第６章

～　図形の性質　～

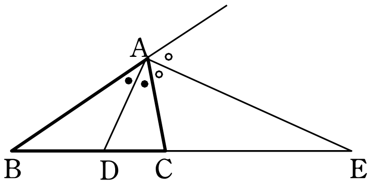
第１講　三角形と線分比

１　三角形の辺の比

1　三角形の角の二等分線と比

定理１　△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を AB : AC に内分する。

定理２　AB≠AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB : AC に外分する。



BD : DC＝AB : AC
BE : EC＝AB : AC

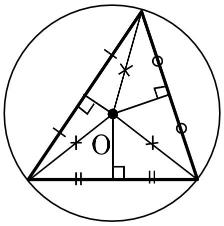
２　三角形の外心・内心・重心

1　三角形の外心・内心・重心

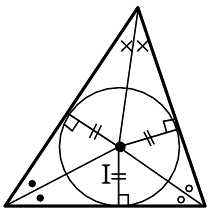
定理３　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点 (**外心**) で交わる。

定理４　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点 (**内心**) で交わる。

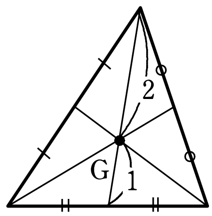
定理５　三角形の 3 本の中線は 1 点 (**重心**) で交わり，その点は各中線を 2 : 1 に内分する。



外心 O



内心 I

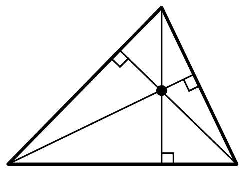


重心 G

補　三角形の垂心

1　三角形の垂心

三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は 1 点で交わる。この点を三角形の **垂心** という。

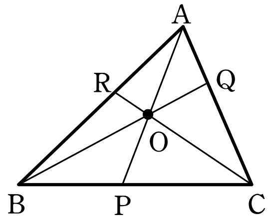


３　チェバの定理・メネラウスの定理

1　チェバの定理

定理６　△ABC の内部に点 O がある。頂点 A，B，C と O を結ぶ直線が，向かい合う辺とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

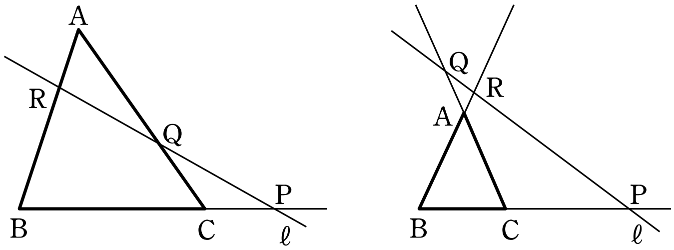
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



2　メネラウスの定理

定理７　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

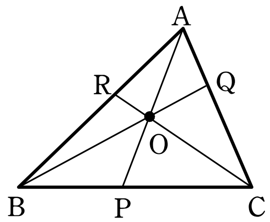
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



補　チェバの定理の逆・メネラウスの定理の逆

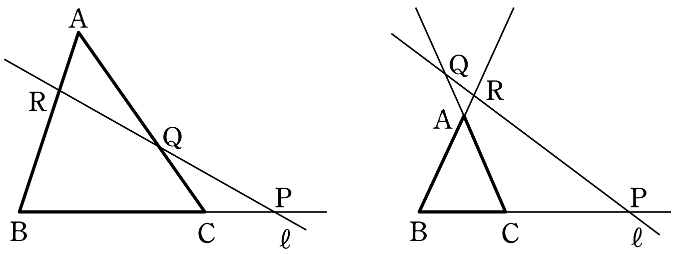
1　チェバの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB 上に，それぞれ点 P，Q，R があり，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。



2　メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとき，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。



第１講　三角形と線分比

補　三角形の面積と比

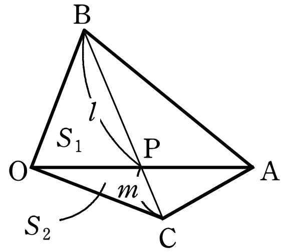
１　三角形の面積と比

1　高さが等しい２つの三角形の面積の比は，底辺の長さの比に等しい。

2　底辺の長さが等しい２つの三角形の面積の比は，高さの比に等しい。

3　底辺 OA を共有する △OAB，△OAC において，２直線 AO，BC が点 P で交わるとすると

△OAB：△OAC＝PB：PC



$S_1 : S_2 = l : m$

研究　三角形の比と角

１　三角形の３辺の大小関係

１つの三角形において

[1]　２辺の長さの和は，他の１辺の長さよりも大きい。

[2]　２辺の長さの差は，他の１辺の長さよりも小さい。

２　三角形の存在条件

正の数 a，b，c を３辺の長さとする三角形が存在するための条件は，$|b-c|<a<b+c$ が成り立つことである。

参考　３辺の長さ a，b，c の中で，a が最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$ が成り立つことである。

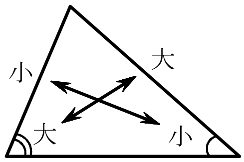
３　三角形の辺と角の大小関係

△ABC において，次が成り立つ。

$b>c \iff \angle B > \angle C$

$b=c \iff \angle B = \angle C$

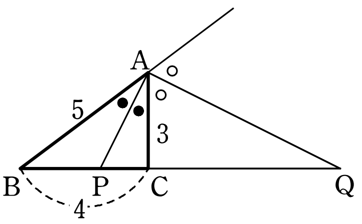
$b<c \iff \angle B < \angle C$



第１講　例題

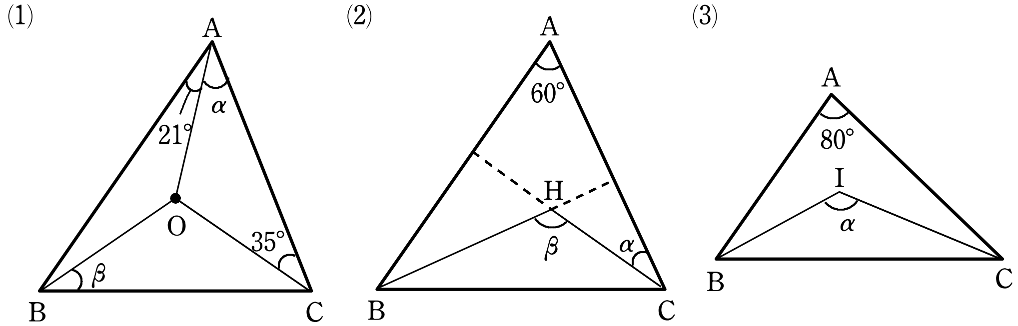
$\boxed{1}$ ★☆☆

△ABC において，AB＝5，BC＝4，CA＝3 とし，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき，線分 BP，PC，CQ の長さを求めよ。



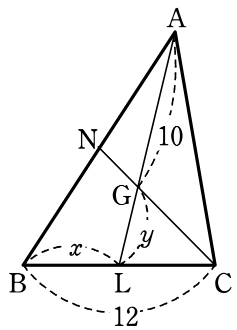
$\boxed{2}$ ★☆☆

△ABC の外心を O，垂心を H，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。



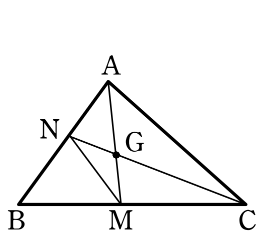
$\boxed{3}$ ★☆☆

右の図において，点 G は △ABC の重心である。
x，y の値を求めよ。



$\boxed{4}$ ★★☆

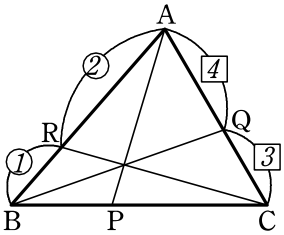
右の図の △ABC において，点 M，N をそれぞれ辺 BC，AB の中点とする。このとき，△GNM，△ABC の面積比を求めよ。



5 ★★☆

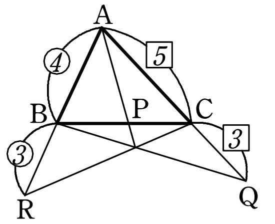
次の図において，BP : PC を求めなさい。

(1)



AR : RB＝2 : 1，AQ : QC＝4 : 3

(2)

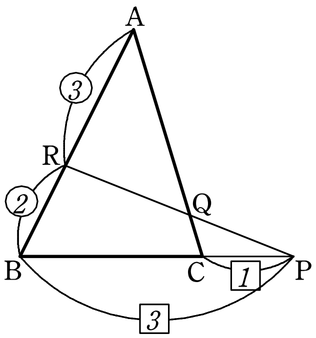


AB : BR＝4 : 3，AC : CQ＝5 : 3

6 ★★☆

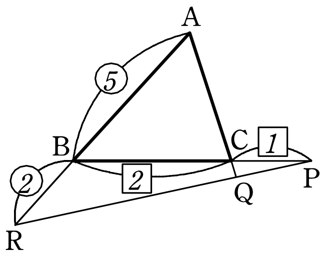
次の図において，CQ : QA を求めなさい。

(1)



AR : RB＝3 : 2，BP : PC＝3 : 1

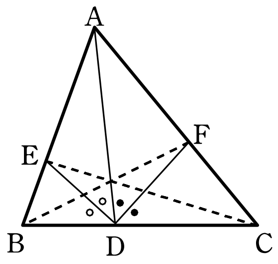
(2)



AB : BR＝5 : 2，BC : CP＝2 : 1

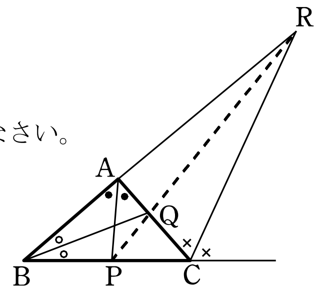
7 ★★★

△ABC の辺 BC 上に点 D をとり，∠ADB の二等分線と辺 AB の交点を E，∠ADC の二等分線と辺 AC の交点を F とする。このとき，3 直線 AD，BF，CE は 1 点で交わることを証明しなさい。



$\boxed{8}$ ★★★

△ABC の ∠A，∠B の二等分線と，∠C の外角の二等分線が，それぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と，点 P，Q，R で交わっている。
このとき，3 点 P，Q，R が一直線上にあることを証明しなさい。

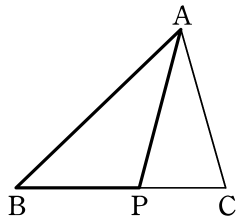


$\boxed{9}$ ★☆☆

AB＝2，BC＝3，∠A＝90° である △ABC の 3 つの内角の大小を調べよ。

$\boxed{10}$ ★★☆

△ABC において，AB＞AC とする。辺 BC 上に頂点と異なる点 P をとるとき，AB＞AP であることを証明せよ。



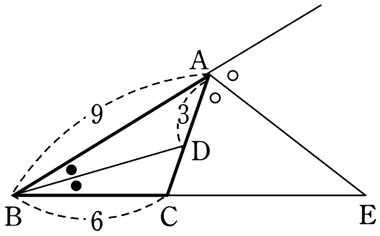
$\boxed{11}$ ★☆☆

次の長さの線分を 3 辺とする三角形が存在するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　x，6，9　　　(2)　$x+1$，$3x-3$，6

1

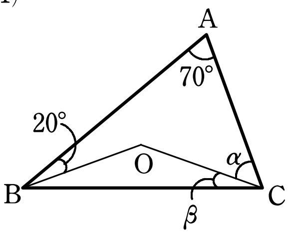
AB＝9，BC＝6 である △ABC の ∠B の二等分線と辺 CA の交点を D とし，頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。
AD＝3 であるとき，線分 DC，BE の長さを求めよ。



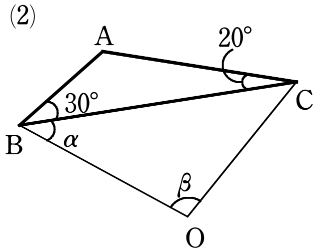
2

△ABC の外心を O，垂心を H，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。

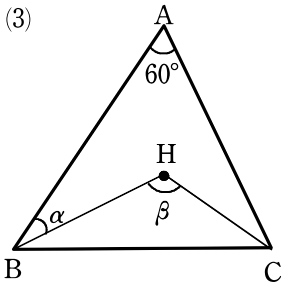
(1)



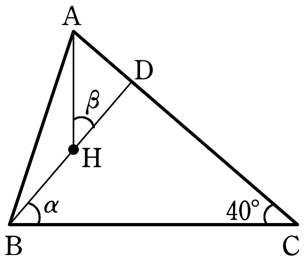
(2)



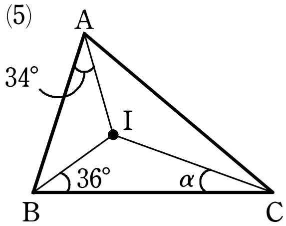
(3)



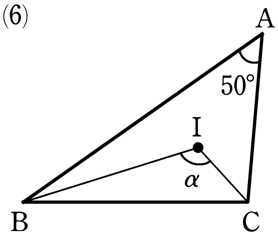
(4)



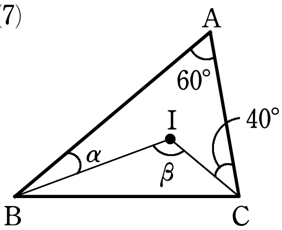
(5)



(6)

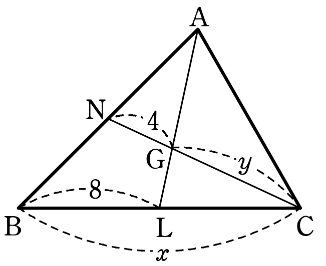


(7)



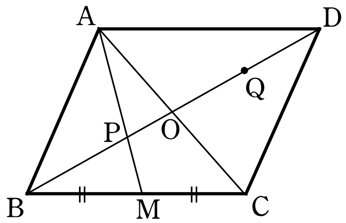
$\boxed{3}$

右の図において，点 G は △ABC の重心である。
x，y の値を求めよ。



$\boxed{4}$

右の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O，辺 BC の中点を M とし，AM と BD の交点を P，線分 OD の中点を Q とする。



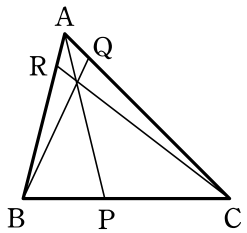
(1)　線分 PQ の長さは，線分 BD の長さの何倍か。

(2)　△ABP の面積が 6 cm^2 のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

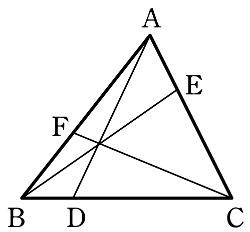
$\boxed{5}$

下の図において，次の比を求めなさい。

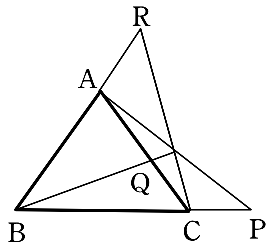
(1)　AQ : QC　　(2)　BD : DC　　(3)　AQ : QC



AR : RB＝1 : 4
BP : PC＝2 : 3



AF : FB＝3 : 2
AE : EC＝1 : 2

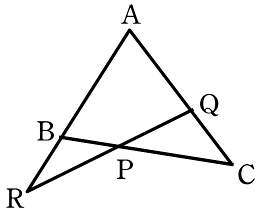


BC : CP＝3 : 1
BA : AR＝2 : 1

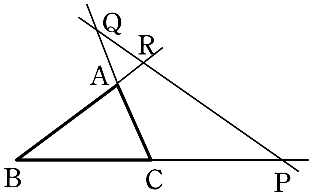
□6

下の図において，次の比を求めなさい。

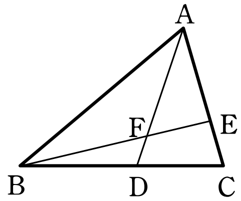
(1)　BP : PC　　(2)　RA : AB　　(3)　EF : FB



AB : BR＝2 : 1
AQ : QC＝3 : 2



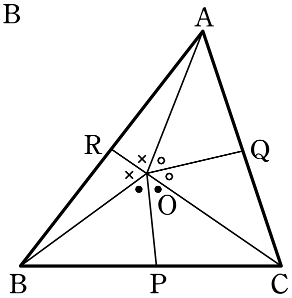
BC : CP＝1 : 1
QA : AC＝2 : 3



BD : DC＝4 : 3
AE : EC＝2 : 1

□7

△ABC の内部の任意の点を O とし，∠BOC，∠COA，∠AOB の二等分線と辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ P，Q，R とすると，AP，BQ，CR は 1 点で交わることを証明せよ。



□8

AB≒AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を P とし，∠B，∠C の二等分線がそれぞれ辺 AC，AB と交わる点を Q，R とする。このとき，3 点 P，Q，R は 1 つの直線上にあることを証明せよ。

□9

△ABC において，次の大小をそれぞれ調べよ。

(1)　AB＝$\sqrt{3}$，BC＝2，CA＝3 のとき，3 つの内角の大小

(2)　∠A＝130°，AB＝7，CA＝5 のとき，3 つの内角の大小

(3)　∠A＝60°，∠B＝70° のとき，3 辺の長さの大小

□10

∠B＝90° の △ABC の辺 BC 上に点 P をとるとき，AB＜AP＜AC であることを証明せよ。ただし，点 P は頂点 B，C と異なる点とする。

$\boxed{11}$

次の長さの線分を３辺とする三角形が存在するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　x，２，６

(2)　$x+5$，$2x+1$，$4x-1$

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

AB＝10，BC＝7，CA＝4 である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1)　線分 BD の長さ　　(2)　AI : ID

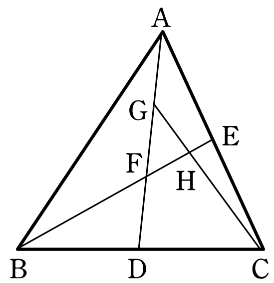
(3)　△IBD と △ABD の面積比　　(4)　△IBD と △ABC の面積比

$\boxed{2}$

右の図の △ABC で，点 D，E はそれぞれ辺 BC，CA の中点である。また，AD と BE の交点を F，線分 AF の中点を G，CG と BE の交点を H とする。BE＝9 のとき

(1)　線分 FH の長さを求めよ。

(2)　面積について，△EBC＝$\boxed{}$△FBD である。



$\boxed{3}$

重心と垂心が一致する △ABC は正三角形であることを証明せよ。

$\boxed{4}$

△ABC の内心を I とし，I から BC，CA，AB に下ろした垂線を，それぞれ ID，IE，IF とする。I は △DEF についてはどのような点か。

$\boxed{5}$

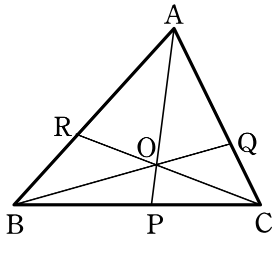
△ABC において，∠A の内角の二等分線，∠B の外角の二等分線，および ∠C の外角の二等分線は 1 点で交わり，その交点を△ABC の頂角 A 内の傍心という。この傍心を I_a とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　$\angle AI_aB=\dfrac{1}{2}\angle C$　　(2)　$\angle BI_aC=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$

$\boxed{6}$

右の図において，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点 O で交わっている。AR : RB＝3 : 2，AO : OP＝7 : 2 であるとき，次の線分比を求めよ。

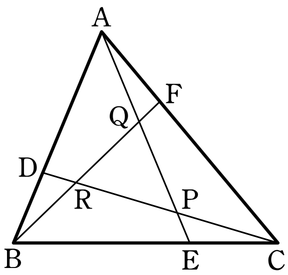
(1)　BP : PC　　(2)　AQ : QC



第１講　レベルB

$\boxed{1}$

右の図のように，△ABCにおいて，辺AB，BC，CAを2 : 1に内分する点を，それぞれD，E，Fとする。
AEとCD，BFとAE，CDとBFの交点を，それぞれP，Q，Rとするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　BQ : QFを求めなさい。

(2)　△ABC : △BQAを求めなさい。

(3)　△ABCの面積は，△PQRの面積の何倍であるか答えなさい。

$\boxed{2}$

△ABCの内部の１点をPとするとき，$AP+BP+CP>\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA)$を示せ。

第２講　円

５　円と直線

1　円の接線

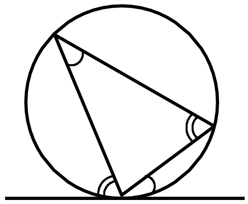
１　円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について，次が成り立つ。

直線 ℓ が点 A で円 O に接する $\iff$ $OA \perp \ell$

２　円の外部の１点からその円に引いた２つの接線の長さは等しい。

2　円の接線と弦の作る角

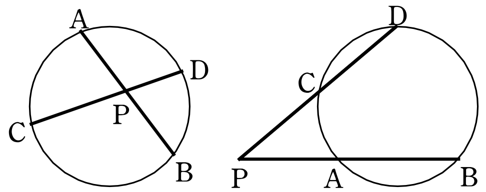
定理１０　円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



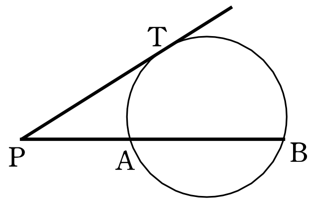
3　方べきの定理

定理１１　円の２つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。

定理１２　円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。P を通ってこの円と２点 A，B で交わる直線を引くと，$PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つ。



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$PA \cdot PB = PT^2$

3　方べきの定理の逆（定理１１の逆）

２つの線分 AB と CD，または AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば，４点 A，B，C，D は１つの円周上にある。

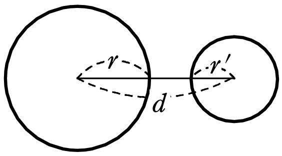
第２講　円

６　２つの円

$\boxed{1}$　２つの円の位置関係

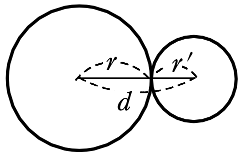
2 つの円の位置関係には，次のような場合がある。(ただし，$r>r'$)

[1]　一方が他方の外部にある



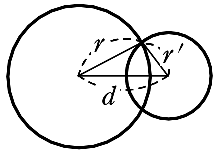
$d>r+r'$

[2]　外接する



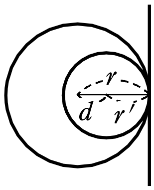
$d=r+r'$

[3]　2 点で交わる



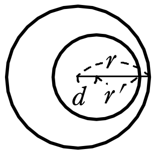
$r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する



$d=r-r'$

[5]　一方が他方の内部にある

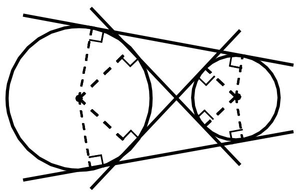


$d<r-r'$

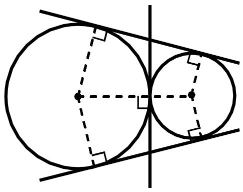
2 つの円の両方に接する直線を，2 つの円の **共通接線** という。

2 つの円の共通接線には，次のような場合がある。

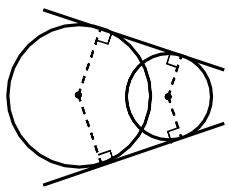
[1]　共通接線 4 本



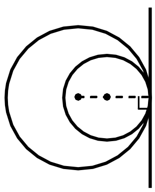
[2]　共通接線 3 本



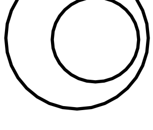
[3]　共通接線 2 本



[4]　共通接線 1 本



[5]　共通接線はない

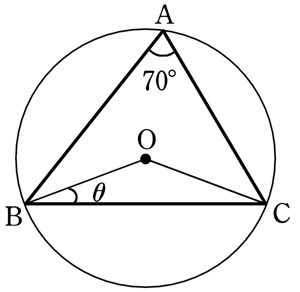


第２講　例題

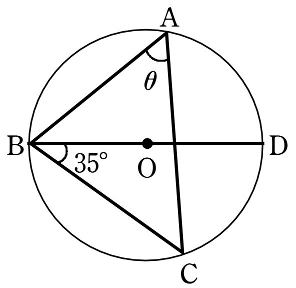
1 ★☆☆

下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円や半円の中心とする。

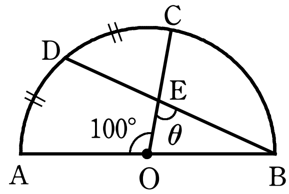
(1)



(2)



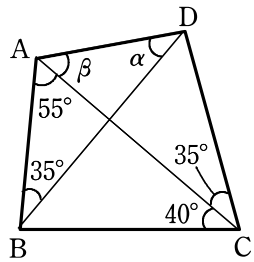
(3)



$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$

2 ★☆☆

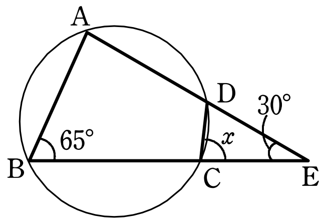
右の図において，角 α，β を求めよ。



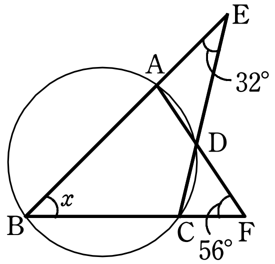
3 ★☆☆

次の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



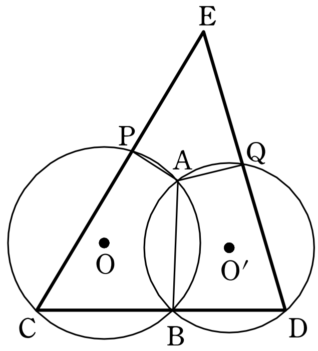
(2)



第２講　例題

$\boxed{4}$ ★★☆

2 点 A，B で交わる 2 つの円 O，O′ がある。右の図のように，B を通る直線と円 O，O′ の交点を，それぞれ C，D とし，CD を底辺とする △ECD において，辺 EC と円 O の交点を P，辺 ED と円 O′ の交点を Q とする。このとき，四角形 EPAQ は円に内接することを証明せよ。

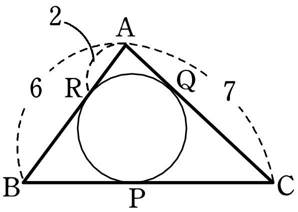


$\boxed{5}$ ★☆☆

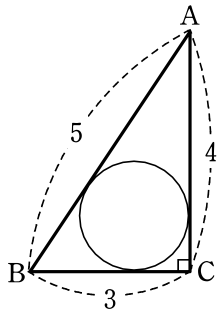
(1)　△ABC の各辺が下の図のように，点 P，Q，R で円に接している。このとき，線分 AQ，BC の長さを求めよ。

(2)　下の図の △ABC は ∠C＝90° の直角三角形である。
AB＝5，BC＝3，CA＝4 とするとき，この △ABC に内接する円の半径 r を求めよ。

(1)



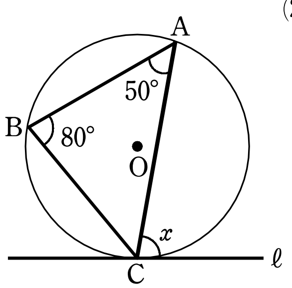
(2)



$\boxed{6}$ ★☆☆

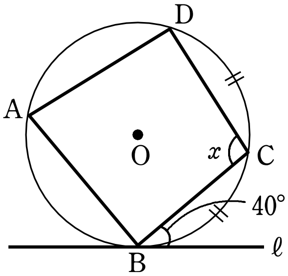
次の図において，x の値を求めよ。

(1)



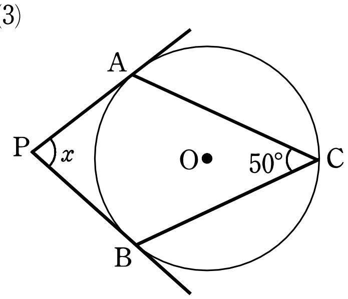
直線 ℓ は円 O の接線

(2)



直線 ℓ は円 O の接線

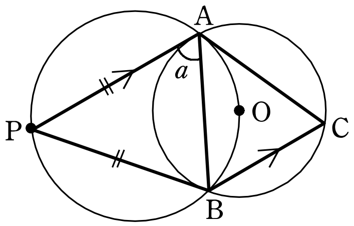
(3)



PA，PB は円 O の接線

7 ★★★

円 O の外部の点 P からこの円に接線 PA，PB を引く。点 B を通り，PA と平行な直線が円 O と再び交わる点を C とする。



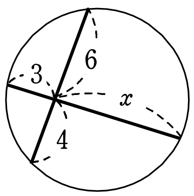
(1)　∠PAB$=a$ とするとき，∠BAC を a を用いて表せ。

(2)　直線 AC は △PAB の外接円の接線であることを証明せよ。

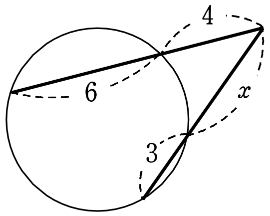
8 ★☆☆

(1)　次の図の x の値を求めよ。ただし，(ウ) の点 O は円の中心である。

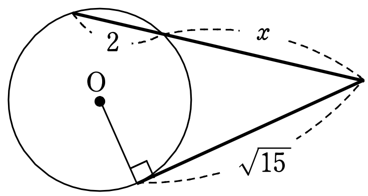
(ア)



(イ)



(ウ)



(2)　O を中心とする半径 2 の円の内部の点 P を通る弦 AB について，PA・PB$=1$ であるとき，線分 OP の長さを求めよ。

9 ★☆☆

半径 5 の円 O と半径 4 の円 O′ がある。中心間の距離 d が次のようになるとき，2 円 O，O′ の位置関係を「円 O′ が円 O の外部にある」，「外接する」，「2 点で交わる」，「内接する」，「円 O′ が円 O の内部にある」の中から選べ。

(1)　$d=10$　　(2)　$d=7$　　(3)　$d=1$

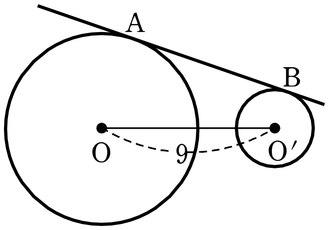
10 ★★☆

半径が異なる 2 つの円がある。2 つの円は中心間の距離が 7 のとき外接し，中心間の距離が 4 のとき内接する。2 つの円の半径を求めよ。

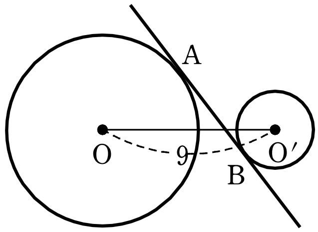
$\boxed{11}$ ★★☆

下の図 (1), (2) において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。
円 O の半径が 5，円 O′ の半径が 2 のとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)



(2)

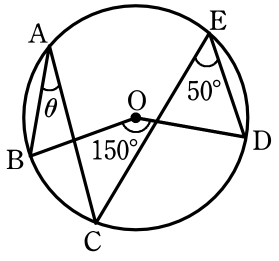


第２講　例題演習

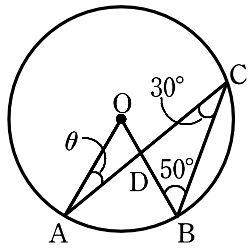
1

下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

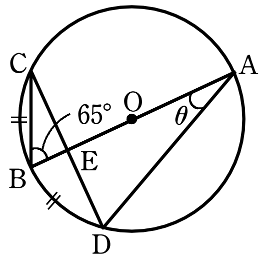
(1)



(2)



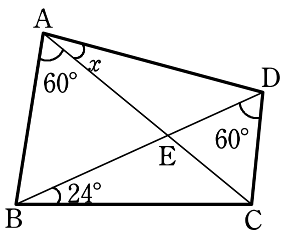
(3)　$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$



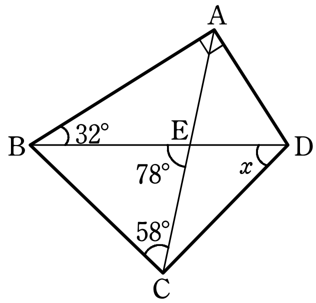
2

次の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)



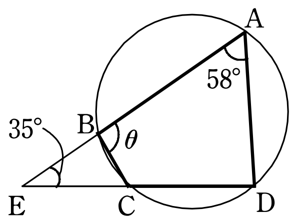
(2)



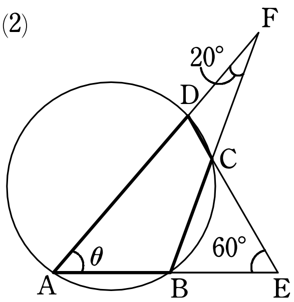
3

下の図で，四角形 ABCD は円に内接している。角 θ を求めよ。

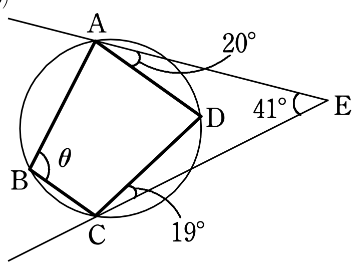
(1)



(2)

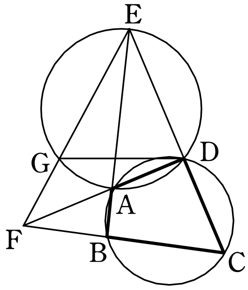


(3)



4

右の図のような円に内接する四角形ABCDにおいて，直線ABとCDの交点をE，ADとBCの交点をFとする。△ADEの外接円とEFとの交点をGとするとき，四角形DGFCは円に内接することを証明しなさい。

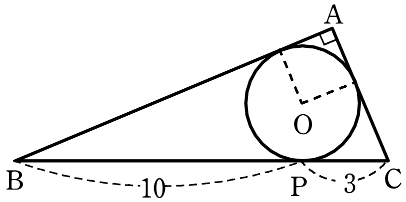


5

右の図において，円Oは $\angle A=90^\circ$ の直角三角形ABCの内接円であり，点Pは辺BC上の接点である。円Oの半径を r とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺AB，CAを r で表せ。

(2)　r の値を求めよ。

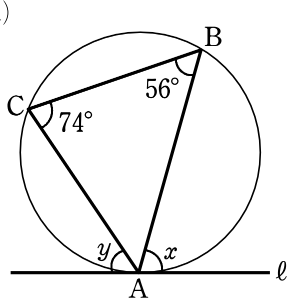


6

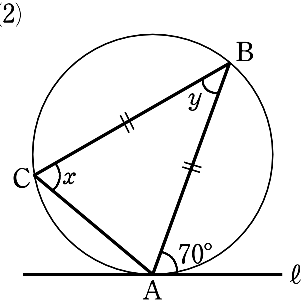
次の図において，直線 ℓ は円の接線で，Aは接点である。

$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。ただし，(2)では，BA＝BCである。

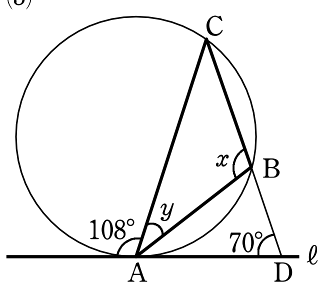
(1)



(2)

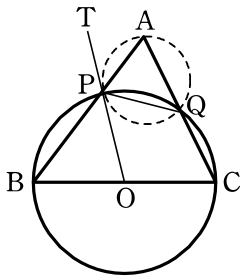


(3)



$\boxed{7}$

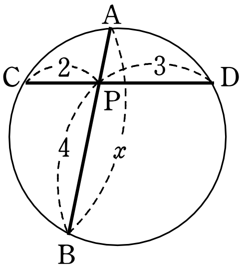
鋭角三角形 ABC の辺 BC を直径とする円 O と，辺 AB, AC との交点を，それぞれ P，Q とする。また，OP の延長上の点を T とする。このとき，PT は △APQ の外接円に接することを証明せよ。



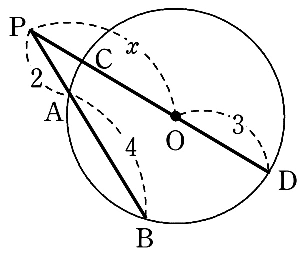
$\boxed{8}$

(1)　下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

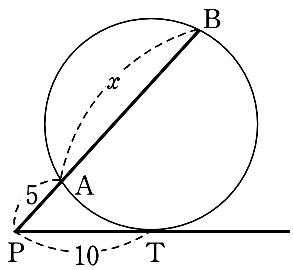
(ア)



(イ)



(ウ)



PT は円の接線

(2)　半径 3 の円 O の外部の点 P を通る直線が円 O と 2 点 A，B で交わるとする。
　PA・PB＝16 のとき，線分 OP の長さを求めよ。

$\boxed{9}$

半径が 7 と 4 の 2 つの円の中心間の距離が次のような場合，2 つの円の位置関係および共通接線の本数をいえ。

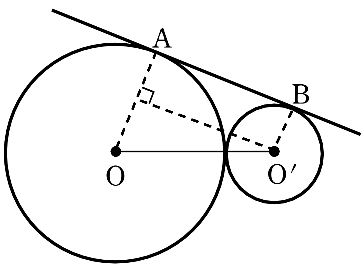
(1)　3　　(2)　5　　(3)　11　　(4)　13

$\boxed{10}$

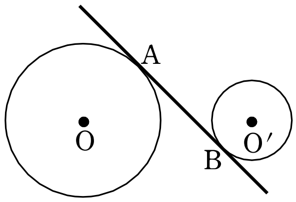
2 円 O，O′ は中心間の距離が 11 のとき外接し，5 のとき内接する。円 O の半径 r と円 O′ の半径 r' を求めよ。ただし，$r>r'$ とする。

$\boxed{11}$

(1)　右の図において，直線 AB は円 O，O′ にそれぞれ点 A，B で接している。また，2 円 O，O′ は外接している。円 O の半径が 9，円 O′ の半径が 4 であるとき，線分 AB の長さを求めよ。



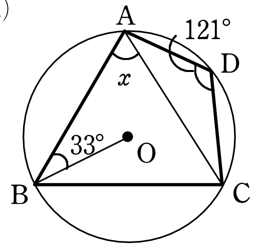
(2)　右の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。円 O，O′ の半径を，それぞれ 4，2 とし，中心 O，O′ 間の距離を 8 とするとき，線分 AB の長さを求めよ。



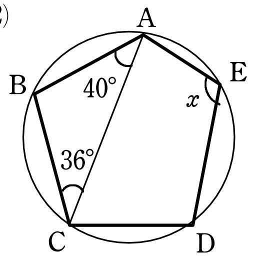
1

次の図において，$\angle x$ の大きさを求めなさい。O は円の中心とする。

(1)

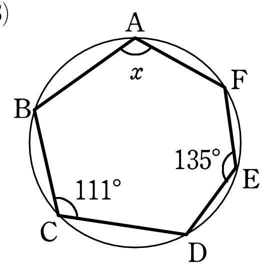


(2)



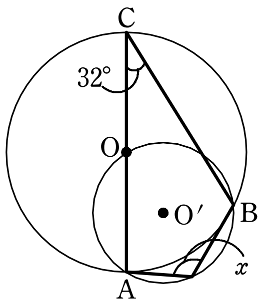
BA＝CD

(3)



2

右の図において，円 O′は，線分 AC を直径とする円 O の中心を通る。また，2 つの円 O，O′は 2 点 A，B で交わる。
このとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

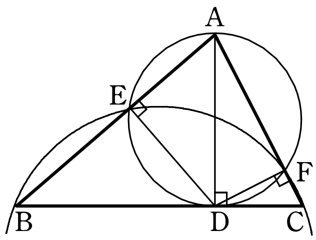


3

鋭角三角形 ABC の頂点 A から BC に下ろした垂線を AD とし，D から AB，AC に下ろした垂線を DE，DF とする。次のことを証明せよ。

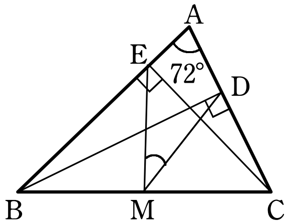
(1)　四角形 AEDF は円に内接する。

(2)　四角形 BCFE は円に内接する。



4

△ABC の頂点 B，C から辺 AC，AB にそれぞれ垂線 BD，CE を引く。また，辺 BC の中点を M とする。
$\angle A＝72°$ のとき，$\angle EMD$ の大きさを求めなさい。



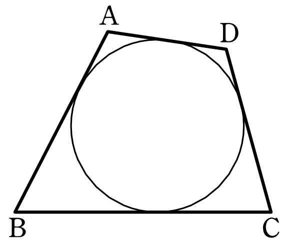
第２講　レベルA

□5

右の図において，四角形 ABCD の各辺が円に接している。
このとき，

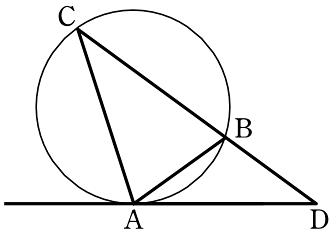
$$AB + CD = AD + BC$$

であることを証明しなさい。



□6

右の図において，AD は円の接線で，AB＝BD，CA＝CB である。このとき，∠ADB の大きさを求めなさい。



□7

$AB=7$，$BC=5$，$CA=3\sqrt{6}$ である △ABC において，辺 AC を直径とする円が辺 AB, BC と交わる点をそれぞれ D，E とし，CD と AE の交点を F とするとき，次の線分の長さを求めよ。

(1)　BD　　(2)　BE　　(3)　AE　　(4)　AF　　(5)　BF

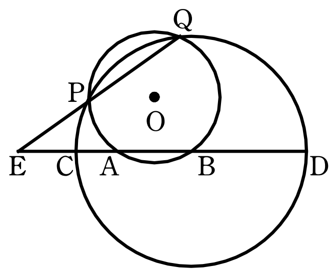
□8

右の図のように，円 O は円 B と２点 P，Q で交わり，円 B の直径 CD と点 A，B で交わっている。また，直線 PQ と直線 CD の交点を E とする。このとき，$AB=2$，$BD=3$ である。$EC=x$ とすると，

円 O について　$EP \cdot EQ = x^2 + \boxed{ア}\,x + \boxed{イ}$

円 B について　$EP \cdot EQ = x^2 + \boxed{ウ}\,x$

したがって，$x = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。



□9

直径 AB の半円周上に２点 C, D をとる。２直線 AC, BD の交点を E とするとき，
$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2$ を証明せよ。

第３講　作図・空間図形

７　作図

1　作図の意味

作図では，定規とコンパスを用いて

[1]　与えられた２点を通る直線を引くこと

[2]　与えられた１点を中心として，与えられた半径の円をかくこと

だけができる。それらの直線や円などの交点を求めて，次々と点，直線，円をかき，条件を満たす図形をかくことが作図である。

注　２枚の三角定規をすべらせて平行線を引いたり，定規の目もりで長さを測ったりすることは，上の意味の作図ではない。

８　直線と平面

1　２直線の位置関係

１　異なる２直線 ℓ，m の位置関係には，次の３つの場合がある。

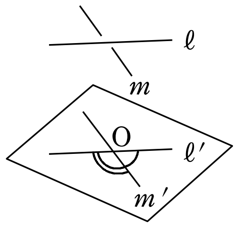
[1]　１点で交わる
[2]　平行である（$\ell \parallel m$）
……２直線は１つの平面上にある。

[3]　ねじれの位置にある　……　２直線は１つの平面上にない。

２　３直線 ℓ，m，n について

$\ell \parallel m$，$m \parallel n$　ならば　$\ell \parallel n$

３　２直線 ℓ，m が平行でないとき，任意の１点 O を通り，ℓ，m に平行な直線を，それぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ' と m' のなす角を **２直線 ℓ，m のなす角** という。
２直線 ℓ，m のなす角が直角のとき，ℓ と m は **垂直** であるといい，$\ell \perp m$ と書く。
また，**平行な２直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である。**



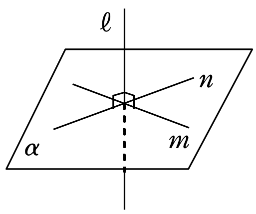
2　直線と平面の位置関係

１　直線 ℓ と平面 α の位置関係には，次の３つの場合がある。

[1]　ℓ は α に含まれる
[2]　１点で交わる
……ℓ と α は共有点をもつ。

[3]　平行である（$\ell \parallel \alpha$）……　ℓ と α は共有点をもたない。

２　直線 ℓ が，平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，ℓ は α に **垂直** である，または ℓ は α に **直交** するといい，$\ell \perp \alpha$ と書く。このとき，ℓ を平面 α の **垂線** という。
また，**直線 ℓ が，平面 α 上の交わる２直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。**

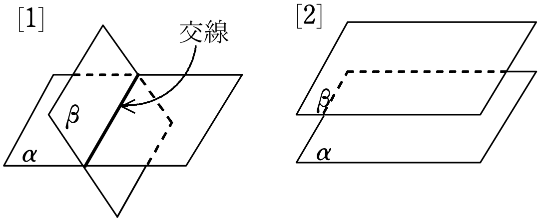


$\boxed{3}$ **2 平面の位置関係**

１　異なる 2 平面 α，β の位置関係には，次の 2 つの場合がある。

[1]　交わる

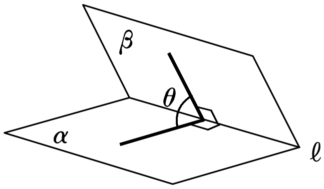
[2]　平行である ($\alpha /\!/ \beta$)



２　交わる 2 平面の交線上の点から，各平面上に，交線に垂直に引いた 2 直線のなす角を **2 平面のなす角** という。

2 平面 α，β のなす角が直角のとき，α，β は **垂直** である，または **直交** するといい，$\alpha \perp \beta$ と書く。

また，**平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。**



$\boxed{研究}$ **三垂線の定理**

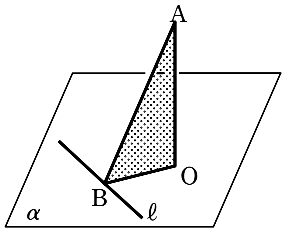
$\boxed{1}$ **三垂線の定理**

平面 α とその上の直線 ℓ がある。このとき，α 上にない点 A，α 上にあるが ℓ 上にない点 O，および ℓ 上の点 B について，次の **三垂線の定理** が成り立つ。

１　$OA \perp \alpha$，$OB \perp \ell$　ならば　$AB \perp \ell$

２　$OA \perp \alpha$，$AB \perp \ell$　ならば　$OB \perp \ell$

３　$OB \perp \ell$，$AB \perp \ell$，$OA \perp OB$　ならば　$OA \perp \alpha$



９　空間図形と多面体

1　多面体

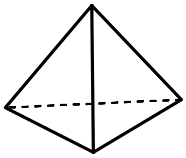
１　三角柱，四角錐などのように，平面だけで囲まれた立体を **多面体** といい，へこみのない多面体を **凸多面体** という。

次の[1]，[2]を満たす凸多面体を **正多面体** という。

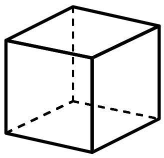
[1]　各面はすべて合同な正多角形である。

[2]　各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

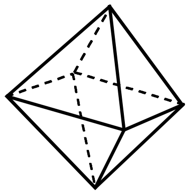
正多面体は，次の５種類しかないことが知られている。



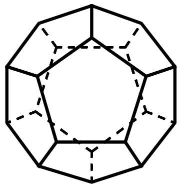
正四面体



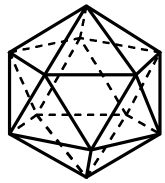
正六面体（立方体）



正八面体



正十二面体



正二十面体

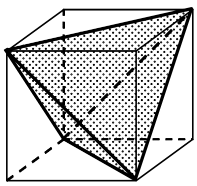
２　凸多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると $v-e+f=2$ が成り立つ。これを **オイラーの多面体定理** という。

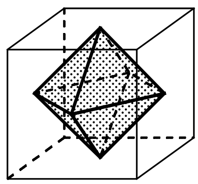
2　正多面体から切り取った立体

正四面体，正八面体は，次のようにして立方体の内部に作ることができる。

１　正四面体……立方体の各辺の隣り合わない頂点を結ぶ。

２　正八面体……立方体の各面の対角線の交点を頂点とし，隣り合った面どうしの頂点を結ぶ。





第３講　例題

$\boxed{1}$ ★★☆

長さ１の線分 AB が与えられたとき，次の線分を作図せよ。

(1)　長さ $\dfrac{5}{4}$ の線分　　　　(2)　長さ $\sqrt{7}$ の線分

$\boxed{2}$ ★★★

長さ a，b の線分が与えられたとき，２次方程式 $x^2+ax-b^2=0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ。

$\boxed{3}$ ★☆☆

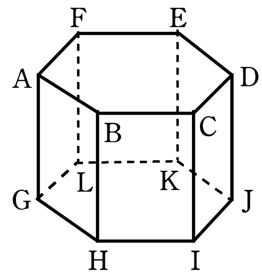
右の図の正六角柱において

(1)　辺 AB と平行な辺はどれか。

(2)　辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか。

(3)　面 BHIC と平行な辺はどれか。

(4)　面 BHIC と垂直な面はどれか。

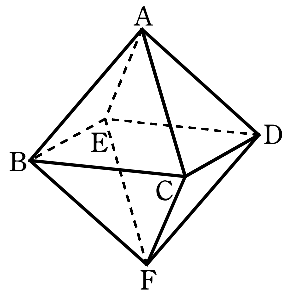


$\boxed{4}$ ★★☆

１辺の長さが６の正八面体 ABCDEF について

(1)　正八面体の体積を求めよ。

(2)　面 BCF に平行な平面で，正八面体の体積を２等分するとき，その切り口はどんな形になるか。また，その切り口の面積を求めよ。

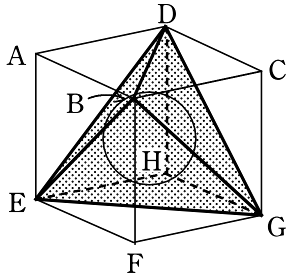


$\boxed{5}$ ★★☆

１辺の長さが８の立方体 ABCD－EFGH を平面 BDE，平面 BEG，平面 BGD，平面 DEG で切ると，正四面体 BDEG ができる。このとき，次のものを求めよ。

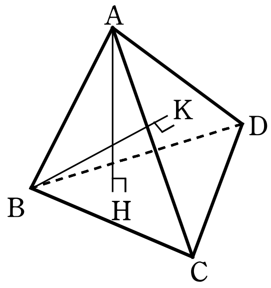
(1)　正四面体 BDEG の体積 V

(2)　正四面体 BDEG に内接する球の半径 r



$\boxed{6}$★★★

四面体 ABCD において，辺 AB と辺 CD が垂直ならば，頂点 A から平面 BCD へ下ろした垂線 AH と，頂点 B から平面 CDA へ下ろした垂線 BK は交わることを示せ。



第３講　例題演習

$\boxed{1}$

(1)　線分 AB が与えられたとき，次の点を作図せよ。

①　線分 AB を 4 : 3 に内分する点　　　　　②　線分 AB を 2 : 5 に外分する点

(2)　長さ 1 の線分 AB が与えられたとき，次の線分を作図せよ。

①　長さ $\sqrt{5}$ の線分　　　　　②　長さ $\sqrt{7}$ の線分

$\boxed{2}$

長さ a，b の線分が与えられたとき，2 次方程式 $x^2-ax-b^2=0$ の正の解を長さとする線分を作図せよ。

$\boxed{3}$

右の図の立方体において

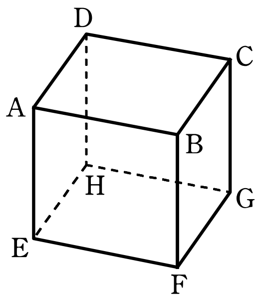
(1)　辺 AB と平行な辺はどれか。

(2)　線分 AF とねじれの位置にある辺はどれか。

(3)　辺 BC と垂直な面はどれか。

(4)　面 ABCD と平行な辺はどれか。

(5)　平面 ABGH と垂直な面はどれか。



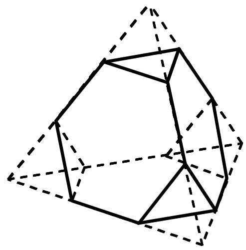
$\boxed{4}$

右の図のように，正四面体の各辺を 3 等分する点を通る平面で 4 つのかどを切り取ってできる多面体について，次の問いに答えよ。

(1)　面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

(2)　(頂点の数)−(辺の数)＋(面の数)＝2 が成り立つことを確かめよ。

(3)　もとの正四面体の体積を V とするとき，この多面体の体積を V を用いて表せ。

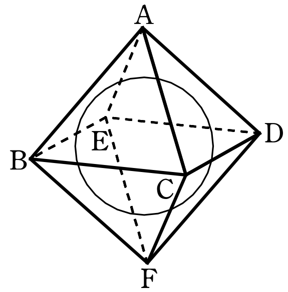


5

1辺の長さが7の正八面体ABCDEFについて，次のものを求めよ。

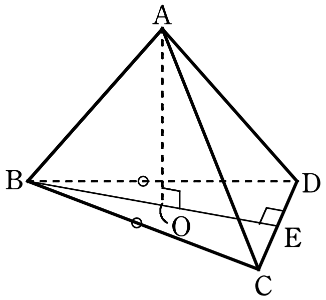
(1)　正八面体の体積V

(2)　正八面体に内接する球の半径r



6

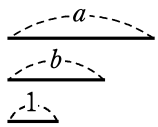
右の図のような，BC＝BDである四面体ABCDにおいて，Aから平面BCDに下ろした垂線をAOとする。Oが∠CBDの二等分線BE上にあるとき，AE⊥CDであることを証明せよ。



第３講　レベルA

1

右の図のように長さ a，b，1 の線分がある。このとき，次の長さをもつ線分を作図せよ。

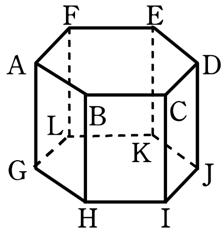


(1)　$a+b$　　(2)　$a-b$　　(3)　ab　　(4)　$a\div b$

(5)　$\sqrt{a}$　　(6)　$\sqrt{ab}$　　(7)　$\sqrt{5}$　　(8)　$\sqrt{6}$

2

右の図の正六角柱 ABCDEF－GHIJKL において，次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq 90°$ とする。

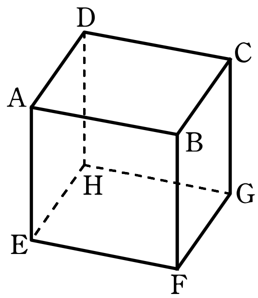


(1)　AB，KL　　(2)　AD，IK

(3)　AB，GI

3

右の図の立方体について，次の問いに答えよ。



(1)　辺 AD と平行な辺をすべて答えよ。

(2)　線分 AF とねじれの位置にある辺をすべて答えよ。

(3)　辺 BF と垂直な面をすべて答えよ。

(4)　平面 BFHD と平行な辺をすべて答えよ。

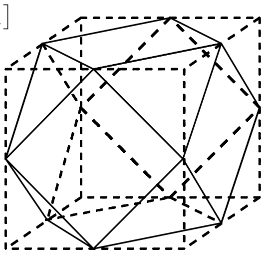
(5)　この立方体に，平行な位置関係にある面は何組あるか。

(6)　平面 ABGH と垂直な面をすべて答えよ。

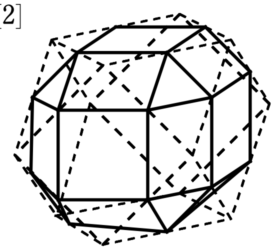
4

右の図 [1] は，正六面体の各辺の中点を通る平面で 8 個のかどを切り取った多面体である。この多面体を X とする。
右の図 [2] は，多面体 X についても各辺の中点を通る平面でかどを切り取った多面体である。この多面体を Y とする。

[1]



[2]



(1)　多面体 X の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

(2)　多面体 Y の面の数，辺の数，頂点の数を，それぞれ求めよ。

$\boxed{5}$

立方体の各面の対角線の交点を頂点とし，隣り合った面どうしの頂点を結ぶことによって，立方体の中に正八面体ができる。このとき，次の場合について，正八面体の体積を求めよ。

(1)　立方体の１辺の長さが 10

(2)　正八面体の１辺の長さが 6