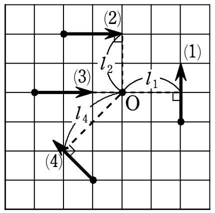
1 力のモーメント

解答　(1)　1.0 N·m　　(2)　−1.0 N·m　　(3)　0 N·m　　(4)　−1.4 N·m

指針　力のモーメントは「$M=Fl$」で求められる。l は，点 O から力の作用線までの距離 (うでの長さ) である点に注意。

解説　点 O からそれぞれの力の作用線までの距離を l_1〜l_4[m] とすると，図より



$l_1=0.20$ m,　　$l_2=0.20$ m

$l_3=0$ m[1]←,　　$l_4=0.20\times\sqrt{2}$ m

符号に注意して力のモーメントを求めると

(1)　$M=5.0\times0.20=$ **1.0 N·m**

(2)　$M=-5.0\times0.20=$ **−1.0 N·m**

(3)　$M=5.0\times0=$ **0 N·m**

(4)　$M=-5.0\times0.20\times\sqrt{2}\fallingdotseq$ **−1.4 N·m**

←[1]　力の作用線上に点 O があるので，うでの長さは 0 になる。

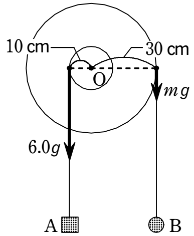
2 剛体のつりあい

解答　2.0 kg

指針　円板は，おもり A をつるした糸の張力によって反時計回りに，おもり B をつるした糸の張力によって時計回りに回転させられようとする (張力の大きさは，それぞれのおもりにはたらく重力の大きさに等しい)。これらの力の，点 O のまわりの力のモーメントの和が 0 であれば，円板はどちらにも回転しない。

解説　重力加速度の大きさを g[m/s²] とする。

図のように，円板は，$6.0g$ の力によって反時計回り，mg の力によって時計回りに回転させられようとする。点 O のまわりの力のモーメントのつりあいより (反時計回りを正とする)



$6.0g\times0.10-mg\times0.30=0$

よって

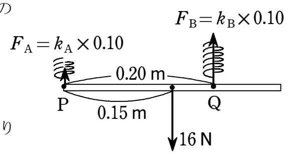
$m=$ **2.0 kg**

3 棒のつりあい

解答　k_A : 40 N/m,　k_B : 1.2×10^2 N/m

指針　棒には点 P，Q でフックの法則「$F=kx$」によるばねの弾性力，棒の中心に重力がはたらき，この 3 力がつりあう。弾性力が，どちらも大きさが不明なので，その一方である点 P のまわりの力のモーメントのつりあいを考えると k_B が求められる[1]←。また，鉛直方向の力がつりあっている。

解説　棒にはたらく力は図のようになる。ばねの弾性力は，A，B それぞれ



$F_A=k_Ax=k_A\times0.10$

$F_B=k_B\times0.10$

となる。点 P のまわりの力のモーメントのつりあいより[2]←

$(k_B\times0.10)\times0.20-16\times0.15=0$

よって　$k_B=$ **1.2×10^2 N/m**

鉛直方向の力のつりあいより

$k_A\times0.10+(1.2\times10^2)\times0.10-16=0$　　$k_A=$ **40 N/m**

←[1]　別解　ばね A，B の弾性力の合力が棒の中心にはたらき，16 N の大きさであればよいので

$k_A\times0.10 : k_B\times0.10=(0.20-0.15) : 0.15$

よって　$k_A : k_B=1 : 3$

これと

$k_A\times0.10+k_B\times0.10=16$

より k_A，k_B を求める。

←[2]　点 Q のまわりの力のモーメントのつりあいを考えてもよい。

4 棒のつりあい

解答　(a)　T : 69 N，F : 35 N　　(b)　T : 24 N，F : 36 N

(c)　T : 42 N，F : 42 N

指針　棒にはたらく力は，重心 G (棒の中点) にはたらく重力 W，糸の張力 T，外力 F の 3 力で，これらがつりあっている。(a)，(c) のように，平行でない 3 力がつりあうとき，3 力の作用線は 1 点で交わる。これを利用すれば，3 力の矢印 (大きさ，向き) を作図することができる。この図をもとに，水平，鉛直方向の力のつりあいの式，あるいは，力のモーメントのつりあいの式を立てる。(b) のような，3 つの平行な力のつりあいでは，力のモーメントのつりあいの式を立てればよい。

解説　(a)　棒にはたらく，重力 W，糸の張力 T，外力 F の 3 力の作用線は点 A で交わる (図 a)。

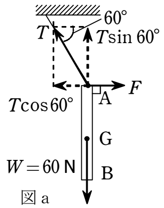


図 a

水平方向の力のつりあいより

$F-T\cos60°=0$　　$F-\dfrac{1}{2}T=0$　　…… ①

鉛直方向の力のつりあいより

$T\sin60°-W=0$　　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}T-W=0$　　…… ②

② 式より　$T=\dfrac{2}{\sqrt{3}}W=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times60=40\sqrt{3}$

$\fallingdotseq$ **69 N**

① 式より　$F=\dfrac{1}{2}T=\dfrac{40\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}\fallingdotseq$ **35 N**

(b)　水平に対する棒の傾きの角を θ とする (図 b)。点 A のまわりの力のモーメントのつりあいより

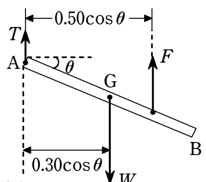


図 b

$F\times0.50\cos\theta-W\times0.30\cos\theta=0$[1]←

よって　$F=\dfrac{3}{5}W=\dfrac{3}{5}\times60=$ **36 N**

鉛直方向の力のつりあいより

$T+F-W=0$

よって　$T=W-F=60-36=$ **24 N**

(c)　外力 F と棒 (水平方向) のなす角を θ とする (図 c)。外力 F の作用線は棒 AB の垂直 2 等分線 (重心 G を通る鉛直線) と張力 T の作用線の交点 O を通る。

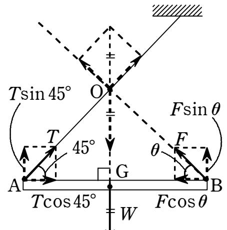


図 c

したがって　△AOG≡△BOG

よって　$\theta=45°$

水平方向の力のつりあいより

$T\cos45°-F\cos45°=0$

よって　$T=F$　　…… ①

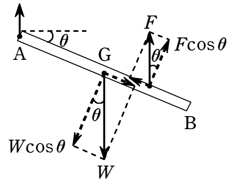
鉛直方向の力のつりあいより

$T\sin45°+F\sin45°-W=0$　　$T+F=\sqrt{2}W$　　…… ②

①，② 式より　$T=F=\dfrac{\sqrt{2}}{2}W=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times60=30\sqrt{2}$

$\fallingdotseq$ **42 N**[2]←

←[1]　別解　力を分解して考える。



点 A のまわりの力のモーメントのつりあいより

$F\cos\theta\times0.50-W\cos\theta\times0.30=0$

←[2]　別解　点 B のまわりの力のモーメントのつりあいより

$W\times0.30-T\sin45°\times0.60=0$

よって　$T=\dfrac{\sqrt{2}}{2}W\fallingdotseq$ **42 N**

5 壁に立てかけた棒のつりあい

解答　(1)　鉛直方向の力のつりあい : $N_B-W=0$,

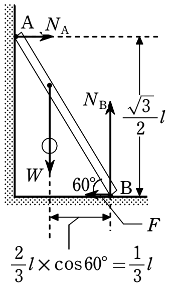
水平方向の力のつりあい : $N_A-F=0$,

点 B のまわりの力のモーメントのつりあい : $W\times\dfrac{1}{3}l-N_A\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}l=0$

(2)　$N_A=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}W$ [N],　$N_B=W$ [N],　$F=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}W$ [N]

指針　棒にはたらく力は，鉛直方向におもりをつるした糸の張力 W (おもりにはたらく重力に等しい) と床から受ける垂直抗力 N_B，水平方向に壁から受ける垂直抗力 N_A と床から受ける摩擦力 F である[1]←。これらの力のつりあい，および力のモーメントのつりあいの式を連立させて解く。

解説　(1)　棒にはたらく力は図のようになる。



鉛直方向の力のつりあいより

$$N_B-W=0 \quad \cdots\cdots ①$$

水平方向の力のつりあいより

$$N_A-F=0 \quad \cdots\cdots ②$$

点Bのまわりの力のモーメントのつりあいより

$$W\times\frac{1}{3}l-N_A\times\frac{\sqrt{3}}{2}l=0 \quad \cdots\cdots ③$$

(2)　① 式より　$N_B=W$ [N]

③ 式より　$N_A=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{3}W=\frac{2\sqrt{3}}{9}W$ [N]

これと ② 式より　$F=N_A=\frac{2\sqrt{3}}{9}W$ [N]

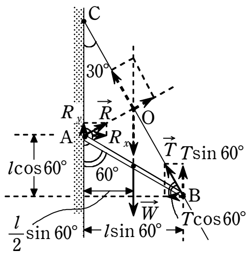
←[1]「軽い棒」とあるので，棒にはたらく重力は考えなくてよい。また，「なめらかな壁」とあるので，壁からの摩擦力ははたらかないと考えてよい。

6 棒のつりあい

解答　(1)　$\frac{\sqrt{3}}{2}W$　(2)　R_x：右向きに $\frac{\sqrt{3}}{4}W$，R_y：上向きに $\frac{1}{4}W$

指針　平行でない3力が剛体にはたらいてつりあっているとき，3力の作用線は1点で交わる。これは，つりあいの条件　力のモーメントの和＝0　の別の表現である。この問題のように，点Aでの抗力 $\vec{R}$ の向きが不明でも，重力 $\vec{W}$，糸の張力 $\vec{T}$ の2つの作用線の交点Oを見つければ，$\vec{R}$ の作用線が直線AOであることがわかる。このことと，3力のつりあいのベクトル図とから $\vec{R}$ の向きが判明する。$\vec{R}$ の作図ができたら，水平・鉛直2方向のつりあいの式と力のモーメントのつりあいの式を立てる[1]←。

解説　重力 $\vec{W}$ と糸の張力 $\vec{T}$ の作用線が，図の点Oで交わるので，抗力 $\vec{R}$ の向きは A → O となる。



水平方向の力のつりあいより

$$R_x-T\cos 60°=0$$

$$R_x-\frac{1}{2}T=0 \quad \cdots\cdots ①$$

鉛直方向の力のつりあいより

$$R_y+T\sin 60°-W=0$$

$$R_y+\frac{\sqrt{3}}{2}T-W=0 \quad \cdots\cdots ②$$

点Aのまわりの力のモーメントのつりあいより

$$T\sin 60°\times l\sin 60°-T\cos 60°\times l\cos 60°-W\times\frac{l}{2}\sin 60°=0$$

$$\frac{3}{4}T-\frac{1}{4}T-\frac{\sqrt{3}}{4}W=0 \qquad 2T-\sqrt{3}W=0 \quad \cdots\cdots ③$$

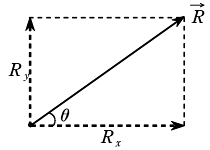
(1)　③ 式より　$T=\frac{\sqrt{3}}{2}W$

(2)　T の値を ① 式に代入して　$R_x=\frac{1}{2}T=\frac{\sqrt{3}}{4}W$ (右向き)[2]←

T の値を ② 式に代入して　$R_y=W-\frac{\sqrt{3}}{2}T=\frac{1}{4}W$ (上向き)[2]←

←[1]　$\vec{R}$ の向きを正確に求めず，ある向きに仮定して解くこともできる。その場合，R_x，R_y が負の値であれば，仮定した向きと逆向きであると考えればよい。

←[2]　参考　抗力 $\vec{R}$ の大きさと向き



$$R^2=R_x{}^2+R_y{}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}W\right)^2+\left(\frac{1}{4}W\right)^2=\frac{1}{4}W^2$$

よって　$R=\frac{1}{2}W$

$$\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって　$\theta=30°$

7 剛体にはたらく力の合力

解答　(a)　50 N　(b)　10 N　(c)　40 N

※合力 $\vec{F}$[N] は解説を参照。

指針　(a)　力を作用線上で移動させてもその効果は変わらないので，1点に2つの力がはたらくように移動し，そのベクトルを合成すればよい。

(b)，(c)　平行で同じ向きの2力の合力は，大きさはこれらの和，作用線は2力の作用点間を力の逆比に内分した所になる。一方，平行で逆向きの2力の合力は，大きさはこれらの差，作用線は2力の作用点間を力の逆比に外分した所になる(大きいほうの力の外側)。

解説　(a)　2つの力を，それらの作用線上の交点に平行移動して合成すると，図 a のようになる。

三平方の定理より

$$F=\sqrt{40^2+30^2}=\mathbf{50\ N}$$

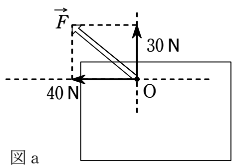


図 a

(b)　2つの力は平行で逆向きなので，その合力の大きさは2力の差になる。よって

$$F=20-10=\mathbf{10\ N}\ \ (下向き)$$

合力の作用線と 20 N の力の作用線間の距離を x[m] とすると，合力の作用線は2力の作用点間を力の逆比に外分するから

$$x:(x+0.30)=10:20$$

これを解いて　$x=0.30$ m[1]←

以上より，合力は図 b のようになる。

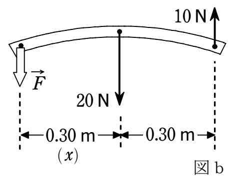


図 b

(c)　まず，30 N と 10 N の力の合力を求める。

大きさは2力の差になるので，

$$30-10=20\ \mathrm{N}\ \ (下向き)$$

合力の作用線と 30 N の力の作用線間の距離を x[m] とすると，(b) と同様に

$$x:(x+0.20)=10:30$$

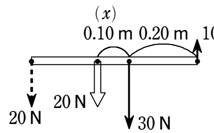


図 c

これを解いて　$x=0.10$ m

以上より，合力は図 c のようになる。

さらに，この力と 20 N の力の合力を求める。

大きさは2力の和になるので

$$F=20+20=\mathbf{40\ N}\ \ (下向き)$$

合力の作用線は2力の作用点間を力の逆比に内分するので，この場合はその中点を通る。よって，合力は図 d のようになる[2]←。

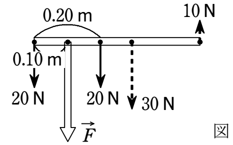


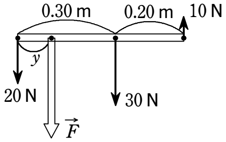
図 d

←[1]　別解　合力は1つの力であるから，その作用点のまわりの力のモーメントは0である。したがって，合成する前の2力についても，合力の作用点のまわりの力のモーメントの和は0になる。よって

$$10\times(x+0.30)-20\times x=0$$

$$x=0.30\ \mathrm{m}$$

←[2]　別解



合力の作用点のまわりの力のモーメントのつりあいより

$$20\times y+10\times(0.50-y)-30\times(0.30-y)=0$$

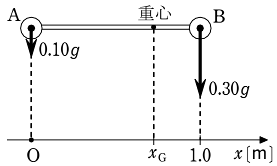
$$y=0.10\ \mathrm{m}$$

8 重心

解答　0.75 m

指針　重心の式「$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」を用いる。

解説　図のように x 座標をとり，重心の x 座標を x_G[m] とする。



「$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」より

$$x_G=\frac{0.10\times 0+0.30\times 1.0}{0.10+0.30}$$

$$=\mathbf{0.75\ m}$$[1]←

←[1]　別解　重心は2つの球にはたらく重力の合力の作用点であるので，重心はAB間を力の逆比に内分する。重力加速度の大きさを g[m/s²] として

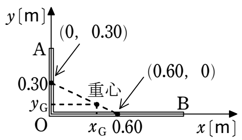
$$x_G:(1.0-x_G)=0.30g:0.10g$$

これを解いて　$x_G=\mathbf{0.75\ m}$

9 重心

解答　x_G：0.40 m，y_G：0.10 m

指針　針金を 0.60 m の部分と 1.2 m の部分に分けて考えると，重力はそれぞれの中心にはたらくと考えてよい。これらの座標を求め，x，y 座標それぞれについて重心の式を用いる。



解説　図のように針金の両端をA，Bとすると，AO部分の重心の座標は(0, 0.30)，OB部分の重心の座標は(0.60, 0)となる。
AO部分の質量を m[kg]とすると，OB部分の質量は $2m$[kg]となるから，

「$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」，

「$y_G=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$」より

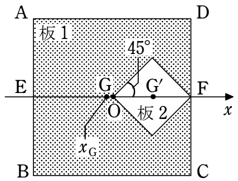
$$x_G=\frac{m\times0+2m\times0.60}{m+2m}=\mathbf{0.40\ m}$$

$$y_G=\frac{m\times0.30+2m\times0}{m+2m}=\mathbf{0.10\ m}$$

10 重心

解答　点Oより左に 3.0×10^{-2} m の位置

指針　切り抜かれた板(重心G)と，切り抜いた部分(重心G′：OFの中点)を合計したとき，その重心はもとの正方形ABCDの重心Oに一致する。



解説　切り抜かれた板を板1，切り抜いた部分の板を板2とする。
板1はEFに対して線対称だから，その重心GはEF上にある。図のように x 軸をとり，Gの座標を x_G[m]とする。
板2の重心G′はOFの中点であるから，その座標は $x_{G'}=0.21$ m である。

ここで，板2の１辺の長さは　$\mathrm{OF}\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{AB}$

よって

正方形ABCDの面積：板2の面積$=\mathrm{AB}^2:\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{AB}\right)^2=1:\dfrac{1}{8}=8:1$

質量は面積に比例するので　板1の質量：板2の質量$=(8-1):1=7:1$

板1と板2を合計したとき，その重心はもとの正方形ABCDの重心Oに一致するから，「$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」より

$$0=\frac{7\times x_G+1\times0.21}{7+1}\qquad よって\quad x_G=-3.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$ [1]←

以上より，重心Gは，**点Oより左に 3.0×10^{-2} m の位置**にある。

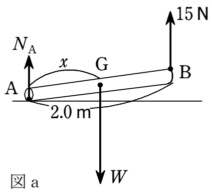
←[1]　別解　負の質量を考える方法：板1は正方形ABCDの板から板2を切り抜いたものである。
正方形ABCDの重心に8の質量が，板2の重心に-1の質量があると考えることによって，板1の重心は

$$x_G=\frac{8\times0+(-1)\times0.21}{8+(-1)}=-3.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$

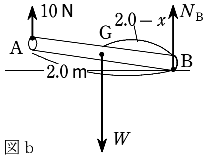
11 重心

解答　W：25 N　x：1.2 m

指針　一端をわずかに持ち上げているとき，持ち上げた力と棒は直交していると考えてよい。棒には持ち上げた力のほかに，他端で地面から受ける垂直抗力，重心に重力がはたらき，この3力がつりあう。垂直抗力の大きさはわからないので，その作用点である地面との接点のまわりについて力のモーメントのつりあいを考えれば，式の中に垂直抗力を出さずにすむ[1]←。



図a



図b

解説　B端を15 Nで持ち上げたときの力は図aのようになり，A端のまわりの力のモーメントのつりあいより

$15\times2.0-W\times x=0\qquad Wx=30\qquad\cdots①$

A端を10 Nで持ち上げたときの力は図bのようになり，B端のまわりの力のモーメントのつりあいより

$W\times(2.0-x)-10\times2.0=0$

この式より

$2.0W=20+Wx$

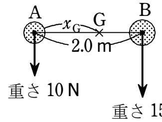
これに①式を代入して

よって　$W=\mathbf{25\ N}$

これと①式より

$x=\dfrac{30}{W}=\dfrac{30}{25}=\mathbf{1.2\ m}$

←[1]　別解　B端は15 Nで，A端は10 Nで持ち上がるので，右図の物体と状況が同じである。

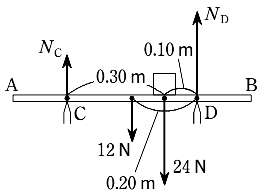


重心の式より　$x_G=\dfrac{10\times0+15\times2.0}{10+15}=\mathbf{1.2\ m}$

全体の重さ W は　$W=10+15=\mathbf{25\ N}$

12 板にのせたおもりのつりあい

解答　(1)　右図　C：12 N，D：24 N
(2)　Dより0.10 m右の所



指針　板にはC，Dから上向きの垂直抗力，おもりから重力24 N，板の中心に板の重力12 Nがはたらく。このうちC，Dからの垂直抗力の大きさが未知数となるので，C[1]←かDのまわりの力のモーメントについてつりあいを考えれば，一方の垂直抗力は式に出てこなくなる。おもりを右へ移動していくと，やがてCからの垂直抗力が0になってCから浮き上がり，板はひっくり返る。

解説　(1)　板にはたらく力は**図a**のようになる。
板がC，Dから受ける垂直抗力の大きさを N_C，N_D[N]とすると，Dのまわりの力のモーメントのつりあいより

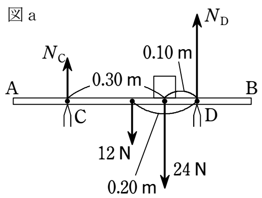
$12\times0.20+24\times0.10-N_C\times0.40=0$

よって　$N_C=\mathbf{12\ N}$

また，鉛直方向の力のつりあいより

$N_C+N_D-12-24=0$　　よって　$N_D=\mathbf{24\ N}$

図a



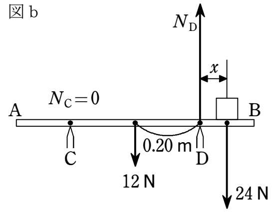
(2)　Dより x[m]右の位置でひっくり返るとすると，板にはたらく力は図bのようになる。このとき $N_C=0$ となり，板はCから浮き上がる。Dのまわりの力のモーメントのつりあいより

$12\times0.20-24\times x=0$

よって　$x=0.10$ m

以上より，**Dより0.10 m右の所**でひっくり返る。

図b

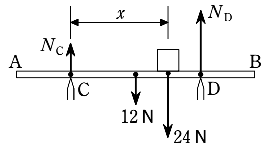


←[1]　別解　おもりの位置をCより x[m]右とする。鉛直方向の力のつりあいより

$N_C+N_D-12-24=0$

Cのまわりの力のモーメントのつりあいより

$N_D\times0.40-12\times0.20-24x=0$

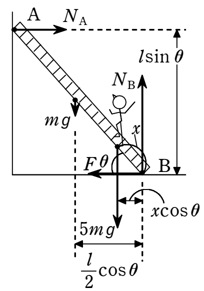


これらの式を
(1)　$x=0.30$ m
(2)　$N_C=0$
の条件で解けばよい。

13 人が登るはしごのつりあい

解答　(1)　$\dfrac{3(l+10x)}{8l}mg$　　(2)　B端から距離 $\dfrac{7}{10}l$ の所

指針　はしごには中心に重力 mg，人の位置に人の重力 $5mg$，床からB端に垂直抗力 N_B，摩擦力 F，A端で壁から垂直抗力 N_A がはたらく。B端のまわりの力のモーメント，水平方向，鉛直方向の力のつりあいを考える。はしごがすべるのは，静止摩擦力 F が最大摩擦力 $F_0=\mu N$ に達した直後である。はしご，壁，床で囲まれた三角形は3：4：5の直角三角形である。



解説　(1)　はしごにはたらく力は図のようになる。B端のまわりの力のモーメントのつりあいから

$mg\times\dfrac{l}{2}\cos\theta+5mg\times x\cos\theta-N_A\times l\sin\theta=0$[1]←

両辺を $\cos\theta$ で割って N_A を求めると

$\dfrac{mgl}{2}+5mgx=N_Al\tan\theta$[2]←$=N_Al\times\dfrac{4}{3}$

$N_A=\dfrac{3(l+10x)}{8l}mg$

水平方向の力のつりあいより

$N_A-F=0\qquad F=N_A=\mathbf{\dfrac{3(l+10x)}{8l}mg}$

(2)　鉛直方向の力のつりあいより

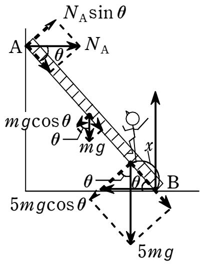
$N_B-mg-5mg=0\qquad N_B=6mg$

すべりだす直前について　$F=\mu N_B$ の関係が成りたつので

$\dfrac{3(l+10x)mg}{8l}=0.5\times6mg$

$l+10x=8l\qquad x=\dfrac{7}{10}l$　　**B端から距離 $\dfrac{7}{10}l$ の所**

←[1]　別解　力を分解して考える。



B端のまわりの力のモーメントのつりあいより

$$mg\cos\theta\times\frac{l}{2}+5mg\cos\theta\times x-N_A\sin\theta\times l=0$$

←[2]　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ を用いた。

14 半球面に立てかけた棒のつりあい

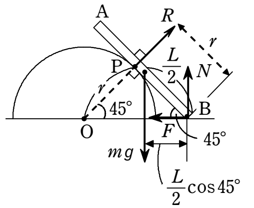
解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{2}\,mgL}{4r}$　　(2)　$\dfrac{mg(4r-L)}{4r}$　　(3)　$\dfrac{4\mu r}{1+\mu}$

指針　棒には，ABの中点に重力(鉛直下向き)，点Pに半球面からの抗力 R (半球面がなめらかなので，半球面に垂直に球面⟶棒の向き)，点Bに垂直抗力 N (鉛直上向き)と摩擦力(すべるとき点Bが右へすべるので，摩擦力はそれを止めるように水平左向き)がはたらいている。点Bのまわりの力のモーメントのつりあい，鉛直方向の力のつりあい，水平方向の力のつりあいを考える。棒の長さが L_0 のとき，摩擦力が最大摩擦力 μN になっている。

解説　(1)　棒にはたらく力は図のようになる。

$\angle\mathrm{PBO}=45°$　かつ　$\angle\mathrm{OPB}=90°$[1]←

なので，$\angle\mathrm{POB}=45°$ である。よって BP の長さは OP の長さと等しく r である。点Bのまわりについて力のモーメントのつりあいの式を立てると[2]←



$$mg\times\frac{L}{2}\cos45°-R\times r=0\text{[3]←}$$

よって

$$R=\frac{mgL}{2r}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,mgL}{4r}}$$

(2)　抗力 R を水平成分 $R\cos45°$ と鉛直成分 $R\sin45°$ に分けて，鉛直方向について力のつりあいの式を立てると

$$R\sin45°+N-mg=0$$

この式に(1)の R を代入すると

$$\frac{\sqrt{2}\,mgL}{4r}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+N-mg=0\qquad N=mg-\frac{mgL}{4r}=\boldsymbol{\frac{mg(4r-L)}{4r}}$$

(3)　静止摩擦力を F として，水平方向について力のつりあいの式を立てると

$$R\cos45°-F=0$$

R を代入すると

$$F=\frac{\sqrt{2}\,mgL}{4r}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{mgL}{4r}$$

点Bで棒がすべりださないためには，静止摩擦力 F が最大摩擦力をこえないことが必要なので

$$F\leqq\mu N$$

この式に上記の F，(2)の N の値を代入して

$$\frac{mgL}{4r}\leqq\mu\times\frac{mg(4r-L)}{4r}$$

$$L\leqq\mu(4r-L)\quad L\leqq\frac{4\mu r}{1+\mu}\qquad\text{よって，}L\text{の最大値}L_0\text{は}\quad L_0=\boldsymbol{\frac{4\mu r}{1+\mu}}$$

←[1]　棒は球面に接しており，円の接線と法線OPは直交する。

←[2]　大きさ未知の力 R，N，F のうち，2力が点Bにはたらくので，点Bのまわりについて力のモーメントを考えると，この2力は式に現れず，簡単になる。

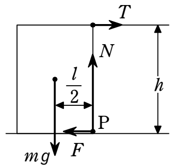
←[3]　mg のモーメントは点Bと mg の作用線の間の距離で考えよ。

15 転倒せずにすべる箱

解答　$\mu<\dfrac{l}{2h}$

指針　箱が横転して倒れる瞬間，箱の底面は床から浮き上がるが，倒れる側の端点だけは床についたままで，この点を回転軸として回転する。このときの摩擦力が最大摩擦力をこえているとすると，このように横転する前に摩擦が限界に達しているので箱は横転せずに面をすべる。

解説　張力の大きさを T，重力加速度の大きさを g とする。箱が横転し始める瞬間についてはたらく力をかくと，図のようになる[1]←。このとき，箱は点Pのまわりに回転し，床とは点Pで接している状態となるので，垂直抗力 N，摩擦力 F ともに点Pにはたらく。



水平方向，鉛直方向の力のつりあいより

水平方向：$T-F=0$　……①

鉛直方向：$N-mg=0$　……②

点Pのまわりの力のモーメントのつりあいより

$$mg\times\frac{l}{2}-T\times h=0\qquad\text{……③}$$

③式より　$T=\dfrac{mgl}{2h}$

これと①式より　$F=T=\dfrac{mgl}{2h}$　……④

②式より　$N=mg$　……⑤

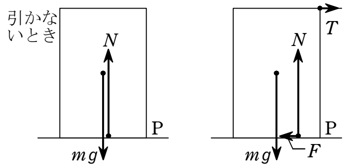
この状態で，摩擦力 F が最大摩擦力 $F_0=\mu N$ をこえていれば，箱は横転する前に床をすべり始める[2]←。つまり

$$F>\mu N$$

これに④，⑤式を代入して

$$\frac{mgl}{2h}>\mu mg\qquad\text{よって}\quad\boldsymbol{\mu<\frac{l}{2h}}$$

←[1]　T を大きくすると，垂直抗力 N の作用点はPのほうへ移動する。



←[2]　摩擦力は張力 T が大きくなるにつれて大きくなるが，$F_0=\mu N$ を少しでもこえるとすべり始める。横転するより先に F_0 に達していればよい。

16 運動量と力積

解答　(1)　$2.0\times10^2\,\mathrm{N\cdot s}$　　(2)　$2.0\times10^2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$　　(3)　$1.0\times10^2\,\mathrm{m/s}$

指針　物体に作用した力と力が作用した時間の積が力積である。物体に力積が与えられると，運動量が変化する。よって物体の速度も変化する。

解説　(1)　力積の大きさの式「$I=F\Delta t$」より

$$I=20\times10=\boldsymbol{2.0\times10^2\,\mathrm{N\cdot s}}$$

(2)　運動量の変化＝与えられた力積　となるので　**$2.0\times10^2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$**[1]←

(3)　(2)の関係「$mv'-mv=I$」を計算して

$$2.0v'-2.0\times0=2.0\times10^2\qquad\text{よって}\quad v'=\boldsymbol{1.0\times10^2\,\mathrm{m/s}}$$

←[1]　意味をはっきりさせるために，力積の単位は N・s，運動量の単位は kg・m/s と区別する。

17 運動量と力積

解答　(1)　12 N・s　　(2)　2.4 N　　(3)　9.0 m/s

指針　F-t 図が t 軸と囲む面積は力積を表す。力が一定の場合の力積は，長方形の面積から求められるが，力が一定でない場合は工夫して面積を求める必要がある。

また，物体に与えられた力積によって，物体の運動量は変化するので，物体の速度も変化する。

解説　(1)　F-t 図が t 軸と囲む図形が台形なので面積を求めると

$$I=\frac{(1.0+5.0)\times4.0}{2}=\boldsymbol{12\,\mathrm{N\cdot s}}$$

(2)　「$I=\overline{F}\Delta t$」より　$\overline{F}=\dfrac{I}{\Delta t}=\dfrac{12}{5.0}=\boldsymbol{2.4\,\mathrm{N}}$

(3)　運動量の変化＝与えられた力積　となるので「$mv'-mv=I$」[1]←より

$$3.0v'-3.0\times5.0=12\qquad\text{よって}\quad v'=\boldsymbol{9.0\,\mathrm{m/s}}$$

←[1]　「$mv+I=mv'$」(はじめ＋力積＝終わり)を用いてもよい。

18 運動量と力積

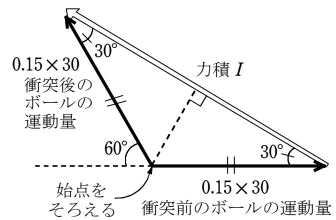
解答　(1)　7.8 N・s　　(2)　7.8×10^2 N

指針　物体の運動量の変化が一直線上でおこる場合は，正の向きを定めることにより数式のみで扱うことができるが，一直線上でおこらない場合は図をかいて解くのがわかりやすい。ピッチャーが投げたボールをセンター方向へ打ちかえしたのだから，地面に対して垂直な平面上での運動と考えられる。

解説　(1)　ボールの運動量の変化＝与えられた力積

なので，図で表すと右図のようになる。

得られたベクトルの図は二等辺三角形なので，等しい2角は30°となる。



$$I=0.15\times30\times\cos30°\times2$$

$$=0.15\times30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2$$

$$=7.785\fallingdotseq\boldsymbol{7.8\,\mathrm{N\cdot s}}$$

(2)　ボールとバットが接触している間の力は複雑に変化していると考えられるが，一定の力(平均の力)が加わっていたとして「$I=\overline{F}\Delta t$」より

$\overline{F}=\dfrac{7.785}{1.0\times10^{-2}}\fallingdotseq\mathbf{7.8\times10^{2}\ N}$

19 運動量の保存（合体）

解答　(1)　$\dfrac{mv}{M+m}$　　(2)　$\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{mv}{M+m}\right)^2$

指針　弾丸と木片が一体になるとき，運動量は保存されるが，エネルギーは保存されないことに注意する。はじめの弾丸の運動エネルギー＝終わりの位置エネルギーとしてはいけない。

解説　(1)　一体となる前後で，弾丸と木片の運動量の和は保存されるから

$$mv=(M+m)V \qquad よって\quad V=\boldsymbol{\frac{mv}{M+m}}$$

(2)　衝突直後と最高点に達した瞬間とで，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2+0=0+(M+m)gh^{[1]\leftarrow} \qquad よって\quad h=\frac{V^2}{2g}$$

(1) の結果を代入して　$h=\boldsymbol{\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{mv}{M+m}\right)^2}$

←[1]　注　$\dfrac{1}{2}mv^2+0=0+(M+m)gh$

としてはいけない。

20 動く板の上での物体の運動

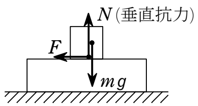
解答　(1)　$\dfrac{mv_0}{M+m}$　　(2)　$\dfrac{Mv_0}{\mu(M+m)g}$

指針　小物体が板に対して静止したとき，これら2物体の速度は等しくなっているので，2物体は「合体した」と考えることができる。また，小物体が板に対して静止するまでの時間 t は，小物体または板が受ける力積をもとに求めることができる。

解説　(1)　小物体と板の運動量の和は保存されるから

$$mv_0=(M+m)V \qquad よって\quad V=\boldsymbol{\frac{mv_0}{M+m}} \quad \cdots\cdots ①$$

(2)　小物体が板に対して静止するまでの間に，小物体が板から受ける動摩擦力の大きさは



$F=\mu N=\mu mg$　　　　　……②

小物体の運動量の変化＝小物体が受けた力積が成りたつので

$mV-mv_0=-Ft$ [1]←

これに，①，② 式を代入して

$$m\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)-mv_0=-\mu mg\cdot t \qquad よって\quad \frac{Mmv_0}{M+m}=\mu mgt$$

ゆえに　$t=\boldsymbol{\dfrac{Mv_0}{\mu(M+m)g}}$ [2]←

←[1]　小物体にはたらく動摩擦力は左向きなので，力積にはマイナスをつける。

←[2]　別解1　板に注目すると

$MV-M\times0=Ft$

$M\left(\dfrac{mv_0}{M+m}\right)=\mu mg\cdot t$

$t=\boldsymbol{\dfrac{Mv_0}{\mu(M+m)g}}$

別解2　2物体の運動方程式を立てて，それぞれの加速度を求め，2物体の速度が等しくなるまでの時間 t を求める方法もある。

21 運動量の保存（分裂）

解答　1.0 m/s

指針　静止していた物体でも分裂あるいは物体の放出などがおこると動きだす。しかし，それらの現象の前後で運動量保存則が成りたつので，運動量の和は常に0になっている。

解説　人の進んだ向きを正とする。

運動量保存則「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$(60+3.0)\times0=60v+3.0\times(-20)$ [1]←

よって　$v=\mathbf{1.0\ m/s}$

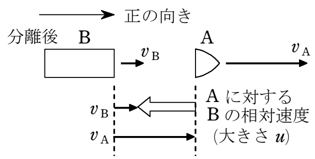
←[1]　人の進んだ向きは物体の進んだ向きとは必ず逆になるのでマイナスになる。

22 運動量の保存と相対速度

解答　(1)　$v_B-v_A=-u$　　(2)　$v+\dfrac{Mu}{M+m}$ [m/s]

指針　宇宙空間での運動を考えるときは，観測者がどこにいるのかに注意する。分離するロケットの一方から他方を見ると互いの関係は相対速度で与えられるが（もし実際にロケットに乗っていたら自分の位置から分離した部分が遠ざかっていくように見えるはずである），運動量の保存は相対速度ではなく地上に固定した視点で考える。

解説　(1)　A から見た B の相対的な速さの意味を考えてみると，右図に示したように B が A から速さ u [m/s] で負の向きに遠ざかっていることがわかる。



したがって　$\boldsymbol{v_B-v_A=-u}$ [1]←

(2)　地上の観測者から見た運動量の保存を考えると

「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$(M+m)v=mv_A+Mv_B$ [2]←

(1) の結果より　$v_B=v_A-u$　を代入して

$(M+m)v=mv_A+M(v_A-u)$ [3]← $=(M+m)v_A-Mu$

よって　$v_A=\boldsymbol{v+\dfrac{Mu}{M+m}}$ [m/s]

←[1]　相対速度の式「$v_{AB}=v_B-v_A$」において $v_{AB}=-u$ より

$-u=v_B-v_A$

←[2]　注　次のようにはしないこと。

$(M+m)v=mv_A+Mu$

または

$(M+m)v=mv_A+M(-u)$

←[3]　地上から見て B は，正の向きに進んでいるので

$v_B=v_A-u>0$

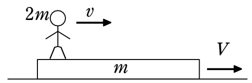
23 重心の運動

解答　(1)　$-2v$　　(2)　$\dfrac{l}{6}$　　(3)　$\dfrac{5x_1+x_2}{6}$　　(4)　$x_1:\dfrac{l}{3}$，$x_2:-\dfrac{2l}{3}$

指針　人と板をあわせた系を考えると，水平方向に外力がはたらいていないので，水平方向について運動量保存則が成りたつ。運動量保存則が成りたつとき，重心の速度「$v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$」は一定に保たれる。

したがって，重心の速度ははじめの状態から変わらず常に0であり，重心の位置は変わらない。

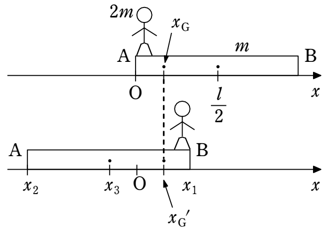
解説　(1)　人と板の運動量の和は保存されるから



$0=2m\cdot v+m\cdot V$

よって　$V=\boldsymbol{-2v}$

(2)　このときの板の重心の位置は



$x=\dfrac{l}{2}$ であるから

$$x_G=\frac{2m\times0+m\cdot\dfrac{l}{2}}{2m+m}=\boldsymbol{\frac{l}{6}} \quad \cdots\cdots ①$$

(3)　このときの板の重心の位置を

x_3 とすると，$x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ [1]← より

$$x_G'=\frac{2m\cdot x_1+m\cdot x_3}{2m+m}=\frac{2m\cdot x_1+m\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}}{2m+m}=\boldsymbol{\frac{5x_1+x_2}{6}} \quad \cdots\cdots ②$$

(4)　人と板とからなる物体系には，水平方向に外力がはたらかないので，重心の位置は変わらない。したがって $x_G=x_G'$ である。これに ①，② 式を代入して

$$\frac{l}{6}=\frac{5x_1+x_2}{6} \qquad よって\quad 5x_1+x_2=l \quad \cdots\cdots ③$$

また，板の長さは l であるから，x_1 と x_2 の間には次の関係式が成りたつ。

$x_1-x_2=l$　　　　　　……④

③，④ 式より　$x_1=\boldsymbol{\dfrac{l}{3}}$，$x_2=\boldsymbol{-\dfrac{2l}{3}}$

←[1]　板の重心の位置 x_3 は，A 端 $(x=x_2)$ と B 端 $(x=x_1)$ の中点であるから

$x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

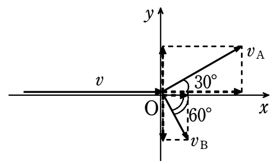
24 平面上の運動量の保存

解答　$v_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v$，$v_B=\dfrac{1}{2}v$

指針　平面内での衝突では，運動量を垂直な2方向の成分に分解し，各方向ごとに運動量保存則を考える。

解説　小球 A，B の質量をともに m とおく。

また，小球 A のはじめの速度の向きに x 軸をとり，それと垂直な方向に y 軸をとる。x 軸方向の運動量保存則より



$mv=mv_A\cos30°+mv_B\cos60°$

よって　$v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_A+\dfrac{1}{2}v_B$　　……①

y 軸方向の運動量保存則より

$0=mv_A\sin30°+m(-v_B\sin60°)$

よって　$0=\dfrac{1}{2}v_A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_B$　　ゆえに　$v_A=\sqrt{3}\,v_B$　　……②

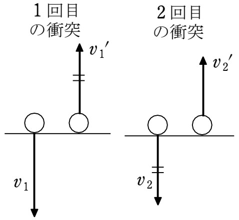
①，② 式より　$v_A=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}v}$，$v_B=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}v}$

25 床との衝突

解答　(1)　0.80　　(2)　2.6 s　　(3)　直前：11 m/s，直後：9.0 m/s

指針　ボールと床との衝突では，反発係数の式「$e=-\frac{v'}{v}$」を用いる。衝突後のボールの運動は，対称性に着目して考えるとよい。

解説　(1)　ボールが床に衝突する直前・直後の速さを v_1，v_1'[m/s] とする。



自由落下の式「$v^2=2gy$」より

$v_1{}^2=2\times9.8\times10$　　……①

鉛直投げ上げの式「$v^2-v_0{}^2=-2gy$」より

$0^2-v_1'^2=-2\times9.8\times6.4$　　……②

①，② 式より　$\frac{v_1'^2}{v_1{}^2}=\frac{6.4}{10}=0.64$

よって　$\frac{v_1'}{v_1}=0.80$

反発係数 e は　$e=-\frac{-v_1'}{v_1}=\frac{v_1'}{v_1}=\mathbf{0.80}$ [1]←

(2)　ボールが 10 m の距離を自由落下するのにかかる時間 t_0[s] は，「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より

$10=\frac{1}{2}\times9.8\times t_0{}^2$　　よって　$t_0=\sqrt{\frac{2\times10}{9.8}}=\frac{10}{7}$ s

ボールがはねかえってから，最高点に達するまでにかかる時間 t_1[s] は，「$v=v_0-gt$」より

$0=v_1'-gt_1$　　よって　$t_1=\frac{v_1'}{g}=\frac{\sqrt{2\times9.8\times6.4}}{9.8}=\sqrt{\frac{2\times6.4}{9.8}}=\frac{8}{7}$ s [2]←

以上より　$T=t_0+t_1=\frac{10}{7}+\frac{8}{7}=\frac{18}{7}\fallingdotseq\mathbf{2.6\ s}$

(3)　2回目にボールが床に衝突する直前・直後の速さを v_2，v_2'[m/s] とする。運動の対称性から

$v_2=v_1'=\sqrt{2\times9.8\times6.4}=11.2\fallingdotseq\mathbf{11\ m/s}$

また，反発係数の式より

$e=-\frac{-v_2'}{v_2}$　　よって　$v_2'=ev_2=0.80\times11.2=8.96\fallingdotseq\mathbf{9.0\ m/s}$

←[1]　別解　「$e=\sqrt{\frac{h'}{h}}$」より　$e=\sqrt{\frac{6.4}{10}}=\frac{8}{10}=\mathbf{0.80}$

←[2]　別解1　t_1 は 6.4 m の距離を自由落下するのにかかる時間に等しい。

よって「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より　$6.4=\frac{1}{2}\times9.8\times t_1{}^2$　　$t_1=\sqrt{\frac{2\times6.4}{9.8}}=\frac{8}{7}$ s

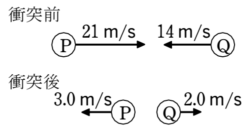
別解2　「$e=\frac{t'}{t}$」より　$t_1=et_0=0.80\times\frac{10}{7}=\frac{8}{7}$ s

26 反発係数（２物体の衝突）

解答　(1)　6.0 kg　　(2)　0.14

指針　2物体が衝突したとき，衝突の前後で運動量保存則が成りたち，速度の変化からは反発係数を求めることができる。

解説　(1)　右向きを正の向きとする。運動量保存則「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より



$4.0\times21+m\times(-14)=4.0\times(-3.0)+m\times2.0$

よって　$m=\mathbf{6.0\ kg}$

(2)　反発係数の式「$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$e=-\frac{(-3.0)-2.0}{21-(-14)}=\frac{1}{7}\fallingdotseq\mathbf{0.14}$ [1]←

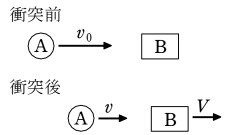
←[1]　反発係数 e は衝突前後での相対速度の比なので，単位はない。

27 衝突後にはねかえる条件

解答　(1)　$v=\frac{(m-eM)v_0}{M+m}$，$V=\frac{(1+e)mv_0}{M+m}$　　(2)　$\frac{m}{M}<e\leqq1$

指針　2物体の衝突の問題では，運動量保存則の式と反発係数の式を立て，それらを連立させて解く。「はねかえる(速度の向きが変わる)」とは，衝突の前後で速度の符号が変わるということである。

解説　(1)　衝突前後での運動量保存則



「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$mv_0=mv+MV$　　……①

反発係数の式「$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$e=-\frac{v-V}{v_0-0}$　　よって　$ev_0=-v+V$　　……②

①＋②×m より

$mv_0+emv_0=mv+MV-mv+mV$　　よって　$V=\frac{(1+e)mv_0}{M+m}$ [1]←

①－②×M より

$mv_0-eMv_0=mv+MV+Mv-MV$　　よって　$v=\frac{(m-eM)v_0}{M+m}$ [1]←

(2)　衝突後，小球 A がはねかえる(速度の向きが変わる)ためには，$v<0$ であればよい。

$v=\frac{(m-eM)v_0}{M+m}<0$　　よって　$m-eM<0$　　ゆえに　$e>\frac{m}{M}$

e の値のとりうる範囲は $0\leqq e\leqq1$ であるから[2]←，$\frac{m}{M}<e\leqq1$

←[1]　別解　② 式より

$V=v+ev_0$　……②′

②′ 式を ① 式に代入して

$mv_0=mv+M(v+ev_0)$

$(m-eM)v_0=(M+m)v$

$v=\frac{(m-eM)v_0}{M+m}$

これを ②′ 式に代入して

$V=\frac{(1+e)mv_0}{M+m}$

←[2]　注　求めた e の範囲が $0\leqq e\leqq1$ を満たしているかを確認すること。

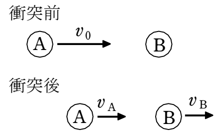
28 弾性衝突と完全非弾性衝突

解答　(1)　$v_A=0$，$v_B=v_0$，力学的エネルギーの変化量：0

(2)　$v_A=\frac{v_0}{2}$，$v_B=\frac{v_0}{2}$，力学的エネルギーの変化量：$-\frac{1}{4}mv_0{}^2$

指針　弾性衝突 ($e=1$) の場合には，力学的エネルギーは保存される。それ以外の衝突 ($0\leqq e<1$) では，力学的エネルギーは減少する。

解説　衝突前後での運動量保存則



「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$mv_0=mv_A+mv_B$

よって　$v_0=v_A+v_B$　　……①

反発係数の式　「$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$e=-\frac{v_A-v_B}{v_0-0}$　　よって　$ev_0=-v_A+v_B$　　……②

①，② 式より　$v_A=\frac{1-e}{2}v_0$，$v_B=\frac{1+e}{2}v_0$

(1)　弾性衝突の場合は $e=1$ より　$v_A=\mathbf{0}$，$v_B=\boldsymbol{v_0}$ [1]←

衝突前後での力学的エネルギーの変化量は

$\left(\frac{1}{2}mv_A{}^2+\frac{1}{2}mv_B{}^2\right)-\frac{1}{2}mv_0{}^2=0+\frac{1}{2}mv_0{}^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\mathbf{0}$

(2)　完全非弾性衝突の場合は $e=0$ より　$v_A=\boldsymbol{\frac{v_0}{2}}$，$v_B=\boldsymbol{\frac{v_0}{2}}$ [2]←

衝突前後での力学的エネルギーの変化量は

$\left(\frac{1}{2}mv_A{}^2+\frac{1}{2}mv_B{}^2\right)-\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2$

$=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)\times mv_0{}^2=\boldsymbol{-\frac{1}{4}mv_0{}^2}$ [3]←

←[1]　参考　質量が等しい2物体が弾性衝突 ($e=1$) を行うと，互いの速度が入れかわる。

←[2]　参考　2物体が完全非弾性衝突 ($e=0$) を行うと，衝突後の速度は互いに等しくなる(合体する)。

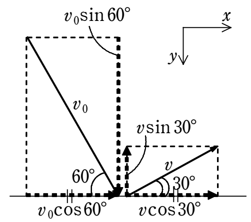
←[3]　注　「変化量」を求めるので，答えは負の値となる。すなわち，力学的エネルギーは減少する。

29 壁との斜めの衝突

解答　(1)　$\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$　　(2)　$\frac{1}{3}$　　(3)　$\frac{2\sqrt{3}}{3}mv_0$

指針　壁との斜めの衝突では，速度を壁に平行な成分と壁に垂直な成分とに分けて考える。なめらかな壁の場合には，壁に平行な速度の成分は変化しない。壁に垂直な速度の成分は反発係数の式に従う。

解説　(1)　壁に平行な方向に x 軸をとり，壁に垂直な方向に y 軸をとる。衝突前後で速度の x 成分は変化しないので



$v_0\cos60°=v\cos30°$

よって　$\frac{1}{2}v_0=\frac{\sqrt{3}}{2}v$

$v=\frac{1}{\sqrt{3}}v_0=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}v_0}$

(2)　速度の y 成分について，反発係数の式を用いると

$$e=-\frac{-v\sin 30^\circ}{v_0\sin 60^\circ}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}v_0\times\dfrac{1}{2}}{v_0\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$$

(3)　小球が壁から受けた力積は，小球の運動量の変化に等しい。衝突前後で運動量の x 成分は変化しないので，y 成分のみの変化を求めればよい。

力積（＝運動量の変化）は

$$-mv\sin 30^\circ-mv_0\sin 60^\circ\ \text{[1]←}=-m\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}v_0\times\frac{1}{2}-mv_0\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{3}mv_0$$

よって，力積の大きさは　$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}mv_0}$

←[1]　注　運動量は向きに注意すること。運動量の変化を

$mv\sin 30^\circ-mv_0\sin 60^\circ$

としてはいけない。

30 ３球の逐次衝突

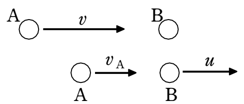
解答　(1)　$v_A=\frac{1-2e}{3}v$，$u=\frac{1+e}{3}v$　　(2)　$v_B=\frac{(2-3e)(1+e)}{15}v$，$v_C=\frac{2(1+e)^2}{15}v$

(3)　$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq e\leqq 1$

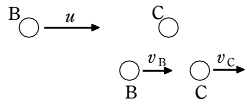
指針　衝突のたびに，運動量保存則の式と反発係数の式を立てて，衝突後の速度を求める。AとBが２度目の衝突をしないためには，$v_A\leqq v_B$ を満たさなければならない。

解説　(1)　衝突前に小球Aが進む向きを正とする。

１回目の衝突（AとB）



２回目の衝突（BとC）



AとBの衝突前後での運動量保存則

「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$$mv=mv_A+2mu$$

よって　$v=v_A+2u$　　……①

反発係数の式　「$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$$e=-\frac{v_A-u}{v-0}$$

よって　$ev=-v_A+u$　　……②

①，② 式より　$v_A=\boldsymbol{\frac{1-2e}{3}v}$，$u=\boldsymbol{\frac{1+e}{3}v}$

(2)　BとCの衝突前後での運動量保存則「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$2mu=2mv_B+3mv_C$　　よって　$2u=2v_B+3v_C$　　……③

反発係数の式　「$e=-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$e=-\frac{v_B-v_C}{u-0}$　　よって　$eu=-v_B+v_C$　　……④

③，④ 式から v_B，v_C を求め，(1) で求めた u の値を代入して

$$v_B=\frac{2-3e}{5}u=\frac{2-3e}{5}\times\frac{1+e}{3}v=\boldsymbol{\frac{(2-3e)(1+e)}{15}v}$$

$$v_C=\frac{2(1+e)}{5}u=\frac{2(1+e)}{5}\times\frac{1+e}{3}v=\boldsymbol{\frac{2(1+e)^2}{15}v}$$

(3)　AとBが２度目の衝突をしないためには，$v_A\leqq v_B$ を満たす必要がある[1]←。

よって

$$\frac{1-2e}{3}v\leqq\frac{(2-3e)(1+e)}{15}v$$

これを変形して　$5(1-2e)\leqq 2-e-3e^2$

$3e^2-9e+3\leqq 0$　　よって　$e^2-3e+1\leqq 0$

ここで，$e^2-3e+1=0$ の解は

$$e=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2}\ \text{[2]←}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，$e^2-3e+1\leqq 0$ の解は，$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq e\leqq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる。

e の値のとりうる範囲は $0\leqq e\leqq 1$ であるから[3]←　$\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq e\leqq 1}$

←[1]　$v_A<v_B$ であれば，Bから見たA速度は $v_A-v_B<0$ となり，AはBから遠ざかっていく。$v_A=v_B$ であれば，AとBの間の距離は縮まらず，衝突しない。

←[2]　$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

←[3]　注　求めた e の範囲が $0\leqq e\leqq 1$ を満たしているかを確認すること。

31 ばねをつけた物体の衝突

解答　(1)　$\frac{5}{4}v$　　(2)　$\frac{3}{8}mv^2$　　(3)　$\frac{v}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$　　(4)　$-\frac{v}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}$

指針　物体の衝突では運動量は保存される。ばねを間にはさむ衝突では力学的エネルギーも保存される。

　また，Aはばねを押し縮めると進む向きと逆向きの弾性力を受け減速していくが，BはAの進む向きに弾性力を受け加速していく。A，Bの速度が等しくなると，ばねはそれ以上に押し縮められなくなる。

解説　(1)　２つの物体の相対速度が０になったときの物体Aの速度は，物体Bの速度と等しい。運動量保存則「$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$」より

$$m\times 2v+3m\times v=(m+3m)V$$

よって　$V=\boldsymbol{\frac{5}{4}v}$

(2)　ΔK＝衝突前の運動エネルギー － 衝突後の運動エネルギー　より

$$\Delta K=\frac{1}{2}m(2v)^2+\frac{1}{2}\times 3mv^2-\frac{1}{2}\times 4mV^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}mv^2}$$

(3)　力学的エネルギー保存則より，(2) の減少した分がばねの弾性エネルギーとして蓄えられる。ばねの最大の縮みを x とすると

$\frac{1}{2}kx^2=\frac{3}{8}mv^2$　　よって　$x=\boldsymbol{\frac{v}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}}$

(4)　加速度を a（右向きを正）とする。このとき，物体Aはばねから左向きに大きさ kx の弾性力を受けている。運動方程式「$ma=F$」より

$ma=-kx$　　よって　$a=-\frac{k}{m}x=\boldsymbol{-\frac{v}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}}$

32 なめらかな床との斜衝突

解答　(1)　$\sqrt{\frac{2h}{g}}$　　(2)　$\sqrt{2gh}$　　(3)　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(4)　$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m\sqrt{2gh}$　　(5)　$\frac{1}{2}$

指針　小球の運動を水平方向と鉛直方向とに分解して考える。水平方向は衝突をくり返しても，等速直線運動をする。一方，鉛直方向は，点Aに至るまでは自由落下し，衝突ごとに投げ上げ運動になる。また衝突によって速度が変化するのは鉛直方向のみである。

解説　(1)　小球が投げ出されてからAに至るまでは鉛直方向は自由落下なので

自由落下の式「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より　$h=\frac{1}{2}gt^2$

よって　$t=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$

(2)　衝突直前の速度の y 成分を v_y とする。自由落下の速度の式「$v=gt$」より

$$|v_y|=gt=g\sqrt{\frac{2h}{g}}=\boldsymbol{\sqrt{2gh}}\ \text{[1]←}$$

(3)　衝突直後の速度の y 成分を v_y' とする。鉛直投げ上げの式「$v^2-v_0{}^2=-2gy$」より，最高点では速度の y 成分が０なので

$$0^2-v_y'^2=-2g\cdot\frac{3}{4}h$$

よって　$v_y'=\sqrt{\frac{3}{2}gh}$

反発係数の式「$e=\frac{v'}{v}$」より

$$e=-\frac{v_y'}{-|v_y|}=\sqrt{\frac{3}{2}gh}\bigg/\sqrt{2gh}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \text{[2]←}$$

(4)　上向きを正の向きとする。力積は運動量の変化なので

「$I=mv'-mv$」より

$$I=mv_y'-(-m|v_y|)=\boldsymbol{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m\sqrt{2gh}}$$

(5)　AからBまでの所要時間を t' とする。鉛直投げ上げの速度の式　「$v=v_0-gt$」より

$-v_y'=v_y'-gt'$　　よって　$t'=\frac{2v_y'}{g}$

よって　$AB=v_0t'=\frac{2v_0v_y'}{g}$

また　$OA=v_0t=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$OA=AB$　$v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{2v_0v_y'}{g}$　　よって　$v_y'=\frac{\sqrt{2gh}}{2}$

ゆえに　$e'=-\frac{v_y'}{-|v_y|}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

←[1]　別解　「$v^2-v_0{}^2=2gy$」より

$v^2-0^2=2gh$　　よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{2gh}}$

←[2]　別解　「$e=\sqrt{\frac{h'}{h}}$」より　　$e=\sqrt{\frac{\frac{3h}{4}}{h}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

33 小球と動く台との運動

解答　(1)　$\sqrt{2g(h_1-h_2)}$　　(2)　$v=\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}$，$V=\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}$

(3)　$a\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}$　　(4)　$v'=e\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}$，$V'=\frac{em}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}$

(5)　e^2h_1

指針　球と針金(台)は互いに作用，反作用の力を及ぼしあうのみで，水平方向に外力を受けないので，水平方向の運動量の和は保存され，その値は常に初めの状態と同じ0である。したがって，球が左へ動けば台は右へ，球が右へ動けば台は左へ動く。速さを速度にかきかえてから，運動量保存則の式を立てる。

解説　(1)　力学的エネルギー保存則より

$$0+mgh_1=\frac{1}{2}mv_B{}^2+mgh_2 \qquad \text{よって}\quad v_B=\boldsymbol{\sqrt{2g(h_1-h_2)}}$$

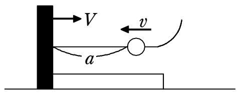
(2)　水平方向右向きの速度を正とする。球が針金の水平部分を左向きに運動しているとき，球の速度は $-v$，台の速度は $+V$ となるから，水平方向についての運動量保存則より　$0=m(-v)+MV$　　よって　$mv=MV$　……①

また，力学的エネルギー保存則より　$mgh_1=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2$　……②

①，②式より　$v=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$，$V=\boldsymbol{\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$ [1][2]←

(3)　CD 間では，床に対して球は速さ v で左へ，台は速さ V で右へ進むから

$$vt+Vt=a \qquad \text{よって}\quad t=\frac{a}{v+V}$$ [3]←



ここで，(2)より

$$v+V=\left(1+\frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}$$
$$=\frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}=\sqrt{\frac{2(M+m)gh_1}{M}}$$

ゆえに　$t=\frac{a}{v+V}=\boldsymbol{a\sqrt{\frac{M}{2(M+m)gh_1}}}$

(4)　衝突直後の球の速度は $+v'$，台の速度は $-V'$ となる。運動量保存の式は，衝突前後では　$m(-v)+MV=mv'+M(-V')$

となるが，一連の運動中，水平方向の外力がないから

$$0=m(-v)+MV=mv'+M(-V')$$ [4]←

も成立する。よって，この問題を解く場合は，次を用いるとよい。

$$0=mv'+M(-V')$$

よって　$mv'-MV'=0$　……③

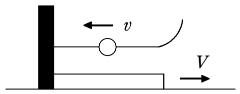
また，反発係数の式より

$$e=-\frac{v'-(-V')}{(-v)-V}$$

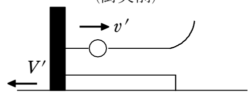
よって　$v'+V'=e(v+V)$　……④

③，④式より

$$v'=\frac{eM}{M+m}(v+V),\ V'=\frac{em}{M+m}(v+V)$$



(衝突前)



(衝突後)

(2)の結果より　$v'=\boldsymbol{e\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$，$V'=\boldsymbol{\frac{em}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$

(5)　球が針金の垂直部分上にあるとき，球と台の速度の水平成分は等しい。これを V_0 とすれば，運動量保存則(水平方向)により

$0=(m+M)V_0$　　よって　$V_0=0$

すなわち，このとき，球，台ともに，水平方向には動いていない。したがって，球が最高点に達したとき，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2=mgh_3$$

$$\text{左辺}=\frac{1}{2}m\left(e\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{em}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}m\cdot e^2\cdot\frac{2Mgh_1}{M+m}+\frac{1}{2}M\cdot\frac{e^2m^2}{M^2}\cdot\frac{2Mgh_1}{M+m}$$
$$=\frac{1}{2}e^2m\cdot\frac{M+m}{M}\cdot\frac{2Mgh_1}{M+m}=e^2mgh_1$$

よって　$mgh_3=e^2mgh_1$　ゆえに　$h_3=\boldsymbol{e^2h_1}$ [5]←

←[1]　①式より　$V=\frac{m}{M}v$

この値を②式に代入して　$mgh_1=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2$

ゆえに　$v=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$

$V=\frac{m}{M}v=\boldsymbol{\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$

←[2]　別解　静止物体の分裂では，分裂後の運動エネルギーは質量の逆比に分配される。v，V を速さとして

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh_1\times\frac{M}{M+m}$$

よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$

$$\frac{1}{2}MV^2=mgh_1\times\frac{m}{M+m}$$

よって　$V=\sqrt{\frac{2m^2gh_1}{M(M+m)}}=\boldsymbol{\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh_1}{M+m}}}$

←[3]　別解　台に対する球の相対速度は　$(-v)-V=-(v+V)$

よって，台に対する球の速さは $(v+V)$ となる。

よって　$t=\frac{a}{v+V}$

←[4]　(はじめ＝衝突直前＝衝突直後)の運動量保存則を表す。

←[5]　参考　高さ h から球を自由落下させ，反発係数 e の床に衝突させたときの，はね上がる高さ h' と結果は同じになっている。

$$h'=e^2h$$

34 等速円運動

解答　(1)　1.6 rad/s　(2)　3.1 m/s　(3)　a：4.9 m/s^2，エ
(4)　15 N

指針　等速円運動に関する物理量の求め方を整理しておく。

周期の式「$T=\frac{2\pi}{\omega}$」，速さの式「$v=r\omega$」，加速度の式「$a=r\omega^2$」

解説　(1)　問題文より，周期 $T=4.0$ s である。角速度は「$T=\frac{2\pi}{\omega}$」より

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4.0}=\frac{\pi}{2.0}=\frac{3.14}{2.0}=1.57\fallingdotseq\mathbf{1.6\ rad/s}$$

(2)　速さは「$v=r\omega$」より　$v=2.0\times\frac{\pi}{2.0}=\pi\fallingdotseq\mathbf{3.1\ m/s}$

(3)　加速度は「$a=r\omega^2$」より　$a=2.0\times\left(\frac{\pi}{2.0}\right)^2=\frac{\pi^2}{2.0}\fallingdotseq\mathbf{4.9\ m/s^2}$

加速度は中心に向かう向きであるから　**エ**

(4)　運動方程式「$ma=F$」より

$$3.0\times\frac{\pi^2}{2.0}=F \qquad \text{よって}\quad F\fallingdotseq\mathbf{15\ N}$$ [1]←

←[1]　別解　向心力の式　「$F=mr\omega^2$」または　「$F=m\frac{v^2}{r}$」を用いてもよい。

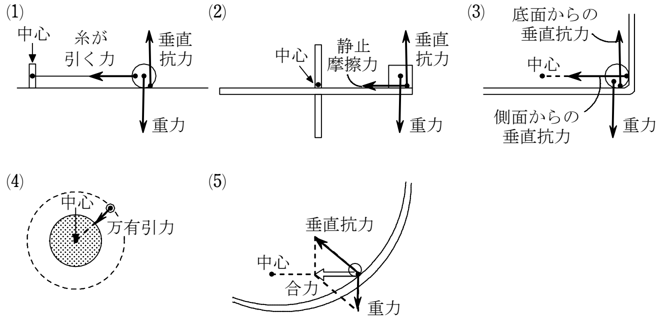
35 向心力

解答　(1)　糸が小球を引く力　(2)　台が消しゴムに及ぼす静止摩擦力
(3)　コップの側面が小球に及ぼす垂直抗力
(4)　地球が人工衛星に及ぼす万有引力
(5)　小球にはたらく重力と，碗の内面が小球に及ぼす垂直抗力の合力
(または　碗の内面が小球に及ぼす垂直抗力の水平成分)

指針　等速円運動に必要な力(向心力)は円の中心を向く。等速円運動の問題では，はじめに円軌道の中心をはっきりさせておくとよい。

解説　物体にはたらく力を図示し，円の中心を向く力が向心力である。

(1)　**糸が小球を引く力**
(2)　**台が消しゴムに及ぼす静止摩擦力**
(3)　**コップの側面が小球に及ぼす垂直抗力**
(4)　**地球が人工衛星に及ぼす万有引力**
(5)　**小球にはたらく重力と，碗の内面が小球に及ぼす垂直抗力の合力**
(または　碗の内面が小球に及ぼす垂直抗力の水平成分)



36 等速円運動

解答　(1)　点Oを向く向きに $l\omega^2$[m/s^2]　(2)　$ml\omega^2$[N]　(3)　$\frac{ml\omega^2}{l-l_0}$[N/m]

指針　小球をつけたばねの一端を中心に一定の角速度で回転させると，ばねが伸びて小球は等速円運動をする。小球はばねの伸びに応じた弾性力で円の中心に向かって常に引かれている。この弾性力が向心力のはたらきをする。

解説　(1)　加速度の式「$a=r\omega^2$」で，半径は l なので

$a=\boldsymbol{l\omega^2}$**[m/s^2]**

向きは，**点Oを向く。**

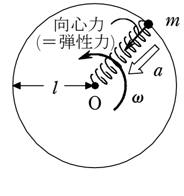
(2)　向心力の式「$F=mr\omega^2$」[1]←より

$F=\boldsymbol{ml\omega^2}$**[N]**

(3)　ばねの弾性力が向心力のはたらきをしている。

ばねの伸びは $l-l_0$[m] なので，弾性力は

$k(l-l_0)$[N] である。



$$k(l-l_0)=ml\omega^2$$

よって　$k=\dfrac{ml\omega^2}{l-l_0}$ [N/m]

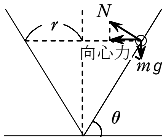
←[1]　$ma=F$ で (1) の結果を代入してもよい。

37 円錐容器の内側での等速円運動

解答　(1)　$v=\sqrt{gr\tan\theta}$　　(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g\tan\theta}}$　　(3)　2 倍

指針　円錐容器の内部で等速円運動している物体には，面からの垂直抗力と重力の 2 力がはたらいている。この 2 力の合力が，向心力のはたらきをしている。この合力は，水平方向で円の中心を向く。具体的に力を求めるには，鉛直方向と水平方向に力を分解する。鉛直方向は力のつりあいが成りたち，水平方向の分力は等速円運動の向心力となる。

解説　(1)　物体にはたらく垂直抗力を N とする。垂直抗力の鉛直成分と重力はつりあっているので



$N\cos\theta-mg=0$[1]←

また，水平方向の分力が向心力のはたらきをしているので

$m\dfrac{v^2}{r}=N\sin\theta$[1]←

よって，上の 2 式より　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{v^2}{gr}$

ゆえに　$\boldsymbol{v=\sqrt{gr\tan\theta}}$

(2)　周期の式「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より

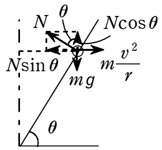
$$T=\frac{2\pi r}{\sqrt{gr\tan\theta}}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{r}{g\tan\theta}}}$$

(3)　(1) の結果より　$r=\dfrac{v^2}{g\tan\theta}$

これより，速さ v を 2 倍すると軌道の半径 r は 4 倍になる。

よって (2) の結果より，r を 4 倍すると周期 T は **2 倍** になる[2]←。

←[1]　別解　物体とともに回転する立場で考えると，垂直抗力と重力と遠心力の 3 力がつりあい，物体は静止しているように見える。力のつりあいの式は



$$\begin{cases} N\cos\theta-mg=0 \\ N\sin\theta-m\dfrac{v^2}{r}=0 \end{cases}$$

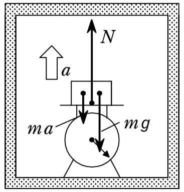
←[2]　注　「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より，v を 2 倍にしたとき，T は $\dfrac{1}{2}$ 倍としてはならない。v を変えると，r の値も変化することに注意する。

38 慣性力

解答　(1)　55 N　　(2)　下向きの加速度 1.8 m/s^2 の運動

指針　エレベーター内の人から見て，おもりにはたらく重力，はかりからの垂直抗力，観測者が見るみかけの力，すなわち慣性力，の 3 力がつりあっている。

解説　(1)　おもりの質量を m [kg] とすると



$mg=49$　　よって　$m=5.0$ kg

エレベーターが上向きの加速度 a [m/s^2] で動いているとき，はかりが及ぼす垂直抗力を N [N] とすると，力のつりあいより

$N=mg+ma$[1]←

よって　$N=5.0\times(9.8+1.2)=55$ N

はかりの針が示す値は N と等しい。よって　**55 N**

(2)　(1) のつりあいの式より

$$a=\frac{N}{m}-g=\frac{40}{5.0}-9.8=-1.8$$

下向きの加速度 1.8 m/s^2 の運動

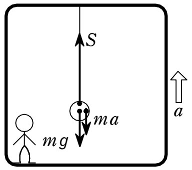
←[1]　別解　地上で静止した観測者から見ると，おもりは上向きの加速度 a で運動している。おもりの運動方程式は　$ma=N-mg$

39 慣性力

解答　(1)　$m(g+a)$　　(2)　$\sqrt{\dfrac{2h}{g+a}}$

指針　リフト内の観測者から見ると，小球には下向きの慣性力がはたらくようにみえる。(1) では，小球にはたらく重力，糸が引く力，慣性力がつりあっている。
(2) では，重力と慣性力の合力により，小球は等加速度直線運動を行う。

解説　(1)　リフト内の観測者から見ると，小球にはたらく力は，重力，糸が引く力，慣性力である。



力のつりあいより

$S-mg-ma=0$　　よって　$\boldsymbol{S=m(g+a)}$[1]←

(2)　リフト内の観測者から見ると，糸が切れてからは，重力と慣性力のみが小球にはたらく。

これら 2 力の合力によって初速度 0 の等加速度直線運動を行う。リフト内の観測者から見た小球の加速度を α とおくと，小球の運動方程式「$ma=F$」は[2]←

$m\alpha=mg+ma$　　よって　$\alpha=g+a$

したがって，小球が床に当たるまでの時間 t は，等加速度直線運動の式

「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より

$h=0+\dfrac{1}{2}(g+a)t^2$　　よって　$t=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2h}{g+a}}}$

←[1]　別解　地上で静止した観測者から見ると，小球は上向きの加速度 a で運動している。小球の運動方程式は

$ma=S-mg$　　よって　$S=m(g+a)$

←[2]　注　リフト内の観測者の立場 (非慣性系) では，運動方程式は成りたたないが，みかけの力である慣性力を考えることによって，慣性系の場合と同じように，運動方程式を立てることができる。

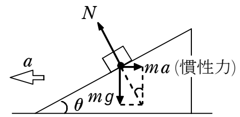
40 慣性力

解答　(1)　$g\tan\theta$，左向き　　(2)　$g\sin\theta$

指針　(1)　加速度運動する斜面とともに運動する観測者から見ると，斜面上で物体が静止しているので，物体にはたらく重力，斜面からの垂直抗力，慣性力の 3 力がつりあっている。一方，床に静止している観測者から見ると重力，垂直抗力の合力が加速度を生じさせているので，小物体は左方へ加速度運動している。

(2)　斜面の加速度を 2 倍にすると，力のつりあいは成りたたなくなる。この場合，慣性力も含めた運動方程式を立てる。

解説　(1)　斜面とともに運動する観測者の視点で考える。



物体 (質量を m とする) が静止するには，右向きに慣性力がはたらけばよい。よって斜面の加速度の向きは**左向き**。

物体はつりあいの状態なので，力を鉛直方向と水平方向に分解して

鉛直方向：$N\cos\theta=mg$

水平方向：$N\sin\theta=ma$

よって上の 2 式より　$\tan\theta$[1]←$=\dfrac{ma}{mg}$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=g\tan\theta}$

別解　床に静止している観測者の視点で考えると，物体は左方へ加速度運動をしている。鉛直方向は力のつりあいの式，水平方向は運動方程式を立てる。

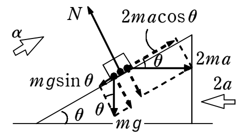
鉛直方向：$N\cos\theta=mg$

水平方向：$ma=N\sin\theta$

よって，上の 2 式より　$\boldsymbol{a=g\tan\theta}$

視点を変えても同じ結果が得られる。

(2)　斜面の加速度を 2 倍にすると，慣性力も 2 倍になる。慣性力も含めた力を図示し，斜面とともに運動する観測者の視点で，斜面にそって上向きを正として運動方程式を立てると



$m\alpha=2ma\cos\theta-mg\sin\theta$

(1) の結果を代入して

$$\begin{aligned} m\alpha &= 2mg\tan\theta\cdot\cos\theta-mg\sin\theta\text{[2]←} \\ &= 2mg\sin\theta-mg\sin\theta \\ &= mg\sin\theta \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\alpha=g\sin\theta}$

←[1]　$\sin\theta$ を含む式の各辺を $\cos\theta$ を含む式で割り

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

を利用する。

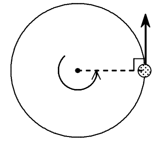
←[2]　$\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta=\sin\theta$

41 ターンテーブル上の物体

解答　(1)　$r\omega$

(2)　重力：mg
ターンテーブルからの垂直抗力：mg
ターンテーブルからの静止摩擦力：$mr\omega^2$

(3)　$\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$　　(4)　右図



指針　ターンテーブルに置かれた物体は，静止摩擦力を向心力として等速円運動をする。角速度を増していくと，静止摩擦力は大きくなり，最大摩擦力をこえた瞬間にターンテーブルから飛び出す。

解説　(1)　物体の速さは　$\boldsymbol{v=r\omega}$

(2)　物体には重力 W，ターンテーブルからの垂直抗力 N，ターンテーブルとの間の静止摩擦力 f がはたらく。重力の大きさは　$W=mg$

鉛直方向の力のつりあいより　$N-mg=0$

よって　$N=mg$

静止摩擦力は向心力のはたらきをしているので

$f=mr\omega^2$ [1][2]←　…… ①

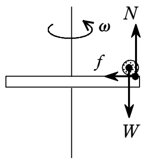


図 a

よって
- **重力：mg**
- **ターンテーブルからの垂直抗力：mg**
- **ターンテーブルからの静止摩擦力：$mr\omega^2$**

(3)　角速度が ω_0 になったとき，静止摩擦力 f は最大摩擦力となっている。

よって

$f_{最大}=\mu N=\mu mg$　…… ②

①，② 式より　$mr\omega_0{}^2=\mu mg$　　よって　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}$

(4)　飛び出した瞬間の物体の速度は円の接線方向を向くので，**図 b** に示した向きに飛び出す。

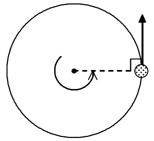
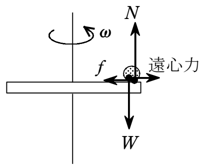


図 b

←[1]　別解　ターンテーブルとともに回転している観測者から見ると，重力，垂直抗力，静止摩擦力，遠心力がつりあって物体は静止しているように見える。水平方向の力のつりあいより

$f-mr\omega^2=0$



←[2]　注　静止摩擦力を「μN」とはしないこと。

42 円錐容器の側面での等速円運動

解答　(1)　S : $mg\sin\theta$，N : $mg\cos\theta$

(2)　S' : $mg\sin\theta+ml\omega^2\cos^2\theta$，$N'$: $mg\cos\theta-ml\omega^2\sin\theta\cos\theta$

(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{l\sin\theta}{g}}$

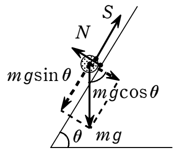
指針　物体が円錐容器の側面に静止しているとき，斜面上で静止している状態と同様に，重力，糸が引く力，面からの垂直抗力の３力がつりあっている。物体に速度を与えると，側面上で等速円運動を始める。この速度を大きくしていくと垂直抗力が小さくなっていき，やがて側面からうき上がって回転するようになる。

解説　(1)　重力を斜面にそった方向と斜面に垂直な方向に分解する。力のつりあいより

斜面にそった方向：$S-mg\sin\theta=0$

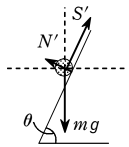
斜面に垂直な方向：$N-mg\cos\theta=0$

よって　$S=\boldsymbol{mg\sin\theta}$，$N=\boldsymbol{mg\cos\theta}$



(2)　円錐の側面をすべりながら円運動するので，回転半径は $l\cos\theta$ となる[1]←。

物体にはたらく力を水平成分と鉛直成分に分解して考えると，水平成分の合力が向心力のはたらきをし，鉛直成分はつりあっている[2]←。



水平方向：$ml\omega^2\cos\theta=S'\cos\theta-N'\sin\theta$

鉛直方向：$S'\sin\theta+N'\cos\theta-mg=0$

２式より[3]←

$\boldsymbol{S'=mg\sin\theta+ml\omega^2\cos^2\theta}$

$\boldsymbol{N'=mg\cos\theta-ml\omega^2\sin\theta\cos\theta}$

(3)　角速度を大きくしていくと物体は側面上をすべることなく回転するようになる。これは垂直抗力が０となるということなので (2) の結果より

$N'=mg\cos\theta-ml\omega^2\sin\theta\cos\theta=0$

よって　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l\sin\theta}}$

等速円運動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{l\sin\theta}}{\boldsymbol{g}}}$

←[1]　注　円運動の中心は，円錐の頂点ではない。

←[2]　物体とともに回転する観測者から見ると，重力，糸が引く力，垂直抗力，遠心力がつりあって物体は静止しているように見える。

←[3]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用する。

43 振り子の糸の張力

解答　(1)　$\dfrac{mg}{\cos\theta}$　　(2)　$mg\cos\theta$　　(3)　$mg(3-2\cos\theta)$

指針　振り子の運動では力学的エネルギーが保存される。また，おもりとともに運動する観測者から見ると遠心力がはたらき，円運動の半径方向について力のつりあいが成りたつ。振り子の糸にそった方向の力の成分を考える。

解説　(1)　おもりには重力 mg，糸 a が引く力 S_1，糸 b が引く力 f がはたらく。

力のつりあいより

水平方向：$S_1\sin\theta-f=0$　…… ①

鉛直方向：$S_1\cos\theta-mg=0$　…… ②

② 式より　$S_1=\dfrac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{\cos\theta}}$

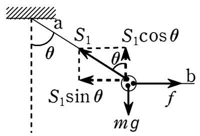


図 a

(2)　糸 b を切るとおもりは円運動を始める。おもりとともに運動する観測者から見ると，おもりには遠心力がはたらき，糸にそった方向について力のつりあいが成りたつ。

糸 b を切った直後は，おもりには重力 mg，糸 a が引く力 S_2 がはたらく。おもりの速さは０であるから，遠心力は０である。糸にそった方向の力のつりあいより

$S_2-mg\cos\theta=0$

よって　$S_2=\boldsymbol{mg\cos\theta}$ [1]←

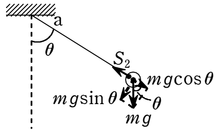


図 b

(3)　おもりが最下点を通過する瞬間の速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より

$0+mgl(1-\cos\theta)=\dfrac{1}{2}mv^2+0$

よって　$v^2=2gl(1-\cos\theta)$　　…… ③

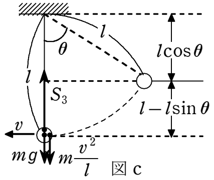


図 c

最下点を通過する瞬間，おもりには重力 mg，糸 a が引く力 S_3 がはたらく。

また，おもりとともに運動する観測者から見ると，遠心力 $m\dfrac{v^2}{l}$ がはたらく。

糸にそった方向の力のつりあいより

$S_3-mg-m\dfrac{v^2}{l}=0$ [2]←

③ 式を代入して　$S_3-mg-m\dfrac{2gl(1-\cos\theta)}{l}=0$

よって　$S_3-mg-2mg(1-\cos\theta)=0$　　$S_3=\boldsymbol{mg(3-2\cos\theta)}$

←[1]　別解　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$m\dfrac{0^2}{l}=S_2-mg\cos\theta$　　よって　$S_2=\boldsymbol{mg\cos\theta}$

←[2]　別解　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$m\dfrac{v^2}{l}=S_3-mg$

44 鉛直面内の円運動

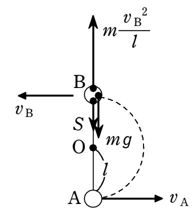
解答　(1)　$\sqrt{gl}$　　(2)　$\sqrt{5gl}$　　(3)　$2\sqrt{gl}$

指針　糸が引く力の大きさを S とすると，糸がたるむことなく円運動を続けるための条件は，最高点 (点 B) で $S\geqq 0$ である。小球とともに運動する観測者から見ると，小球が点 B を通過するとき，重力 mg と糸が引く力 S と遠心力がつりあっている。

解説　(1)　糸が引く力の大きさを S，点 B における小球の速さを v_B とおく。小球とともに運動する観測者から見ると，小球には重力 mg，糸が引く力 S，遠心力 $m\dfrac{v_B{}^2}{l}$ がはたらく。小球にはたらく力のつりあいより

$S+mg-m\dfrac{v_B{}^2}{l}=0$ [1]←

よって　$S=m\dfrac{v_B{}^2}{l}-mg$



糸がたるむことなく最高点 B を通過するための条件は $S\geqq 0$ である[2]←。

$S=m\dfrac{v_B{}^2}{l}-mg\geqq 0$　　よって　$v_B\geqq\sqrt{gl}$　　…… ①

ゆえに，v_B の最小値は　$v=\sqrt{gl}$

(2)　点 A において小球に与える速さを v_A とおく。力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2+0=\frac{1}{2}mv_B{}^2+mg\cdot 2l \qquad よって \qquad v_B{}^2=v_A{}^2-4gl \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② 式より　$v_B{}^2=v_A{}^2-4gl\geqq gl$　　よって　$v_A\geqq\sqrt{5gl}$

ゆえに，v_A の最小値は　$v_0=\sqrt{5gl}$

(3)　糸のかわりに硬い棒を用いた場合，点 B において小球の速さ v_B が 0 より大きければ，小球は B を通過できる。(2) と同様に，力学的エネルギー保存則が成りたつので，② 式を用いて

$$v_B{}^2=v_A{}^2-4gl>0 \qquad よって \qquad v_A>2\sqrt{gl}$$

←[1]　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v_B{}^2}{l}=S+mg$$

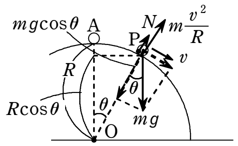
←[2]　糸が引く力の大きさ S が 0 になると，その後は糸がたるんでしまう。点 B において糸が引く力が存在していれば ($S\geqq 0$)，糸がたるまずに 1 回転できる。

45 球面上をすべり落ちる運動

別解　(1)　$\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$　　(2)　$(3\cos\theta-2)mg$　　(3)　$\frac{2}{3}$

指針　小球は A から B までは球面上をすべる。小球とともに運動する観測者から見ると，小球には重力，球面からの垂直抗力，遠心力がはたらき，これらの力の半径方向の成分はつりあっている。

解説　(1)　球はなめらかなので摩擦力ははたらかない。よって A から P への運動について，力学的エネルギー保存則を立てると



$$0+mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgR\cos\theta$$

よって　$v=\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$

(2)　点 P では，小球には重力 mg，球面からの垂直抗力 N，遠心力 $m\frac{v^2}{R}$ がはたらく。半径 OP 方向の力のつりあいより　$mg\cos\theta-N-m\frac{v^2}{R}=0$[1]←

よって　$N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}$

(1) の結果を代入して

$$N=mg\cos\theta-m\frac{2gR(1-\cos\theta)}{R}=(3\cos\theta-2)mg$$

(3)　点 B では球面からの垂直抗力が 0 になっている。よって，(2) の結果を用いて

$$N=(3\cos\theta_0-2)mg=0 \qquad よって \qquad \cos\theta_0=\frac{2}{3}$$

←[1]　別解　球の半径方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-N$$

46 円錐振り子と水平投射

解答　(1)　1.3 s　　(2)　2.8 m/s　　(3)　1.0 m

指針　円錐振り子の糸が切れると，小球は放物運動を始める。糸が切れた直後の小球の速度は，水平方向であるから小球の運動は円の接線方向への水平投射である。

解説　(1)　糸の長さを l〔m〕，糸が引く力の大きさを S〔N〕，糸が鉛直となす角を θ とし，小球の質量を m〔kg〕，等速円運動の角速度を ω〔rad/s〕，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とおく。小球とともに運動する観測者から見ると，小球には重力 mg，糸が引く力 S，遠心力 $ml\sin\theta\cdot\omega^2$ がはたらき，これら 3 力がつりあっている。力のつりあいより

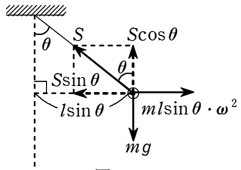


図 a

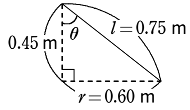


図 b

鉛直方向：$S\cos\theta-mg=0$

よって　$S=\frac{mg}{\cos\theta}$　　$\cdots\cdots$ ①

水平方向：$S\sin\theta-ml\sin\theta\cdot\omega^2=0$[1]←

よって　$S=ml\omega^2$　　$\cdots\cdots$ ②

①，② 式より　$\frac{mg}{\cos\theta}=ml\omega^2$　　よって　$\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$

周期の式より　$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$

ここで，$\cos\theta=\frac{0.85-0.40}{0.75}=\frac{0.45}{0.75}$，$l=0.75$ m，$g=9.8$ m/s² を代入すると

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.75}{9.8}\times\frac{0.45}{0.75}}=2\pi\sqrt{\frac{0.45}{9.8}}=\frac{3\pi}{7}{}^{[2]\leftarrow}=\frac{3\times 3.14}{7}=1.34\cdots\fallingdotseq\mathbf{1.3\ s}$$

(2)　円運動の半径は　$r=\sqrt{0.75^2-0.45^2}=0.60$ m

小球の速さ v は，周期の式「$T=\frac{2\pi r}{v}$」を用いて

$$v=\frac{2\pi r}{T}=2\pi\times 0.60\times\frac{7}{3\pi}=\mathbf{2.8\ m/s}$$

(3)　小球は水平方向に飛び出すから，床に当たるまでの時間を t〔s〕とすると，「$y=\frac{1}{2}gt^2$」より

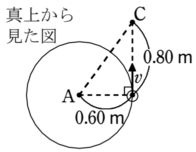


図 c

$$0.40=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$$

よって　$t=\sqrt{\frac{2\times 0.40}{9.8}}=\frac{2}{7}$ s[3]←

切れた点から C までの水平距離は　$vt=2.8\times\frac{2}{7}=0.80$ m

したがって　$\mathrm{AC}=\sqrt{0.60^2+0.80^2}=\mathbf{1.0\ m}$

←[1]　別解　水平面内の運動方程式を立てると

$$ml\sin\theta\cdot\omega^2=S\sin\theta$$

←[2]　$2\pi\sqrt{\frac{0.45}{9.8}}=2\pi\sqrt{\frac{45}{980}}$
$=2\pi\sqrt{\frac{9}{196}}=2\pi\times\frac{3}{14}$
$=\frac{3\pi}{7}$

←[3]　$\sqrt{\frac{2\times 0.40}{9.8}}=\sqrt{\frac{2\times 4}{98}}=\sqrt{\frac{4}{49}}=\frac{2}{7}$

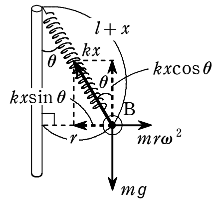
47 ばねによる円錐振り子

解答　(1)　水平方向：$kx\sin\theta-m(l+x)\sin\theta\cdot\omega^2=0$　　鉛直方向：$kx\cos\theta-mg=0$

(2)　$\frac{ml\omega^2}{k-m\omega^2}$　　(3)　角速度：$\sqrt{\frac{k}{m}}$，90° に近づく

指針　ばねの伸び x が急に増大するとき，x が無限大に近づくと考えればよい。

解説　(1)　小球とともに運動する系から見ると，小球には重力 mg，ばねの弾性力 kx，遠心力 $mr\omega^2$（r は円の半径）がはたらき，これら 3 力がつりあっている。円の半径は $r=(l+x)\sin\theta$ であるから，水平方向の力のつりあいの式は



$$\boldsymbol{kx\sin\theta-m(l+x)\sin\theta\cdot\omega^2=0} \qquad \cdots\cdots ①$$

鉛直方向の力のつりあいの式は

$$\boldsymbol{kx\cos\theta-mg=0} \qquad \cdots\cdots ②$$

(2)　① 式より　$kx=m(l+x)\omega^2$

これを x について解くと　$x=\boldsymbol{\frac{ml\omega^2}{k-m\omega^2}}$　　$\cdots\cdots$ ③

(3)　角速度 ω を変化させるとき，③ 式より，分母 $k-m\omega^2$ が 0 に近づくと，x が無限大に近づき，ばねが急に伸びる。したがって，求める角速度を ω_0 とすると

$$k-m\omega^2=0 \qquad よって \qquad \omega_0=\boldsymbol{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ここで，② 式より　$\cos\theta=\frac{mg}{kx}$　であるから，x が無限大に近づくと，$\cos\theta$ は 0 に近づく。したがって，柱とばねのなす角度 θ は **90° に近づく**。

48 糸の長さが変わる振り子

解答　(1)　$3mg$　　(2)　$5mg$　　(3)　$mg(2+3\cos\theta)$　　(4)　$2\sqrt{2}\,mg$

(5)　$-\frac{2}{3}$

指針　糸が釘に接触する直前，小物体は点Aを中心とする円運動をしている。釘に接触した直後は点Oを中心とする円運動に変わる。このため，接触の前後で糸が引く力の大きさが変わることに注意する。

解説　(1)　物体が最下点に達したときの速さを v_1 とする。力学的エネルギー保存則より

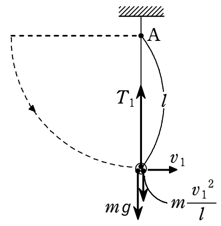


図 a

$$0+mgl=\frac{1}{2}mv_1{}^2+0$$

よって　$v_1{}^2=2gl$　　$\cdots\cdots$ ①

糸が釘に接触する直前では，円運動の半径は l である。このとき，物体とともに運動する観測者から見ると，物体には重力 mg，糸が引く力 T_1，遠心力 $m\frac{v_1{}^2}{l}$ がはたらき，これら 3 力がつりあっている。

$$T_1-mg-m\frac{v_1{}^2}{l}=0^{[1]\leftarrow} \qquad ① 式を用いて \qquad T_1=mg+m\frac{2gl}{l}=\mathbf{3}\boldsymbol{mg}$$

(2)　糸が釘に接触した直後には，円運動の半径は $\frac{l}{2}$ となる。(1) と同様にして

$$T_2-mg-m\frac{v_1{}^2}{l/2}=0^{[2]\leftarrow}$$

① 式を用いて

$$T_2=mg+m\frac{2gl}{l/2}=\mathbf{5}\boldsymbol{mg}$$

(3)　物体が角 θ の位置に達したときの速さを v とする。力学的エネルギー保存則より

$$0+mgl=\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$2mgl=mv^2+mgl(1-\cos\theta)$$

$$v^2=2gl-gl(1-\cos\theta)$$

よって　$v^2=gl(1+\cos\theta)$　……②

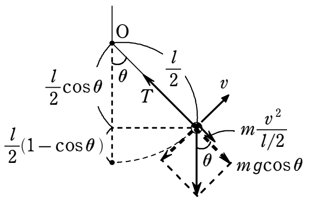


図 b

このとき，物体とともに運動する観測者から見ると，物体には重力 mg，糸が引く力 T，遠心力 $m\dfrac{v^2}{l/2}$ がはたらき，糸にそった方向について力のつりあいが成りたっている。

$$T-mg\cos\theta-m\frac{v^2}{l/2}=0$$ [3]←

② 式を用いて　$T=mg\cos\theta+m\dfrac{gl(1+\cos\theta)}{l/2}$

$$=mg\cos\theta+2mg(1+\cos\theta)=\boldsymbol{mg(2+3\cos\theta)}$$

(4)　$\theta=90°$ のとき，糸が引く力の大きさは

$$T=mg(2+3\cos 90°)=2mg$$

釘が糸から受ける力は，糸が 2 方向に引く力の合力であるから

$F=\sqrt{2}\,T$ [4]← $=\boldsymbol{2\sqrt{2}\,mg}$

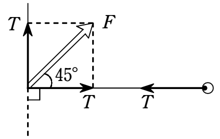


図 c

(5)　円軌道から放物線軌道に移るのは，糸がたるむときである。したがって，$\theta=\theta_0$ のとき糸が引く力の大きさが 0 になる。

$$T=mg(2+3\cos\theta_0)=0\qquad よって\quad \cos\theta_0=-\frac{2}{3}$$

←[1]　別解　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v_1{}^2}{l}=T_1-mg$$

←[2]　別解　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v_1{}^2}{l/2}=T_2-mg$$

←[3]　別解　糸にそった方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{l/2}=T-mg\cos\theta$$

←[4]　糸が引く力の大きさは，糸のどの部分についても等しい。

49 回転する円板上の物体

解答　(1)　$\sqrt{\dfrac{\mu g}{a}}$　(2)　$\sqrt{\dfrac{g(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{a}}$

指針　円板とともに回転する観測者から見ると，物体には重力，円板からの垂直抗力，静止摩擦力，そして遠心力がはたらく。円板を傾けない場合には，円板に平行な力は静止摩擦力と遠心力である。しかし円板を傾けると，これら 2 力のほかに重力の円板に平行な成分が加わる。物体が最も低い位置にあるとき，重力の成分は半径方向外向きとなる。したがって，1 周のうちで物体が最も低い位置にあるとき，静止摩擦力が最大となるため，これが最大摩擦力をこえなければ物体は円板上を動きださない。

解説　(1)　物体の質量を m とする。円板とともに回転する観測者から見ると，物体には重力 mg，円板からの垂直抗力 N，静止摩擦力 f，遠心力 $ma\omega^2$ がはたらき，これらの力がつりあっている。力のつりあいより

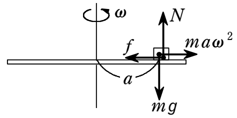


図 a

鉛直方向：$N-mg=0$

よって　$N=mg$　……①

水平方向：$f-ma\omega^2=0$ [1]←

よって　$f=ma\omega^2$　……②

物体が円板上に静止しているためには，静止摩擦力 f が最大摩擦力 μN をこえなければよいので，$f\leqq\mu N$ である。これに，①，② 式を代入して

$$ma\omega^2\leqq\mu mg\qquad よって\quad \boldsymbol{\omega\leqq\sqrt{\frac{\mu g}{a}}}$$

(2)　円板を傾けた場合にも，円板とともに回転する観測者から見ると物体にはたらく力はつりあっている。ただし，円板を傾けると，円板に平行な力として，静止摩擦力，遠心力[2]← のほかに，重力の円板に平行な成分が加わる。1 周のうちで，物体が最も低い位置を通過するとき，静止摩擦力は最も大きくなる。このときの力のつりあいより

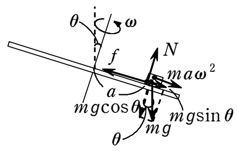


図 b

円板に垂直な方向：$N-mg\cos\theta=0$

よって　$N=mg\cos\theta$　……③

円板に平行な方向：$f-ma\omega^2-mg\sin\theta=0$

よって　$f=ma\omega^2+mg\sin\theta$　……④

物体が円板上に静止しているためには，$f\leqq\mu N$ である。これに，③，④ 式を代入して

$$ma\omega^2+mg\sin\theta\leqq\mu mg\cos\theta\qquad よって\quad \boldsymbol{\omega\leqq\sqrt{\frac{g(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{a}}}$$ [3]←

←[1]　別解　水平面内の運動方程式を立てると　$ma\omega^2=f$

←[2]　注　遠心力は水平方向外向きではなく，円板に平行で外向きである。

←[3]　参考　$\theta=0$ とすると　$\omega\leqq\sqrt{\dfrac{\mu g}{a}}$　となり，(1) の結果と一致する。

50 円筒の内面をすべり上がる運動

解答　(1)　$\dfrac{2mgh}{r}-mg(2+3\cos\theta)$　(2)　$\dfrac{5r}{2}$　(3)　$\dfrac{5}{27}r$

指針　(2)　小球が面から離れることなく最高点 T に達するための条件は，点 T で垂直抗力 N が存在している $(N\geqq 0)$ ことである。

(3)　面から離れる瞬間の小球の速度は，円の接線方向である。

解説　(1)　点 Q を通る瞬間の小球の速さを v とする。力学的エネルギー保存則より

$$0+mgh=\frac{1}{2}mv^2+mgr(1+\cos\theta)$$

よって　$v^2=2gh-2gr(1+\cos\theta)$　……①

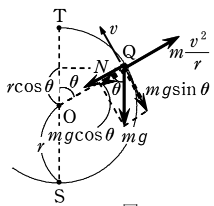


図 a

このとき，小球とともに運動する観察者から見ると，小球には重力 mg，面からの垂直抗力 N，遠心力 $m\dfrac{v^2}{r}$ がはたらき，半径方向について力のつりあいが成りたっている。よって

$$N+mg\cos\theta-m\frac{v^2}{r}=0 \text{ [1]←}\qquad ゆえに\quad N=m\frac{v^2}{r}-mg\cos\theta$$

① 式を代入して　$N=m\dfrac{2gh-2gr(1+\cos\theta)}{r}-mg\cos\theta$

$$=\frac{2mgh}{r}-2mg(1+\cos\theta)-mg\cos\theta$$

$$=\boldsymbol{\frac{2mgh}{r}-mg(2+3\cos\theta)}$$

(2)　点 T $(\theta=0°)$ を通過するためには，点 T において $N\geqq 0$ でなければならない[2]←。

$$N=\frac{2mgh}{r}-mg(2+3\cos 0°)\geqq 0$$

$$\frac{2mgh}{r}-5mg\geqq 0\qquad よって\quad \boldsymbol{h\geqq\frac{5r}{2}}$$

(3)　$h=2r$ の場合，点 E $(\theta=\theta_{\mathrm{E}}$ とおく) において $N=0$ となる。したがって

$$N=\frac{2mg\cdot 2r}{r}-mg(2+3\cos\theta_{\mathrm{E}})=0$$

よって　$4mg=mg(2+3\cos\theta_{\mathrm{E}})$

ゆえに　$\cos\theta_{\mathrm{E}}=\dfrac{2}{3}$

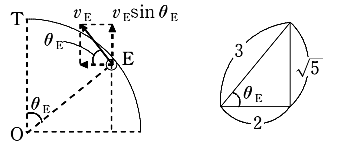


図 b

これより　$\sin\theta_{\mathrm{E}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

また，点 E での小球の速さを v_{E} とおくと，① 式より

$$v_{\mathrm{E}}{}^2=2g\cdot 2r-2gr\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}gr$$

点 E での小球の速度の鉛直成分は $v_{\mathrm{E}}\sin\theta_{\mathrm{E}}$ であるから[3]←，

鉛直投射の式「$v^2-v_0{}^2=-2gy$」より

$$0^2-(v_{\mathrm{E}}\sin\theta_{\mathrm{E}})^2=-2gH$$

$$H=\frac{v_{\mathrm{E}}{}^2\sin^2\theta_{\mathrm{E}}}{2g}=\frac{1}{2g}\cdot\frac{2}{3}gr\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{5}{27}r}$$

←[1]　別解　半径方向について運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{r}=N+mg\cos\theta$$

←[2]　面からの垂直抗力の大きさ N が 0 になると，その後は面から離れてしまう。点 T において垂直抗力が存在していれば $(N\geqq 0)$，点 T を通過することができる。

←[3]　点 E での小球の速度は円の接線方向であり，半径 OE に対して垂直である。

51 慣性力

解答　(1)　$m(g\cos\theta-A\sin\theta)$　(2)　$g\sin\theta+A\cos\theta$　(3)　$\dfrac{N\sin\theta}{M}$

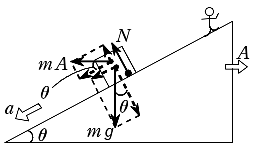
(4)　$\dfrac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$　(5)　$\dfrac{m\cos\theta}{M+m}l$

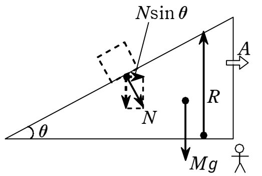
指針　(1)，(2)　台上から見ると，小物体には慣性力がはたらき，斜面方向にのみ運動しているとみなせる。

(5)　小物体が距離 l だけすべる間，台は大きさ A の加速度で等加速度直線運動する。

解説　小物体の運動は台上で観測することとし，慣性力を加える。台の運動は水平面から観測するから，実際にはたらく力だけで考える。小物体および台にはたらく力を図示

すると，下図のようになる。





(1)　台上から見て，小物体の斜面に垂直な方向の力のつりあいは

$N+mA\sin\theta-mg\cos\theta=0$　　よって　$\boldsymbol{N=m(g\cos\theta-A\sin\theta)}$

(2)　台上から見て，小物体の斜面方向の運動方程式は

$ma=mA\cos\theta+mg\sin\theta$　　よって　$\boldsymbol{a=g\sin\theta+A\cos\theta}$

(3)　水平面から台の運動を調べると，台には重力 Mg，水平面からの垂直抗力 R，そして小物体からの垂直抗力 N がはたらく。台の水平方向の運動方程式は右向きを正として

$MA=N\sin\theta$　　よって　$A=\boldsymbol{\dfrac{N\sin\theta}{M}}$

(4)　(1) の N を (3) の運動方程式に代入して

$MA=m(g\cos\theta-A\sin\theta)\sin\theta$

$(M+m\sin^2\theta)A=mg\cos\theta\sin\theta$　　よって　$A=\boldsymbol{\dfrac{mg\cos\theta\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}}$ [1]←

(5)　小物体が距離 l だけすべる時間 t に，台も加速度 A で運動するから

$l=\dfrac{1}{2}at^2$　　$L=\dfrac{1}{2}At^2$

よって　$L=\dfrac{1}{2}A\cdot\dfrac{2l}{a}=\dfrac{A}{a}l=\boldsymbol{\dfrac{Al}{g\sin\theta+A\cos\theta}}$

A を代入して整理すると

$L=\dfrac{l}{\dfrac{g\sin\theta}{A}+\cos\theta}$ [2]← $=\dfrac{l}{\dfrac{M+m\sin^2\theta}{m\cos\theta}+\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{m\cos\theta}{M+m}l}$ [3]←

←[1]　注　N は A を含むので，(1) の N を (3) の A の式に代入するだけではいけない。A について解く必要がある。

←[2]　A の式は複雑なので，分母と分子を A でわり，代入する箇所を少なくするとよい。

←[3]　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いた。

52 等速円運動と単振動

解答　(ア)　単振動　(イ)　ωt　(ウ)　$A\omega$　(エ)　$A\omega^2$　(オ)　$A\sin\omega t$

(カ)　$A\omega\cos\omega t$　(キ)　$-A\omega^2\sin\omega t$　(ク)　$-\omega^2$　(ケ)　$\mathrm{Q_0}$

(コ)　$A\omega$　(サ)　$\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$　(シ)　$A\omega^2$　(ス)　A　(セ)　$\dfrac{2\pi}{\omega}$

指針　単振動は，等速円運動の正射影である。単振動する物体の変位，速度，加速度は，その単振動に対応する等速円運動をもとに考えるとよい。

解説　(ア)　**単振動**　(イ)　$\boldsymbol{\omega t}$　(ウ)　「$v=r\omega$」より，Pの速度の大きさは　$\boldsymbol{A\omega}$

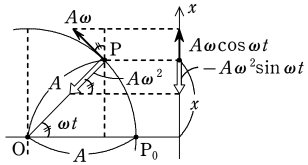
(エ)　「$a=r\omega^2$」より，Pの加速度の大きさは　$\boldsymbol{A\omega^2}$　(オ)　$x=\boldsymbol{A\sin\omega t}$

(カ)　Pの速度を x 軸に投影して

$v=\boldsymbol{A\omega\cos\omega t}$

(キ)　Pの加速度を x 軸に投影して

$a=\boldsymbol{-A\omega^2\sin\omega t}$



(ク)　(オ) の式を (キ) の式に代入して

$a=\boldsymbol{-\omega^2}x$

(ケ)　(カ) の式より，Q の速さ

$|v|=A\omega|\cos\omega t|$

$|v|$ が最大となるのは $|\cos\omega t|=1$ のときである。これは，$0\leqq\omega t\leqq2\pi$ では $\omega t=0$，π のときである[1]←。このときの Q の位置は (オ) の式より $x=0$[1]←。

よって　点 $\boldsymbol{\mathrm{Q_0}}$

(コ)　Q の速さの最大値は　$|v|=A\omega\times1=\boldsymbol{A\omega}$ [2]←

(サ)　(ク) の式より，Q の加速度の大きさ $|a|=\omega^2|x|$

$|a|$ が最大となるのは $|x|$ が最大，すなわち $x=\pm A$ のときである。

よって　点 $\boldsymbol{\mathrm{Q_1}}$，$\boldsymbol{\mathrm{Q_2}}$

(シ)　Q の加速度の最大値は　$|a|=\omega^2\times A=\boldsymbol{A\omega^2}$ [3]←

(ス)　$\boldsymbol{A}$　　(セ)　「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より　周期は　$\boldsymbol{\dfrac{2\pi}{\omega}}$

←[1]　$\theta=0$，π のとき　$\sin\theta=0$，$|\cos\theta|=1$

←[2]　単振動の速さの最大値は，等速円運動の速さに対応する。

←[3]　単振動の加速度の大きさの最大値は，等速円運動の加速度の大きさに対応する。

53 単振動の周期

解答　ω：2.0 rad/s，T：3.1 s

指針　単振動の変位の式「$x=A\sin\omega t$」より単振動の加速度の式は「$a=-A\omega^2\sin\omega t=-\omega^2x$」と書ける。

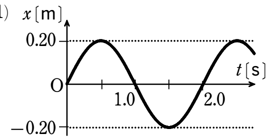
解説　単振動の加速度の式　「$a=-\omega^2x$」より

$0.80=\omega^2\times0.20$　　よって　$\omega=$ **2.0 rad/s**

単振動の周期の式より　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\times3.14}{2.0}\fallingdotseq$ **3.1 s**

54 単振動の式

解答　(1)



$x=0.20\sin\pi t$

(2)　0.10 m

(3)　v：0.54 m/s，a：−0.99 m/s^2

(4)　$a=-\pi^2x$

指針　単振動が x 軸上でおこっていると考える。O を原点，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きを x 軸の正の向きとし，変位は座標軸上の値で与える。

解説　(1)　振幅 $A=0.20$ m，周期 $T=2.0$ s

角振動数の式より

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{2.0}=\pi$ rad/s

変位 x の時間変化のようすは図 a のようになる。

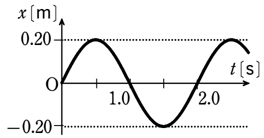


図 a

単振動の変位の式「$x=A\sin\omega t$」より

$\boldsymbol{x=0.20\sin\pi t}$

(2)　初期位相が 0 であると考えてよいので，(1) の結果より

$x=0.20\sin\left(\pi\times\dfrac{1}{6}\right)=0.20\sin\dfrac{\pi}{6}=0.20\times\dfrac{1}{2}=$ **0.10 m**

(3)　単振動の速度・加速度の式

$\begin{cases}v=A\omega\cos\omega t\\ a=-A\omega^2\sin\omega t\end{cases}$　より

$v=0.20\pi\cos\dfrac{\pi}{6}=0.20\times3.14\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0.543\cdots\fallingdotseq$ **0.54 m/s**

$a=-0.20\pi^2\sin\dfrac{\pi}{6}=-0.20\times3.14^2\times\dfrac{1}{2}=-0.985\cdots\fallingdotseq$ **−0.99 m/s^2** [1]←

(4)　単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」より

$\boldsymbol{a=-\omega^2x=-\pi^2x}$

←[1]　別解　「$a=-\omega^2x$」より

$a=-\pi^2\times0.10=-3.14^2\times0.10\fallingdotseq$ **−0.99 m/s^2**

55 水平ばね振り子

解答　(1)　0.20 m　(2)　1.6 s　(3)　0.80 m/s　(4)　1.6 N

指針　ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。したがって，水平ばね振り子の場合には，ばねが自然の長さとなる位置が振動の中心である。小球の速さの最大値 v_0 は，等速円運動の速さに等しい。

解説　(1)　はじめの小球の位置が振動の端で，ばねが自然の長さとなる位置が振動の中心である。よって，$A=$ **0.20 m**

(2)　ばね振り子の周期の式「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$」より

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{0.50}{8.0}}=2\pi\sqrt{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{2\pi}{4.0}=\dfrac{2\times3.14}{4.0}=1.57\fallingdotseq$ **1.6 s**

(3)　小球の速さの最大値は，「$v_{最大}=A\omega$」より

$v_0=A\omega=A\dfrac{2\pi}{T}=0.20\times2\pi\times\dfrac{4.0}{2\pi}=$ **0.80 m/s** [1]←

(4)　小球にはたらく力の大きさの最大値は，振動の端 (はじめの位置) のときにはたらく力の大きさである。よって「$F=kx$」より

$F_0=8.0\times0.20=$ **1.6 N** [2]←

←[1]　別解　速さが最大になるのは，振動中心 (ばねは自然の長さ) を通るときである。力学的エネルギー保存則より

$0+\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2+0$

$v_0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}=0.20\times\sqrt{\dfrac{8.0}{0.50}}$

$=0.20\times4.0=$ **0.80 m/s**

←[2]　別解　加速度の最大値は　$a_0=A\omega^2$ であるから

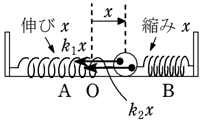
$F_0=mA\omega^2=mA\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$ から求めることもできる。

56 ２本のばねにつながれた物体の運動

解答 (1)　$F : -(k_1+k_2)x$，$a : -\dfrac{k_1+k_2}{m}x$　(2)　$\pm x_0$　(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

指針 (1)　物体は，ばね A，B から力を受けている。この合力が求める力である。

解説 (1)　物体が位置 x にあるとき，ばね A は x だけ伸び，ばね B は x だけ縮んでいる。



よって　$F=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x$

求める加速度 a は運動方程式「$ma=F$」より

$$ma=-(k_1+k_2)x \qquad a=-\frac{k_1+k_2}{m}x$$

(2)　加速度の大きさが最大になるのは，物体が振動の中心から最も離れたときなので

$x=\pm x_0$

(3)　$F=-Kx$ のとき，周期 T は，$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ である。この問題では $K=k_1+k_2$ であるから　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$ [1]←

←[1]　**別解**　$a=-\dfrac{k_1+k_2}{m}x$ を「$a=-\omega^2x$」と比較して　$\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$

よって　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

57 鉛直ばね振り子

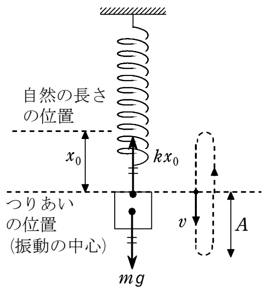
解答 (ア)　$\dfrac{mg}{k}$　(イ)　$v\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(ウ)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(エ)　$g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(オ)　$\dfrac{3\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

指針　ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。したがって，鉛直ばね振り子の場合には，重力とばねの弾性力がつりあう位置が振動の中心である。周期は，水平ばね振り子の場合と変わらない。単振動での経過時間を求めるときは，周期をもとにして考える。

解説 (ア)　おもりが静止しているとき，重力と弾性力がつりあっている。このときのばねの伸びを x_0 とすると，力のつりあいより

$$kx_0-mg=0 \qquad \text{よって}\quad x_0=\frac{mg}{k}$$



(イ)　おもりは，つりあいの位置を中心に，単振動をする。よって，振幅 A はつりあいの位置から最下点までの距離である。また，最下点でのばねの伸びは x_0+A である。最下点を重力による位置エネルギーの基準として，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2+mgA+\frac{1}{2}kx_0{}^2=0+0+\frac{1}{2}k(x_0+A)^2$$
$$=\frac{1}{2}k(x_0{}^2+2x_0A+A^2)$$
$$=\frac{1}{2}kx_0{}^2+kx_0A+\frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2+mgA=kx_0A+\frac{1}{2}kA^2$$

ここで，(ア) より　$kx_0=mg$　であるから

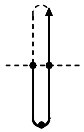
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{よって}\quad A=v\sqrt{\frac{m}{k}}\ \text{[1]←}$$

(ウ)　周期　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(エ)　おもりはつりあいの位置を中心に振幅 A の単振動をする。ばねが自然の長さとなるのは，つりあいの位置より x_0 だけ上方である。よって，$A=x_0$であればよい。

$$v\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{mg}{k} \qquad \text{よって}\quad v=\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}=g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(オ)　おもりが振動の中心から降下し，最下点で折り返して最高点に達するまでの時間は周期の $\dfrac{3}{4}$ 倍である。



$$\frac{3}{4}T=\frac{3}{4}\times2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

←[1]　**別解 1**　「$v_{最大}=A\omega$」を用いる。この単振動の速さの最大値は v，角振動数は

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より　$v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

よって　$A=v\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

別解 2　重力と弾性力の合力による位置エネルギー「$U=\dfrac{1}{2}kx^2$」(x は，ばねの伸びではなく，つりあいの位置からの変位を表す) を考える。力学的エネルギー保存則より

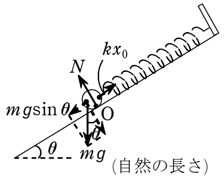
$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{よって}\quad A=v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

58 斜面上のばね振り子

解答 (1)　$\dfrac{2mg\sin\theta}{k}$　(2)　$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

指針　ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。単振動での経過時間を求めるときは，周期をもとにして考える。

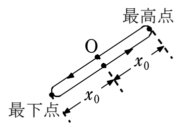
解説 (1)　おもりにはたらく力がつりあうときのばねの伸びを x_0 とし，このときのおもりの位置を O とする。おもりにはたらく力は，重力 mg，ばねの弾性力 kx_0，斜面からの垂直抗力 N である。斜面方向の力のつりあいより



$$kx_0-mg\sin\theta=0$$

よって　$x_0=\dfrac{mg\sin\theta}{k}$

おもりは点 O を中心として，振幅 x_0 の単振動を行う[1]←。ばねの伸びが最大となるのは，最下点であるから，このときのばねの伸びは $2x_0$ である。



よって　$x=2x_0=\dfrac{2mg\sin\theta}{k}$ [2]←

(2)　単振動の周期を T とすると　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

おもりをはなしてから，ばねの伸びが初めて最大になるまでの時間 t は周期 T の $\dfrac{1}{2}$ 倍である[3]←。

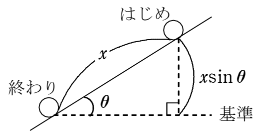
$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\times2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

←[1]　はじめの位置は，おもりの速さが 0 であるから振動の端である。よって，振幅は x_0 に等しい。

←[2]　**別解**　力学的エネルギー保存則より

$$0+mgx\sin\theta+0=0+0+\frac{1}{2}kx^2$$

$x>0$ より　$x=\dfrac{2mg\sin\theta}{k}$



←[3]　**注**　単振動であるから，等加速度直線運動の公式などを用いてはいけない。

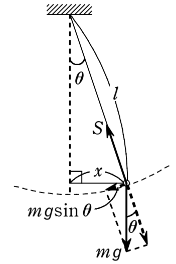
59 単振り子

解答 (1)　$-mg\sin\theta$　(2)　$-\dfrac{mg}{l}x$　(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　(4)　$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\alpha}}$

指針　単振り子ではおもりの振れが小さいとき，単振動とみなすことができる。

加速度運動するエレベーターの中で単振り子を観察すると，重力加速度の大きさはみかけの重力加速度の大きさに変わるので，単振り子の周期も変わる。

解説 (1)　おもりにはたらく力は，重力 mg と糸が引く力 S である。円の接線方向の力の成分 F は，$\theta>0$ のとき，時計回り ($F<0$) の向きであるから



$F=-mg\sin\theta$

(2)　図より　$\sin\theta=\dfrac{x}{l}$

よって　$F=-mg\sin\theta=-mg\times\dfrac{x}{l}=-\dfrac{mg}{l}x$

(3)　振れが小さい場合，水平方向の力 F と水平方向の変位 x の間の関係が「$F=-Kx$」の形に表されるので，おもりは単振動をする。$K=\dfrac{mg}{l}$ と，単振動の周期の式「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$」より

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{m\times\frac{l}{mg}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{[1]←}$$

(4)　エレベーター内の観測者は，おもりには重力 mg のほかに慣性力 $m\alpha$ が下向きにはたらいていると観測するので，みかけの重力加速度の大きさは $g+\alpha$ となる[2]←。(3) の g を $g+\alpha$ で置きかえて

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\alpha}}$$

←[1]　**別解**　おもりの加速度を a として，運動方程式を立てると

$$ma=-\frac{mg}{l}x$$

よって　$a=-\dfrac{g}{l}x$

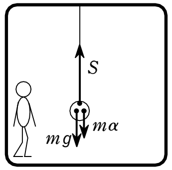
これを「$a=-\omega^2x$」と比較して　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

ゆえに　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

←[2]　上昇加速度 α で運動しているエレベーター内におもりをつるすと，おもりにはたらく力のつりあいより糸が引く力の大きさ S は

$S=mg+m\alpha=m(g+\alpha)$

よって，みかけの重力加速度 の大きさは $g+\alpha$ である。

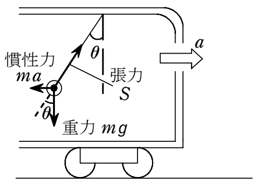


60 加速中の列車内の単振り子

解答　(1)　$\dfrac{a}{g}$　　(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

指針　加速中の列車の中では慣性力がはたらいているように見えるので，重力加速度はみかけの重力加速度に変わり，単振り子の振動は影響を受ける。

解説　(1)　列車内の人が物体を見ると，物体にはたらく重力，糸の張力，慣性力の３力がつりあっているように見える。糸の張力を S とし て，S を鉛直方向，水平方向に分解する。



$\begin{cases} S\cos\theta=mg \\ S\sin\theta=ma \end{cases}$

よって　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{ma}{mg}=\boldsymbol{\dfrac{a}{g}}$

(2)　糸の張力は三平方の定理より

$S=\sqrt{(mg)^2+(ma)^2}=m\sqrt{g^2+a^2}$

物体はつりあいの位置を振動の中心として単振動する。みかけの重力加速度は鉛直方向から θ 傾いて $\sqrt{g^2+a^2}$[1]← の大きさをもつ。

単振り子の周期の式「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$」より　$\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}}$

←[1]　みかけの重力加速度の大きさを g' とすると

$S=mg'$

よって　$g'=\sqrt{g^2+a^2}$

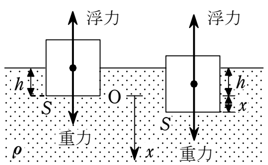
61 液体中の物体の単振動

解答　(1)　ρSh　　(2)　$-\rho Sgx$　　(3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$　　(4)　$d\sqrt{\dfrac{g}{h}}$

指針　「浮力の大きさ＝物体が排除した液体の重さ＝液体の密度×液体に沈んだ部分の体積×重力加速度」である。

物体にはたらく重力と浮力の合力が復元力となり，液体中の物体は単振動をする。

解説　(1)　物体にはたらく重力と浮力がつりあっているときを考える。浮力の大きさは「(液体の密度 ρ)×(液体に沈んだ部分の体積 Sh)×(重力加速度 g)」なので



$\rho Shg-mg=0$

よって　$\boldsymbol{m=\rho Sh}$

(2)　つりあいの状態から，さらに x 沈んだ位置に物体があるときを考える。浮力は沈んだ分増加し $\rho S(h+x)g$ となっている。物体には重力と浮力のみがはたらくので

$F=mg-\rho S(h+x)g=\rho Shg-\rho Shg-\rho Sxg=\boldsymbol{-\rho Sgx}$

(3)　(2) より復元力は $F=-Kx$ と表されるので，ばね定数 K の単振動と同様に扱うことができる。ここで $K=\rho Sg$ である。

単振動の周期の式「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$」より

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{\rho Sh}{\rho Sg}}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}}$[1]←

(4)　物体には復元力以外の外力がはたらいていないので，力学的エネルギーは保存されている。速さが最大になるのは位置 O を通るときである (ばね振り子と同様に考える)。復元力 (重力と浮力の合力) による位置エネルギー[2]← を用いて力学的エネルギー保存則の式を立てると

$0+\dfrac{1}{2}Kd^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2+0$

$v_0=d\sqrt{\dfrac{K}{m}}=d\sqrt{\dfrac{\rho Sg}{\rho Sh}}=\boldsymbol{d\sqrt{\dfrac{g}{h}}}$[3]←

←[1]　別解　物体の運動方程式「$ma=F$」より　$ma=-\rho Sgx$

$a=-\dfrac{\rho Sgx}{m}=-\dfrac{\rho Sgx}{\rho Sh}=-\dfrac{g}{h}x$

また変位と加速度の関係「$a=-\omega^2x$」　より　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{h}}$ となるので，単振動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より　$\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}}$

←[2]　「$U=\dfrac{1}{2}Kx^2$」で表される。ただし，ここでの x はつりあいの位置 O を基準とした変位を表す。

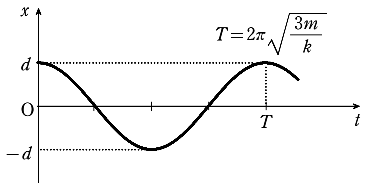
←[3]　別解　単振動の振幅は d であるから「$v_{最大}=A\omega$」より

$v_0=d\times\dfrac{2\pi}{T}=\boldsymbol{d\sqrt{\dfrac{g}{h}}}$

62 糸でつながれた２物体の単振動

解答　(1)　周期：$2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$，速さ：$d\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$

(2)



$x=d\cos\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t$

(3)　$mg+\dfrac{1}{3}kx$　　(4)　$\dfrac{3mg}{k}$

指針　(1)　２つのおもりは質量 $3m$ の１つのおもりとみなして考えることができる。

(2)　単振動の式は，運動のグラフをかいてから求める。

(4) 糸がたるむことなく単振動するには，糸の張力≧0

解説　(1)　糸がたるまないから，２つのおもりを一体とみなして考える。ばね定数が k，おもり全体の質量が $3m$ であるから，周期 T は　「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$」より

$\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}}$

この単振動の振動の中心はつりあいの位置 ($x=0$) なので，振幅は d であり，角振動数は $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$ であるから，速さの最大値 v_0 は「$v_{最大}=A\omega$」より

$v_0=\boldsymbol{d\sqrt{\dfrac{k}{3m}}}$

(2)　$t=0$ のとき $x=d$ で静止していたから，この運動のグラフは図 a のような $+\cos$ 型になる。

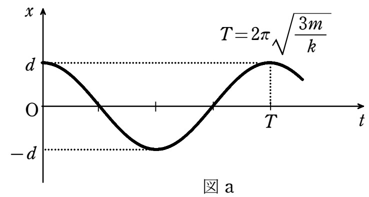


図 a

「$x=A\cos\omega t$」に $A=d$，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$ を代入して　$\boldsymbol{x=d\cos\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t}$[1]←

(3)　変位が x のとき，張力を S としてそれぞれのおもりにはたらく力を図 b に示す。

つりあいの位置でのばねの伸びを x_0 とすると，力のつりあいより

$(2m+m)g-kx_0=0$　　よって　$x_0=\dfrac{3mg}{k}$

変位が x のときの加速度を a として，それぞれの運動方程式を立てる。

$2ma=2mg+S-k(x_0+x)$[2]←　……①

$ma=mg-S$　……②

② 式を ① 式に代入して

$2mg-2S=2mg+S-k(x_0+x)$

よって　$S=\dfrac{k}{3}(x_0+x)=\boldsymbol{mg+\dfrac{1}{3}kx}$

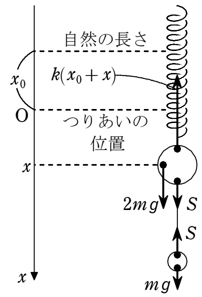


図 b

(4)　糸がたるまない条件は $S\geqq0$ である。

$S=mg+\dfrac{1}{3}kx\geqq0$　　よって　$x\geqq-\dfrac{3mg}{k}$

振動の中心から $-\dfrac{3mg}{k}$ $(=-x_0)$ の位置，すなわち自然の長さの位置で糸はたるみ始める。

よって，振幅が x_0 以下であれば糸はたるむことはない。したがって，d の最大値は x_0 となる。

d の最大値$=x_0=\boldsymbol{\dfrac{3mg}{k}}$

←[1]　単振動の式は必要に応じて sin，cos を使い分けるとよい。また，この式は初期位相 $\left(\phi=\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて sin で表すこともできる。

$\boldsymbol{x=d\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)}$　　$\left(\cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\text{を用いた}\right)$

←[2]　注　質量 $2m$ のおもりがばねから受ける力は $k(x_0+x)$ であり，kx ではないことに注意する。

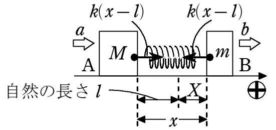
63 ばねでつながれた２物体の単振動

解答　(ア)　$\dfrac{k}{M}(x-l)$　　(イ)　$-\dfrac{k}{m}(x-l)$　　(ウ)　$-\dfrac{(M+m)k}{Mm}(x-l)$

(エ)　$2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{(M+m)k}}$

指針　ばねの弾性力は，ばねの両端にはたらくので両方の物体に対し復元力となり，２物体は同時に単振動をすることになる。

解説　A，Bの加速度をそれぞれ a，b とする。



$x>l$ の場合で考えると[1]←，A，Bにはたらく弾性力は図のようになる。

(ア)　運動方程式「$ma=F$」より

Aの運動方程式　$Ma=k(x-l)$

よって　$a=\dfrac{k}{M}(x-l)$

(イ)　運動方程式「$ma=F$」より　Bの運動方程式　$mb=-k(x-l)$

よって　$b=-\dfrac{k}{m}(x-l)$

(ウ)　Aから見たBの加速度は

$$b-a=-\frac{k}{m}(x-l)-\frac{k}{M}(x-l)=-\frac{(M+m)k}{Mm}(x-l)$$

(エ)　$\alpha=b-a$，$X=x-l$ とおくと (ウ) は　$\alpha=-\dfrac{(M+m)k}{Mm}X$

$X=0$ $(x=l)$ のとき，$\alpha=0$ なので，Aから見てBは，ばねの自然の長さの位置を振動の中心として単振動する。この単振動の角振動数を ω とすると，

$\alpha=-\omega^2X$ と表されるので

$$\alpha=-\frac{(M+m)k}{Mm}X=-\omega^2X$$

よって　$\omega=\sqrt{\dfrac{(M+m)k}{Mm}}$

したがって，単振動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より

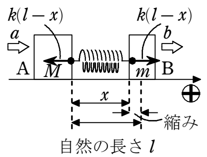
$$T=2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)k}}$$

←[1]　**参考**　$x<l$ の場合で考えると

$Ma=-k(l-x)$

$mb=k(l-x)$

となり，$x>l$ の場合と同じ結果が得られる。



64 ばね付きの板にのせた物体の運動

解答　(1)　$a=-\dfrac{g}{x_0}x$，$N=mg\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)$　　(2)　$x_1=x_0$，$v_1=\sqrt{3gx_0}$

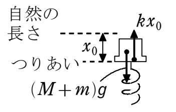
(3)　$\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{x_0}{g}}$

指針　ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。単振動での経過時間を求めるときは，周期をもとにして考える。この問題では，振動の端～端や，振動の端～中心の場合のように，1/4周期単位ではない。このような場合には，単振動に対応する等速円運動を考えるとよい。

解説　(1)　ばねのばね定数を k とおく。板とおもりを一体と考え，点Oにおける力のつりあいより

$kx_0-(M+m)g=0$

よって　$k=\dfrac{(M+m)g}{x_0}$　　……①

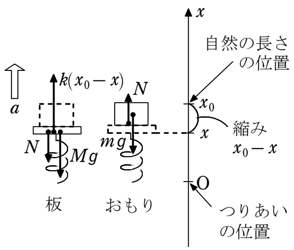


図a

板が座標 x の点を通るとき，ばねの縮みは x_0-x である。板とおもりのそれぞれについて運動方程式を立てると

板：$Ma=k(x_0-x)-Mg-N$[1]←　……②

おもり：$ma=N-mg$　……③



図b

②式＋③式より

$$(M+m)a=k(x_0-x)-(M+m)g$$
$$=kx_0-kx-(M+m)g$$

①式より　$kx_0=(M+m)g$ であるから

$(M+m)g=-kx$

a について解き，①式を代入して

$$a=-\frac{k}{M+m}x$$
$$=-\frac{1}{M+m}\cdot\frac{(M+m)g}{x_0}x=-\frac{g}{x_0}x\quad\cdots\cdots④$$

次に，③式を変形して，④式を代入すると

$$N=ma+mg=-m\frac{g}{x_0}x+mg=mg\left(1-\frac{x}{x_0}\right)$$

(2)　おもりが板から離れるのは，$N=0$ となるときであるから

$N=mg\left(1-\dfrac{x_1}{x_0}\right)=0$　　よって　$x_1=x_0$（ばねが自然の長さの位置）

最下点を重力による位置エネルギーの基準として，最下点（ばねの縮み $3x_0$）と，おもりが離れる位置 $x_1=x_0$（ばねの伸び0）についての力学的エネルギー保存則の式を立てると

$$0+0+\frac{1}{2}k(3x_0)^2=\frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2+(M+m)g\cdot3x_0+0$$

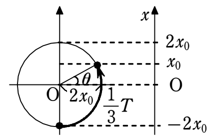
$$\frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2=\frac{1}{2}k(3x_0)^2-3(M+m)gx_0$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(M+m)g}{x_0}\cdot9x_0{}^2-3(M+m)gx_0$$
$$=\frac{9}{2}(M+m)gx_0-3(M+m)gx_0=\frac{3}{2}(M+m)gx_0$$

よって　$v_1{}^2=3gx_0$　　ゆえに　$v_1=\sqrt{3gx_0}$[2]←

(3)　おもりが板から離れるまでの運動は，つりあいの位置Oを中心とした振幅 $2x_0$ の単振動である。この単振動に対応する等速円運動を考えると，最下点 $(x=-2x_0)$ から，位置 $x_1=x_0$ までの時間は，周期 T の $\dfrac{1}{3}$ 倍である。ばね振り子の周期の式

「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$」より

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$



$\sin\theta=\dfrac{x_0}{2x_0}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\theta=30°$

図c

よって　$t_1=\dfrac{1}{3}T=\dfrac{1}{3}\times2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{(M+m)\frac{x_0}{(M+m)g}}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

←[1]　この式は，ばねが縮んでいると仮定して立てているが，ばねが伸びている $(x>x_0)$ と仮定した場合にも同じ式で表される。このとき，ばねの伸びは $x-x_0$ であり，ばねが板に対して及ぼす力は上向きを正として $-k(x-x_0)$ となる。これは $k(x_0-x)$ と等しい。

←[2]　**別解**　重力と弾性力の合力による位置エネルギー「$U=\dfrac{1}{2}kx^2$」（x は，ばねの伸びではなく，つりあいの位置Oからの変位を表す）を考える。力学的エネルギー保存則より

$$0+\frac{1}{2}k(2x_0)^2=\frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2+\frac{1}{2}kx_0{}^2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2=\frac{3}{2}kx_0{}^2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{(M+m)g}{x_0}x_0{}^2$$

よって　$v_1=\sqrt{3gx_0}$

65 摩擦力による減衰振動

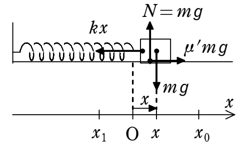
解答　(1)　$\dfrac{k(x_0+x_1)}{2mg}$　　(2)　$x_A=\dfrac{x_0+x_1}{2}$，$t_A=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，$v_A=\dfrac{x_0-x_1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(3)　$L=\dfrac{x_0{}^2-x_n{}^2}{x_0+x_1}$　　(4)　$1.5d$

指針　ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。摩擦のある水平面上でのばね振り子の運動では，弾性力のほかに動摩擦力がはたらくため，つりあいの位置が原点Oからずれることに注意する。また，折り返すたびに，振動の中心と振幅は変化するが，端から端までの運動は，通常の単振動と同様に扱うことができる。

解説　(1)　Pが位置 x_0 から位置 x_1 まで移動する間の運動を考える。位置 x において，Pが受ける水平方向の力 F は

$$F=\mu'mg-kx$$
$$=-k\left(x-\frac{\mu'mg}{k}\right)$$
$$=-kX\quad\left(X=x-\frac{\mu'mg}{k}\text{[1]← とおいた}\right)$$



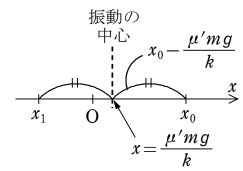
図a

これは復元力を表しているので，Pは単振動を行うことがわかる。振動の中心はつりあいの位置（$F=0$ となる位置）であるから $x=\dfrac{\mu'mg}{k}$ である。また，振幅は

$x_0-\dfrac{\mu'mg}{k}$ である。位置 x_0 と位置 x_1 は速さが0の点，すなわち，単振動の両端の点であるから，その間の距離は振幅の２倍である。

$$x_0-x_1=2\left(x_0-\frac{\mu'mg}{k}\right)$$

よって　$x_0-x_1=2x_0-\dfrac{2\mu'mg}{k}$



図b

$$\frac{2\mu' mg}{k}=x_0+x_1$$

したがって　$\mu'=\frac{\boldsymbol{k(x_0+x_1)}}{\boldsymbol{2mg}}$ [2]←

(2)　速さが最大となる位置 x_A は振動の中心であるから

$$x_A=\frac{\mu' mg}{k}=\frac{k(x_0+x_1)}{2mg}\cdot\frac{mg}{k}=\frac{\boldsymbol{x_0+x_1}}{\boldsymbol{2}}$$

その時刻 t_A は，周期の $\frac{1}{4}$ 倍であるから

$$t_A=\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}}}$$

そのときの速さ v_A は「$v_{最大}=A\omega$」を用いる。

振幅は　$A=\frac{x_0-x_1}{2}$ より

$$v_A=\frac{x_0-x_1}{2}\cdot\frac{2\pi}{T}=\frac{\boldsymbol{x_0-x_1}}{\boldsymbol{2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$$

(3)　動摩擦力 (大きさ $\mu' mg$) は常に移動の向きと反対にはたらくから，止まるまでに動摩擦力がした仕事は $-\mu' mgL$ である[3]←。これが力学的エネルギーの変化に等しいので

$$\left(0+\frac{1}{2}kx_n{}^2\right)-\left(0+\frac{1}{2}kx_0{}^2\right)=-\mu' mgL$$

$$\frac{1}{2}k(x_n{}^2-x_0{}^2)=-\frac{k(x_0+x_1)}{2mg}mgL \qquad \text{よって}\quad L=\frac{\boldsymbol{x_0{}^2-x_n{}^2}}{\boldsymbol{x_0+x_1}}$$

(4)　$x_0=3.5d$，$x_1=-2.5d$ のとき　$x_A=\frac{x_0+x_1}{2}=0.5d$

Pが位置 x_1 から位置 x_2 まで右向きに移動する間に，Pが受ける水平方向の力 F は，動摩擦力が左向きにはたらくことに注意して

$F=-kx-\mu' mg$

$F=0$ となる位置が振動の中心であり，その位置を x_B とおくと

$$0=-kx_B-\mu' mg \qquad \text{よって}\quad x_B=-\frac{\mu' mg}{k}=-x_A=-0.5d$$

単振動の両端の点である x_1 と x_2 の中点が x_B であるから

$$x_B=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2.5d+x_2}{2}=-0.5d \qquad \text{よって}\quad x_2=\boldsymbol{1.5d}$$

←[1]　ばねが自然の長さの位置を原点とする座標 x と，つりあいの位置を原点とする座標 X との間の関係式である。

←[2]　別解　力学的エネルギーの変化は動摩擦力のした仕事 $-\mu' mg(x_0-x_1)$ に等しいので

$$\left(0+\frac{1}{2}kx_1{}^2\right)-\left(0+\frac{1}{2}kx_0{}^2\right)=-\mu' mg(x_0-x_1)$$

$$\frac{1}{2}k(x_0{}^2-x_1{}^2)=\mu' mg(x_0-x_1)$$

$$\frac{1}{2}k(x_0+x_1)(x_0-x_1)=\mu' mg(x_0-x_1)$$

よって　$\mu'=\frac{\boldsymbol{k(x_0+x_1)}}{\boldsymbol{2mg}}$

←[3]　何回折り返したかにかかわらず (n によらず)，動摩擦力がした仕事は $-\mu' mgL$ である。

66 ケプラーの法則

解答　(ア)　$\frac{T^2}{a^3}$　　(イ)　$\frac{1}{2}r_2v_2$　　(ウ)　$\frac{1}{2}rv\sin\theta$

指針　ケプラーの第二法則より，面積速度 $\frac{1}{2}rv\sin\theta=$ 一定 が成りたつ。

ケプラーの第三法則より，太陽を回るすべての惑星で $\frac{T^2}{a^3}=$ 一定 が成りたつ。

解説　(ア)　$\frac{\boldsymbol{T^2}}{\boldsymbol{a^3}}$　　(イ)　$\frac{1}{2}r_2v_2\sin 90°=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{r_2v_2}$　　(ウ)　$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{rv\sin\theta}$

67 地球の質量

解答　6.0×10^{24} kg

指針　重力は物体と地球の間の万有引力と地球の自転による遠心力との合力であるが，遠心力は最大の赤道上でも万有引力の約 $\frac{1}{300}$ 程度なので，重力≒万有引力　とみなしてよい。

地球の半径 $R=6.4\times10^3\,\text{km}=6.4\times10^6\,\text{m}$ に直して代入する。

解説　地球表面にある物体の質量を m とする。重力≒万有引力 として

$$mg=G\frac{Mm}{R^2} \text{ より }\quad M=\frac{gR^2}{G}$$

よって　$M=\frac{9.8\times(6.4\times10^6)^2}{6.7\times10^{-11}}\fallingdotseq\boldsymbol{6.0\times10^{24}\,\text{kg}}$

68 月面での重力加速度

解答　$1.7\,\text{m/s}^2$

指針　重力＝万有引力，「$mg=G\frac{Mm}{R^2}$」より　重力加速度「$g=\frac{GM}{R^2}$」

解説　地球，月の質量を M，M'，半径を R，R' とし，それぞれの表面での重力加速度の大きさを g，g' とすると

$$g=\frac{GM}{R^2},\ g'=\frac{GM'}{R'^2}\ (G：万有引力定数)$$

$$\frac{g'}{g}=\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{R'}\right)^2=\frac{1}{81}\times\left(\frac{26}{7}\right)^2=\frac{1}{18}\times\frac{676}{49}$$

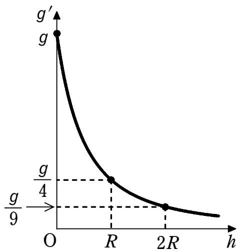
よって　$g'=\frac{676\times9.8}{81\times49}\fallingdotseq\boldsymbol{1.7\,\text{m/s}^2}$ [1]←

←[1]　参考　月面での重力加速度の大きさは，地球表面での重力加速度の大きさのおよそ $\frac{1}{6}$ 倍である。

69 重力加速度

解答　(1)　$\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$

(2)　右図



指針　地表面上では質量 m の物体には mg の重力がはたらく。自転による遠心力が無視できる場合，重力は地球による万有引力に等しい。

解説　(1)　地球表面上で質量 m の物体にはたらく重力は，地球の質量を M として

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}\quad (G：万有引力定数)\quad \cdots\cdots ①$$

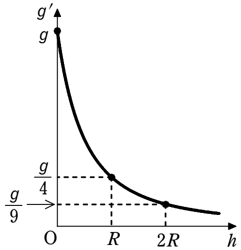
高さ h の点における重力は

$$mg'=G\frac{Mm}{(R+h)^2}\quad \cdots\cdots ②$$

② 式÷① 式 より　$\frac{g'}{g}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$

ゆえに　$g'=\left(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R+h}}\right)^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{g}$

(2)　グラフは，$h=-R$，$g'=0$ を漸近線とする単調減少の曲線になる。**右図**



70 重力の大きさ

解答　(1)　$G\frac{Mm}{R^2}$　　(2)　$G\frac{Mm}{R^2}-mR\omega^2$

指針　重力は，物体と地球の間の万有引力と地球の自転による遠心力との合力である。遠心力は緯度によって異なり，赤道上 (緯度 $\theta=0°$) で最も大きく，北極・南極 (緯度 $\theta=90°$) では 0 となる。

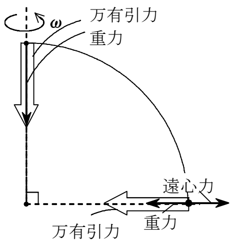
解説　(1)　北極は，地球の自転軸上なので遠心力は 0 である。「重力＝万有引力」より

$$\boldsymbol{G\frac{Mm}{R^2}}$$

(2)　赤道上は，地球の自転によって半径 R の等速円運動をしているので

「重力＝万有引力－遠心力」より

$$\boldsymbol{G\frac{Mm}{R^2}-mR\omega^2}$$



71 ケプラーの法則と万有引力の法則

解答　(1)　$mr\omega^2$　　(2)　$G\frac{Mm}{r^2}$　　(3)　$\frac{4\pi^2}{GM}$

指針　ニュートンは，ケプラーの法則と運動の法則とから万有引力の法則を導いたが，ここでは，これと逆の道をたどって，運動の法則と万有引力の法則とからケプラーの法則 (第三法則) を導くことになる。

月の等速円運動には向心力 $mr\omega^2$ が必要であるが，地球と月との間の万有引力 $G\frac{Mm}{r^2}$ がこの役割をしている。

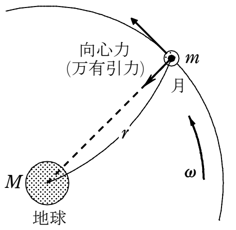
解説　(1)　向心力の大きさ　$F_1=\boldsymbol{mr\omega^2}$

(2)　万有引力の大きさ　$F_2=\boldsymbol{G\dfrac{Mm}{r^2}}$

(3)　$mr\omega^2=G\dfrac{Mm}{r^2}$ に $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ を代入すれば

$$mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=G\frac{Mm}{r^2}$$

よって　$\dfrac{T^2}{r^3}=\boldsymbol{\dfrac{4\pi^2}{GM}}$ (一定)[1]←



←[1]　これはケプラーの第三法則を表している。

72 静止衛星

解答　(1)　$2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{gR^2}}$　　(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T_0{}^2}{4\pi^2}}-R$

指針　人工衛星は地球との間の万有引力 (重力)「$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$」を向心力として等速円運動している。

解説　(1)　人工衛星の質量を m，地球を回る角速度を ω とする。地表から高さ h の円軌道を回るから，人工衛星は半径 $R+h$ の等速円運動をする。運動方程式「$mr\omega^2=F$」より

$$m(R+h)\omega^2=G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$　(M：地球の質量，G：万有引力定数)

よって　$\omega=\sqrt{\dfrac{GM}{(R+h)^3}}$　…… ①

ここで，地表面での「重力＝万有引力」の関係より

$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$　　よって　$GM=gR^2$　…… ②

② 式を ① 式に代入して　$\omega=\sqrt{\dfrac{gR^2}{(R+h)^3}}$

周期は　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{gR^2}}}$ [1]←

(2)　(1) の結果に $T=T_0$ を代入して，h について解く。

$T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{gR^2}}$　より　$\left(\dfrac{T_0}{2\pi}\right)^2=\dfrac{(R+h)^3}{gR^2}$

$$(R+h)^3=gR^2\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2=\frac{gR^2T_0{}^2}{4\pi^2}$$

$R+h=\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T_0{}^2}{4\pi^2}}$　　よって　$h=\boldsymbol{\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T_0{}^2}{4\pi^2}}-R}$ [2]←

←[1]　別解　人工衛星が地球を回る速さを v とすると

$$m\frac{v^2}{R+h}=G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}=\sqrt{\dfrac{gR^2}{R+h}}$　($GM=gR^2$ を用いた)

よって　$T=\dfrac{2\pi(R+h)}{v}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{gR^2}}}$

←[2]　地球の自転周期と等しい周期で赤道上を運動する人工衛星を静止衛星という。静止衛星の高度は，この式で一意的に決まる。

73 人工衛星の力学的エネルギー

解答　(ア)　$G\dfrac{Mm}{r^2}$　　(イ)　$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$　　(ウ)　$\dfrac{GMm}{2r}$　　(エ)　$-\dfrac{GMm}{r}$

(オ)　$-\dfrac{GMm}{2r}$　　問　1：−2：−1

指針　万有引力による位置エネルギーは「$U=-G\dfrac{Mm}{r}$」の式で表される。

万有引力による等速円運動では，運動エネルギー：位置エネルギー：力学的エネルギーは簡単な比で表される。

解説　(ア)　万有引力の大きさ　$F=\boldsymbol{G\dfrac{Mm}{r^2}}$

(イ)　万有引力が向心力となって人工衛星は等速円運動するから，運動方程式

「$m\dfrac{v^2}{r}=F$」より

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$$

これを変形して　$v^2=\dfrac{GM}{r}$　　よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$

(ウ)　運動エネルギーは

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\cdot\frac{GM}{r}=\boldsymbol{\frac{GMm}{2r}}$$

(エ)　万有引力による位置エネルギーは

$$U=-G\frac{Mm}{r}=\boldsymbol{-\frac{GMm}{r}}$$

(オ)　力学的エネルギーは

$$E=K+U=\frac{GMm}{2r}+\left(-\frac{GMm}{r}\right)=\frac{GMm}{2r}-\frac{2GMm}{2r}=\boldsymbol{-\frac{GMm}{2r}}$$

問　$K:U:E=\dfrac{GMm}{2r}:-\dfrac{GMm}{r}:-\dfrac{GMm}{2r}=\dfrac{1}{2}:-1:-\dfrac{1}{2}$

$=\boldsymbol{1:-2:-1}$ [1]←

←[1]　万有引力による等速円運動では，運動エネルギー K と位置エネルギー U と力学的エネルギー E の比が常に 1：−2：−1 に固定される。したがって，速さが大きい (K が大) ほど，力学的エネルギー E が小さい。

74 人工衛星のエネルギー

解答　(1)　$\sqrt{gR}$　　(2)　$-\dfrac{1}{2}mgR$　　(3)　$\dfrac{1}{2}mgR$

指針　人工衛星は地球との万有引力 (重力) を向心力として等速円運動している。人工衛星が無限に遠くへ行くには，無限遠 (位置エネルギー 0) で速さが 0 以上であればよい。

解説　(1)　地表すれすれの円軌道を回るから，人工衛星は重力 mg を向心力として半径 R の等速円運動をする。運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r}=F$」より

$m\dfrac{v^2}{R}=mg$　　よって　$v=\boldsymbol{\sqrt{gR}}$ [1]←　…… ①

(2)　地表面での「重力＝万有引力」の関係より

$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$　(M：地球の質量，G：万有引力定数)

よって　$g=\dfrac{GM}{R^2}$　または　$GM=gR^2$　…… ②

人工衛星の力学的エネルギー E は

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

①，② 式を用いて

$$E=\frac{1}{2}m\cdot gR-gR^2\frac{m}{R}=\frac{1}{2}mgR-mgR=\boldsymbol{-\frac{1}{2}mgR}$$ [2]←

(3)　無限遠 (位置エネルギー 0) で速さが 0 以上であればよい[3]←。したがって，力学的エネルギーが 0 以上であればよい。人工衛星に与えるエネルギーを $\varDelta E$ とすると，$E+\varDelta E\geqq 0$ より

$-\dfrac{1}{2}mgR+\varDelta E\geqq 0$　　よって　$\varDelta E\geqq\dfrac{1}{2}mgR$

ゆえに必要なエネルギーは　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}mgR}$

←[1]　地表すれすれの円軌道を回るときの速さを第一宇宙速度という。

←[2]　注　G，M が与えられていないので，最終的な答えにはこれらの文字を用いてはいけない。このような場合には，② 式を用いて g，R の式に書きかえる。

←[3]　無限遠に達する前に速さが 0 になると，万有引力によって再び地球に引き寄せられる。

75 だ円軌道上の運動

解答　(1)　$\sqrt{\dfrac{1}{2}gR}$　　(2)　$4\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

(3)　$\dfrac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-\dfrac{1}{2}mgR\right)=\dfrac{1}{2}mv_2{}^2+\left(-\dfrac{1}{6}mgR\right)$

(4)　$\dfrac{1}{3}v_1$　　(5)　v_1：$\dfrac{1}{2}\sqrt{3gR}$，v_2：$\dfrac{1}{6}\sqrt{3gR}$

(6)　$16\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

指針　人工衛星の運動では，力学的エネルギー保存則に加えて，面積速度一定の法則 (ケプラーの第二法則) が成りたつ。また，地球のまわりを回るすべての人工衛星について，ケプラーの第三法則「$\dfrac{T^2}{a^3}=$一定」が成りたつ。

解説　(1)　地球の質量を M，万有引力定数を G とする。人工衛星の円軌道の半径は $2R$ で，人工衛星にはたらく万有引力が向心力となるから

$m\dfrac{v_0{}^2}{2R}=G\dfrac{Mm}{(2R)^2}$　　よって　$m\dfrac{v_0{}^2}{2R}=G\dfrac{Mm}{4R^2}$　…… ①

地表面での「重力＝万有引力」の関係より　$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$　…… ②

① 式に ② 式を代入して

$m\dfrac{v_0{}^2}{2R}=\dfrac{1}{4}mg$　　よって　$v_0{}^2=\dfrac{1}{2}gR$　　$v_0=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{1}{2}gR}}$ [1]←

(2)　周期 T_0 は「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より

$$T_0=\frac{2\pi\cdot 2R}{v_0}=4\pi R\sqrt{\frac{2}{gR}}=\boldsymbol{4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}}$$

(3)　点 A，点 B について，力学的エネルギー保存則の式を立てる。万有引力による位

置エネルギー「$U=-G\dfrac{Mm}{r}$」より

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-G\frac{Mm}{2R}\right)=\frac{1}{2}mv_2{}^2+\left(-G\frac{Mm}{6R}\right)$$

② 式を変形した式 $GM=gR^2$ を用いて

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-gR^2\frac{m}{2R}\right)=\frac{1}{2}mv_2{}^2+\left(-gR^2\frac{m}{6R}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-\frac{1}{2}mgR\right)=\frac{1}{2}mv_2{}^2+\left(-\frac{1}{6}mgR\right)}$$ [2]← ……③

(4)　点 A，点 B について，面積速度一定の法則を用いる。

$$\frac{1}{2}\times 2R\times v_1=\frac{1}{2}\times 6R\times v_2$$ [3]←　　よって　$v_2=\boldsymbol{\frac{1}{3}v_1}$ ……④

(5)　③ 式より　$\dfrac{1}{2}mv_1{}^2-\dfrac{1}{2}mv_2{}^2=\dfrac{1}{2}mgR-\dfrac{1}{6}mgR=\dfrac{1}{3}mgR$

④ 式を代入して

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_1\right)^2=\frac{1}{3}mgR$$

$$\frac{8}{18}mv_1{}^2=\frac{1}{3}mgR$$　　よって　$v_1{}^2=\dfrac{3}{4}gR$　　$v_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{3gR}}$

④ 式より　$v_2=\dfrac{1}{3}v_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\sqrt{3gR}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\sqrt{3gR}}$

(6)　半径 $2R$ の円軌道と，だ円軌道との間で，ケプラーの第三法則「$\dfrac{T^2}{a^3}=$一定」を用いる[4]←。

だ円軌道の半長軸は $\dfrac{1}{2}(2R+6R)=4R$ であるから　$\dfrac{T_0{}^2}{(2R)^3}=\dfrac{T^2}{(4R)^3}$

よって　$T^2=\dfrac{4^3R^3}{2^3R^3}T_0{}^2=8T_0{}^2$

$$T=2\sqrt{2}\,T_0=2\sqrt{2}\times 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}=\boldsymbol{16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

←[1]　注　G，M が与えられていないので，最終的な答えにはこれらの文字を用いてはいけない。

←[2]　注　両辺を m でわるなどの変形をしてはいけない (力学的エネルギー保存則の式ではなくなってしまうため)。

←[3]　面積速度$=\dfrac{1}{2}rv\sin\theta$　θ は，地球の中心と人工衛星を結ぶ線分と，速度がなす角度。

点 A と点 B はともに $\theta=90°$ であるから　$\sin 90°=1$

←[4]　地球を中心とする人工衛星であれば，円軌道であってもだ円軌道であっても $\dfrac{T^2}{a^3}$ の値は等しい (ケプラーの第三法則)。

76 緯度と重力加速度

解答　(1)　$mR\omega^2\cos\theta$　　(2)　$G\dfrac{Mm}{R^2}$

(3)　$\sqrt{\left(\dfrac{GM}{R^2}\right)^2+\left(R^2\omega^2-\dfrac{2GM}{R}\right)\omega^2\cos^2\theta}$　　(4)　$R\omega^2$

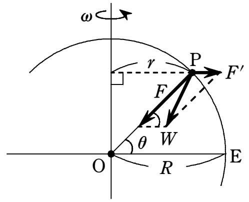
指針　地上にある物体は，緯度によって異なる重力を受ける。これは重力が万有引力と遠心力との合力として表されるためである。遠心力は緯度が高くなるほど回転半径が小さくなり，大きさも小さくなる。遠心力は北極では 0 となり，赤道上では最大となる。

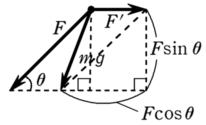
解説　(1)　物体 P は半径 $r=R\cos\theta$ の円運動をするので遠心力の式「$F=mr\omega^2$」より

$$\boldsymbol{F'=mR\omega^2\cos\theta}$$

(2)　万有引力の式「$F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$」より　$F=\boldsymbol{G\dfrac{Mm}{R^2}}$

(3)　重力は万有引力と遠心力との合力である。





図より，三平方の定理を使い[1]←

$$mg=\sqrt{(F\sin\theta)^2+(F\cos\theta-F')^2}$$
$$=\sqrt{F^2+F'^2-2FF'\cos\theta}$$
$$=\sqrt{\left(G\frac{Mm}{R^2}\right)^2+(mR\omega^2\cos\theta)^2-2\times G\frac{Mm}{R^2}\cdot mR\omega^2\cos\theta\cdot\cos\theta}$$

よって　$g=\boldsymbol{\sqrt{\left(\dfrac{GM}{R^2}\right)^2+\left(R^2\omega^2-\dfrac{2GM}{R}\right)\omega^2\cos^2\theta}}$

(4)　遠心力は赤道上で最大，北極で 0 なので，

$$mg_{\mathrm{E}}=G\frac{Mm}{R^2}-mR\omega^2,\qquad mg_{\mathrm{N}}=G\frac{Mm}{R^2}$$

よって　$g_{\mathrm{E}}=\dfrac{GM}{R^2}-R\omega^2$,　　$g_{\mathrm{N}}=\dfrac{GM}{R^2}$

したがって　$\varDelta g=g_{\mathrm{N}}-g_{\mathrm{E}}=\dfrac{GM}{R^2}-\left(\dfrac{GM}{R^2}-R\omega^2\right)=\boldsymbol{R\omega^2}$

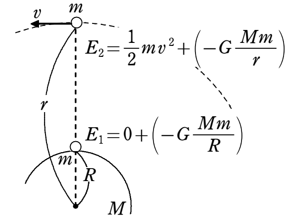
←[1]　別解　余弦定理より $(mg)^2=F^2+F'^2-2FF'\cos\theta$ を利用する。

77 人工衛星の打ち上げのエネルギー

解答　$mgR\left(1-\dfrac{R}{2r}\right)$

指針　各状態での人工衛星の力学的エネルギーを考える。打ち上げのときはすでに万有引力による位置エネルギーをもっていることに注意する。

解説　地球の質量を M，万有引力定数を G とする。



地上にとどまっている人工衛星の力学的エネルギー E_1 は

$$E_1=0+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$
$$=-\frac{gR^2\cdot m}{R}=-mgR$$ [1]←

次に，半径 r の円軌道上での力学的エネルギー E_2 を求める。人工衛星の速さを v とすると，運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$$　　よって　$mv^2=\dfrac{GMm}{r}$

したがって

$$E_2=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{r}-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}=-\frac{mgR^2}{2r}$$ [1]←

ゆえに，地上から打ち上げるのに必要なエネルギー E との関係は

$$E_1+E=E_2$$

よって　$E=E_2-E_1=-\dfrac{mgR^2}{2R}-(-mgR)=\boldsymbol{mgR\left(1-\dfrac{R}{2r}\right)}$

←[1]　「$GM=gR^2$」を用いた。

78 だ円軌道上の運動

別解　(1)　$\sqrt{gR}$　　(2)　$\dfrac{1}{3}v_1$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}v_0$　　(4)　$\sqrt{2gR}$

(5)　$V_1<V_0<v_0<v_1<v_2$

指針　地球を回る物体の運動では，面積速度一定の法則 (ケプラーの第二法則) が成りたつ。

解説　(1)　物体の質量を m とする。地表すれすれの円軌道を回るから，人口衛星は重力 mg を向心力として半径 R の等速円運動をする。運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r}=F$」より

$$m\frac{v_0{}^2}{R}=mg$$　　よって　$v_0=\boldsymbol{\sqrt{gR}}$ [1]←

(2)　点 A，点 B について，面積速度一定の法則を用いる。

$$\frac{1}{2}Rv_1=\frac{1}{2}\times 3R\times V_1$$　　よって　$V_1=\dfrac{1}{3}v_1$

地球の質量を M，万有引力定数を G とする。

点 A，点 B について，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}mV_1{}^2+\left(-G\frac{Mm}{3R}\right)$$

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_1\right)^2=\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{3R}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}\times v_1{}^2=\frac{2GM}{3R}$$

$$\frac{4}{9}v_1{}^2=\frac{2gR^2}{3R}$$　　よって　$v_1=\sqrt{\dfrac{3gR}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6gR}}{2}}$　$\left(=\dfrac{\sqrt{6}}{2}v_0\right)$

(3)　人工衛星の円軌道の半径は $3R$ で，人工衛星にはたらく万有引力が向心力となるから

$$m\frac{V_0{}^2}{3R}=G\frac{Mm}{(3R)^2}$$　　よって　$mV_0{}^2=G\dfrac{Mm}{3R}$

ここで「$GM=gR^2$」より　$mV_0{}^2=gR^2\dfrac{m}{3R}$

よって　$V_0{}^2=\dfrac{1}{3}gR$　　$V_0=\sqrt{\dfrac{1}{3}gR}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}v_0=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}v_0}$

(4)　無限遠 (位置エネルギー 0) で速さが 0 以上であればよいので，力学的エネルギーが 0 以上であればよい。点 A での速さを v とすると

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)\geqq 0$$　　よって　$v\geqq\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

「$GM=gR^2$」より　$v\geqq\sqrt{2gR}$　　v の最小値は $v_2=\boldsymbol{\sqrt{2gR}}$ [2]←

(5)　(1) ～ (4) の結果より

$v_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}v_0$, $v_2=\sqrt{2}\,v_0$, $V_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}v_0$, $V_1=\dfrac{1}{3}v_1=\dfrac{\sqrt{6}}{6}v_0$

以上より　$\boldsymbol{V_1<V_0<v_0<v_1<v_2}$

←[1]　地表すれすれの円軌道を回るときの速さを第一宇宙速度という。

←[2]　地表から打ち上げた物体が地球にもどってこないときの速さの最小値を第二宇宙速度という。

79 大気の影響による人工衛星の速度変化

解答　(1)　$\dfrac{T^2}{r^3}=\dfrac{4\pi^2}{GM}$

(2)　物体のエネルギーは，それぞれ

$$\begin{cases} K=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{GMm}{2r} \\ U=-G\dfrac{Mm}{r} \end{cases}$$

よって　$2K+U=2\times\dfrac{GMm}{2r}+\left(-G\dfrac{Mm}{r}\right)=0$

(3)　(2)より　$U=-2K$

よって　$E=K+U=K+(-2K)=-K<0$

$\left(\text{ただし，}K=\dfrac{1}{2}mv^2>0\right)$

(4)　(a)　$E=-K=-\dfrac{GMm}{2r}<0$　……①

よって　$r=-\dfrac{GMm}{2E}$　(ただし，$E<0$)

大気の摩擦力は，人工衛星に負の仕事 ΔE (<0) をするので，力学的エネルギーは $E+\Delta E$ (<0) となり減少する。$E+\Delta E$ の絶対値は大きくなるので，摩擦力を受けたあとの人工衛星の高度 r' は

$$r'=-\frac{GMm}{2(E+\Delta E)}<r$$

よって，もとの高度から下がる。

(b)　(結果)　人工衛星の速さは増加する。

(理由)　① 式より $K=-E$　E が減少する (絶対値が大きくなる) と，この式から K が大きくなり，速さが増加する。

指針　人工衛星や天体の運行を扱うときは，様々な条件を簡略化して本質的な部分について考えることが多いが，実際には様々な影響をあわせて考えることも必要である。人工衛星では，地球大気の摩擦力を受けるが，近似的に成りたつ式を利用する。

解説　(1)　円運動の速さは，等速円運動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より

$$v=\frac{2\pi r}{T} \quad \cdots\cdots ①$$

また，物体は地球との間の万有引力を向心力として等速円運動しているので

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2} \quad \cdots\cdots ②$$

① 式を代入して　$\dfrac{m}{r}\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2=G\dfrac{Mm}{r^2}$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{T^2}{r^3}=\dfrac{4\pi^2}{GM}}$

(2)　物体のエネルギーは，それぞれ

$$\begin{cases} K=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{GMm}{2r} & \left(\text{② 式より } mv^2=\dfrac{GMm}{r} \text{ を用いた}\right) \\ U=-G\dfrac{Mm}{r} \end{cases}$$

よって　$2K+U=2\times\dfrac{GMm}{2r}+\left(-G\dfrac{Mm}{r}\right)=0$

(3)　(2)より　$U=-2K$

よって　$E=K+U=K+(-2K)=-K<0$

$\left(\text{ただし，}K=\dfrac{1}{2}mv^2>0\right)$

(4)　(a)　人工衛星の力学的エネルギー E は

$$E=-K=-\frac{GMm}{2r}<0 \quad \cdots\cdots ③$$

よって　$r=-\dfrac{GMm}{2E}$　(ただし，$E<0$)

大気の摩擦力は，人工衛星に負の仕事 ΔE (<0) をするので，力学的エネルギーは $E+\Delta E$ (<0) となり減少する。$E+\Delta E$ の絶対値は大きくなるので，摩擦力を受けたあとの人工衛星の高度 r' は

$$r'=-\frac{GMm}{2(E+\Delta E)}<r$$

よって，もとの高度から下がる[1]←。

(b)　(結果)　人工衛星の速さは**増加する**。

(理由)　③ 式より $K=-E$　E が減少する (絶対値が大きくなる) と，この式から K が大きくなり，速さが増加する。

←[1]　**別解**　$E=-\dfrac{GMm}{2r}$ において，E が減少すると $\dfrac{GMm}{2r}$ は増加する。よって r は減少する。ゆえに，人工衛星の高度は下がる。

80 万有引力による単振動

解答　(1)　$\dfrac{mgr}{R}$　　(2)　$-\dfrac{g}{R}x$　　(3)　$\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　　(4)　$l\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

指針　地球の内部に本問のようなトンネルを建設することができた場合，摩擦や空気抵抗が無視できれば万有引力のみによって，列車を走らせることができる。このとき，列車にはたらく力は復元力になっており，列車は単振動を行う。

解説　(1)　問題文より，点 P で列車が受ける万有引力は，$\mathrm{OP}=r$ を半径とする球 S 内の質量が中心 O に集中していると考えたときの万有引力に等しい[1]←。

地球の質量を M，球 S 内の質量を M'，万有引力定数を G とする。

地球を均質な球と仮定しているので，地球の質量 M と球 S 内の質量 M' の比は体積比に等しい。

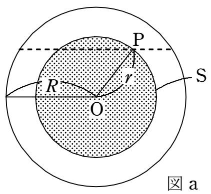


図 a

$M:M'=\dfrac{4}{3}\pi R^3:\dfrac{4}{3}\pi r^3$[2]← $=R^3:r^3$　　よって　$M'=\dfrac{r^3}{R^3}M$

よって，万有引力の式「$F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$」より

$$F=G\frac{M'm}{r^2}=G\frac{\left(\dfrac{r^3}{R^3}M\right)\times m}{r^2}=\frac{GMmr}{R^3}$$

ここで，「$GM=gR^2$」より　$F=\dfrac{gR^2\cdot mr}{R^3}=\boldsymbol{\dfrac{mgr}{R}}$

(2)　点 P で列車が受ける万有引力の，トンネル AB にそった方向の成分は A→B の向きを正として $-F\times\dfrac{x}{r}$ であるから，運動方程式は

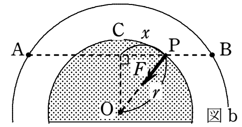


図 b

$$ma=-\frac{mgr}{R}\times\frac{x}{r}$$

よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{g}{R}x}$

(3)　(2) の結果より列車は単振動を行うことがわかる。

$a=-\dfrac{g}{R}x$ を単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」と比較して　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

B から A までの所要時間は，周期 T の半分である。よって

$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$ [3]←

(4)　点 C で速さは最大となる。単振動の振幅は l であるから，

「$v_{最大}=A\omega$」より　$v=\boldsymbol{l\sqrt{\dfrac{g}{R}}}$

←[1]　**参考**　半径 r よりも外側の部分が列車に及ぼす力は，すべて打ち消しあって 0 になる。

←[2]　半径 r の球の体積 V は　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

←[3]　**参考**　地球のトンネルでの単振動の周期は，地表すれすれを回る人工衛星の周期と一致し，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ である。