

1

次の□に当てはまる数を入れなさい。

- (1) 1の平方根は□ (2)  $-\sqrt{1} = \square$  (3)  $\sqrt{(-13)^2} = \square$   
 (4)  $-\sqrt{0.3^2} = \square$  (5)  $\sqrt{\frac{25}{169}} = \square$  (6)  $-(-\sqrt{0.4})^2 = \square$

2

次の数を、大きい方から順に並べなさい。

$$1.7, \quad \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2}, \quad 0, \quad -1\frac{1}{2}, \quad (-0.4)^2$$

3

次の計算をしなさい。

- (1)  $\sqrt{8} \times \sqrt{0.5}$  (2)  $3\sqrt{2} \times (-\sqrt{6})$  (3)  $2\sqrt{5} \times \sqrt{8} \div \sqrt{10}$   
 (4)  $\sqrt{32} \div \sqrt{12} \div \sqrt{6}$  (5)  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^3 \times \sqrt{32} \times \frac{1}{9}$   
 (6)  $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{48}$  (7)  $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3}$   
 (8)  $2\sqrt{32} + \sqrt{18} - 3\sqrt{72}$  (9)  $5\sqrt{3} + 2\sqrt{8} - \sqrt{147} - 3\sqrt{2}$

4

次の計算をしなさい。

- (1)  $5\sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{24}$  (2)  $\sqrt{18} \div \sqrt{3} + \sqrt{54}$   
 (3)  $(\sqrt{50} - \sqrt{18}) \div \sqrt{2}$  (4)  $2\sqrt{50} - 2(\sqrt{2} - 1)$   
 (5)  $\sqrt{32} + (\sqrt{2} - 3) \times \sqrt{2}$  (6)  $\sqrt{3}(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{2}(3 - \sqrt{6})$

5

次の計算をしなさい。

- (1)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24}$  (2)  $(3\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{3} - \sqrt{2})$   
 (3)  $(\sqrt{7} + 4)(2\sqrt{7} - 3)$  (4)  $(\sqrt{3} - 2)^2 + 4(\sqrt{3} - 1)$   
 (5)  $\left(\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{6}}\right)^2$  (6)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)$   
 (7)  $\sqrt{27} - 6\left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$  (8)  $\frac{\sqrt{8} + 3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \sqrt{54} - \frac{4 - \sqrt{12}}{\sqrt{2}}$   
 (9)  $\{(3 + \sqrt{10})^{100} + (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2 - \{(3 + \sqrt{10})^{100} - (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2$

6

次の式の値を求めなさい。

- (1)  $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$  のとき,  $x^2 - 5x$  の値  
 (2)  $a = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ,  $b = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  のとき,  $a^2 + 5ab + b^2$  の値  
 (3)  $a + b = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ,  $a - b = \sqrt{6} - 2$  のとき,  $(2a - b)^2 - (a - 2b)^2$  の値

7

$\sqrt{10} - \sqrt{2}$  の整数部分を  $a$ 、小数部分を  $b$  とするとき、 $2a^2 + 2ab + b^2$  の値を求めなさい。

8

$a = \frac{2}{\sqrt{6} + 2}$  のとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $a - \frac{2}{a}$                       (2)  $\left(a + \frac{8}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{8}{a}\right)\left(2a - \frac{1}{a}\right)$

9

- (1)  $\sqrt{105 - 5a}$  が自然数となるような自然数  $a$  を求めなさい。  
(2)  $\sqrt{\frac{2205}{x}}$  が自然数となるような3桁の自然数  $x$  を求めなさい。

10

次の循環小数を分数で表しなさい。

- (1)  $0.\dot{7}$                       (2)  $0.\dot{1}2\dot{3}$                       (3)  $0.1\dot{4}\dot{5}$                       (4)  $3.1\dot{4}1\dot{7}$

1

解説

- (1) 1の平方根は 1と -1                      (2)  $-\sqrt{1} = -1$   
 (3)  $\sqrt{(-13)^2} = \sqrt{13^2} = 13$                       (4)  $-\sqrt{0.3^2} = -0.3$   
 (5)  $\sqrt{\frac{25}{169}} = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$                       (6)  $-(-\sqrt{0.4})^2 = -0.4$

2

解説

1.7,  $\sqrt{3}$ ,  $(-0.4)^2$  は正の数,  $-\sqrt{2}$ ,  $-1\frac{1}{2}$  は負の数である。

$$1.7 = \sqrt{1.7^2} = \sqrt{2.89}, \quad (-0.4)^2 = 0.16 = \sqrt{0.16^2} = \sqrt{0.0256}$$

0.0256 < 2.89 < 3 であるから  $\sqrt{0.0256} < \sqrt{2.89} < \sqrt{3}$

すなわち  $(-0.4)^2 < 1.7 < \sqrt{3}$

また  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$

$2 < \frac{9}{4}$  であるから  $\sqrt{2} < \sqrt{\frac{9}{4}}$                       すなわち  $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$

よって  $-\sqrt{2} > -1\frac{1}{2}$

したがって、6つの数を大きい方から順に並べると

$$\sqrt{3}, \quad 1.7, \quad (-0.4)^2, \quad 0, \quad -\sqrt{2}, \quad -1\frac{1}{2}$$

3

解説

- (1)  $\sqrt{8} \times \sqrt{0.5} = \sqrt{8 \times 0.5} = \sqrt{4} = 2$   
 (2)  $3\sqrt{2} \times (-\sqrt{6}) = -3\sqrt{2 \times 6} = -3\sqrt{12} = -6\sqrt{3}$   
 (3)  $2\sqrt{5} \times \sqrt{8} \div \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{8}}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{\frac{5 \times 8}{10}} = 2\sqrt{4} = 4$   
 (4)  $\sqrt{32} \div \sqrt{12} \div \sqrt{6} = \sqrt{32} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{12} \times \sqrt{6}}$   

$$= \sqrt{\frac{32}{12 \times 6}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

(5)  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^3 \times \sqrt{32} \times \frac{1}{9} = -\frac{(3\sqrt{2})^3}{4^3} \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{9}$   

$$= -\frac{3 \times 3 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{4 \times 4 \times 4 \times 9}$$
  

$$= -\frac{3}{4}$$

- (6)  $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{48} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$   
 (7)  $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$   
 (8)  $2\sqrt{32} + \sqrt{18} - 3\sqrt{72} = 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 18\sqrt{2} = -7\sqrt{2}$   
 (9)  $5\sqrt{3} + 2\sqrt{8} - \sqrt{147} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 7\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$   

$$= \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

4

解説

- (1)  $5\sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{24} = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$   
 (2)  $\sqrt{18} \div \sqrt{3} + \sqrt{54} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} + \sqrt{54} = \sqrt{\frac{18}{3}} + 3\sqrt{6}$   

$$= \sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$
  
 (3)  $(\sqrt{50} - \sqrt{18}) \div \sqrt{2} = (5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) \div \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$   
 (4)  $2\sqrt{50} - 2(\sqrt{2} - 1) = 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 = 8\sqrt{2} + 2$   
 (5)  $\sqrt{32} + (\sqrt{2} - 3) \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$   
 (6)  $\sqrt{3}(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{2}(3 - \sqrt{6}) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$   

$$= 4\sqrt{3}$$

5

解説

- (1)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24} = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6}$   
 $= 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{6} = 5$
- (2)  $(3\sqrt{3} + \sqrt{2})(3\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 27 - 2 = 25$
- (3)  $(\sqrt{7} + 4)(2\sqrt{7} - 3) = 2(\sqrt{7})^2 + (-3 + 4 \times 2)\sqrt{7} - 4 \times 3$   
 $= 14 + 5\sqrt{7} - 12 = 2 + 5\sqrt{7}$
- (4)  $(\sqrt{3} - 2)^2 + 4(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 + 4\sqrt{3} - 4$   
 $= 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} - 4 = 3$
- (5)  $\left(\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{5} + 3)^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(\sqrt{5} - 3)^2}{(\sqrt{6})^2}$   
 $= \frac{(\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 3 + 3^2}{6} + \frac{(\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 3 + 3^2}{6}$   
 $= \frac{5 + 6\sqrt{5} + 9}{6} + \frac{5 - 6\sqrt{5} + 9}{6} = \frac{14}{3}$
- (6)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1) = \{(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{2}\}\{(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}\}$   
 $= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 2$   
 $= 2 - 2\sqrt{3}$
- (7)  $\sqrt{27} - 6\left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 6\left(\frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{54}{3}}$   
 $= 3\sqrt{3} - 6\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{2}\right) + \sqrt{18}$   
 $= 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$   
 $= 15\sqrt{2} - 7\sqrt{3}$
- (8)  $\frac{\sqrt{8} + 3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \sqrt{54} - \frac{4 - \sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - 3\sqrt{6} - \frac{(4 - 2\sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$   
 $= \frac{2\sqrt{6} + 9\sqrt{2}}{3} - 3\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2}$   
 $= \frac{2\sqrt{6}}{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6} - (2\sqrt{2} - \sqrt{6})$   
 $= \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3}$
- (9)  $(3 + \sqrt{10})^{100} = a, (3 - \sqrt{10})^{100} = b$  とおくと

$$\{(3 + \sqrt{10})^{100} + (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2 - \{(3 + \sqrt{10})^{100} - (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2$$

$$= (a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 4ab$$

したがって

$$\{(3 + \sqrt{10})^{100} + (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2 - \{(3 + \sqrt{10})^{100} - (3 - \sqrt{10})^{100}\}^2$$

$$= 4 \times (3 + \sqrt{10})^{100} \times (3 - \sqrt{10})^{100} = 4\{(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})\}^{100}$$

$$= 4\{3^2 - (\sqrt{10})^2\}^{100} = 4(-1)^{100} = 4$$

6

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - 5x &= x(x-5) = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \times \left( \frac{5-\sqrt{13}}{2} - 5 \right) \\ &= \frac{5-\sqrt{13}}{2} \times \frac{-5-\sqrt{13}}{2} = -\frac{(5-\sqrt{13})(5+\sqrt{13})}{4} \\ &= -\frac{5^2 - (\sqrt{13})^2}{4} = -\frac{25-13}{4} = -3 \end{aligned}$$

別解  $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$  から  $2x = 5 - \sqrt{13}$

よって  $2x - 5 = -\sqrt{13}$

両辺を2乗すると  $(2x-5)^2 = (-\sqrt{13})^2$

すなわち  $4x^2 - 20x + 25 = 13$

よって  $4(x^2 - 5x) = -12$

したがって  $x^2 - 5x = -3$

$$\begin{aligned} (2) \quad a+b &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3} \\ ab &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{3} = 1 \end{aligned}$$

よって  $a^2 + 5ab + b^2 = (a+b)^2 + 3ab$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{2\sqrt{15}}{3} \right)^2 + 3 \times 1 \\ &= \frac{60}{9} + 3 = \frac{29}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (2a-b)^2 - (a-2b)^2 &= (4a^2 - 4ab + b^2) - (a^2 - 4ab + 4b^2) \\ &= 3a^2 - 3b^2 = 3(a+b)(a-b) \\ &= 3(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 2) \\ &= 3(2\sqrt{18} - 4\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{2}) \\ &= 3(6\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \\ &= 12\sqrt{2} - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

7

解説

$3.1^2 = 9.61$ ,  $3.2^2 = 10.24$  であるから  $3.1^2 < 10 < 3.2^2$

よって  $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$  …… ①

$1.4^2 = 1.96$ ,  $1.5^2 = 2.25$  であるから  $1.4^2 < 2 < 1.5^2$

よって  $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

各辺に  $-1$  をかけて  $-1.5 < -\sqrt{2} < -1.4$  …… ②

①, ② の各辺をたして  $1.6 < \sqrt{10} - \sqrt{2} < 1.8$

したがって  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$

よって  $2a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (a+b)^2$

$$\begin{aligned} &= 1^2 + (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 \\ &= 1 + (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{10}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 13 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

8

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a - \frac{2}{a} &= a - 2 \times \frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{6}+2} - 2 \times \frac{\sqrt{6}+2}{2} \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)} - (\sqrt{6}+2) \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{6}-2)}{6-4} - (\sqrt{6}+2) \\
 &= \sqrt{6}-2 - \sqrt{6}-2 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left(a + \frac{8}{a}\right)\left(2a + \frac{1}{a}\right) + \left(a - \frac{8}{a}\right)\left(2a - \frac{1}{a}\right) \\
 = 2a^2 + a \times \frac{1}{a} + \frac{8}{a} \times 2a + \frac{8}{a^2} + 2a^2 + a \times \left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{8}{a} \times 2a + \frac{8}{a^2} \\
 = 2a^2 + 1 + 16 + \frac{8}{a^2} + 2a^2 - 1 - 16 + \frac{8}{a^2} \\
 = 4a^2 + \frac{16}{a^2} = 4\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right) \\
 = 4\left\{\left(a - \frac{2}{a}\right)^2 + 2 \times a \times \frac{2}{a}\right\} \\
 = 4\left\{\left(a - \frac{2}{a}\right)^2 + 4\right\} = 4\{(-4)^2 + 4\} = 80
 \end{aligned}$$

9

解説

(1)  $\sqrt{105-5a} = \sqrt{5(21-a)}$  であるから、 $\sqrt{105-5a}$  が自然数となるのは、 $5(21-a)$  が自然数の2乗になるときである。

自然数の2乗になるためには、 $5(21-a)$  を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

よって、 $21-a$  の値は  $5 \times 1^2$  または  $5 \times 2^2$

[1]  $21-a = 5 \times 1^2$  のとき  $a = 21 - 5 = 16$

[2]  $21-a = 5 \times 2^2$  のとき  $a = 21 - 20 = 1$

したがって  $a = 1, 16$

(2)  $\sqrt{\frac{2205}{x}}$  が自然数となるのは、 $\frac{2205}{x}$  が自然数の2乗になるときである。

自然数の2乗になるためには、 $\frac{2205}{x}$  を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

$\frac{2205}{x} = \frac{3^2 \times 5 \times 7^2}{x}$  であるから、このような条件を満たす自然数  $x$  をすべて書き出すと

$5, 3^2 \times 5, 7^2 \times 5, 3^2 \times 5 \times 7^2$

すなわち  $5, 45, 245, 2205$

$x$  は3桁の自然数であるから  $x = 245$

10

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0.\dot{7} = x \text{ とおくと} \\
 x = \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10x &= 7.777\cdots \\
 -) \quad x &= 0.777\cdots \\
 \hline
 9x &= 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 0.\dot{1}2\dot{3} = x \text{ とおくと} \\
 x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1000x &= 123.123123\cdots \\
 -) \quad x &= 0.123123\cdots \\
 \hline
 999x &= 123
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 0.1\dot{4}\dot{5} = x \text{ とおくと} \\
 x = \frac{14.4}{99} = \frac{144}{990} = \frac{8}{55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 100x &= 14.54545\cdots \\
 -) \quad x &= 0.14545\cdots \\
 \hline
 99x &= 14.4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad 3.1\dot{4}1\dot{7} = x \text{ とおくと} \\
 x = \frac{3138.6}{999} = \frac{31386}{9990} = \frac{5231}{1665}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1000x &= 3141.7417417\cdots \\
 -) \quad x &= 3.1417417\cdots \\
 \hline
 999x &= 3138.6
 \end{aligned}$$