{3} AI = 2\sqrt{3}$$

$\triangle BFI$ において、三平方の定理より

$$BF = \sqrt{BI^2 + FI^2} \\ = \sqrt{(6+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ = 2\sqrt{19}$$

- (3) 3 点 F, E, C を通る平面と、面 ABD が交わってできる線分は、図の線分 FH となる。

ここで、四角形 OFBH は線分 OB を軸とする線対称な図形であるから、対応する 2 点 F, H を結ぶ線分 FH と線分 OB は垂直である。

よって、FH と OB の交点を J とすると、 $OJ \perp FH$ より、線分 OJ の長さを求めればよい。

$\triangle OFB$ と $\triangle OJF$ において

$$\angle FOB = \angle JOF \text{ (共通)}$$

$$\angle OFB = \angle OJF = 90^\circ$$

2 組の角がそれぞれ等しいから $\triangle OFB \sim \triangle OJF$

よって $OF : OJ = OB : OF$

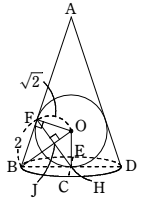
ここで $OF = \sqrt{2}$

$$OB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

であるから $\sqrt{2} : OJ = \sqrt{6} : \sqrt{2}$

$$OJ = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$OJ = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



18 [2016 洛南]

解説

(1) $\triangle ABD$ は $AB=AD$ の直角二等辺三角形であるから

$$AB=AD=\frac{1}{\sqrt{2}}BD=2$$

$\triangle ABE$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} BE^2 &= AB^2 + AE^2 \\ 20 &= 4 + AE^2 \\ AE^2 &= 16 \end{aligned}$$

$AE > 0$ より $AE = 4$

(2) 四面体 $BDEG$ の4つの面はすべて合同である。

BD の中点を P とすると、 $\triangle BEP$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} BE^2 &= PE^2 + BP^2 \\ 20 &= PE^2 + 2 \\ PE^2 &= 18 \end{aligned}$$

$PE > 0$ より $PE = 3\sqrt{2}$

よって、求める表面積は

$$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}\right) \times 4 = 24$$

(3) EG の中点を Q 、 PQ の中点を O とすると、 $OB=OD=OE=OG$ となり、

点 O は求める球の中心である。

$\triangle OEQ$ において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} OE^2 &= OQ^2 + EQ^2 \\ &= 2^2 + (\sqrt{2})^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$OE > 0$ より $OE = \sqrt{6}$

(4) 求める球の半径を r とする。

(2) より、四面体の各面の面積は $24 \div 4 = 6$

四面体の体積は

$$2 \times 2 \times 4 - \left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) \times 4\right) \times 4 = \frac{16}{3}$$

球の中心と各頂点を結ぶと、四面体は4つの合同な四面体に分けられるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} \times 6 \times r\right) \times 4 &= \frac{16}{3} \\ r &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって、求める半径は $\frac{2}{3}$

19

解説

辺 BC の中点を E とする。また、頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引く。

$\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ は正三角形であるから

$$AE = DE = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

H は $\triangle BCD$ の重心であるから

$$EH = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \quad DH = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

直角三角形 AEH において

$$AH^2 = (6\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 96$$

$AH > 0$ であるから $AH = 4\sqrt{6}$

球の中心を O とし、球の半径を r cm とすると、直角三角形 ODH において

$$OH^2 + HD^2 = OD^2$$

すなわち $(4\sqrt{6} - r)^2 + (4\sqrt{3})^2 = r^2$

よって $8\sqrt{6}r = 144$

したがって $r = \frac{144}{8\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}$ (cm)

参考 球の中心 O は、高さ AH を $3:1$ に内分している。

これは、1辺の長さが12 cmの正四面体のすべての面に接するような球の中心と一致している。

20

解説

球の中心を O 、球と面 $ABCD$ の接点を I とする。

切り口の図形は円であり、その中心を K とする。

切り口の円は点 I を通るから、 IK はその半径である。

与えられた立体を面 $BFHD$ で切断した断面図は右の図のようになる。

$$OI = \frac{6}{2} = 3$$

$$OM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

よって、直角三角形 IMO において

$$MI^2 = 3^2 + (3\sqrt{2})^2 = 27$$

$MI > 0$ であるから $MI = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

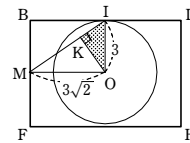
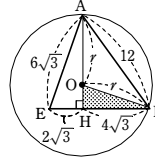
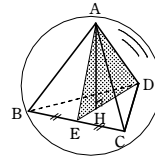
$OK \perp IM$ であるから $\triangle IMO \sim \triangle IOK$

よって $IM : IO = IO : IK$

すなわち $3\sqrt{3} : 3 = 3 : IK$

これを解いて $IK = \sqrt{3}$

したがって、切り口の図形の面積は $\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$ (cm²)



1 [高校の問題集より]

解説

(1) $AE \perp$ 平面 $EFGH$ 、 $AK \perp FH$ であるから、 $\triangle AEK$ がつくる平面と FH は垂直である。

よって $EK \perp FH$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} \triangle EFH &= \frac{1}{2} \cdot FH \cdot EK \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot EK \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

また、 $EF \perp EH$ であるから

$$\triangle EFH = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EH = \frac{1}{2} ab \quad \dots\dots ②$$

①、② から $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot EK = ab$ よって $EK = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

したがって $AK = \sqrt{AE^2 + EK^2} = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}}$

2

解説

(1) $\triangle BGD$ の辺 BG 、 GD 、 DB の中点をそれぞれ I 、 J 、 K とすると、球 O は、点 I 、 J 、 K でそれぞれ、面 $BFGC$ 、 $CGHD$ 、 $ABCD$ に接する。

よって、切り口の円は、3点 I 、 J 、 K を通る。

このとき、 $\triangle IJK$ は正三角形で、その1辺の長さは

$$\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

切り口の円の中心は、正三角形 IJK の重心に一致するから、求める半径は

$$2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (cm)}$$

(2) 球 O と面 PGQ 、 $ABCD$ 、 $EFGH$ との接点を、それぞれ S 、 T 、 U とし、線分 PQ の中点を R とする。

このとき、4点 A 、 E 、 G 、 C を通る平面で切つて考えると、その切断面は、右の図のようになる。

$RC = x$ cm とおく。

$AC = EG = 4\sqrt{2}$ (cm) であるから

$$TC = UG = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$RS = RT = 2\sqrt{2} - x \text{ (cm)}$$

$$GS = GU = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

よって、直角三角形 GCR において

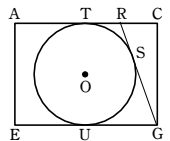
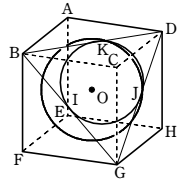
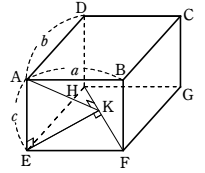
$$x^2 + 4^2 = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - x)^2$$

これを解いて $x = \sqrt{2}$

したがって $CP = CQ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (cm)

よって、求める体積は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) \times 4 = \frac{8}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



3 [2016 立教新座]

解説

- (1) 台形 BCGF において、点 C から辺 FG に垂線をひき、辺 FG との交点を T とする。
 $TG = (10 - 4) \div 2 = 3$ (cm) であるから

$$CT = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm)}$$

よって、台形 BCGF の面積は

$$\frac{1}{2} \times (4 + 10) \times 4 = 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

同様に、台形 CDHG において、辺 GH に対する高さは

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ (cm)}$$

よって、台形 CDHG の面積は

$$\frac{1}{2} \times (4 + 8) \times \sqrt{21} = 6\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって、求める表面積は

$$4 \times 4 + 10 \times 8 + (28 + 6\sqrt{21}) \times 2 = 152 + 12\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

- (2) 頂点 B, C, D から長方形 EFGH にそれぞれ垂線をひき、長方形 EFGH との交点を B', C', D' とする。

直線 B'I と辺 EH の交点を L, 直線 D'I と辺 EF との交点を M とする。

$$IL = (8 - 4) \div 2 = 2 \text{ (cm),}$$

$IM = (10 - 4) \div 2 = 3$ (cm) であるから

$$EI^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$\triangle AIE$ において

$$AI^2 = 5^2 - 13 = 12$$

$AI > 0$ であるから $AI = 2\sqrt{3}$ cm

- (3) $JK = x$ cm とする。

点 K から辺 GH に垂線をひき、辺 GH との交点を P, 辺 CD との交点を Q とする。

$BC \parallel FG$ より

$$KC : KG = 4 : 10 = 2 : 5$$

$CQ \parallel GP$ より

$$CQ : GP = KC : KG = 2 : 5$$

$$CQ = \frac{4-x}{2} \text{ cm, } GP = \frac{8-x}{2} \text{ cm であるから}$$

$$\frac{4-x}{2} : \frac{8-x}{2} = 2 : 5$$

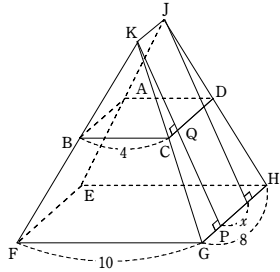
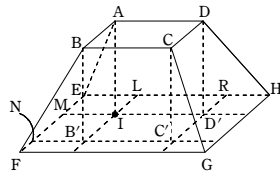
$$8 - x = 10 - \frac{5}{2}x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

よって $JK = \frac{4}{3}$ cm

- (4) (2) の図において、直線 C'B' と辺 EF の交点を N, 直線 C'D' と辺 EH との交点を R とする。

立体 ABCD-EFGH は、直方体 ABCD-IB'C'D' と、四角錐 A-EMIL 4 つ分



と、三角柱 AIL-DD'R 2 つ分と、三角柱 AIM-BB'N 2 つに分けられる。
 よって、求める立体の体積は

$$4 \times 4 \times 2\sqrt{3} + \left(\frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times 2\sqrt{3}\right) \times 4 + \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times 4\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times 4\right) \times 2 = 88\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

4 [2014 茨城県]

解説

- (1) 直角三角形 ABD において、三平方の定理により

$$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (cm)}$$

$\triangle BIF$ において、 $\angle IBF = 90^\circ$, $\angle BIF = 60^\circ$ であるから

$$BI : BF = 1 : \sqrt{3}$$

$$BI : 3\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$$

$$BI = 3 \text{ (cm)}$$

よって $DI = BD - BI = 5 - 3 = 2$ (cm)

$\triangle DIJ$ において、 $\angle IDJ = 90^\circ$, $\angle DIJ = 60^\circ$ であるから

$$DI : DJ = 1 : \sqrt{3}$$

$$2 : DJ = 1 : \sqrt{3}$$

$$DJ = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

よって $JH = DH - DJ = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (cm)

したがって、四角錐 JEFHG の体積は

$$\frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

- (2) 右の図のように、点 K から線分 FH にひいた垂線

と線分 FH の交点を L とする。

また、直線 IJ と FH の交点を M とする。

$ID \parallel HM$ であるから

$$ID : HM = DJ : JH = 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = 2 : 1$$

$ID = 2$ cm であるから $HM = 1$ cm

また、 $ID \parallel FM$ であるから

$$DK : KF = ID : FM = 2 : (5 + 1) = 1 : 3$$

さらに、 $KL \parallel DH$ より

$$KL : DH = FK : FD = 3 : 4$$

よって $KL : 3\sqrt{3} = 3 : 4$

$$KL = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ (cm)}$$

$\triangle FGH$ において、点 L から線分 GH にひいた垂線と線分 GH の交点を N とすると

$$FL : LH = FK : KD = 3 : 1$$

$LN \parallel FG$ であるから $HN : NG = 1 : 3$

$$\text{よって } NG = \frac{3}{1+3} HG = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4} \text{ (cm)}$$

また、 $LN : FG = 1 : 4$ であるから

$$LN : 4 = 1 : 4$$

$$LN = 1 \text{ (cm)}$$

直角三角形 LNG において、三平方の定理により

$$LG^2 = NG^2 + LN^2$$

$$= \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{97}{16}$$

直角三角形 KLG において、三平方の定理により

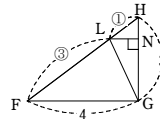
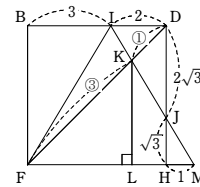
$$GK^2 = KL^2 + LG^2$$

$$= \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{97}{16}$$

$$= \frac{340}{16}$$

$$= \frac{85}{4}$$

$$GK > 0 \text{ より } GK = \frac{\sqrt{85}}{2} \text{ (cm)}$$



5 [2016 慶應義塾]

解説

右の図のように点を定める。

直線の傾きは $\sqrt{3}$ であるから $\angle GOA = 60^\circ$

よって $\angle BOE = 30^\circ$

したがって $\angle OBE = 60^\circ$

$\triangle OBE \cong \triangle OB'E$ より, $\triangle OBB'$ は正三角形で,

1 辺の長さが 2 であるから, 点 B' の座標は $(\sqrt{3}, 1)$

よって, 点 B' は正方形 $OACB$ の内部にあるから,

求める回転体の体積は $\triangle GOA$ の回転体から $\triangle GDC$ の回転体を除いたものである。

$\triangle OAH$ と $\triangle DCF$ と $\triangle GDC$ と $\triangle GOA$ はすべて, 3 つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であり, 点 D は $y = \sqrt{3}x$ 上の点で, y 座標が 2 であるから

$$2 = \sqrt{3}x$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \sqrt{3}$

$$FC = \frac{\sqrt{3}}{2}DC = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

$$OG = 2OA = 4$$

$$GD = 2DC = 2\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

したがって, 求める体積は

$$\frac{1}{3}\pi \times AH^2 \times (OH + HG) - \frac{1}{3}\pi \times FC^2 \times (GF + FO)$$

$$= \frac{\pi}{3} \times (\sqrt{3})^2 \times 4 - \frac{\pi}{3} \times (\sqrt{3} - 1)^2 \times \left(4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 4\pi - 8\pi + \frac{40\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$= \frac{4(10\sqrt{3} - 9)}{9}\pi$$

6 [2016 東海]

解説

(1) $OB : BC : CO = 3 : 4 : 5$ より, $OB = 3k, BC = 4k, CO = 5k$ とすると

$$OB^2 + BC^2 = (3k)^2 + (4k)^2$$

$$= 9k^2 + 16k^2$$

$$= 25k^2$$

$$= (5k)^2$$

$$= CO^2$$

三平方の定理の逆により $\angle OBC = 90^\circ$

点 B から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を D とする。

$\triangle OBC$ と $\triangle ODB$ において

$$\angle OBC = \angle ODB = 90^\circ \quad \dots\dots ①$$

共通な角であるから

$$\angle BOC = \angle DOB \quad \dots\dots ②$$

①, ② より, 2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OBC \sim \triangle ODB$$

点 B の座標を $(b, \frac{1}{4}b^2)$ とすると, $OB : BC = 3 : 4$ より

$$OD : DB = 3 : 4$$

$$\frac{1}{4}b^2 : b = 3 : 4$$

$$b^2 = 3b$$

$$b(b - 3) = 0$$

図より, $b > 0$ であるから, 点 B の x 座標は 3

(2) $\triangle OBD$ において, 三平方の定理より

$$OB^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$OB > 0$ より $OB = \frac{15}{4}$

よって $OC = \frac{5}{3} \times \frac{15}{4}$

$$= \frac{25}{4}$$

点 A の y 座標は $\frac{25}{4}$ であるから, $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して

$$\frac{25}{4} = \frac{1}{4}x^2$$

$$x = \pm 5$$

図より, $x < 0$ であるから $x = -5$

ここで $\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{25}{4} = \frac{75}{8}$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{25}{4} = \frac{125}{8}$$

$\triangle OBC < \triangle OAC$ より, 直線 l は線分 AC 上を通る。

直線 l と線分 AC との交点を E とし, E の座標を $(-t, \frac{25}{4})$ とすると

$$\triangle OAE = \frac{1}{2} \left(\frac{75}{8} + \frac{125}{8} \right) = \frac{25}{2}$$

よって $\frac{1}{2} \times \{-t - (-5)\} \times \frac{25}{4} = \frac{25}{2}$

$$5 - t = 4$$

$$t = 1$$

したがって, E の座標は $(-1, \frac{25}{4})$ であるから, 直線 l の傾きは

$$-\frac{25}{4} \div 1 = -\frac{25}{4}$$

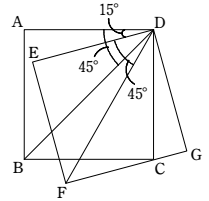
7 [2014 徳島文理]

解説

(1) $\triangle ADB, \triangle EDF$ はともに直角二等辺三角形であるから $\angle ADE + \angle EDB = \angle ADB = 45^\circ$

$$\angle BDF + \angle EDB = \angle EDF = 45^\circ$$

よって $\angle BDF = \angle ADE = 15^\circ$



(2) 辺 BC と対角線 DF の交点を H とする。

$\triangle DBH$ と $\triangle CFH$ において

$$\angle DBH = \angle CFH = 45^\circ$$

$$\angle DHB = \angle CHF \quad (\text{対頂角})$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DBH \sim \triangle CFH$$

よって $DB : CF = DH : CH \quad \dots\dots ①$

ここで $DB = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ②$

また, $\angle CDH = \angle BDC - \angle BDF = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

より, $\triangle CDH$ は 3 つの角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$DH : CH = 2 : 1 \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③ より

$$2\sqrt{2} : CF = 2 : 1$$

$$CF = \sqrt{2}$$

(3) 正方形 $DEFG$ の 1 辺の長さを x とする。

直角三角形 DCG において

$$DC = 2, DG = x, CG = x - \sqrt{2}$$

三平方の定理により

$$DG^2 + CG^2 = DC^2$$

$$x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 2^2$$

整理すると $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$

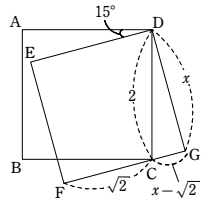
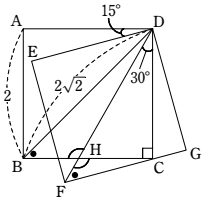
解の公式により

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$x > 0$ であるから

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

よって, 正方形 $DEFG$ の 1 辺の長さは $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$



8 [2014 ラ・サール]

解説

(1) ACの長さを $2x$ とする。

Aから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をHとすると

$$CH=x, \quad BH=8-x, \quad AH=\sqrt{3}x$$

となる。

直角三角形ABHに三平方の定理を用いて

$$(8-x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 7^2$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

これを解いて

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 4 \times 15}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{16 \pm 4}{8}$$

$$\text{よって } x = \frac{5}{2} \text{ または } x = \frac{3}{2}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから、辺ACの長さは4より大きい。

したがって $AC=5$

(2) $\triangle ADC$ と $\triangle DFC$ において

共通な角であるから $\angle ACD = \angle DCF$ ……①

BCは円Oの接線で、Dは接点であるから

$$\angle ADC = \angle AED \quad \dots\dots ②$$

四角形AEDFは円Oに内接しているから

$$\angle AED = \angle DFC \quad \dots\dots ③$$

②, ③より $\angle ADC = \angle DFC$ ……④

①, ④より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ADC \sim \triangle DFC$

AFの長さを a とする。

$\triangle ADC \sim \triangle DFC$ より $AC : DC = DC : FC$

$$5 : 4 = 4 : (5-a)$$

$$5(5-a) = 16 \text{ より } a = \frac{9}{5}$$

$$\text{したがって } AF = \frac{9}{5}$$

(3) Oから線分AHに引いた垂線と線分AHの交点をIとする。

また、円Oの半径を r とする。

$$CH = \frac{5}{2}, \quad DC = 4 \text{ であるから } DH = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

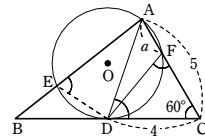
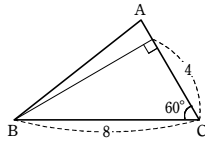
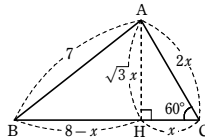
$$\text{また、} AH = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ であるから } AI = \frac{5\sqrt{3}}{2} - r$$

直角三角形AOIに三平方の定理を用いて

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - r\right)^2 = r^2$$

$$\frac{9}{4} + \frac{75}{4} - 5\sqrt{3}r + r^2 = r^2$$

$$5\sqrt{3}r = 21 \text{ より } r = \frac{21}{5\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{5}$$



9 [2014 立命館]

解説

$\frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2, \quad \frac{1}{2} \times (-1)^2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \times 4^2 = 8, \quad \frac{1}{2} \times a^2 = \frac{1}{2}a^2$ より、4点A, B, C, Dの座標は、それぞれ次のようになる。

$$A(-2, 2), \quad B(-1, \frac{1}{2}), \quad C(4, 8), \quad D(a, \frac{1}{2}a^2)$$

(1) 直線ACの傾きは $\frac{8-2}{4-(-2)} = 1$ であるから、直線ACの式は $y = x + b$ とおける。

直線ACは点Aを通るから $2 = -2 + b$

$$b = 4$$

よって、直線ACの式は $y = x + 4$

したがって、3点A, F, Cが同一直線上にあるとき、点Fのy座標も4になるから

$$\frac{1}{2}a^2 = 4$$

$$a^2 = 8$$

$a > 0$ であるから $a = 2\sqrt{2}$

(2) 直線ADの傾きは $\left(\frac{1}{2}a^2 - 2\right) \div \{a - (-2)\} = \frac{1}{2}(a-2)$

直線BCの傾きは $\left(8 - \frac{1}{2}\right) \div \{4 - (-1)\} = \frac{3}{2}$

$$\text{よって } \frac{1}{2}(a-2) = \frac{3}{2}$$

$$a = 5$$

(3) $0 < a < 4$ のとき

$$\triangle DCF = \frac{1}{2} \times a \times \left(8 - \frac{1}{2}a^2\right) = \frac{1}{4}a(16 - a^2)$$

$$\triangle DCE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a^2 \times (4 - a) = \frac{1}{4}a^2(4 - a)$$

$$\triangle DCF = \frac{3}{2} \triangle DCE \text{ より } \frac{1}{4}a(16 - a^2) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}a^2(4 - a)$$

$$(16 - a^2) = \frac{3}{2}a(4 - a)$$

$$2(16 - a^2) = 3a(4 - a)$$

$$2(16 - a^2) - 3a(4 - a) = 0$$

$$2(4 + a)(4 - a) - 3a(4 - a) = 0$$

$$(4 - a)(2(4 + a) - 3a) = 0$$

$$(4 - a)(8 - a) = 0$$

$$a = 4, 8$$

$0 < a < 4$ より、これらは問題に適さない。

$a > 4$ のとき

$$\triangle DCF = \frac{1}{2} \times a \times \left(\frac{1}{2}a^2 - 8\right)$$

$$= -\frac{1}{4}a(16 - a^2)$$

$$\triangle DCE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a^2 \times (4 - a)$$

$$= -\frac{1}{4}a^2(4 - a)$$

$$\text{よって } -\frac{1}{4}a(16 - a^2) = -\frac{1}{4}a^2(4 - a) \times \frac{3}{2}$$

$$\text{これを解くと } a = 4, 8$$

$$a > 4 \text{ より } a = 8$$

以上から $a = 8$

(4) 直線ABの式は $y = -\frac{3}{2}x - 1$

(i) $AG = GE$ のとき

三平方の定理より

$$AG^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$GE^2 = a^2 + 1^2 = a^2 + 1$$

$AG = GE$ のとき、 $AG^2 = GE^2$ であるから

$$13 = a^2 + 1$$

$$a^2 = 12$$

$$a = \pm 2\sqrt{3}$$

$a > 0$ であるから $a = 2\sqrt{3}$

(ii) $AG = AE$ のとき

$$AG^2 = 13$$

$$AE^2 = (a + 2)^2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4 + 4$$

$$= a^2 + 4a + 8$$

$$\text{よって } 13 = a^2 + 4a + 8$$

$$a^2 + 4a - 5 = 0$$

$$(a - 1)(a + 5) = 0$$

$a > 0$ であるから $a = 1$

(iii) $AE = GE$ のとき

$$AE^2 = a^2 + 4a + 8$$

$$GE^2 = a^2 + 1$$

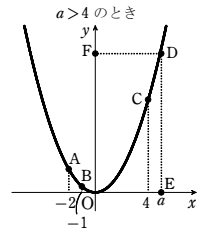
$$\text{よって } a^2 + 4a + 8 = a^2 + 1$$

$$4a = -7$$

$$a = -\frac{7}{4}$$

$a > 0$ であるから、これは問題に適さない。

(i), (ii), (iii)から $a = 1, 2\sqrt{3}$



10 [2014 筑波大学附属駒場]

解説

- (1) 線分 AG と線分 CE の交点を I, 点 I から面 EFGH

に下ろした垂線と面 EFGH, C-EFGH の共通部分で
できる立体は, 四角錐 I-EFGH である。
AE//GC であるから AI:IG=AE:CG

$$=6:6 \\ =1:1$$

AE//IJ であるから AE:IJ=AG:IG
6:IJ=(1+1):1
IJ=3(cm)

四角錐 I-EFGH の高さは IJ であるから, 求める
立体の体積は

$$\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3 = 36 (\text{cm}^3)$$

- (2) 線分 AG と面 CHF の交点を K, 点 K から面 DHFB

に下ろした垂線と面 DHFB の交点を L とする。
2つの三角錐 A-FGH, C-HEF の共通部分で
できる立体の体積は, 三角錐 K-IHF の2倍である。
△IHF を三角錐 K-IHF の底面とすると, 三角錐の
高さは KL である。

面 AEGC について考える。

IJ//CG であるから IK:KG=IJ:CG
=3:6
=1:2

ここで, △GEF において, 三平方の定理により

$$GE = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} (\text{cm})$$

よって, AE//IJ であるから

AE:IJ=GE:GJ
6:3=6\sqrt{2}:GJ
GJ=3\sqrt{2} (cm)

KL//GJ であるから KL:GJ=IK:IG

$$KL:3\sqrt{2}=1:(1+2) \\ KL=\sqrt{2} (\text{cm})$$

△HEF において, 三平方の定理により HF=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}

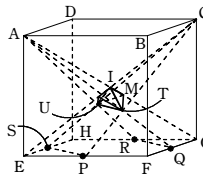
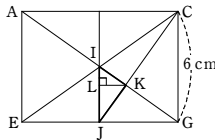
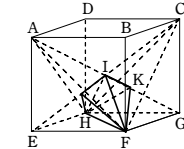
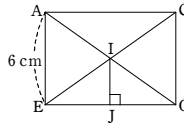
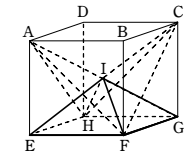
よって, 求める立体の体積は

$$2 \times \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3 \right) \times \sqrt{2} \right\} = 12 (\text{cm}^3)$$

- (3) 線分 AG と面 CSP の交点を M, 点 M から

面 DHFB に下ろした垂線と面 DHFB の交点を N
とする。また, 線分 AQ と線分 CP の交点を T,
線分 AR と線分 CS の交点を U とする。

2つの三角錐 A-GRQ, C-EPS の共通部分で
できる立体の体積は, 三角錐 M-IUT の2倍である。
△IUT を三角錐 M-IUT の底面とすると, 三角
錐の高さは MN である。



線分 TU, 線分 SP と面 AEGC の交点をそれぞれ V, W とする。

△SEP において, ES=EP=3 であるから, 三平方の定理により

$$SP = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} (\text{cm})$$

SP⊥EW であるから, △SEP の面積について

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times EW$$

$$EW = \frac{3\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$$

面 AEGC について考える。

VJ//CG であるから

$$VJ:CG=WJ:WG$$

$$VJ:6 = \left(3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) : \left(6 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$VJ=2 (\text{cm})$$

IV//CG であるから IM:MG=IV:CG
=(3-2):6
=1:6

NM//JG であるから NM:JG=IM:IG
NM:3\sqrt{2}=1:(1+6)

$$NM = \frac{3\sqrt{2}}{7} (\text{cm})$$

また, AC=GE=6\sqrt{2}, PQ=SP=3\sqrt{2} であるから

CT:TP=AC:PQ
=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}
=2:1

同様に, CU:US=6\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:1

面 CSP について, TU//PS であるから TU:PS=CT:CP
TU:3\sqrt{2}=2:(2+1)
TU=2\sqrt{2} (cm)

よって, 求める立体の体積は

$$2 \times \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 \right) \times \frac{3\sqrt{2}}{7} \right\} = \frac{4}{7} (\text{cm}^3)$$

11 [2014 東大寺学園]

解説

- (1) 図のように, 直線 l 上に点 P をとる。

△AFG と △BDF において

小さい方の円は直線 l に点 A で接しているから

$$\angle CAP = \angle AFG \quad \dots \text{①}$$

大きい方の円は直線 l に点 A で接しているから

$$\angle CAP = \angle BDF \quad \dots \text{②}$$

①, ②より

$$\angle AFG = \angle BDF \quad \dots \text{③}$$

小さい方の円は直線 CD に点 B で接しているから

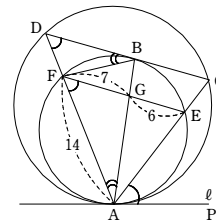
$$\angle FAG = \angle DBF \quad \dots \text{④}$$

③, ④より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFG \sim \triangle BDF$$

よって DF:DB=FG:FA=7:14=1:2

③より, DB//FG であるから, △AFG ∽ △ADB も成り立つ。



ここで, DF=x, DB=2x とおくと, AF:AD=FG:DB であるから

$$14:(14+x)=7:2x$$

よって, 7(14+x)=14×2x である。

$$\text{これを解いて } x = \frac{14}{3}$$

したがって, DF の長さは $\frac{14}{3}$

- (2) (1) の ③より, DB//FG で, DF=\frac{14}{3} であるから

$$AG:GB=AF:DF=14:\frac{14}{3}=3:1$$

AG=3k, GB=k (k>0) とおく。

△BGF と △EGA において,

対頂角は等しいから ∠BGF=∠EGA ……⑤

円周角の定理により ∠BFG=∠EAG ……⑥

⑤, ⑥より, 2組の角がそれぞれ等しいから △BGF ∽ △EGA

よって BG:EG=GF:GA

$$k:6=7:3k$$

$$3k^2=42$$

k^2=14 であり, k>0 より k=\sqrt{14}

したがって AG=3k=3\sqrt{14}

- (3) (1)より ∠FAG=∠DBF ……④

(1)の ③より, DB//FG であるから ∠DBF=∠BFE ……⑦

円周角の定理により ∠BFE=∠BAE ……⑧

⑦, ⑧より ∠DBF=∠BAE ……⑨

④, ⑨より ∠FAG=∠BAE

よって, AB は ∠DAC の二等分線となっている。

よって AF:AE=FG:GE=7:6

AF=14 であるから AE=12

A から FE に引いた垂線と FE の交点を H とする。

また, 線分 FH の長さを a とする。

直角三角形 AFH に三平方の定理を用いて

$$AH^2 = 14^2 - a^2 = 196 - a^2$$

直角三角形 AEH に三平方の定理を用いて

$$AH^2 = 12^2 - (13-a)^2 = -25 + 26a - a^2$$

196 - a^2 = -25 + 26a - a^2 より a = \frac{17}{2}

$$\text{よって } AH = \sqrt{196 - \left(\frac{17}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{55}}{2}$$

したがって, △AEF の面積は $\frac{1}{2} \times 13 \times \frac{3\sqrt{55}}{2} = \frac{39\sqrt{55}}{4}$

AG:GB=3:1 であるから, △BEF の面積は $\frac{1}{3} \times \triangle AEF = \frac{13\sqrt{55}}{4}$

以上により, 四角形 AEBF の面積は $\frac{39\sqrt{55}}{4} + \frac{13\sqrt{55}}{4} = 13\sqrt{55}$

