1

(1)　$y$ は $x^2$ に比例し，$x=-3$ のとき $y=54$ となる。このとき，$y$ を $x$ の式で表しなさい。

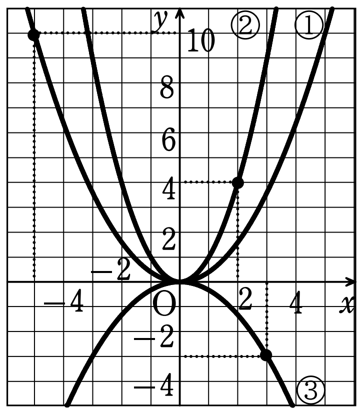
(2)　$y$ は $x^2$ に比例し，$x=4$ のとき $y=6$ となる。このとき，$y$ を $x$ の式で表しなさい。

(3)　$y$ は $x^2$ に比例し，$x=\sqrt{5}$ のとき $y=-2$ となる。このとき，$x=\frac{5}{2}$ のときの $y$ の値を求めなさい。

(4)　$y$ は $x^2$ に比例し，$x=-2$ のとき $y=-28$ となる。このとき，$y=-63$ となる $x$ の値をすべて求めなさい。

2

右の図の ① ～ ③ の曲線は，いずれも放物線である。次のものを求めなさい。




(1)　① ～ ③ のグラフの式

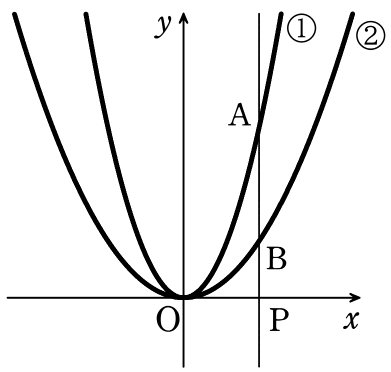
(2)　① について，$x=-6$ のときの $y$ の値

(3)　② について，$x=3$ のときの $y$ の値

(4)　③ について，$x=5$ のときの $y$ の値

3

右の図において，曲線 ①，② は，それぞれ関数 $y=ax^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。いま，$x$ 軸上の点 P を通り，$y$ 軸に平行な直線を引き，曲線 ①，② との交点をそれぞれ A，B とする。
AB＝2BP であるとき，$a$ の値を求めなさい。




4

関数 $y=ax^2$ について，定義域と値域が次のようになるときの定数 $a$ の値を求めなさい。

(1)　定義域が $-2\leqq x\leqq 1$，　値域が $0\leqq y\leqq 8$

(2)　定義域が $-3\leqq x\leqq 5$，　値域が $-10\leqq y\leqq 0$

5

(1)　定義域が $-4\leqq x\leqq 2$ である 2 つの関数 $y=3x^2$，$y=ax+b$ $(a<0)$ の値域が一致するような定数 $a$，$b$ の値を求めなさい。

(2)　定義域が $-\frac{4}{3}\leqq x\leqq 4$ である 2 つの関数 $y=ax^2$ $(a>0)$，$y=6x+b$ の値域が一致するような定数 $a$，$b$ の値を求めなさい。

6

2 次関数 $y=12x^2$ について，$x$ の定義域を $a-2\leqq x\leqq a$ とする。ただし，$a$ は定数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$a=-1$ のとき，$y$ の最小値と最大値を求めなさい。

(2)　$y$ の最小値が 0 になるとき，$a$ の値の範囲を求めなさい。

(3)　$a\geqq 1$ とする。$y$ の最大値と最小値の差が 36 となるとき，$a$ の値を求めなさい。

7

(1)　関数 $y=ax^2$ と 1 次関数 $y=-3x+2$ について，$x$ の値が $-3$ から 1 まで増加するときの変化の割合が一致する。このとき，定数 $a$ の値を求めなさい。

(2)　関数 $y=-3x^2$ と 1 次関数 $y=ax+4$ について，$x$ の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合が一致する。このとき，定数 $a$ の値を求めなさい。

(3)　関数 $y=4x^2$ と 1 次関数 $y=3x-1$ について，$x$ の値が $p-2$ から $p+2$ まで増加するときの変化の割合が一致する。このとき，定数 $p$ の値を求めなさい。

$\boxed{8}$

次の２つの関数のグラフについて，共有点の座標を求めなさい。

(1)　$y=x^2$，$y=x+6$　　(2)　$y=2x^2$，$y=-x+3$

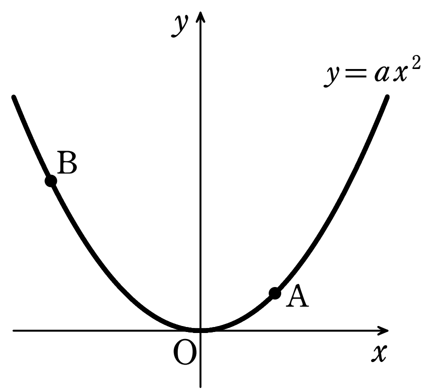
(3)　$y=-2x^2$，$y=-4x-8$　　(4)　$y=4x^2$，$y=4x-1$

$\boxed{9}$

右の図のように，放物線 $y=ax^2$ のグラフ上で，$x$ 座標が２の点を A，$-4$ の点を B とする。また，△OAB の面積を６とする。ただし，$a>0$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$a$ の値を求めなさい。

(2)　放物線上に O と異なる点 D をとり，△DAB の面積が △OAB の面積と等しくなるような点 D の $x$ 座標をすべて求めなさい。



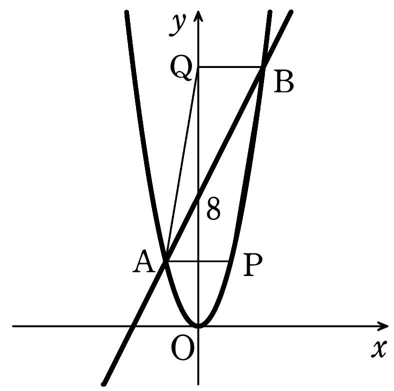

$\boxed{10}$

右の図のように，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+8$ が２点 A，B で交わっている。また，点 P は放物線 $y=x^2$ 上を A から B まで動く。四角形 APBQ が平行四辺形となるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　２点 A，B の座標を求めなさい。

(2)　原点 O と点 P を通る直線が直線 $y=2x+8$ に平行となるとき，点 Q の座標を求めなさい。

(3)　(2) のとき，平行四辺形 APBQ の面積を求めなさい。また，点 $(-9,\ 0)$ を通り，その面積を２等分する直線の式を求めなさい。

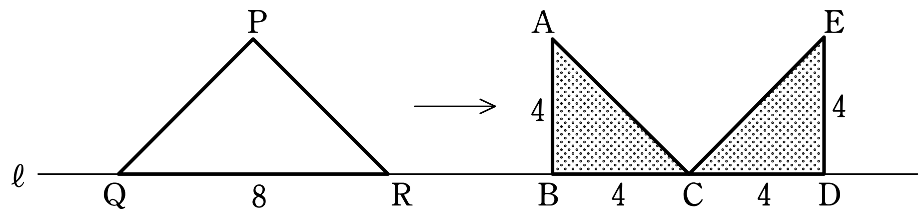



$\boxed{11}$

下の図のように，直角をはさむ２辺の長さが４cm である直角二等辺三角形を２つ合わせた図形 ABCDECA がある。いま，斜辺の長さが８cm である直角二等辺三角形 PQR を直線 $\ell$ にそって，矢印の方向に毎秒１cm の速さで動かしていく。点 R が点 B に重なってから $x$ 秒後の △PQR と図形 ABCDECA の重なった部分の面積を $y$ cm$^2$ とする。

(1)　$y$ を $x$ の式で表しなさい。

(2)　$y=5$ のとき，$x$ の値を求めなさい。



$\boxed{1}$

(解説)

(1) $y$ は $x^2$ に比例するから，$a$ を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=-3$ のとき $y=54$ であるから　$54=a\times(-3)^2$

よって　$a=6$　したがって　$y=6x^2$

(2) $y$ は $x^2$ に比例するから，$a$ を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=4$ のとき $y=6$ を代入すると　$6=a\times4^2$

よって　$a=\dfrac{3}{8}$　したがって　$y=\dfrac{3}{8}x^2$

(3) $y$ は $x^2$ に比例するから，$a$ を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=\sqrt{5}$ のとき $y=-2$ であるから　$-2=a\times(\sqrt{5})^2$

よって　$a=-\dfrac{2}{5}$　したがって　$y=-\dfrac{2}{5}x^2$

$x=\dfrac{5}{2}$ のとき　$y=-\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=-\dfrac{5}{2}$

(4) $y$ は $x^2$ に比例するから，$a$ を定数として，$y=ax^2$ と表すことができる。

$x=-2$ のとき $y=-28$ であるから　$-28=a\times(-2)^2$

よって　$a=-7$　したがって　$y=-7x^2$

$y=-63$ とすると　$-63=-7x^2$

よって　$x^2=9$　これを解くと　$x=\pm3$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) 求める式は $y=ax^2$ とおくことができる。

① グラフが点 $(-5,\ 10)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=-5$，$y=10$ を代入すると

$10=a\times(-5)^2$

よって　$a=\dfrac{2}{5}$

したがって　$y=\dfrac{2}{5}x^2$

② グラフが点 $(2,\ 4)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=2$，$y=4$ を代入すると

$4=a\times2^2$

よって　$a=1$

したがって　$y=x^2$

③ グラフが点 $(3,\ -3)$ を通るから，$y=ax^2$ に $x=3$，$y=-3$ を代入すると

$-3=a\times3^2$

よって　$a=-\dfrac{1}{3}$

したがって　$y=-\dfrac{1}{3}x^2$

(2) $y=\dfrac{2}{5}x^2$ に $x=-6$ を代入すると　$y=\dfrac{2}{5}\times(-6)^2=\dfrac{72}{5}$

(3) $y=x^2$ に $x=3$ を代入すると　$y=3^2=9$

(4) $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=5$ を代入すると　$y=-\dfrac{1}{3}\times5^2=-\dfrac{25}{3}$

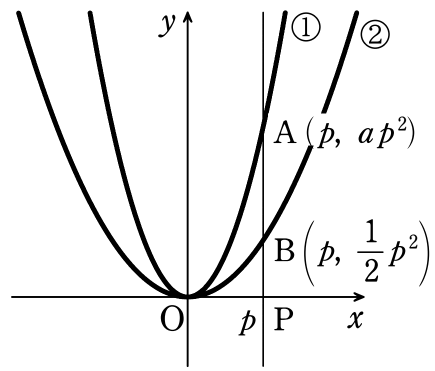
$\boxed{3}$

(解説)

P の座標を $(p,\ 0)$ とすると，

A の座標は　$(p,\ ap^2)$

B の座標は　$\left(p,\ \dfrac{1}{2}p^2\right)$




したがって

$\mathrm{AB}=ap^2-\dfrac{1}{2}p^2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)p^2$

$\mathrm{BP}=\dfrac{1}{2}p^2$

よって，AB＝2BP から　$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)p^2=2\times\dfrac{1}{2}p^2$

$p\neq0$ であるから　$a-\dfrac{1}{2}=1$

よって　$a=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$y$ の値の範囲が 0 以上であるから

$$a>0$$

$y=ax^2$ について

$x=-2$ のとき　$y=4a$

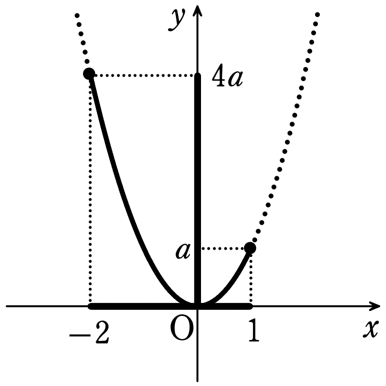
$x=1$　のとき　$y=a$

グラフから，値域は　$0 \leqq y \leqq 4a$

これが $0 \leqq y \leqq 8$ と等しいから

$$4a=8$$

よって　　$a=2$




(2)　$y$ の値の範囲が 0 以下であるから

$$a<0$$

$y=ax^2$ について

$x=-3$ のとき　$y=9a$

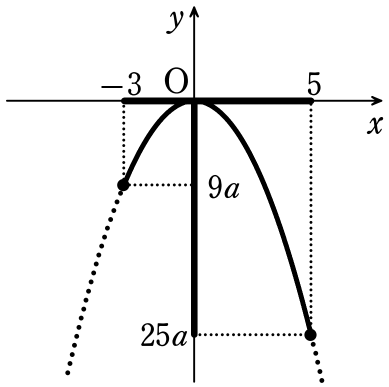
$x=5$　のとき　$y=25a$

グラフから，値域は　$25a \leqq y \leqq 0$

これが $-10 \leqq y \leqq 0$ と等しいから

$$25a=-10$$

よって　　$a=-\dfrac{2}{5}$




$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$y=3x^2$ について　　$x=-4$ のとき　$y=48$

$x=2$　のとき　$y=12$

グラフから，$y=3x^2$ $(-4 \leqq x \leqq 2)$ の値域は　　$0 \leqq y \leqq 48$

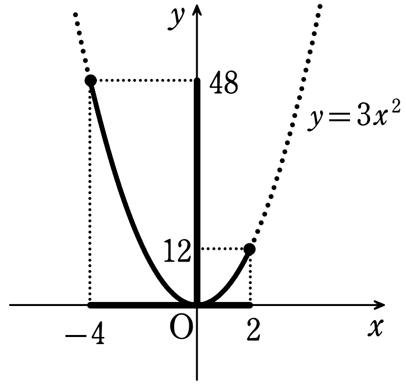
$a<0$ であるから，$y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線で

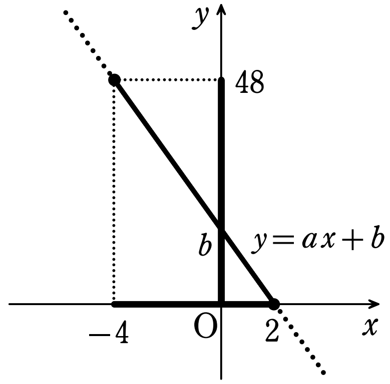
$x=-4$ のとき　$y=-4a+b$

$x=2$　のとき　$y=2a+b$

よって，条件から　　$-4a+b=48$，$2a+b=0$

これを解いて　　$a=-8$，$b=16$




(2)　$y=6x+b$ のグラフは右上がりの直線で

$x=-\dfrac{4}{3}$ のとき　$y=-8+b$

$x=4$　　のとき　$y=24+b$

よって，$y=6x+b$ $\left(-\dfrac{4}{3} \leqq x \leqq 4\right)$ の値域は　　$-8+b \leqq y \leqq 24+b$

$y=ax^2$ について

$x=-\dfrac{4}{3}$ のとき　$y=\dfrac{16}{9}a$

$x=4$　　のとき　$y=16a$

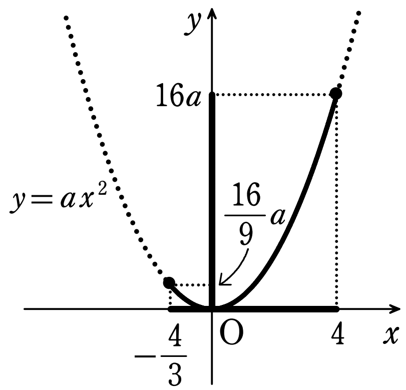
$a>0$ であるから，$y=ax^2$ $\left(-\dfrac{4}{3} \leqq x \leqq 4\right)$ の

値域は　　$0 \leqq y \leqq 16a$

よって，条件から

$-8+b=0$，$24+b=16a$

これを解いて　　$a=2$，$b=8$



$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$a=-1$ のとき，$x$ の定義域は

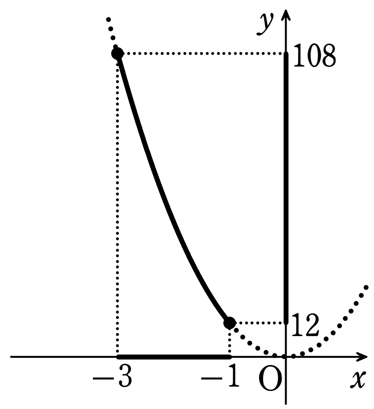
$$-3 \leqq x \leqq -1$$

$x=-1$ のとき，$y=12\times(-1)^2=12$

$x=-3$ のとき，$y=12\times(-3)^2=108$

$y=12x^2\,(-3 \leqq x \leqq -1)$ のグラフは，右の図のようになる。

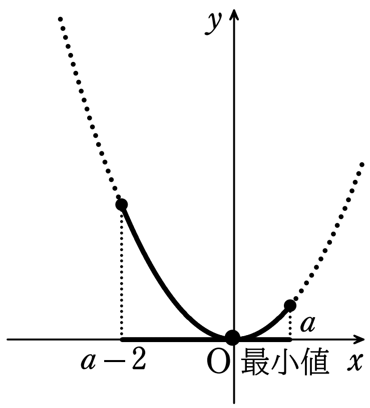
したがって，$y$ の最小値は 12，最大値は 108




(2)　$y$ の最小値が 0 になるのは，$x$ の定義域に 0 を含むときで，右の図 のように，$a-2$ が 0 以下で，$a$ が 0 以上であればよい。

すなわち　$a-2 \leqq 0$，$a \geqq 0$

よって　　$0 \leqq a \leqq 2$




(3)　$a \geqq 1$ であるから　$a-2 \geqq -1$

$x$ の定義域に 0 を含む場合と含まない場合に分けて考える。

[1]　$a>2$ のとき

$y=12x^2\ (a-2 \leqq x \leqq a)$ のグラフは右の図のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 $12a^2$，

$x=a-2$ で最小値 $12(a-2)^2$ をとる。

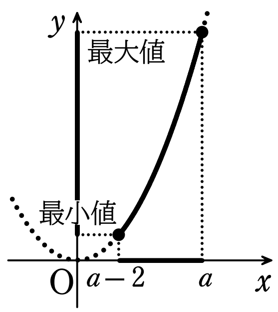
よって，$12a^2-12(a-2)^2=36$ とおくと

$$12a^2-12a^2+48a-48=36$$

$$48a=84$$

$$a=\frac{7}{4}$$

これは，$a>2$ を満たさないから適さない。




[2]　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$y=12x^2\ (a-2 \leqq x \leqq a)$ のグラフは右の図のようになる。

よって，最小値は 0 である。

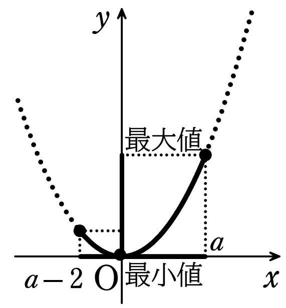
また，$x=a$ で最大値 $12a^2$ をとる。

よって，$12a^2-0=36$ とおくと

$$a^2=3$$

$$a=\pm\sqrt{3}$$

$1 \leqq a \leqq 2$ であるから　　$a=\sqrt{3}$




したがって，求める $a$ の値は　$a=\sqrt{3}$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$y=ax^2$ について

$x=-3$ のとき　$y=a\times(-3)^2=9a$

$x=1$　のとき　$y=a\times1^2=a$

よって，$x$ の値が $-3$ から $1$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{a-9a}{1-(-3)}=\frac{-8a}{4}=-2a$$

$y=-3x+2$ の変化の割合は，常に $-3$ である。

したがって　　$-2a=-3$

よって　$a=\frac{3}{2}$

(2)　$y=-3x^2$ について

$x=2$ のとき　$y=-3\times2^2=-12$

$x=5$ のとき　$y=-3\times5^2=-75$

よって，$x$ の値が $2$ から $5$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-75-(-12)}{5-2}=\frac{-63}{3}=-21$$

$y=ax+4$ の変化の割合は，常に $a$ である。

したがって　　$a=-21$

(3)　$y=4x^2$ について

$x=p-2$ のとき　$y=4(p-2)^2$

$x=p+2$ のとき　$y=4(p+2)^2$

よって，$x$ の値が $p-2$ から $p+2$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{4(p+2)^2-4(p-2)^2}{(p+2)-(p-2)}=\frac{32p}{4}=8p$$

$y=3x-1$ の変化の割合は，常に $3$ である。

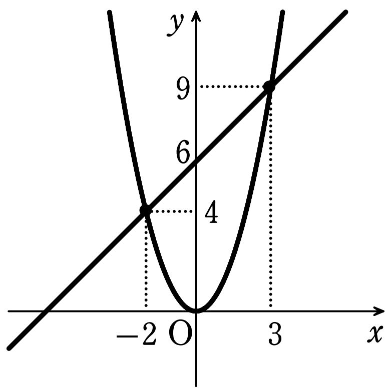
したがって　　$8p=3$

よって　$p=\frac{3}{8}$

$\boxed{8}$

解説

(1) $\begin{cases} y=x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=x+6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$




①，② から $y$ を消去すると

$$x^2=x+6$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$

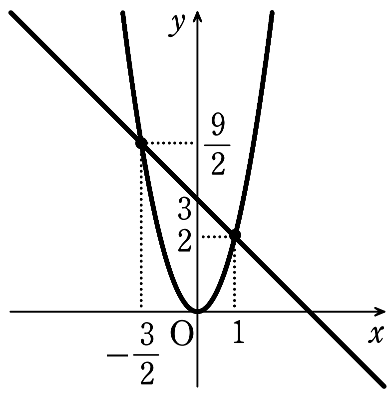
よって　$x=-2,\ 3$

② から，$x=-2$ のとき　$y=4$

$x=3$　のとき　$y=9$

したがって，共有点の座標は　$(-2,\ 4)$，$(3,\ 9)$

(2) $\begin{cases} y=2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$




①，② から $y$ を消去すると

$$2x^2=-x+3$$
$$2x^2+x-3=0$$
$$(x-1)(2x+3)=0$$

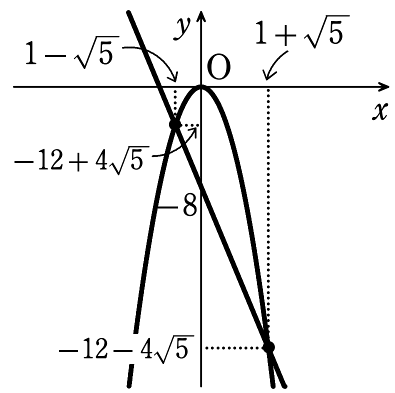
よって　$x=1,\ -\dfrac{3}{2}$

② から，$x=1$ のとき　$y=2$

$x=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$y=\dfrac{9}{2}$

したがって，共有点の座標は　$(1,\ 2)$，$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$

(3) $\begin{cases} y=-2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=-4x-8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$




①，② から $y$ を消去すると

$$-2x^2=-4x-8$$
$$-2x^2+4x+8=0$$
$$x^2-2x-4=0$$

これを解くと　$x=1\pm\sqrt{5}$

② から，$x=1+\sqrt{5}$ のとき

$$y=-4(1+\sqrt{5})-8=-12-4\sqrt{5}$$

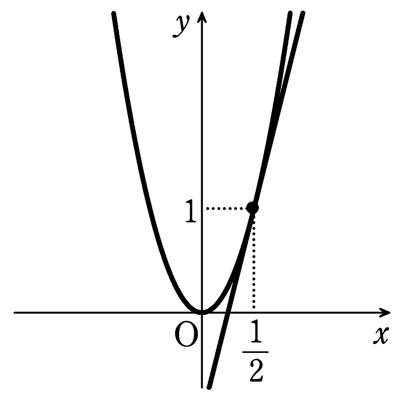
$x=1-\sqrt{5}$ のとき

$$y=-4(1-\sqrt{5})-8=-12+4\sqrt{5}$$

したがって，共有点の座標は

$(1+\sqrt{5},\ -12-4\sqrt{5})$，$(1-\sqrt{5},\ -12+4\sqrt{5})$

(4) $\begin{cases} y=4x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=4x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$




①，② から $y$ を消去すると

$$4x^2=4x-1$$
$$4x^2-4x+1=0$$
$$(2x-1)^2=0$$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$

② から，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=1$

したがって，共有点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　点 A，B はともに放物線 $y=ax^2$ 上にあるから，

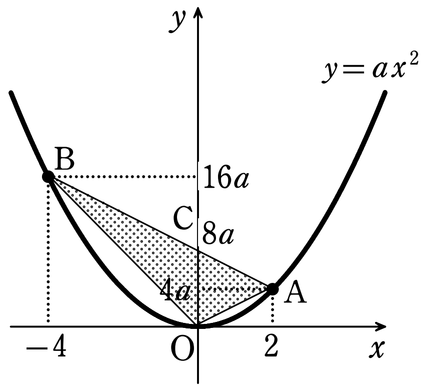
その座標は　A$(2,\ 4a)$，B$(-4,\ 16a)$

直線 AB は，傾きが $\dfrac{4a-16a}{2-(-4)}=-2a$ であるから，

式を $y=-2ax+b$ とおくと，点 A を通るから

$$4a=-4a+b$$
$$b=8a$$

よって，直線 AB と $y$ 軸の交点を C とすると，点 C の $y$ 座標は　$8a$




△OAB の面積について

$$\frac{1}{2}\times 8a\times 2+\frac{1}{2}\times 8a\times 4=6$$

よって　$24a=6$　　したがって　$a=\dfrac{1}{4}$

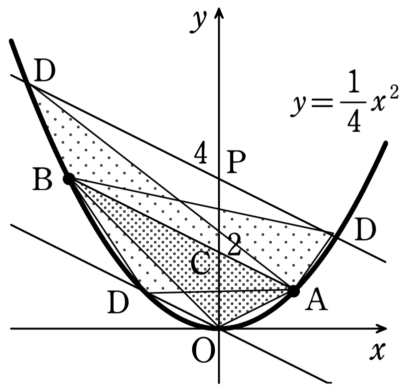
(2)　(1)から，直線 AB の式は　$y=-\dfrac{1}{2}x+2$

点 O を通り，直線 AB に平行な直線 $y=-\dfrac{1}{2}x$

と，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の交点を D とすると，

△DAB＝△OAB である。

このとき，点 D の $x$ 座標は $\dfrac{1}{4}x^2=-\dfrac{1}{2}x$ の解で表される。




よって　$x^2+2x=0$

これを解くと　$x=0,\ -2$

点 D の $x$ 座標は 0 以外であるから　$x=-2$

また，$y$ 軸上に OC＝PC となる点 P$(0,\ 4)$ をとると，△PAB＝△OAB であるから，

点 P を通り，直線 AB に平行な直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ の交点を D とすると，△DAB＝△OAB である。

このとき，点 D の $x$ 座標は $\dfrac{1}{4}x^2=-\dfrac{1}{2}x+4$ の解で表される。

よって　$x^2+2x-16=0$

これを解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-16)}}{2\times 1}=-1\pm\sqrt{17}$$

したがって，点 D の $x$ 座標は　$-2,\ -1\pm\sqrt{17}$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+8$ の交点の $x$ 座標は，方程式 $x^2=2x+8$ の解である。

これを解くと　　$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

よって　　$x=-2,\ 4$

$x=-2$ のとき　$y=4$，　$x=4$ のとき　$y=16$

したがって，A の座標は $(-2,\ 4)$，B の座標は $(4,\ 16)$

(2)　直線 OP の式は $y=2x$ である。

方程式 $x^2=2x$ を解くと　　$x=0,\ 2$

よって，点 P の座標は　　$(2,\ 4)$

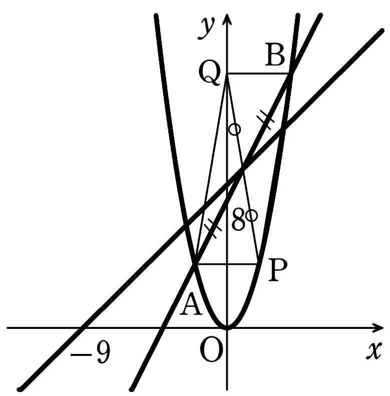
平行四辺形 APBQ においては，点 P から点 A への移動と，点 B から点 Q への移動は，同じ移動である。

点 P から点 A への移動は，左に 4 の移動である。

よって，点 Q の座標は

$(4-4,\ 16)$　すなわち　$(0,\ 16)$

(3)　(2) のとき　　$\mathrm{AP}=2-(-2)=4$




平行四辺形 APBQ の底辺を AP とみると，高さは

$16-4=12$

よって，平行四辺形 APBQ の面積は

$\mathrm{AP}\times 12=4\times 12=48$

点 $(-9,\ 0)$ を通り，この面積を 2 等分する直線の式を　$y=ax+b$　……①　とおく。

平行四辺形は，対角線の交点を通る直線によって面積を 2 等分される。

また，対角線は，それぞれの中点で交わる。

対角線 PQ の中点の座標は　$\left(\dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{4+16}{2}\right)$

すなわち　　$(1,\ 10)$

よって，直線 ① は 2 点 $(-9,\ 0)$，$(1,\ 10)$ を通るから

$0=-9a+b$，$10=a+b$

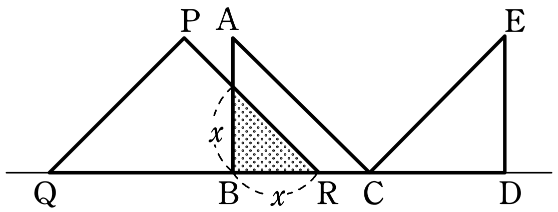
これを解いて　　$a=1$，$b=9$

したがって，求める直線の式は　$y=x+9$

$\boxed{11}$

(解説)

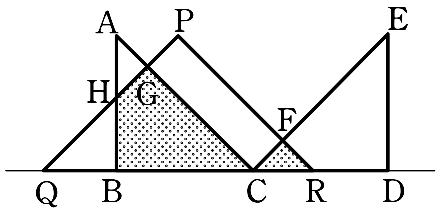
(1) [1] 点 R が辺 BC 上にあるとき，重なった部分は等辺が $x$ cm の直角二等辺三角形になる。




よって，$0 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$$

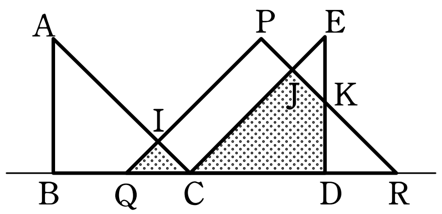
[2] 点 R が辺 CD 上にあるとき，右の図のように点 F，G，H をとると，△FCR≡△GAH となるから，重なった部分の面積は △ABC の面積に等しい。




よって，$4 \leqq x \leqq 8$ のとき

$$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$$

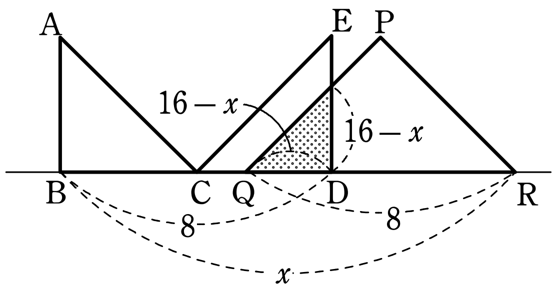
[3] 点 Q が辺 BC 上にあるとき，右の図のように点 I，J，K をとると，△IQC≡△JKE であるから，重なった部分の面積は △CDE の面積に等しい。




よって，$8 \leqq x \leqq 12$ のとき

$$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$$

[4] 点 Q が辺 CD 上にあるとき，重なった部分は等辺の長さが $(16-x)$ cm の直角二等辺三角形になる。

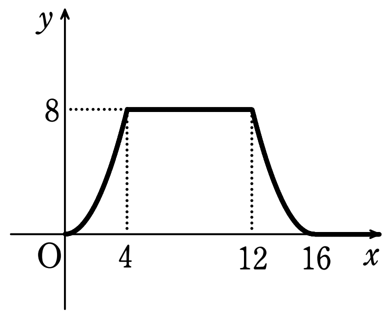



よって，$12 \leqq x \leqq 16$ のとき

$$y=\frac{1}{2}\times(16-x)\times(16-x)$$
$$=\frac{1}{2}(16-x)^2$$

したがって
$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (0\leqq x\leqq 4)\\ 8 & (4\leqq x\leqq 12)\\ \frac{1}{2}(16-x)^2 & (12\leqq x\leqq 16)\\ 0 & (16\leqq x)\end{cases}$$

(参考) この関数のグラフは右の図のようになる。




(2) [1] $0 \leqq x \leqq 4$ のとき　$y=5$ とすると　$5=\frac{1}{2}x^2$

よって　$x^2=10$　したがって　$x=\pm\sqrt{10}$

$0 \leqq x \leqq 4$ であるから　$x=\sqrt{10}$

[2] $12 \leqq x \leqq 16$ のとき　$y=5$ とすると　$5=\frac{1}{2}(16-x)^2$

これを解くと　$(16-x)^2=10$

$16-x=\pm\sqrt{10}$

よって　$x=16\pm\sqrt{10}$

$12 \leqq x \leqq 16$ であるから　$x=16-\sqrt{10}$

[3] $4 \leqq x \leqq 12$，$16 \leqq x$ のときは $y=5$ とならない。

したがって　$x=\sqrt{10}$，$16-\sqrt{10}$