

第2章～複素数と方程式～ 第1講 例題

1

【解答】 (1) $2-4i$ (2) $-3+11i$ (3) $-1-4i$ (4) $17-\sqrt{5}i$ (5) $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

【解説】

(1) $(-3+2i)+(5-6i)=(-3+5)+(2-6)i=2-4i$

(2) $(5-i)(-1+2i)=-5+10i+i-2i^2$
 $=-5+11i-2\cdot(-1)$
 $=-3+11i$

(3) $i(-2+i)+(1-i)^2=(-2+i^2)+(1-2i+i^2)$
 $=-1-4i+2i^2=1-4i+2\cdot(-1)$
 $=-1-4i$

(4) $(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(4+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)$
 $=12-\sqrt{5}i-5i^2=17-\sqrt{5}i$

(5) $\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i-4i-2i^2}{4-i^2}$
 $=\frac{2-3i+2}{4+1}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

2

【解答】 (1) $x=6, y=-7$ (2) $x=-3$

【解説】

(1) 与えられた等式を変形すると

$$(2x+3y)+(x-2y)i=-9+20i$$

x, y は実数であるから, $2x+3y, x-2y$ も実数である。

よって $2x+3y=-9, x-2y=20$

これを解いて $x=6, y=-7$

(2) 等式を整理すると

$$(3x^2+8x-3)+(2x^2+5x-3)i=0$$

x が実数のとき, $3x^2+8x-3, 2x^2+5x-3$ は実数であるから

$$3x^2+8x-3=0 \quad \dots\dots ①$$

$$2x^2+5x-3=0 \quad \dots\dots ②$$

①, ② をともに満たす実数 x を求めればよい。

① から $(x+3)(3x-1)=0$ これを解いて $x=-3, \frac{1}{3}$

② から $(x+3)(2x-1)=0$ これを解いて $x=-3, \frac{1}{2}$

したがって, 求める x の値は $x=-3$

3

【解答】 $a=-2, b=-3$

【解説】

$$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$$

これが純虚数であるとき $a+2=0$ かつ $b-3 \neq 0$

よって $a=-2$ かつ $b \neq 3$

このとき

$$(a+bi)(2-3i)=(-2+bi)(2-3i)=-4+6i+2bi-3bi^2=(-4+3b)+2(b+3)i$$

これが実数であるとき $2(b+3)=0$

よって $b=-3$ これは $b \neq 3$ を満たす。

以上から $a=-2, b=-3$

4

【解答】 (1) $x=\pm 2\sqrt{6}i$ (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{6}i}{2}$

【解説】

(1) $2x^2+48=0$ から $x^2=-24$

よって $x=\pm\sqrt{-24}=\pm\sqrt{24}i=\pm 2\sqrt{6}i$

(2) 方程式の両辺を3で割ると $2x^2-4x+5=0$

よって $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot 5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{6}i}{2}$

5

【解答】 (前半) $a=-4, b=13$ (後半) 証明略

【解説】

$x^2+ax+b=0$ に $x=2+3i$ を代入すると

$$(2+3i)^2+a(2+3i)+b=0$$

整理すると $(-5+2a+b)+(3a+12)i=0$

a, b は実数であるから, $-5+2a+b, 3a+12$ も実数である。

よって $-5+2a+b=0, 3a+12=0$

これを解いて $a=-4, b=13$

よって $x^2+ax+b=x^2-4x+13$

この式に $x=2-3i$ を代入すると

$$(2-3i)^2-4(2-3i)+13=-5-12i-8+12i+13=0$$

よって, $x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

【別解】 (後半) $x^2-4x+13=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 13}}{2}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$

よって, $x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

【参考】 a, b の値を求めなくとも $x=2+3i$ が解ならば $x=2-3i$ も解であることを示すことができる。

$x=2+3i$ が方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるから, 代入して

$$-5+2a+b=0 \quad \dots\dots ①, 3a+12=0 \quad \dots\dots ②$$

が得られる。

$x=2-3i$ を方程式の左辺に代入すると

$$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=(-5+2a+b)-(3a+12)i$$

①, ② から $(-5+2a+b)-(3a+12)i=0$ よって $(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$

よって $x=2-3i$ も元の方程式の解である。

6

【解答】 $1+12\sqrt{2}i$

【解説】

$x=1-\sqrt{2}i$ から $x-1=-\sqrt{2}i$

両辺を2乗して $(x-1)^2=-2$

これを整理して $x^2-2x+3=0 \quad \dots\dots ①$

$3x^3-8x^2+x+7$ を x^2-2x+3 で割ると

$$\begin{array}{r} 3x-2 \\ x^2-2x+3 \overline{) 3x^3-8x^2+x+7} \\ \underline{3x^3-6x^2+9x} \\ -2x^2-8x+7 \\ \underline{-2x^2+4x-6} \\ -12x+13 \end{array}$$

よって $3x^3-8x^2+x+7=(x^2-2x+3)(3x-2)-12x+13$

① と $x=1-\sqrt{2}i$ を代入して

$$\begin{aligned} 3x^3-8x^2+x+7 &= 0-12(1-\sqrt{2}i)+13 \\ &= 1+12\sqrt{2}i \end{aligned}$$

【別解】 $x^2-2x+3=0$ から $x^2=2x-3$

よって $3x^3-8x^2+x+7=3x(2x-3)-8(2x-3)+x+7$

$$\begin{aligned} &= 6x^2-24x+31 \\ &= 6(2x-3)-24x+31 \\ &= -12x+13 \\ &= -12(1-\sqrt{2}i)+13 \\ &= 1+12\sqrt{2}i \end{aligned}$$

第1講 例題演習

1

【解答】 (1) $1+7i$ (2) $3+4i$ (3) $11+\sqrt{5}i$ (4) $-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$ (5) 2

【解説】

(1) $(4+5i)-(3-2i)=4+5i-3+2i=(4-3)+(5+2)i=1+7i$

(2) $(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i+(-1)=3+4i$

(3) $(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(2+\sqrt{5}i)(3-\sqrt{5}i)$
 $=2\cdot 3-2\sqrt{5}i+3\sqrt{5}i-(\sqrt{5})^2i^2$
 $=6+\sqrt{5}i-5\cdot(-1)=11+\sqrt{5}i$

(4) $\frac{2+5i}{3-2i}=\frac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\frac{6+19i+10\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}$
 $=\frac{-4+19i}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$

(5) $\frac{3+2i}{2+i}-\frac{i}{1-2i}=\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$
 $=\frac{6-3i+4i-2i^2}{4-i^2}-\frac{i+2i^2}{1-4i^2}$
 $=\frac{6+i-2\cdot(-1)}{4-(-1)}-\frac{i+2\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}$
 $=\frac{8+i}{5}-\frac{i-2}{5}=\frac{10}{5}=2$

2

【解答】 (1) $x=-2, y=1$ (2) $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$ (3) $x=2$

【解説】

(1) 与式から $4x+y+7+2(x+2y)i=0$
 x, y は実数であるから, $4x+y+7$ と $2(x+2y)$ も実数である。
 よって $4x+y+7=0$ ……①, $x+2y=0$ ……②
 ①, ② を連立して解くと $x=-2, y=1$

(2) 与式から $x+2yi=\frac{3-2i}{1+i}$
 $\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-5i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3-5i-2}{1+1}=\frac{1-5i}{2}$

であるから $x+2yi=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
 $x, 2y$ は実数であるから $x=\frac{1}{2}, 2y=-\frac{5}{2}$

よって $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$

【別解】 (左辺) $=x+xi+2yi+2yi^2=x-2y+(x+2y)i$

ゆえに $x-2y+(x+2y)i=3-2i$
 x, y は実数であるから, $x-2y$ と $x+2y$ も実数である。
 よって $x-2y=3, x+2y=-2$

これを解いて $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$

(3) 与式を整理すると $x^2-x-2+(x^2-3x+2)i=0$
 x は実数であるから, x^2-x-2, x^2-3x+2 は実数である。
 よって $x^2-x-2=0$ ……①

$x^2-3x+2=0$ ……②

①から $(x+1)(x-2)=0$ ゆえに $x=-1, 2$

②から $(x-1)(x-2)=0$ ゆえに $x=1, 2$

①, ② をともに満たす x の値が求める解で $x=2$

3

【解答】 $x=-2, y=-3$

【解説】

$(x+yi)+(2-3i)=(x+2)+(y-3)i$
 和が純虚数であるから $x+2=0$ かつ $y-3=0$

よって $x=-2$ かつ $y=3$

このとき

$(x+yi)(2-3i)=(-2+yi)(2-3i)=-4+6i+2yi-3y^2$
 $=(-4+3y)+2(y+3)i$

積が実数であるから $2(y+3)=0$

よって $y=-3$ これは, $y=3$ を満たす。

以上から $x=-2, y=-3$

4

【解答】 (1) $x=\pm\frac{2}{3}i$ (2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$ (4) $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

【解説】

(1) $9x^2+4=0$ から $x^2=-\frac{4}{9}$

よって $x=\pm\sqrt{-\frac{4}{9}}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}i=\pm\frac{2}{3}i$

(2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) 両辺に -1 を掛けると $3x^2-x-5=0$

よって $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$

(4) $x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-5}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}i}{2}$

5

【解答】 $a=-4, b=13, x=2+3i$

【解説】

$x=2-3i$ がこの方程式の解であるから

$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$

よって $4-12i+9i^2+2a-3ai+b=0$

ゆえに $(2a+b-5)+(-3a-12)i=0$

a, b は実数であるから, $2a+b-5, -3a-12$ も実数である。

よって $2a+b-5=0, -3a-12=0$

これを解いて $a=-4, b=13$

このとき, 方程式は $x^2-4x+13=0$

これを解いて $x=2\pm 3i$

よって, 求める他の解は $x=2+3i$

6

【解答】 $10+2\sqrt{2}i$

【解説】

$P(x)=x^4-4x^3+2x^2+6x-7$ とおく。

$x=1+\sqrt{2}i$ から $x-1=\sqrt{2}i$

両辺を2乗して $(x-1)^2=-2$

整理すると $x^2-2x+3=0$ ……①

$P(x)$ を x^2-2x+3 で割ると, 右のようになり

商 x^2-2x-5 , 余り $2x+8$

である。よって

$P(x)=(x^2-2x+3)(x^2-2x-5)+2x+8$

$x=1+\sqrt{2}i$ のとき, ①から

$P(1+\sqrt{2}i)=0+2(1+\sqrt{2}i)+8=10+2\sqrt{2}i$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad -5 \\ 1 \quad -2 \quad 3 \overline{) 1 \quad -4 \quad 2 \quad 6 \quad -7} \\ \underline{1 \quad -2 \quad 3} \\ -2 \quad -1 \quad 6 \\ \underline{-2 \quad 4 \quad -6} \\ -5 \quad 12 \quad -7 \\ \underline{-5 \quad 10 \quad -15} \\ 2 \quad 8 \end{array}$$

第1講 レベルA

1

【解答】 (1) $5-i$ (2) $-\sqrt{6}(43+15i)$ (3) $\frac{66-213i}{221}$ (4) -1 (5) 1

【解説】

$$(1) \frac{(3-2i)(1+5i)}{2+3i} = \frac{3+13i-10i^2}{2+3i} = \frac{13(1+i)}{2+3i}$$

$$= \frac{13(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13(2-i-3i^2)}{4-9i^2} = 5-i$$

$$(2) (\sqrt{-50}-\sqrt{72})(\sqrt{27}+\sqrt{-75}) = (5\sqrt{2}i-6\sqrt{2})(3\sqrt{3}+5\sqrt{3}i)$$

$$= \sqrt{2}(5i-6) \times \sqrt{3}(3+5i)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{3}(-6+5i)(3+5i)$$

$$= \sqrt{6}(-18-15i+25i^2)$$

$$= -\sqrt{6}(43+15i)$$

$$(3) \frac{4-i}{3+2i} - \frac{2}{4-i} = \frac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} - \frac{2(4+i)}{(4-i)(4+i)}$$

$$= \frac{12-11i+2i^2}{9-4i^2} - \frac{8+2i}{16-i^2} = \frac{10-11i}{13} - \frac{8+2i}{17}$$

$$= \frac{17(10-11i)-13(8+2i)}{221} = \frac{66-213i}{221}$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i^2} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$$

よって $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2 = \frac{2(1-i)^2}{4} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$

ゆえに $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$

【別解】 $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2 = \left\{\frac{2(1-i)^2}{4}\right\}^2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{i}\right)^2 = \frac{1}{i^2} = -1$

$$(5) \frac{1}{\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}} = \frac{(1+i)(1-i)}{\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right)(1+i)(1-i)} = \frac{1-i^2}{(1-i)+(1+i)} = \frac{2}{2} = 1$$

2

【解答】 (ア) 0 (イ) $-1+i$

【解説】

$$i+i^2+i^3+i^4 = i+(-1)+(-i)+1 = 7^0$$

$$i+i^2+i^3+i^4 + \dots + i^{30}$$

$$= (i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) + \dots + i^{24}(i+i^2+i^3+i^4) + i^{28}(i+i^2)$$

$$= i^{28}(i+i^2) = (i^4)^7(i-1) = (-1)^7(-1) = 1$$

3

【解答】 $3+2i, -3-2i$

【解説】

求める複素数を $a+bi$ (a, b は実数) とすると $(a+bi)^2 = 5+12i$

整理して $a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$

$a^2 - b^2, 2ab$ は実数であるから $a^2 - b^2 = 5, 2ab = 12$

よって $a^2 - b^2 = 5 \dots\dots ①, ab = 6 \dots\dots ②$

②の両辺を2乗して $a^2b^2 = 36 \dots\dots ③$

①から $a^2 = b^2 + 5$ これを③に代入して $(b^2 + 5)b^2 = 36$

ゆえに $b^4 + 5b^2 - 36 = 0$ すなわち $(b^2 + 9)(b^2 - 4) = 0$

$b^2 \geq 0$ であるから $b^2 = 4$ よって $b = \pm 2$

②から $b = 2$ のとき $a = 3, b = -2$ のとき $a = -3$

したがって、求める複素数は $3+2i, -3-2i$

4

【解答】 (1) $x=4, y=-2$ (2) $-\frac{7}{5} - \frac{16}{5}i$

【解説】

$$(1) i^{30} + i^{65} = (i^2)^{15} + (i^2)^{32} \cdot i = (-1)^{15} + (-1)^{32} \cdot i = -1 + i$$

ゆえに、 $(-1+i)(x+yi) = -2+6i$ から

$$x+yi = \frac{-2-6i}{-1-i} = \frac{2(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2(1-3i)(1+i)}{1+1} = 1-2i-3i^2$$

$$= 4-2i$$

x, y は実数であるから $x=4, y=-2$

$$(2) \frac{x+yi}{i} + \frac{x-yi}{x+yi} = \frac{(x+yi)i}{i^2} + \frac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}$$

$$= y-xi + \frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$$

$$= -2-4i + \frac{4^2 - (-2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot (-2)i}{4^2 + (-2)^2}$$

$$= -2-4i + \frac{3+4i}{5}$$

$$= -\frac{7}{5} - \frac{16}{5}i$$

5

【解答】 (1) $k \leq \frac{1}{2}, 2 \leq k$

(2) $k = \frac{1}{2}$ のとき、重解は $x = \frac{1}{2}$; $k = 2$ のとき、重解は $x = -1$

【解説】

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 1 \cdot (-k^2 + 3k - 1) = k^2 - 2k + 1 + k^2 - 3k + 1$$

$$= 2k^2 - 5k + 2 = (2k-1)(k-2)$$

(1) 実数解をもつための条件は $D \geq 0$

よって $(2k-1)(k-2) \geq 0$ ゆえに $k \leq \frac{1}{2}, 2 \leq k$

(2) 重解をもつための条件は $D = 0$

よって $(2k-1)(k-2) = 0$ ゆえに $k = \frac{1}{2}, 2$

また、重解は $x = -\frac{2(k-1)}{2 \cdot 1} = 1-k$

したがって $k = \frac{1}{2}$ のとき、重解は $x = \frac{1}{2}$

$k = 2$ のとき、重解は $x = -1$

【別解】 (後半) $k = \frac{1}{2}$ のとき、方程式は $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

これを解いて $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ よって $x = \frac{1}{2}$

$k = 2$ のとき、方程式は $x^2 + 2x + 1 = 0$

これを解いて $(x+1)^2 = 0$ よって $x = -1$

6

【解答】 $\frac{4}{3} \leq a \leq 4$

【解説】

$$\begin{cases} x+y-a+4=0 & \dots\dots ① \\ x^2+y^2+a^2-4a=0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①から $y = -x + a - 4 \dots\dots ①'$

これを②に代入して $x^2 + (-x + a - 4)^2 + a^2 - 4a = 0$

よって $x^2 - (a-4)x + a^2 - 6a + 8 = 0 \dots\dots ③$

x の方程式③が実数解をもてば、①'から、 y も実数となる。

③の判別式を D とすると

$$D = [-(a-4)]^2 - 4(a^2 - 6a + 8) = -3a^2 + 16a - 16$$

$$= -(3a^2 - 16a + 16) = -(3a-4)(a-4)$$

求める条件は $D \geq 0$ すなわち $(3a-4)(a-4) \leq 0$

したがって $\frac{4}{3} \leq a \leq 4$

1

解答 $k = -4$

解説

方程式の実数解を α とすると

$$(1+i)\alpha^2 + (k+i)\alpha + 3+3ki = 0$$

整理して $(\alpha^2 + k\alpha + 3) + (\alpha^2 + \alpha + 3k)i = 0$

α, k は実数であるから, $\alpha^2 + k\alpha + 3, \alpha^2 + \alpha + 3k$ も実数.

よって $\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \dots\dots ①$

$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \dots\dots ②$

①-② から $(k-1)\alpha - 3(k-1) = 0$

ゆえに $(k-1)(\alpha-3) = 0$

よって $k=1$ または $\alpha=3$

[1] $k=1$ のとき

①, ② はともに $\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$ となる.

これを満たす実数 α は存在しないから, 不適.

[2] $\alpha=3$ のとき

①, ② はともに $12 + 3k = 0$ となる.

ゆえに $k = -4$

[1], [2] から, 求める k の値は $k = -4$

2

解答 $2 \leq b \leq 6$

解説

実数解をもつための条件は, 判別式 D について

$$D = (8-a)^2 - 4(12-ab) \geq 0$$

すなわち $a^2 + 4(b-4)a + 16 \geq 0 \dots\dots [A]$

a についての2次方程式 $a^2 + 4(b-4)a + 16 = 0$ の判別式を D_1 とすると, [A] がすべての実数 a に対して成り立つための条件は, a^2 の係数が正であるから $D_1 \leq 0$

$$\frac{D_1}{4} = 4(b-4)^2 - 16 = 4[(b-4)^2 - 4] = 4(b-2)(b-6)$$

であるから, $(b-2)(b-6) \leq 0$ を解いて $2 \leq b \leq 6$

3

解答 8個

解説

2次方程式 $x^2 - ax + 3 = 0, x^2 + ax + 2a = 0$ の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = (a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})$$

$$D_2 = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = a(a-8)$$

2つの2次方程式の一方が実数解をもち, 他方が虚数解をもつための条件は

「 $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 < 0$ 」 または 「 $D_1 < 0$ かつ $D_2 \geq 0$ 」

[1] $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 < 0$ のとき

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) \geq 0 \text{ かつ } a(a-8) < 0$$

よって $(a \leq -2\sqrt{3} \text{ または } 2\sqrt{3} \leq a) \text{ かつ } 0 < a < 8$

ゆえに $2\sqrt{3} \leq a < 8$

a は整数であるから

$$a = 4, 5, 6, 7$$

[2] $D_1 < 0$ かつ $D_2 \geq 0$ のとき

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) < 0 \text{ かつ } a(a-8) \geq 0$$

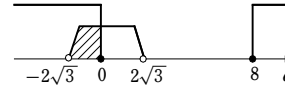
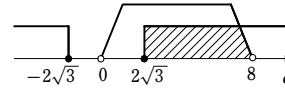
よって $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$ かつ $(a \leq 0 \text{ または } 8 \leq a)$

ゆえに $-2\sqrt{3} < a \leq 0$

a は整数であるから

$$a = -3, -2, -1, 0$$

[1], [2] から, 求める a の個数は 8個



1

解答 (1) $-\frac{8}{9}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{28}{9}$ (4) $-\frac{7}{3}$ (5) $\frac{52}{9}$ (6) $\frac{80}{27}$

解説

解と係数の関係から $\alpha + \beta = \frac{2}{3}, \alpha\beta = -\frac{4}{3}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2/3}{-4/3} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{8}{3} = \frac{28}{9}$

(4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{28}{9} \div \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{3}$

(5) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta = \frac{28}{9} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{28}{9} + \frac{8}{3} = \frac{52}{9}$

(6) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} + \frac{8}{3} = \frac{80}{27}$

別解 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \frac{2}{3} \left[\frac{28}{9} - \left(-\frac{4}{3}\right) \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{40}{9} = \frac{80}{27}$

2

解答 (1) $k = 32; 4, 8$ (2) $k = 27$ のとき $3, 9; k = -64$ のとき $-4, 16$

解説

(1) 1つの解が他の解の2倍であるから, 2つの解は $\alpha, 2\alpha$ と表すことができる.

解と係数の関係から

$$\alpha + 2\alpha = 12 \dots\dots ①, \alpha \cdot 2\alpha = k \dots\dots ②$$

① から $\alpha = 4$ これを②に代入して $k = 32$

また, 他の解は $2\alpha = 8$

よって $k = 32$, 2つの解は $4, 8$

(2) 1つの解が他の解の2乗であるから, 2つの解は α, α^2 と表すことができる.

解と係数の関係から

$$\alpha + \alpha^2 = 12 \dots\dots ①, \alpha \cdot \alpha^2 = k \dots\dots ②$$

① から $\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$ よって $(\alpha + 4)(\alpha - 3) = 0$

ゆえに $\alpha = -4, 3$

$\alpha = -4$ のとき, ② から $k = -64$ 他の解は, $\alpha^2 = 16$

$\alpha = 3$ のとき, ② から $k = 27$ 他の解は, $\alpha^2 = 9$

よって $k = 27$ のとき, 2つの解は $3, 9$

$k = -64$ のとき, 2つの解は $-4, 16$

3

解答 (1) $6x^2 - 5x - 6 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 13 = 0$

解説

(1) 2数の和は $\frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}$, 2数の積は $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

よって $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ すなわち $6x^2 - 5x - 6 = 0$

(2) 2数の和は $(2+3i) + (2-3i) = 4$, 2数の積は $(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i^2 = 13$

よって $x^2 - 4x + 13 = 0$

第2講 例題

4

【解答】 $4x^2+11x+9=0$

【解説】

解と係数の関係により $\alpha + \beta = -\frac{-11}{2} = \frac{11}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{9}{4}$

よって $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{121}{4} - \frac{9}{2} = \frac{103}{4}$

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

ゆえに、 α^2, β^2 を解とする2次方程式の1つは

$x^2 - \left(\frac{103}{4}\right)x + \frac{81}{16} = 0$ すなわち $x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{9}{4} = 0$

両辺に4を掛けて $4x^2 + 11x + 9 = 0$

5

【解答】 (1) $m > 10$ (2) $m < -\frac{5}{2}$

【解説】

2次方程式 $x^2 - mx + 2m + 5 = 0$ の異なる2つの解を α, β とし、判別式を D とする。

(1) $\alpha > 0, \beta > 0$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

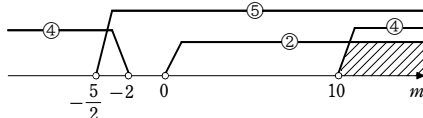
$$\begin{cases} D = (-m)^2 - 4(2m+5) > 0 & \dots\dots ① \\ \alpha + \beta = m > 0 & \dots\dots ② \\ \alpha\beta = 2m+5 > 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①から $m^2 - 8m - 20 > 0$ ゆえに $(m+2)(m-10) > 0$

よって $m < -2, 10 < m$ $\dots\dots ④$

③から $m > -\frac{5}{2}$ $\dots\dots ⑤$

②, ④, ⑤の共通範囲を求めて $m > 10$



【別解】 $f(x) = x^2 - mx + 2m + 5$ とおくと、異なる2つの解がともに正となる条件は

$D > 0, (\text{軸}) -\frac{-m}{2 \cdot 1} > 0, f(0) > 0$

よって $(-m)^2 - 4(2m+5) > 0, m > 0, 2m+5 > 0$

(2) 正と負の解をもつための条件は、 $\alpha\beta < 0$ が成り立つことである。

ゆえに $2m+5 < 0$ よって $m < -\frac{5}{2}$

【参考】 $\alpha\beta < 0$ のとき、解と係数の関係から $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$ よって $ac < 0$

したがって $D = b^2 - 4ac > 0$

【別解】 $f(0) < 0$

第2講 例題演習

1

【解答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) -1 (4) $\frac{5}{2}$ (5) $-\frac{1}{2}$ (6) -1

【解説】

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\frac{-2}{2} = 1, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$

(3) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

(4) $(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(5) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

【別解】 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 1 \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

(6) $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

2

【解答】 (1) $m=2$ のとき $x=1, 2; m=-4$ のとき $x=-1, -2$

(2) $m=8$ のとき $x=2, 4; m=-27$ のとき $x=-3, 9$

【解説】

(1) 2つの解は、 $\alpha, \alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha + (\alpha+1) = m+1, \quad \alpha(\alpha+1) = 2$

すなわち $2\alpha = m, \quad \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ から $(\alpha-1)(\alpha+2) = 0$ ゆえに $\alpha = 1, -2$

$\alpha = 1$ のとき $m = 2\alpha = 2 \cdot 1 = 2$ 他の解は $\alpha + 1 = 1 + 1 = 2$

$\alpha = -2$ のとき $m = 2\alpha = 2 \cdot (-2) = -4$ 他の解は $\alpha + 1 = -2 + 1 = -1$

よって、 $m=2$ のとき、2つの解は 1, 2

$m=-4$ のとき、2つの解は -1, -2

(2) 2つの解は、 α, α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha + \alpha^2 = 6, \quad \alpha \cdot \alpha^2 = m$

すなわち $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0, \quad \alpha^3 = m$

$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$ から $(\alpha-2)(\alpha+3) = 0$ ゆえに $\alpha = 2, -3$

$\alpha = 2$ のとき $m = \alpha^3 = 8$ 他の解は $\alpha^2 = 2^2 = 4$

$\alpha = -3$ のとき $m = (-3)^3 = -27$ 他の解は $\alpha^2 = (-3)^2 = 9$

よって、 $m=8$ のとき、2つの解は 2, 4

$m=-27$ のとき、2つの解は -3, 9

3

【解答】 (1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (2) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ (3) $4x^2 + 2x + 1 = 0$

【解説】

(1) 2数の和は $-1 + 3 = 2$

2数の積は $(-1) \cdot 3 = -3$

よって、-1, 3 を解とする2次方程式は $x^2 - 2x - 3 = 0$

【別解】 -1, 3 を解とする2次方程式は $(x+1)(x-3) = 0$

左辺を展開して $x^2 - 2x - 3 = 0$

(2) 2数の和は $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

2数の積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

よって、 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ を解とする2次方程式は $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

両辺に6を掛けて $6x^2 - 5x + 1 = 0$

【別解】 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ を解とする2次方程式は $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$

左辺を展開して $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

両辺に6を掛けて $6x^2 - 5x + 1 = 0$

(3) 2数の和は $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{4} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}$

2数の積は $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{4} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4} = \frac{1 - 3i^2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

よって、 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{4}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4}$ を解とする2次方程式は

$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0$

両辺に4を掛けて $4x^2 + 2x + 1 = 0$

4

【解答】 (1) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (2) $x^2 + 4x + 16 = 0$ (3) $x^2 + x + 1 = 0$

【解説】

解と係数の関係により $\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 4$

(1) $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -2 + 4 = 2, \quad (\alpha + \beta)\alpha\beta = -2 \cdot 4 = -8$

したがって、求める2次方程式は $x^2 - 2x - 8 = 0$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot 4 = -4, \quad \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 4^2 = 16$

したがって、求める2次方程式は $x^2 + 4x + 16 = 0$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 4}{4} = -1, \quad \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1$

したがって、求める2次方程式は $x^2 + x + 1 = 0$

5

【解答】 (1) $m > 8$ (2) $0 < m < 2$ (3) $m < 0$

【解説】

$x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ $\dots\dots ①$

①の判別式を D とし、2つの解を α, β とする。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2(m-4), \quad \alpha\beta = 2m$

(1) ①が異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は

$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m > 0 & \dots\dots ② \\ \alpha + \beta > 0 & \dots\dots ③ \\ \alpha\beta > 0 & \dots\dots ④ \end{cases}$

②から $m^2 - 10m + 16 > 0$

ゆえに $(m-2)(m-8) > 0$ よって $m < 2, 8 < m$ ……⑤
 ③から $2(m-4) > 0$
 よって $m > 4$ ……⑥
 ④から $2m > 0$
 よって $m > 0$ ……⑦
 ⑤, ⑥, ⑦の共通範囲を求めて $m > 8$

(2) ①が異なる2つの負の解をもつための必要十分条件は

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m > 0 & \dots\dots ⑧ \\ \alpha + \beta < 0 & \dots\dots ⑨ \\ \alpha\beta > 0 & \dots\dots ⑩ \end{cases}$$

⑧から $m < 2, 8 < m$ ……⑪
 ⑨から $2(m-4) < 0$
 よって $m < 4$ ……⑫
 ⑩から $m > 0$ ……⑬
 ⑪, ⑫, ⑬の共通範囲を求めて $0 < m < 2$

(3) ①の2つの解が異符号であるための必要十分条件は

$\alpha\beta < 0$ すなわち $2m < 0$
 よって $m < 0$

1

解答 $a = -2, 1$

解説

$x^2 + ax - 1 = 0$ の2つの解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = -1 \quad \dots\dots ②$$

また、 $x^2 - a^2x - a = 0$ の2つの解が $\alpha+1, \beta+1$ であるから、解と係数の関係により

$$(\alpha+1) + (\beta+1) = a^2 \quad \dots\dots ③, \quad (\alpha+1)(\beta+1) = -a \quad \dots\dots ④$$

③から $\alpha + \beta = a^2 - 2$ ①を代入して $-a = a^2 - 2$

整理すると $a^2 + a - 2 = 0$

ゆえに $(a+2)(a-1) = 0$ よって $a = -2, 1$

また、②を④に代入すると、 $\alpha + \beta = -a$ となり、①と同じ式が得られる。

以上から、求める定数 a の値は $a = -2, 1$

2

解答 $x + y = 4; (x, y) = (2 \pm \sqrt{5}i, 2 \mp \sqrt{5}i)$ (複号同順)

解説

$$(x+y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy = -2 + 2 \cdot 9 = 16$$

$x + y > 0$ であるから $x + y = 4$

よって、 x, y は2次方程式 $t^2 - 4t + 9 = 0$ の解である。

これを解くと $t = 2 \pm \sqrt{5}i$

したがって $(x, y) = (2 \pm \sqrt{5}i, 2 \mp \sqrt{5}i)$ (複号同順)

3

解答 (1) $2 < m < 3$ (2) $m < -1$ (3) $m > 3$ (4) $m > 2$

解説

2次方程式 $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ の異なる2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = 2m, \quad \alpha\beta = m + 2$$

また、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-m)^2 - (m+2) = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$$

(1) $\alpha > 1, \beta > 1$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

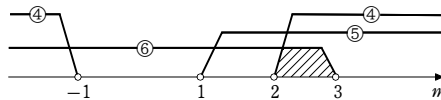
$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 & \dots\dots ① \\ (\alpha-1) + (\beta-1) = \alpha + \beta - 2 = 2m - 2 > 0 & \dots\dots ② \\ (\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = -m + 3 > 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①から $m < -1, 2 < m$ ……④

②から $m > 1$ ……⑤

③から $m < 3$ ……⑥

④, ⑤, ⑥の共通範囲を求めて $2 < m < 3$



別解 $f(x) = x^2 - 2mx + m + 2$ とおく。

異なる2つの解がともに1より大きくなる条件は

$$D > 0, (\text{軸}) \quad -\frac{-2m}{2 \cdot 1} > 1, f(1) > 0$$

よって $m < -1$ または $2 < m, m > 1, m < 3$

(2) $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$ となるための条件は、次の①, ②, ③が成り立つことである。

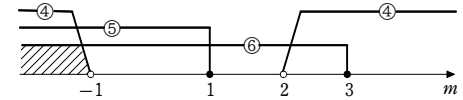
$$\begin{cases} \frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 & \dots\dots ① \\ (\alpha-1) + (\beta-1) = 2m - 2 \leq 0 & \dots\dots ② \\ (\alpha-1)(\beta-1) = -m + 3 \geq 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①から $m < -1, 2 < m$ ……④

②から $m \leq 1$ ……⑤

③から $m \leq 3$ ……⑥

④, ⑤, ⑥の共通範囲を求めて $m < -1$



別解 異なる2つの解がともに1以下となる条件は

$$D > 0, (\text{軸}) \quad -\frac{-2m}{2 \cdot 1} < 1, f(1) \geq 0$$

よって $m < -1$ または $2 < m, m < 1, m \leq 3$

(3) 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さくなるための条件は

$$(\alpha-1)(\beta-1) = -m + 3 < 0$$

よって $m > 3$

別解 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さい条件は

$$f(1) < 0$$

よって $m > 3$

(4) 異なる2つの実数解をもつような m の値の範囲は

$$\frac{D}{4} = (m-2)(m+1) > 0 \quad \text{から} \quad m < -1, 2 < m \quad \dots\dots ①$$

また、異なる2つの解がともに1以下となるような m の値の範囲は(2)より $m < -1$

よって、少なくとも1つの解が1より大きくなるような m の値の範囲は

①から $m < -1$ を除いて $m > 2$

別解 少なくとも1つの解が1より大きくなるような m の値の範囲は

[1] ともに1より大きくなるとき

(1)より $2 < m < 3$

[2] 1つの解が1より大きく、他の解が1より小さいとき

(3)より $m > 3$

[3] 1つの解が1のとき

$$1^2 - 2m \cdot 1 + m + 2 = 0 \quad \text{から} \quad m = 3$$

このとき、方程式は $x^2 - 6x + 5 = 0$ すなわち $(x-1)(x-5) = 0$

他の解は5 (> 1)であるから、条件を満たす。

[1], [2], [3]から、求める m の値の範囲は

$$m > 2$$

4

解答 (1) $2x^2 + 4x - 7 = 0$ (2) $p = \pm 2, q = 2$

解説

(1) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{1}{2}$

よって $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 2 - 4 = -2$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{2} - 8 + 2 + 2 = -\frac{7}{2}$$

したがって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + 2x - \frac{7}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 + 4x - 7 = 0$$

(2) 2つの2次方程式において、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -p \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = q \quad \dots\dots ②$$

$$(\alpha^2 + 1) + (\beta^2 + 1) = 2 \quad \dots\dots ③, \quad (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 5 \quad \dots\dots ④$$

③から $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \dots\dots ⑤$

よって $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 0$

これに①, ②を代入すると $p^2 - 2q = 0 \quad \dots\dots ⑥$

④から $(\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) + 1 = 5$

これに②, ⑤を代入すると $q^2 = 4$

ゆえに $q = \pm 2$

$q = 2$ のとき, ⑥から $p^2 = 4$ となり $p = \pm 2$

$q = -2$ のとき, ⑥から $p^2 = -4$ となり, $p^2 = -4$ を満たす実数 p は存在しない。

以上から $p = \pm 2, q = 2$

1

解答 $(x, y) = (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

解説

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 & \dots\dots ① \\ x^2y + xy^2 = 30 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②から $xy(x + y) = 30 \quad \dots\dots ③$

$x + y = u, xy = v$ とおくと, ①, ③から $u + v = 11, uv = 30$

よって, u, v は $t^2 - 11t + 30 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 5)(t - 6) = 0$ ゆえに $t = 5, 6$

よって $(u, v) = (5, 6), (6, 5)$

すなわち $(x + y, xy) = (5, 6), (6, 5)$

[1] $x + y = 5, xy = 6$ のとき, x, y は $t^2 - 5t + 6 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 2)(t - 3) = 0$ よって $t = 2, 3$

[2] $x + y = 6, xy = 5$ のとき, x, y は $t^2 - 6t + 5 = 0$ の解である。

これを解いて $(t - 1)(t - 5) = 0$ よって $t = 1, 5$

[1], [2]から $(x, y) = (2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

2

解答 $k = 2, (x + y - 2)(x + 2y - 1)$

解説

$P = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 5y + k$ とすると

$$P = x^2 + 3(y - 1)x + 2y^2 - 5y + k$$

$P = 0$ を x についての2次方程式と考えると, 解の公式から

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{9(y - 1)^2 - 4(2y^2 - 5y + k)}}{2} \\ &= \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{y^2 + 2y + 9 - 4k}}{2} \end{aligned}$$

P が x, y の1次式の積に因数分解できるためには, この解が y の1次式で表されなければならない。

よって, 根号内の式 $y^2 + 2y + 9 - 4k$ は完全平方式でなければならないから,

$y^2 + 2y + 9 - 4k = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (9 - 4k) = 4k - 8 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 2$$

このとき $x = \frac{-3(y - 1) \pm \sqrt{(y + 1)^2}}{2} = \frac{-3y + 3 \pm (y + 1)}{2}$

すなわち $x = -y + 2, -2y + 1$

よって $P = \{x - (-y + 2)\}\{x - (-2y + 1)\} = (x + y - 2)(x + 2y - 1)$

3

解答 (1) $x = a, b$ (2) 0

解説

(1) $(x - a)(x - b) - 2x + 1 = 0$ の解が α, β であるから, 等式

$$(x - a)(x - b) - 2x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ。

よって $(x - \alpha)(x - \beta) + 2x - 1 = (x - a)(x - b)$

ゆえに, $(x - \alpha)(x - \beta) + 2x - 1 = 0$ の解は $x = a, b$

別解 第1の方程式から $x^2 - (a + b + 2)x + ab + 1 = 0$

解と係数の関係により $\alpha + \beta = a + b + 2 \quad \dots\dots ①, \quad \alpha\beta = ab + 1 \quad \dots\dots ②$

第2の方程式から $x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + \alpha\beta - 1 = 0$

①, ②から $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

ゆえに $(x - a)(x - b) = 0$ よって $x = a, b$

(2) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)x + x(x - 1) = 0$ の2つの解が α, β であるから, 次の等式が成り立つ。

$$(x - 1)(x - 2) + (x - 2)x + x(x - 1) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

両辺に $x = 0, 1, 2$ を代入すると, それぞれ

$$2 = 3\alpha\beta, \quad -1 = 3(1 - \alpha)(1 - \beta), \quad 2 = 3(2 - \alpha)(2 - \beta)$$

ゆえに $\alpha\beta = \frac{2}{3}, (\alpha - 1)(\beta - 1) = -\frac{1}{3}, (\alpha - 2)(\beta - 2) = \frac{2}{3}$

よって, 求める式の値は $\frac{3}{2} - 3 + \frac{3}{2} = 0$

4

解答 $a = 3, b = 11$; 整数解は $x = 1, 11$

解説

2つの整数解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とする。

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 4a, \alpha\beta = \frac{ab}{3} \quad \dots\dots ①$

α, β は整数, a, b は素数であるから, ①により

$$a = 3 \quad \text{または} \quad b = 3 \quad \text{また} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

[1] $a = 3$ のとき $\alpha + \beta = 12, \alpha\beta = b$

$\alpha\beta = b$ で, b は素数であるから $\alpha = 1, \beta = b$

よって $1 + b = 12$ ゆえに $b = 11, \beta = 11$

[2] $b = 3$ のとき $\alpha + \beta = 4a, \alpha\beta = a$

$\alpha\beta = a$ で, a は素数であるから $\alpha = 1, \beta = a$

よって $1 + a = 4a$ このとき, $a = \frac{1}{3}$ となり不適。

以上から $a = 3, b = 11$; 整数解は $x = 1, 11$

第3講 例題

1

【解答】 (1) 40 (2) 8

【解説】

(1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ とする。

求める余りは $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 27 + 18 - 9 + 4 = 40$

(2) $P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 10x + 3$ とする。

求める余りは $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3$
 $= -1 + 1 + 5 + 3 = 8$

2

【解答】 (1) $a = 4$ (2) $a = 10$

【解説】

(1) $P(x) = x^3 - 3x^2 + a$ とする。

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが2となるための条件は

$$P(1) = 2 \quad \text{すなわち} \quad 1^3 - 3 \cdot 1^2 + a = 2$$

よって $a = 4$

(2) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 6$ とする。

$P(x)$ が $2x+1$ で割り切れるための条件は $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\text{すなわち} \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 0$$

よって $a = 10$

3

【解答】 (1) 商 $3x^2 - 7x + 14$, 余り -25 (2) 商 $x^2 - x + 2$, 余り -9

(3) 商 $x^2 - 2x + 1$, 余り 0

【解説】

$$(1) \begin{array}{r|rrrr} 3 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ & -6 & 14 & -28 & \\ \hline 3 & -7 & 14 & -25 & \end{array} \quad (2) \begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & -3 \\ & -3 & 3 & -6 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & -9 & \end{array}$$

商 $3x^2 - 7x + 14$, 余り -25

商 $x^2 - x + 2$, 余り -9

$$(3) \begin{array}{r|rrrr} 2 & -7 & 8 & -3 & 3 \\ & 3 & -6 & 3 & 2 \\ \hline 2 & -4 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{ゆえに} \quad 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 4x + 2) = (2x - 3)(x^2 - 2x + 1)$$

よって 商 $x^2 - 2x + 1$, 余り 0

4

【解答】 (1) $(x+1)(x+2)(x-4)$ (2) $(2x-3)(x^2+2x+3)$

(3) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

【解説】

(1) 与式を $P(x)$ とすると $P(-1) = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

ゆえに, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P(x) &= (x+1)(x^2 - 2x - 8) \\ &= (x+1)(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

(2) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 9$ とすると

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - 9 = 0$$

よって, $P(x)$ は $2x-3$ を因数にもつ。

右の割り算から $P(x) = (2x-3)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & -10 & -8 & -1 \\ & -1 & 2 & 8 & \\ \hline 1 & -2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 2x-3 & x^2+2x+3 & \\ & 2x^3+x^2 & -9 \\ \hline & 2x^3-3x^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 \\ 4x^2-6x \\ \hline 6x-9 \\ 6x-9 \\ \hline 0 \end{array}$$

(3) $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$ とすると

$$P(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0$$

よって, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$P(x) = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

$$\begin{array}{r|rr} x-1 & x^3+7x^2+14x+8 & \\ & x^4+6x^3+7x^2-6x-8 & \\ \hline & x^4-x^3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x^3+7x^2 \\ 7x^3-7x^2 \\ \hline 14x^2-6x \\ 14x^2-14x \\ \hline 8x-8 \\ 8x-8 \\ \hline 0 \end{array}$$

ここで, $Q(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ とすると

$$Q(-1) = -1 + 7 - 14 + 8 = 0$$

よって, $Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$$Q(x) = (x+1)(x^2 + 6x + 8) = (x+1)(x+2)(x+4)$$

$P(x) = (x-1)Q(x)$ であるから

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$$

$$\begin{array}{r|rr} x+1 & x^3+7x^2+14x+8 & \\ & x^3+x^2 & \\ \hline & 6x^2+14x & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2+14x \\ 6x^2+6x \\ \hline 8x+8 \\ 8x+8 \\ \hline 0 \end{array}$$

5

【解答】 $-2x+3$

【解説】

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割った余りを $ax+b$ において, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + ax + b$$

等式の両辺に $x=2, -3$ を代入すると

$$P(2) = 2a + b, \quad P(-3) = -3a + b$$

また, $x-2$ で割った余りが -1 , $x+3$ で割った余りが 9 であるから

$$P(2) = -1, \quad P(-3) = 9$$

よって $2a + b = -1, -3a + b = 9$

これを解くと $a = -2, b = 3$

したがって, 求める余りは $-2x + 3$

6

【解答】 x

【解説】

x^{99} を $x^2 - 1$ すなわち $(x+1)(x-1)$ で割った余りを $ax+b$ において, 商を $Q(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$x^{99} = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

この両辺に $x = -1, 1$ を代入すると $(-1)^{99} = -a + b, 1^{99} = a + b$

すなわち $-1 = -a + b, 1 = a + b$ これを解くと $a = 1, b = 0$

よって, 求める余りは x

7

【解答】 $-4x^2 + 10x + 5$

【解説】

$P(x)$ を 3次式 $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + R(x) \quad \cdots \cdots \text{①} \quad (R(x) \text{ は 2次以下の整式})$$

$(x+1)^2(x-2)Q(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから, $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは, $R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りと等しい。

よって, $R(x)$ は次のように表される。

$$R(x) = a(x+1)^2 + 18x + 9 \quad (a \text{ は定数})$$

ゆえに, 等式①は, 次のように表される。

$$P(x) = (x+1)^2(x-2)Q(x) + a(x+1)^2 + 18x + 9$$

よって $P(2) = 9a + 45$

$P(x)$ を $x-2$ で割った余りは 9 であるから $P(2) = 9$

ゆえに $9a + 45 = 9$ すなわち $a = -4$

したがって, 求める余りは $-4(x+1)^2 + 18x + 9 = -4x^2 + 10x + 5$

第3講 例題演習

1

【解答】 (1) 9 (2) 0

【解説】

- (1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ とすると、求める余りは
 $P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -8 + 12 + 4 + 1 = 9$
- (2) $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 1$ とすると、求める余りは
 $P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 10\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{9} - \frac{10}{9} + 1 = 0$

2

【解答】 (1) $a = -7$ (2) $a = -4$ (3) $a = 2, b = -6$

【解説】

- (1) $P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は
 $P(-3) = 0$ すなわち $(-3)^3 + a(-3) + 6 = 0$
 よって $-3a - 21 = 0$ ゆえに $a = -7$
- (2) $P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 になるための条件は
 $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$ すなわち $4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 4$
 よって $\frac{a}{4} + 5 = 4$ ゆえに $a = -4$
- (3) $P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は
 $P(-3) = 0$ すなわち $(-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) - 9 = 0$
 よって $3a - b - 12 = 0$ ……①
 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが -5 となるための条件は
 $P(2) = -5$ すなわち $2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 9 = -5$
 よって $2a + b + 2 = 0$ ……②
 ①, ②を連立して解くと $a = 2, b = -6$

3

【解答】 (1) 商 $2x^2 - 2x - 1$, 余り 4 (2) 商 $5x^2 - 3x + 6$, 余り -15
 (3) 商 $x^2 + 3x - 2$, 余り 1

【解説】

- (1)
$$\begin{array}{r} 2 \quad -4 \quad 1 \quad 5 \quad | \quad 1 \\ \underline{2 \quad -2 \quad -1} \\ 2 \quad -2 \quad -1 \quad 4 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{r} 5 \quad 7 \quad 0 \quad -3 \quad | \quad -2 \\ \underline{-10 \quad 6 \quad -12} \\ 5 \quad -3 \quad 6 \quad -15 \end{array}$$
- よって 商 $2x^2 - 2x - 1$, 余り 4 よって 商 $5x^2 - 3x + 6$, 余り -15
- (3) 整式 A を $x - \frac{1}{2}$ で割る組立除法は

$$\begin{array}{r} 2 \quad 5 \quad -7 \quad 3 \quad | \quad \frac{1}{2} \\ \underline{1 \quad 3 \quad -2} \\ 2 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \end{array}$$
- したがって $2x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 6x - 4) + 1$
 $= (2x - 1)(x^2 + 3x - 2) + 1$
 よって 商 $x^2 + 3x - 2$, 余り 1

4

【解答】 (1) $(x+1)(x-2)(x-3)$ (2) $(x+1)(x+2)(2x+3)$
 (3) $(2x+1)(x^2-3x+4)$ (4) $(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

【解説】

- (1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ とすると
 $P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$
 よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \quad 1 \quad 6 \quad | \quad -1 \\ \underline{-1 \quad 5 \quad -6} \\ 1 \quad -5 \quad 6 \quad 0 \end{array}$$

 $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$
 $= (x+1)(x-2)(x-3)$
- (2) $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$ とおくと
 $P(-1) = 2(-1)^3 + 9(-1)^2 + 13(-1) + 6 = 0$
 ゆえに、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。
 右のように割り算を行うと

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6 \\ x+1 \overline{) 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6} \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ 7x^2 + 13x \\ \underline{7x^2 + 7x} \\ 6x + 6 \\ \underline{6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

 $P(x) = (x+1)(2x^2 + 7x + 6)$
 したがって

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6 \\ = (x+1)(2x^2 + 7x + 6) \\ = (x+1)(x+2)(2x+3) \end{array}$$
- (3) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 4$ とすると
 $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4$
 $= -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + 4 = 0$
 よって、 $P(x)$ は $x + \frac{1}{2}$ を因数にもつから

$$\begin{array}{r} 2 \quad -5 \quad 5 \quad 4 \quad | \quad \frac{1}{2} \\ \underline{-1 \quad 3 \quad -4} \\ 2 \quad -6 \quad 8 \quad 0 \end{array}$$

 $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6x + 8) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 2(x^2 - 3x + 4)$
 $= (2x+1)(x^2 - 3x + 4)$
- (4) 与式を $P(x)$ とすると
 $P(2) = 32 - 24 - 4 - 6 + 2 = 0$
 ゆえに、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。
 よって $P(x) = (x-2)(2x^3 + x^2 + x - 1)$
 $Q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

 ゆえに、 $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad \frac{1}{2} \\ \underline{1 \quad 1 \quad 1} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \end{array}$$

 よって $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = (2x-1)(x^2 + x + 1)$
 したがって $P(x) = (x-2)(2x-1)(x^2 + x + 1)$

5

【解答】 $-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

【解説】

$P(x)$ を 2次式 $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-1)(2x+1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ①$$

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから $P(1) = 3$

①の両辺に $x=1$ を代入すると $P(1) = a+b$

よって $a+b=3$ ……②

また、 $P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 であるから $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

①の両辺に $x = -\frac{1}{2}$ を代入すると $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2} + b$

よって $-\frac{a}{2} + b = 4$ ……③

②, ③を解くと $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{11}{3}$

したがって、求める余りは $-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

6

【解答】 x

【解説】

$P(x) = x^{2017}$ ……①とする。

$P(x)$ を $x^2 + x$ すなわち $x(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = x(x+1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ②$$

①から $P(0) = 0, P(-1) = -1$

よって、②から $b = 0, -a + b = -1$

ゆえに $a = 1, b = 0$

したがって、求める余りは x

7

【解答】 $x^2 + 2x - 4$

【解説】

$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

このときの余りは、2次以下の整式または 0 であるから、

$ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数) とおける。

よって $P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c$

更に、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $4x-5$ であるから

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + 4x - 5 \quad \dots\dots ①$$

と表される。

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから $P(-2) = -4$

また、①から $P(-2) = 9a - 13$

よって $9a - 13 = -4$ ゆえに $a = 1$

したがって、求める余りは $(x-1)^2 + 4x - 5$ すなわち $x^2 + 2x - 4$

【別解】 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)^2Q_1(x) + 4x - 5 \quad \dots\dots ①$$

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから $P(-2) = -4$

また、①から $P(-2) = 9Q_1(-2) - 13$

よって $9Q_1(-2) - 13 = -4$ ゆえに $Q_1(-2) = 1$

よって、 $R(x)$ を整式として

$$Q_1(x) = (x+2)R(x) + 1$$

と表される。これを①に代入して

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2\{(x+2)R(x)+1\}+4x-5 \\ &= (x-1)^2(x+2)R(x)+(x-1)^2+4x-5 \\ &= (x-1)^2(x+2)R(x)+x^2+2x-4 \end{aligned}$$

ゆえに、求める余りは x^2+2x-4

1

【解答】 (1) 5 (2) $\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$ (3) $-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

【解説】

(1) $P(x)$ を $x^2-4=(x-2)(x+2)$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+2)Q_1(x)+2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって $P(2)=2\cdot 2+1=5$

(2) $P(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$P(x)$ を $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ で割った商を $Q_3(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+ax+b$$

よって $P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

①から $P(-2)=2\cdot(-2)+1=-3$

②から $P(1)=1+3=4$

ゆえに $-2a+b=-3$, $a+b=4$

これを解いて $a=\frac{7}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

よって、余りは $\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$

(3) $P(x)$ を $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x+2)(x-2)$ で割った商を $Q_4(x)$ 、余りを px^2+qx+r とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)Q_4(x)+px^2+qx+r$$

よって $P(1)=p+q+r$

$$P(-2)=4p-2q+r$$

$$P(2)=4p+2q+r$$

①から $P(-2)=-3$, $P(2)=5$

②から $P(1)=4$

ゆえに $p+q+r=4$

$$4p-2q+r=-3$$

$$4p+2q+r=5$$

これらの連立方程式を解いて $p=-\frac{1}{3}$, $q=2$, $r=\frac{7}{3}$

よって、余りは $-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

2

【解答】 (1) $a=3$, $b=2$ (2) $nx-n$

【解説】

(1) $f(x)$ は $x-1$ で割り切れるから $f(1)=0$

よって $1-a+b=0$ ゆえに $b=a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

したがって $f(x)=x^3-ax+a-1$

$$=(x-1)(x^2+x+1-a)$$

$g(x)=x^2+x+1-a$ とすると $g(1)=0$

よって $3-a=0$ ゆえに $a=3$

これを①に代入して $b=2$

(2) x^n-1 を 2次式 $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると、次の等

式が成り立つ。

$$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$0=a+b \quad \text{よって} \quad b=-a$$

ゆえに $x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ であるから

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$1+1+\cdots+1+1=a$$

よって $a=n$ ゆえに $b=-a=-n$

したがって、求める余りは $nx-n$

3

【解答】 (1) $-2x+1$ (2) x^2-2x

【解説】

(1) $P(x)$ を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_1(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件から $P(1)=-1$, $P(-1)=3$

①から $P(1)=a+b$, $P(-1)=-a+b$

よって $a+b=-1$, $-a+b=3$

この連立方程式を解いて $a=-2$, $b=1$

したがって、求める余りは $-2x+1$

(2) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+px^2+qx+r \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $(x-1)^2(x+1)Q_2(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは、 px^2+qx+r を $(x-1)^2$ で割ったときの余りに等しい。

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが定数であるとき、その定数を c とすると

$$px^2+qx+r=p(x-1)^2+c$$

②から $P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+p(x-1)^2+c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

条件から $P(1)=-1$, $P(-1)=3$

③から $P(1)=c$, $P(-1)=4p+c$

ゆえに $c=-1$, $4p+c=3$ よって $p=1$

したがって、求める余りは $1\cdot(x-1)^2-1$ すなわち x^2-2x

1

【解答】 (ア) 1 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3

【解説】

$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$, x^2+1 で割ったときの商を $R(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x^2-1)Q(x) + x + 2$$

$$P(x) = (x^2+1)R(x) + 3x + 4$$

ゆえに

$$P(1) = 3 \quad \text{よって} \quad a + b + c + d = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$P(-1) = 1 \quad \text{よって} \quad -a + b - c + d = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$P(i) = 4 + 3i \quad \text{よって} \quad ai^3 + bi^2 + ci + d = 4 + 3i$$

すなわち $(-b+d) + (-a+c)i = 4+3i \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

a, b, c, d は実数であるから、 $\textcircled{3}$ より $-b+d=4, -a+c=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

また、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から $2b+2d=4, 2a+2c=2$

すなわち $b+d=2, a+c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ を解いて $a = -1, b = 1, c = 2, d = 3$

2

【解答】 (1) n が偶数のとき $-n^2+5n-4$, n が奇数のとき $2(n-1)x-n^2+3n-2$

(2) $n=1, 4$

【解説】

(1) $P(x)$ を 2次式 x^2-1 で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと、次の等式が成り立つ。

$$x^{3n} + (3n-2)x^{2n} + (2n-3)x^n - n^2 = (x^2-1)Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

[1] n が偶数のとき

$\textcircled{1}$ に $x=1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = a + b$$

$\textcircled{1}$ に $x=-1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = -a + b$$

これを解くと $a=0, b=-n^2+5n-4$

よって、余りは $-n^2+5n-4$

[2] n が奇数のとき

$\textcircled{1}$ に $x=1$ を代入すると

$$1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 = a + b$$

$\textcircled{1}$ に $x=-1$ を代入すると

$$-1 + (3n-2) - (2n-3) - n^2 = -a + b$$

これを解くと

$$a = 2n - 2 = 2(n-1), \quad b = -n^2 + 3n - 2$$

よって、余りは $2(n-1)x - n^2 + 3n - 2$

(2) [1] n が偶数のとき

$$-n^2 + 5n - 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (n-1)(n-4) = 0$$

n は偶数であるから $n=4$

[2] n が奇数のとき

$$2(n-1)x - n^2 + 3n - 2 = 0$$

よって $2(n-1)=0$ かつ $-n^2+3n-2=-(n-1)(n-2)=0$

ゆえに $n=1$

以上から $n=1, 4$

3

【解答】 x^3+2x^2+4x+4

【解説】

整式 $P(x)$ を 4次式 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)Q(x) + R(x) \quad R(x) \text{ は 3次以下}$$

$P(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割ったときの余りは、 $R(x)$ を x^2+1, x^2+x+1 で割ったときの余りにそれぞれ等しいから、求める整式は $R(x)$ [3次以下の式] である。

$R(x)$ を x^2+1 で割ったときの商は、1次式または定数であり、条件から

$$R(x) = (x^2+1)(ax+b) + 3x + 2$$

同様に $R(x) = (x^2+x+1)(ax+c) + 2x + 3$ と書ける。

$$\text{よって} \quad (x^2+1)(ax+b) + 3x + 2 = (x^2+x+1)(ax+c) + 2x + 3$$

これは x についての恒等式である。

両辺を展開して整理すると

$$ax^3 + bx^2 + (a+3)x + b + 2 = ax^3 + (a+c)x^2 + (a+c+2)x + c + 3$$

係数を比較して $b = a + c, a + 3 = a + c + 2, b + 2 = c + 3$

これを解くと $a = 1, b = 2, c = 1$

したがって、求める整式は

$$R(x) = (x^2+1)(x+2) + 3x + 2 = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

4

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

$$P(x) = (x-1)(x^{2n}-1)(x^{2n}+1) \\ = (x-1)(x^n-1)(x^n+1)(x^{2n}+1)$$

$$Q(x) = (x^2-1)(x^2+1)(x^n-1) \\ = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^n-1)$$

(1) n が正の奇数のとき、 $(-1)^n = -1$ であるから

$$x = -1 \text{ のとき } x^n + 1 = 0, \quad x = \pm i \text{ のとき } x^{2n} + 1 = 0$$

よって、 x^n+1 は $x+1$ を、 $x^{2n}+1$ は x^2+1 を因数にもつから、 $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れる。

(2) n が正の偶数のとき、 $(-1)^n = 1$ であるから

$$x = -1 \text{ のとき } x^n + 1 = 2, \quad x^{2n} + 1 = 2$$

よって、 $(x^n+1)(x^{2n}+1)$ は $x+1$ を因数にもたないから、 $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れない。

1

【解答】 (1) $x=5, \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = \pm 2, \pm 3i$ (3) $x=2, 1 \pm 2i$

(4) $x=5, -1 \pm \sqrt{11}i$

【解説】

(1) 移項すると $x^3 - 125 = 0$

左辺を因数分解して $(x-5)(x^2+5x+25) = 0$

よって $x-5=0$ または $x^2+5x+25=0$

$$\text{ゆえに} \quad x = 5, \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ から $(x^2+9)(x^2-4) = 0$

よって $x^2+9=0$ または $x^2-4=0$

ゆえに $x = \pm 2, \pm 3i$

(3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ とすると $P(2) = 8 - 16 + 18 - 10 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 5)$$

$P(x) = 0$ から $x-2=0$ または $x^2-2x+5=0$

したがって $x=2, 1 \pm 2i$

(4) $P(x) = (x-2)(x-1)x - 3 \cdot 4 \cdot 5$ とすると $P(5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 5 = 0$

また $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 60$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから、 $P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = (x-5)(x^2 + 2x + 12)$$

$P(x) = 0$ から $x-5=0$ または $x^2+2x+12=0$

よって $x=5, -1 \pm \sqrt{11}i$

2

【解答】 $a = -4, b = 20$; 他の解 $x = 5$

【解説】

$P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ とおくと

$P(-2) = 0$ から $(-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0$

よって $-2a + b - 28 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$P(2) = 0$ から $2^3 - 5 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

よって $2a + b - 12 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて $a = -4, b = 20$

ゆえに $P(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$

$P(-2) = 0, P(2) = 0$ から、 $P(x)$ は $(x+2)(x-2)$ で割り切れる。

よって $P(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$ したがって $(x+2)(x-2)(x-5) = 0$

ゆえに、他の解は $x = 5$

3

【解答】 $a = 0, b = 1$, 他の解 $x = -2, 1 - 2i$

【解説】

$1 + 2i$ が解であるから

$$(1 + 2i)^3 + a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + 10 = 0$$

整理すると $(-3a + b - 1) + 2(2a + b - 1)i = 0$

$-3a + b - 1, 2(2a + b - 1)$ は実数であるから $-3a + b - 1 = 0, 2(2a + b - 1) = 0$

第4講 例題

これを解いて $a=0, b=1$

このとき、方程式は $x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて $x=-2, 1\pm 2i$

したがって、他の解は $x=-2, 1-2i$

別解 方程式の係数は実数であるから、 $1+2i$ と共役な複素数 $1-2i$ も解である。

よって、方程式の左辺は $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$ すなわち x^2-2x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx+10$ を x^2-2x+5 で割ると

商は $x+a+2$ 余りは $(2a+b-1)x-5a$

余りが0であるとき $2a+b-1=0, -5a=0$

よって $a=0, b=1$

このとき、方程式は $(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて $x=-2, 1\pm 2i$

したがって、他の解は $x=-2, 1-2i$

4

解答 (1) $2t^2-9t-5=0$ (2) $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

解説

(1) $x=0$ は解ではないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2-9x-1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$\text{よって } 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2 \text{ であるから } 2(t^2-2)-9t-1=0$$

ゆえに ① $2t^2-9t-5=0$ …… ①

(2) ① から $(t-5)(2t+1)=0$ よって $t=5, -\frac{1}{2}$

[1] $t=5$ のとき $x+\frac{1}{x}=5$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2-5x+1=0$

これを解くと $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

[2] $t=-\frac{1}{2}$ のとき $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$

両辺に $2x$ を掛けて整理すると $2x^2+x+2=0$

これを解くと $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

したがって、解は $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$

5

解答 (1) 0 (2) -1 (3) -2

解説

ω は $x^3=1$ の解であるから $\omega^3=1$

よって $\omega^3-1=0$ すなわち $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega \neq 1$ であるから $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{14}+\omega^7+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$
 $=\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで、 $\omega^2+\omega+1=0$ から $\omega+1=-\omega^2$

よって $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

別解 $\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\frac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

(3) $\omega^2+\omega+1=0$ から $\omega^2+1=-\omega$

よって $\frac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{\omega^3\cdot\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\frac{(\omega^2+1)+3\omega}{\omega^2+1}$
 $=\frac{-\omega+3\omega}{-\omega}=\frac{2\omega}{-\omega}=-2$

6

解答 (1) 順に $1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ (2) -2 (3) -5 (4) 2

解説

(1) α, β, γ が方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の解であるから、次の等式が成り立つ。

$$2x^3-2x^2+3x+1=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \dots\dots ①$$

よって $2x^3-2x^2+3x+1=2x^3-2(\alpha+\beta+\gamma)x^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-2\alpha\beta\gamma$

これは x についての恒等式であるから、両辺の係数を比較すると

$$\alpha+\beta+\gamma=1, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1^2-2\cdot\frac{3}{2}=-2$

(3) α は方程式の解であるから

$$2\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^3=\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}$$

同様に $\beta^3=\beta^2-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}, \quad \gamma^3=\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma-\frac{1}{2}$

よって $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left(\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right)+\left(\beta^2-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\right)+\left(\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma-\frac{1}{2}\right)$
 $=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{3}{2}=-2-\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{3}{2}=-5$

別解 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha))+3\alpha\beta\gamma$

$$=1\cdot\left(-2-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma, \quad \beta+\gamma=1-\alpha, \quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって (与式) $= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
 $=1-1+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

別解 $\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma, \quad \beta+\gamma=1-\alpha, \quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって (与式) $= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

①の両辺に $x=1$ を代入して $2\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって $4=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ ゆえに $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2$

したがって (与式) $=2$

第4講 例題演習

1

【解答】 (1) $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = -1, 1, \pm\sqrt{2}i$

(3) $x = -1, 2 \pm 2\sqrt{2}$ (2) $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

【解説】

(1) 移項すると $x^3 + 27 = 0$

左辺を因数分解して $(x+3)(x^2-3x+9) = 0$

よって $x+3=0$ または $x^2-3x+9=0$

ゆえに $x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^4 + x^2 - 2 = 0$ から $(x^2-1)(x^2+2) = 0$

よって $(x+1)(x-1)(x^2+2) = 0$

ゆえに $x+1=0$ または $x-1=0$ または $x^2+2=0$

$x^2 = -2$ から $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

したがって $x = -1, 1, \pm\sqrt{2}i$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ とすると

$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 4 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$P(x) = (x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x) = 0$ から $x+1=0$ または $x^2-4x-4=0$

ゆえに $x = -1, 2 \pm 2\sqrt{2}$

(4) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2$ とすると

$P(-1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^3 + 5(-1)^2 - 2 = 0$

よって、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに $P(x) = (x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 5 & 5 & 0 & -2 & -1 & \\ & -2 & -3 & -2 & 2 & & \end{array}$$

また、 $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ とすると

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0$

よって、 $Q(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 2 & 2 & \end{array}$$

ゆえに $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 4)$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

よって $(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2) = 0$

ゆえに $x+1=0$ または $2x-1=0$ または $x^2+2x+2=0$

$x+1=0$ から $x = -1$

$2x-1=0$ から $x = \frac{1}{2}$

$x^2+2x+2=0$ から $x = -1 \pm i$

したがって $x = -1, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

2

【解答】 $a=2, b=-5$, 他の解 $x = -3$

【解説】

$x = -1, 2$ が解であるから

$(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 = 0, 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 = 0$

整理すると $a - b = 7, 2a + b = -1$

これを解いて $a = 2, b = -5$

このとき、方程式は $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$

したがって、他の解は $x = -3$

【別解】 他の解を $x = \alpha$ とおくと、条件から、次の等式が成り立つ。

$x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x+1)(x-2)(x-\alpha)$

右辺を展開して整理すると

$x^3 + ax^2 + bx - 6 = x^3 - (\alpha+1)x^2 + (\alpha-2)x + 2\alpha$

両辺の係数を比較すると

$a = -\alpha - 1, b = \alpha - 2, -6 = 2\alpha$

これを解いて $\alpha = -3, a = 2, b = -5$

3

【解答】 $a = -6, b = 13$, 他の解は $2, 2 - i$

【解説】

(解1) $2+i$ が解であるから $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) - 10 = 0$

整理して $3a + 2b - 8 + (4a + b + 11)i = 0$

$3a + 2b - 8, 4a + b + 11$ は実数であるから

$3a + 2b - 8 = 0, 4a + b + 11 = 0$

これを解いて $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-2)(x^2-4x+5) = 0$

これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

(解2) 方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって、方程式の左辺は $(x-(2+i))(x-(2-i))$ すなわち x^2-4x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3 + ax^2 + bx - 10$ を $x^2 - 4x + 5$ で割ると、

商は $x + a + 4$, 余りは $(4a + b + 11)x - 5(a + 6) = 0$

余りが0であるとき $4a + b + 11 = 0, -5(a + 6) = 0$

よって $a = -6, b = 13$

このとき、方程式は $(x^2 - 4x + 5)(x - 2) = 0$ これを解いて $x = 2, 2 \pm i$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

【参考】 「3次方程式の解と係数の関係」を利用して、次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから、 $2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう1つの解を p とすると、解と係数の関係により

$p + (2+i) + (2-i) = -a$

$(2+i)p + (2-i)p + (2+i)(2-i) = b$

$(2+i)(2-i)p = 10$

これを解いて $p = 2, a = -6, b = 13$

したがって、他の解は $2, 2 - i$

4

【解答】 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

【解説】

$x=0$ は方程式の解でないから、方程式の両辺を x^2 で割ると

$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

よって $x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$ であるから $(t^2 - 2) - 7t + 14 = 0$

ゆえに $t^2 - 7t + 12 = 0$ よって $(t-3)(t-4) = 0$

したがって $t = 3, 4$

[1] $t=3$ のとき $x + \frac{1}{x} = 3$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - 3x + 1 = 0$

これを解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

[2] $t=4$ のとき $x + \frac{1}{x} = 4$

両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - 4x + 1 = 0$

これを解くと $x = 2 \pm \sqrt{3}$

したがって、解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

5

【解答】 (1) -1 (2) 0 (3) 3

【解説】

(1) ω は方程式 $x^2 + x + 1 = 0, x^3 = 1$ の解であるから

$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$

よって $\omega^7 + \omega^8 = (\omega^3)^2 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

(2) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1 = \frac{\omega + 1 + \omega^2}{\omega^2} = 0$

(3) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ から、 $\omega^2 = -\omega - 1$ となり

$(\omega + 2\omega^2)^2 + (2\omega + \omega^2)^2 = (\omega + 2(-\omega - 1))^2 + (2\omega - \omega - 1)^2$

$= (-\omega - 2)^2 + (\omega - 1)^2$

$= 2\omega^2 + 2\omega + 5$

$= 2(-\omega - 1) + 2\omega + 5 = 3$

6

【解答】 (1) $\frac{2}{7}$ (2) 13 (3) 24 (4) 77 (5) 3 (6) 1

【解説】

解と係数の関係から

$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \alpha\beta\gamma = -7$

(1) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$
 $= 3(13 - (-2)) + 3 \cdot (-7) = 45 - 21 = 24$

(4) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

ここで $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\alpha + \gamma\alpha \cdot \alpha\beta)$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=(-2)^2-2\cdot(-7)\cdot 3=46$$

よって $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=13^2-2\cdot 46=169-92=77$

(5) $x^3-3x^2-2x+7=0$ の3つの解が α, β, γ であるから
 $x^3-3x^2-2x+7=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \dots\dots ①$

①の両辺に $x=1$ を代入して
 $1^3-3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
 よって $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=3$

別解 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
 $=1-3+(-2)-(-7)=3$

(6) $\alpha+\beta+\gamma=3$ から $\alpha+\beta=3-\gamma, \beta+\gamma=3-\alpha, \gamma+\alpha=3-\beta$
 したがって $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

①の両辺に $x=3$ を代入して $3^3-3\cdot 3^2-2\cdot 3+7=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$
 よって $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=1$ すなわち $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=1$

別解 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$
 $=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
 $=27-9\cdot 3+3\cdot(-2)-(-7)=1$

1

解答 $a=0, -4, \frac{1}{2}$

解説

与えられた3次方程式の左辺を a について整理すると

$$(x^2-1)a+x^3+x^2=0$$

$$(x+1)(x-1)a+x^2(x+1)=0$$

ゆえに $(x+1)(x^2+(x-1)a)=0$

よって $(x+1)(x^2+ax-a)=0$

したがって $x+1=0$ または $x^2+ax-a=0$

この3次方程式が2重解をもつのは、次の[1]または[2]の場合である。

[1] $x^2+ax-a=0$ が $x=-1$ の重解をもつ。

判別式を D とすると $D=0$ かつ $-\frac{a}{2\cdot 1}=-1$

$$D=a^2-4\cdot 1\cdot(-a)=a(a+4)$$

$D=0$ とすると $a=0, -4$

これは $a=2$ を満たす。

[2] $x^2+ax-a=0$ の解の1つが -1 で、他の解が -1 でない。

-1 が解であるための条件は $(-1)^2+a(-1)-a=0$

これを解いて $a=\frac{1}{2}$

このとき、方程式は $(x+1)\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)=0$

したがって $(x+1)^2(2x-1)=0$

ゆえに、 $x=-1$ は2重解である。

以上から $a=0, -4, \frac{1}{2}$

2

解答 $a=-\frac{3}{5}, b=\frac{4}{5}, \alpha=-\frac{4}{5}$

解説

条件から $x^3+2ax^2+ax+b=(x-1)^2(x-\alpha)$

右辺を展開すると $x^3+2ax^2+ax+b=x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+1)x-\alpha$

両辺の各項の係数を比較して

$$2a=-(\alpha+2), a=2\alpha+1, b=-\alpha$$

これを解いて $a=-\frac{3}{5}, b=\frac{4}{5}, \alpha=-\frac{4}{5}$

3

解答 (ア) 5 (イ) -15 (ウ) -75

解説

3次方程式の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-5$$

よって $\alpha+\beta=-\gamma, \beta+\gamma=-\alpha, \gamma+\alpha=-\beta$

ゆえに $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$
 $=-\alpha\beta\gamma=-(-5)$
 $=75$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=0+3\cdot(-5)=-15$$

また、 $\alpha^3=3\alpha-5, \beta^3=3\beta-5, \gamma^3=3\gamma-5$ であるから

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=\alpha^2(3\alpha-5)+\beta^2(3\beta-5)+\gamma^2(3\gamma-5)$$

$$=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$=3(3\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$$

$$=3\cdot(-15)-5\{0^2-2\cdot(-3)\}$$

$$=-75$$

別解 (イ)について、(ウ)と同様に次数を下げる方法で解いてもよい。

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(3\alpha-5)+(3\beta-5)+(3\gamma-5)$$

$$=3(\alpha+\beta+\gamma)-15=3\cdot 0-15$$

$$=-15$$

4

解答 $x^3-3x-7=0$

解説

3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0, \alpha\beta\gamma=5$$

$$(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=(\alpha+\beta+\gamma)-3=3-3=0$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)$$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$

$$=0-2\cdot 3+3=-3$$

また、 $x^3-3x^2-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。

この両辺に $x=1$ を代入して $-7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=7$

ゆえに、求める3次方程式は $x^3-3x-7=0$

別解 $x-1=X$ とおくと、 $x=X+1$ は $x^3-3x^2-5=0$ を満たすから

$$(X+1)^3-3(X+1)^2-5=0 \quad \text{整理すると} \quad X^3-3X-7=0$$

よって $x^3-3x-7=0$

第4講 レベルB

1

【解答】 -27

【解説】

$$x^3 - 1 = 0 \text{ から } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\text{よって } x = 1 \text{ または } x^2 + x + 1 = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の解の1つを ω とおくと、他の解は ω^2 となる。

$$\text{また } \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$A^2 = \{(a-b)(a-c)(b-c)\}^2$ は、 a, b, c の3文字のうち、どの2つの文字を入れ替えても符号は同じである。

ゆえに、 $a=1, b=\omega, c=\omega^2$ としてよい。

$$\begin{aligned} A &= (1-\omega)(1-\omega^2)(\omega-\omega^2) = (1-\omega-\omega^2+\omega^3)(\omega-\omega^2) \\ &= (1-\omega-\omega^2+1)(\omega-\omega^2) = \{2-(\omega^2+\omega)\}(\omega-\omega^2) \\ &= \{2-(-1)\}(\omega-\omega^2) = 3(\omega-\omega^2) \end{aligned}$$

$$\omega^2 = -(\omega+1) \text{ であるから } A = 3\{\omega + (\omega+1)\} = 3(2\omega+1)$$

$$\begin{aligned} \text{よって } A^2 &= \{3(2\omega+1)\}^2 = 9(4\omega^2 + 4\omega + 1) \\ &= 9\{4(\omega^2 + \omega + 1) - 3\} = 9(4 \cdot 0 - 3) = -27 \end{aligned}$$

2

【解答】 (1) $a = -3, b = -6, c = 5$ (2) $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

【解説】

(1) $x=0$ は①の解ではないから、①の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 6x - 1 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$\text{すなわち } x^2 + \frac{9}{x^2} - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 6\left(x - \frac{3}{x}\right) + 5 = 0$$

よって、 $y = x - \frac{3}{x}$ とおくと、 y についての2次方程式 $y^2 - 6y + 5 = 0$ が得られる。

したがって $a = -3, b = -6, c = 5$

(2) $y^2 - 6y + 5 = 0$ から $(y-1)(y-5) = 0$

これを解いて $y = 1, 5$

[1] $y = 1$ のとき $x - \frac{3}{x} = 1$

$$x^2 - x - 3 = 0 \text{ であるから } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

[2] $y = 5$ のとき $x - \frac{3}{x} = 5$

$$x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ であるから } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

ゆえに、①の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

3

【解答】 割り切れる

【解説】

$$f(x) = (x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1 \text{ とおく.}$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の1つの解を ω とすると、他の解は ω^2 となる。

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \text{ であるから } \omega^3 = \omega(-\omega - 1) = -(\omega^2 + \omega + 1) + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(\omega) &= (\omega^{100} + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= \{\omega \cdot (\omega^3)^{33} + 1\}^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (\omega + 1)^{100} + (\omega^2 + 1)^{100} + 1 \\ &= (-\omega^2)^{100} + (-\omega)^{100} + 1 \\ &= \omega^{200} + \omega^{100} + 1 \\ &= \omega^2 \cdot (\omega^3)^{66} + \omega \cdot (\omega^3)^{33} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様に } f(\omega^2) &= \{(\omega^2)^{100} + 1\}^{100} + \{(\omega^2)^2 + 1\}^{100} + 1 \\ &= (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^4 + 1)^{100} + 1 \\ &= (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{100} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{aligned}$$

よって、 $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$ は $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$ で割り切れる。