理系物理編

第１章

～　力学　～

I.　【モーメント】

■剛体にはたらく力のつりあい■

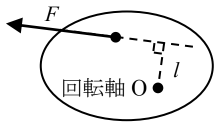
質点：質量をもち，大きさを考えない１つの点として扱う物体

剛体：大きさをもち，力を加えても変形しない物体。（$\longleftrightarrow$ 弾性体）

剛体にはたらく力の３要素…力の大きさ，作用線，向き

　※剛体にはたらく力を作用線上で移動させても，その効果は変わらない。

○力のモーメント…剛体を回転させようとする能力 $M = Fl$ [N・m]



　（l：点 O から力 F の作用線までの距離）

　※反時計まわりを正とすると，時計まわりは負

○剛体の移動

並進運動：剛体が向きを変えないで（回転しないで），全体としての位置を変える場合で，剛体内に引いた任意の線分はすべて平行に移動する。

回転運動：剛体が１つの軸のまわりに向きを変える（回転する）ことで，剛体内にその軸と交わるように引いた線分はすべてその軸のまわりに回転する。

剛体の一般の運動＝並進運動＋回転運動となっている。

○剛体にはたらく力のつりあいの条件

$\begin{cases} \text{・すべての力の合力が 0（}x\text{ 成分，}y\text{ 成分それぞれベクトル和が 0）} \\ \text{・任意の点（回転軸）まわりの力のモーメントの和が 0} \end{cases}$

※回転軸の選び方

①　大きさが未知の力が２つあるときは，その一方の作用点を回転軸として選ぶ。

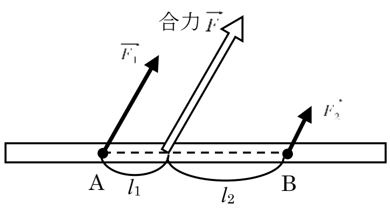
②　いくつもの力がはたらくときは，なるべく多くの力がはたらく点を回転軸として選ぶ。

○剛体にはたらく力の合力

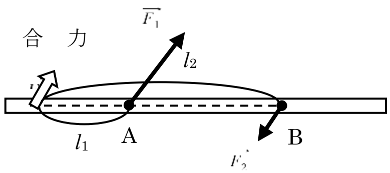
①　平行でない２力の合力…作用線の交点まで移動して合成

②　平行な２力の合力…

同じ向きの場合



逆向きの場合



大きさ：　$F = F_1 + F_2$　　$F = |F_1 - F_2|$

向き：　$\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$ と同じ　　$\overrightarrow{F_1}$，$\overrightarrow{F_2}$ の大きい方と同じ

$\boxed{F_1 l_1 = F_2 l_2 \text{ より} \quad l_1 : l_2 = F_1 : F_2}$

作用線の位置：　　　　　力の逆比に内分　　　　　　　　　　　力の逆比に外分

〇偶力

平行で逆向きの大きさの等しい2力

偶力のモーメント… $M = Fl$

〇重心

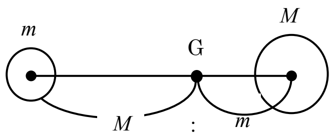
物体の各部分にはたらく重力の合力の作用点

質量 m_1， m_2，・・・の小物体が座標 x_1， x_2，・・・のところにあるとき

・重心の座標 $x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$

※一様な棒，円板，球の重心は中心に，対称軸のある物体の重心はその対称軸上にある。

※2物体の重心…それぞれの重心間を質量の逆比で内分した点



・重心の速度　$\overrightarrow{v_G} = \dfrac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$

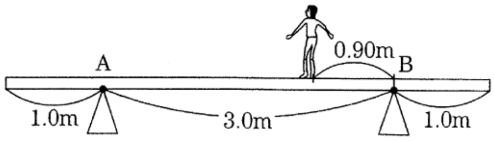
・重心の加速度 $\overrightarrow{a_G} = \dfrac{m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$

・重心の運動方程式

$$\vec{F} = (m_1 + m_2 + \cdots)\overrightarrow{a_G}$$　（$\vec{F}$ ：物体系に働く外力の和）

＜例題１＞

質量 20kg の一様な板の上に質量 50kg の人が乗っている。

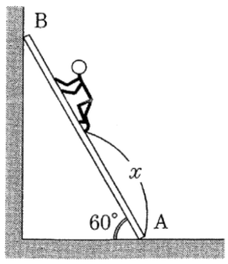


（１）図の位置に人が立っているとき，点 A で板が受ける力の大きさはいくらか。

（２）人が右へ移動したとき，点 B から少なくともいくらの距離を進むと板がひっくり返るか。

＜例題２＞

質量 10kg，長さ 6.0m の一様なはしごを，図のように水平面と 60° の角をなすようにして立てかけた。質量 50kg の人がはしごを登るとき，はしごにそってどれだけより登った所ではしごがすべって倒れだすか。ただし，はしごと床や壁との間の静止摩擦係数を 0.50 とし，人の大きさは十分小さいとする。

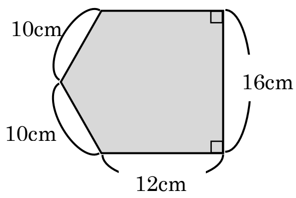


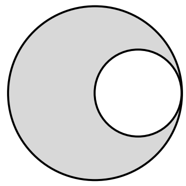
<例題３>

次の各物体の重心の位置を求めよ。

（１）図のような，厚さの一様な五角形の板。

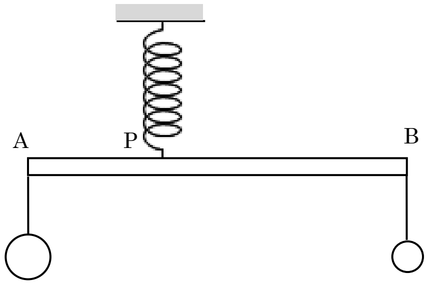
（２）図のような，厚さの一様な半径 r の円板から半径 $r/2$ の内接円を切り取った板。





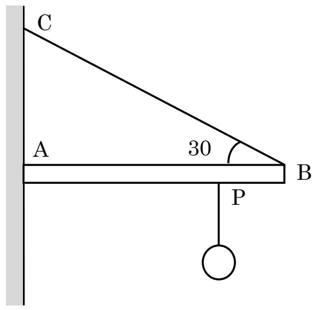
【１】

長さ 20cm で質量 1.0kg の一様な棒 AB の両端におもりをつるし，A から 7.0cm の点 P にばね定数が 980N/m のばねの一端をつけた。ばねの他端を天井に固定して静かに離すと，ばねは 10cm 伸びて，棒は水平につりあった。A，B につるしたおもりの質量 m_A， m_B を求めよ。重力加速度の大きさを g = 9.8 m/s² とする。



【２】

質量 m，長さ l の棒の一端 A を鉛直なあらい壁にあて，他端 B と壁面 C を糸で結ぶ。この棒に質量 $2m$ のおもりを A から $\frac{3}{4}l$ の点 P に下げたら，棒は水平で糸は棒と 30° の角をなしてつりあった。

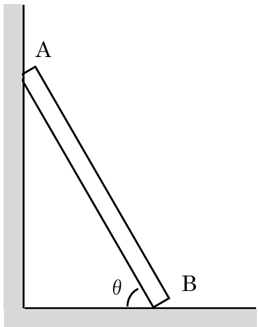


（１）このとき糸の張力 T，A 端にはたらく摩擦力 f，垂直抗力 N の大きさを，重力加速度を g として求めよ。

（２）おもりを P より少しでも左へずらすと A 端がすべり落ちる。棒と壁面の間の静止摩擦係数 μ を求めよ。

【３】

質量m，長さ$2l$の一様な棒ABを，水平であらい床と鉛直でなめらかな壁の間に，水平からθの角をなすように立てかけた。重力加速度の大きさをgとする。

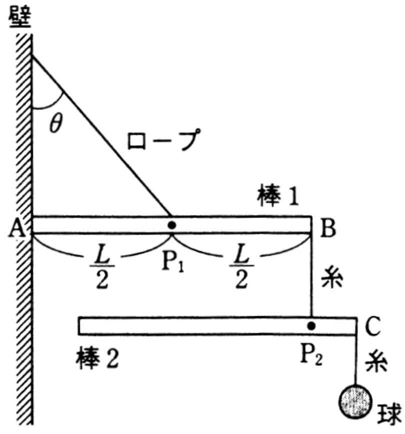


（１）棒が静止しているとき，壁から受ける垂直抗力N_A，床から受ける垂直抗力N_Bと摩擦力fを求めよ。

（２）棒が倒れないためには，$\tan\theta$がいくら以上であればよいか。ただし，棒と床の間の静止摩擦係数をμとする。

【４】（2008 年　同志社大）

次の文中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ にあてはまる式を記せ。また，空欄 $\boxed{\text{a}}$ にあてはまる語句を解答欄群から選び，その番号を記せ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，糸とロープの質量は無視できるものとする。



質量が M で長さが L の 2 本の一様な棒がある。図のように，ロープの一端を壁に固定し，他端を棒 1 の中点 P_1 に固定した。棒 1 の一端 A を鉛直な壁に垂直に接触させたところ，ロープと壁とのなす角度が θ となった。また，棒 1 の他端 B に糸を付けて，点 P_2 で棒 2 をつるした。さらに，棒 2 の一端 C から質量 m の球を糸でつるしたところ，棒 1 と棒 2 が水平に静止した。このとき，棒 2 の端 C から点 P_2 までの距離は $\boxed{\text{ア}}$ である。

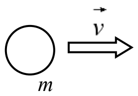
棒 1 に作用している力について考える。棒と壁との静止摩擦係数は μ である。棒 1 には，大きさ $\boxed{\text{イ}}$ の重力と，壁から受ける垂直抗力および向きが $\boxed{\text{a}}$ の摩擦力が作用し，端 B では大きさ $\boxed{\text{ウ}}$ の糸の張力が作用し，点 P_1 では大きさ T のロープの張力が作用している。棒 1 に作用する水平方向の力のつりあいから，壁から受ける垂直抗力の大きさは $\boxed{\text{エ}}$ と表され，鉛直方向の力のつりあいから，摩擦力の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ と表される。また，端 A のまわりの力のモーメントのつりあいを考えると，$T = \boxed{\text{カ}}$ となる。棒 1 が端 A ですべらずにつりあいの状態を保っていることから，T を消去して θ が満たしている条件を表すと，$\tan\theta > \boxed{\text{キ}}$ となる。

[解答群]　①　鉛直上向き　　②　鉛直下向き　　③　水平右向き

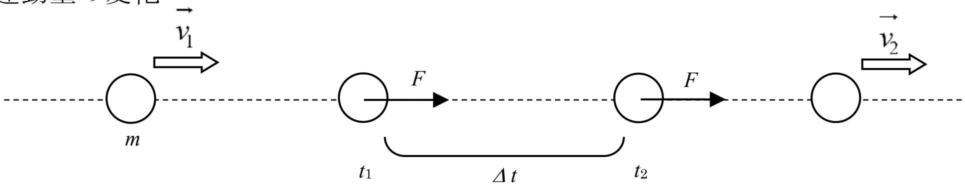
II. 【運動量の保存】

■運動量と力積■

○運動量 $m\vec{v}$ [kg・m/s]：物体の運動の状態を表す指標。（運動の激しさを表す目安）



○運動量の変化



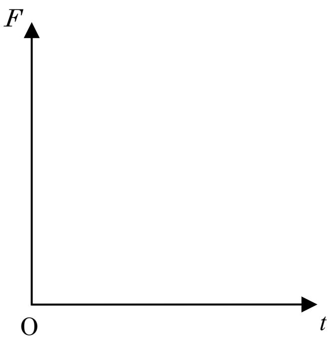
$F = ma$ を両辺時間 t で積分すると・・・

力積 $\vec{F}\Delta t$ [N･s]：力と作用時間との積（他の物体の運動量をどれだけ変化させるかを表す。）

$\boxed{\text{運動量と力積の関係：} \vec{F}\Delta t = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}}$

※左辺の力積は物体が**受けた**力積であることに注意！！

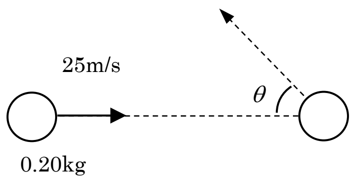
○力の平均値



$\overline{F} = \dfrac{I}{\Delta t}$ （$\overline{F}$ [N]：力の平均値， I [N・s]：力積， Δt [s]：作用時間）

＜例題１＞

図のように，質量 $m = 0.20$ kg，速さ $v = 25$ m/s で飛んでくるボールを，速さ v' で角度 θ の方向に打ち返した。次の各問いについて，ボールが受ける力積[N・s]の向きと大きさを求めよ。また，ボールが与える力積はどうか。



（１）バットで逆向き($\theta = 0^\circ$)に，$v' = 30$ m/s で打ち返したとき。

（２）バットで逆向き($\theta = 0^\circ$)に，$v' = 10$ m/s で打ち返したとき。

（３）ミットで受け止めたとき。($v' = 0$ m/s)

（４）バットで $\theta = 60^\circ$ の方向に同じ速さで打ち返したとき。

■運動量保存則■

いくつかの物体が内力を及ぼしあうだけで外力を受けていないとき，物体系全体の運動量は変化しない。

$$m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+m_n\overrightarrow{v_n}=m_1\overrightarrow{v'_1}+m_2\overrightarrow{v'_2}+\cdot\ \cdot\ \cdot+m_n\overrightarrow{v'_n}$$

※平面の場合，成分分解する。

※速度は静止系（一般には慣性系）に対する速度を用いる。

※合体，衝突，分裂（瞬間的な現象） ⇒ $\Delta t\fallingdotseq 0$ のため，近似的に運動量が保存される。

※はたらく力が内力のみの物体系であれば適用できる。

(例)板に打ちこむ，台上をすべって静止，ばねのついた物体との衝突

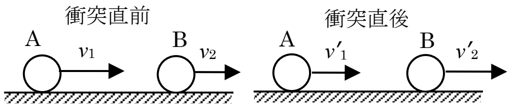
※衝突の前後で重心の速度は変わらない。

重心の速度 $\overrightarrow{v_G}=\dfrac{m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}$

■反発係数（はねかえり係数）■

衝突直前，直後の 2 球の速度をそれぞれ

v_1，v_2，v'_1，v'_2 とすると，



反発係数 $e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$ （速度の向きを正，負の符号で区別する）

（$0\leqq e\leqq 1$）

$e=1$ ・・・（完全）弾性衝突（力学的エネルギー保存）

$0<e<1$ ・・・非弾性衝突（力学的エネルギー減少）

$e=0$ ・・・完全非弾性衝突（衝突後一体となる）

※なめらかな固定壁との衝突

①壁に垂直に衝突するとき

壁の質量が十分大きいので，運動量保存則は無意味であり，壁の速度を 0 として考える。

②壁との斜衝突のとき

垂直成分・・・①と同じ

平行成分・・・なめらかであるから力積を受けないため，平行な速度成分の変化なし。

＜例題２＞

（１）なめらかな水平面上にある一直線上を，質量 1.0kg の台車Ａが右向きに速さ 0.50m/s で，質量 2.0kg の台車Ｂが左向きに速さ 0.70m/s で衝突し，台車Ｂは左向きに速さ 0.20m/s となった。衝突後の台車Ａの速度を求めよ。

【１】例題２について，

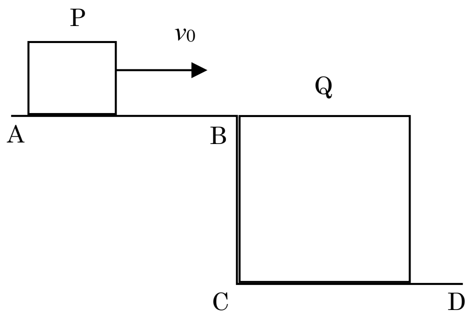
（１）衝突後に一体となった場合，一体となった台車の速度を求めよ。

（２）上の台車Ａ，Ｂの間にばねをはさんで糸でつなぎ，Ｂを前にして速さ 0.50m/s で進ませながら糸を焼き切ったら，Ａは逆向きに速さ 0.30m/s で進んだ。分離後のＢの速度 v' [m/s]を求めよ。

（３）速さ 0.30m/s で進む質量 120kg の舟から，質量 40kg の人が，舟の進む向きと反対に舟から静水に飛びこんだ。舟から見た人の速さは 0.60m/s であった。舟の速さはいくらになるか。

【２】なめらかな水平面の x 軸上を正の向きに 6.0m/s の速さで進んでいた質量 0.10kg の小球 A と，y 軸上の正の向きに 4.0m/s の速さで進んでいた質量 0.20kg の小球 B が原点 O で衝突した。衝突後の A の速度の x 成分が 2.0m/s，y 成分が 5.0m/s であるとすると，B はどのような方向へ速さ何 m/s で進んだか。衝突後の B の速度 v の向きは，x 軸となす角を θ とするときの $\tan\theta$ の値で答えよ。

＜例題３＞

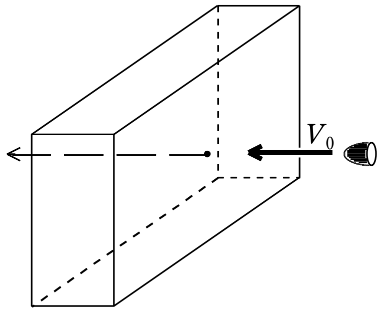


図のように，なめらかな水平面 AB，CD が，鉛直面 BC を介してつながっており，その面 BC に接するように質量 M[kg]の物体 Q が置かれている。物体 Q の上面はあらい面をしており，水平面 AB と同一平面上にある。いま，質量 m[kg]の物体 P が図の左から速さ v_0[m/s]で近づいてきて，点 B で瞬時に物体 Q の上面に乗り移り（状態 1)，やがて P，Q は一体となって運動を続けたとする（状態 2)。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，物体 P と物体 Q の間の動摩擦係数を μ' とし，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。

（１）状態 2 になったあとの物体 P，Q の速さ v_1 [m/s]を求めよ。

（２）状態 1 から状態 2 になるまでの時間 t_1 [s]を求めよ。

【３】水平な台上に一様な厚さをもつ質量 M [kg]の木片を垂直に置いて，その中心に向けて面に垂直に質量 m [kg]の弾丸を打ちこんだ。弾丸が木片を通り抜ける間は重力の影響は無視できるものとする。



まず，木片を固定して弾丸を速さ V_0[m/s]で打ちこんだら，時間 Δt [s]で通り抜け，そのときの速さは V_1 [m/s]であった。

（１）木片を通り抜ける前後で，弾丸の運動量はどれだけ変化したか。

（２）弾丸が木片を通り抜ける間にはたらく木片と弾丸の間の摩擦力は一定として，その大きさを求めよ。

次に，固定をはずし，木片がなめらかに移動できる状態で静止させておき，前と同じ条件で弾丸を打ちこんだら，通り抜けたときの速さは V_2 [m/s]であった。

（３）弾丸が通り抜けた後の木片の速さを求めよ。

（４）木片と弾丸の間の摩擦力が（２）の場合と同じであるとし，弾丸が木片を通り抜けるのにかかる時間を求めよ。

（５）弾丸が木片に打ちこまれる直前の全運動エネルギー E_1 を求めよ。

（６）弾丸が通り抜けた直後の全運動エネルギー E_2 を求めよ。

（７）この木片の厚さを E_1 ，E_2 ，m ，V_0 ，V_1 ，Δt で示せ。

＜例題４＞

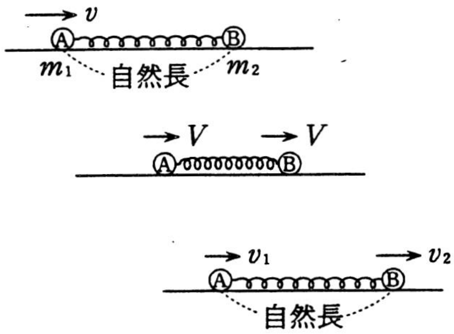
一直線上で，質量 0.20kg の小球 A が速さ 4.0m/s で，質量 0.10kg の小球 B が速さ 6.0m/s で，互いに逆向きに進んで衝突した。2 球の間の反発係数を 0.50 とするとき，衝突後の 2 球の速度 v_1'，v_2' [m/s]を求めよ。

【４】質量の等しい小球 A，B がある。A が速さ v [m/s]で等速度運動して，静止している B に正面衝突をした。はねかえり係数 e が次のおのおのの場合，衝突直後の A，B の速さをそれぞれ求めよ。

（ア）$e = 1$　　（イ）$e = 0.6$　　（ウ）$e = 0$

＜例題５＞

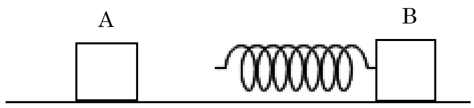
ばね定数 k の軽いばねの両端に質量 m_1， m_2 の小さいおもり A，B を取りつけ，ばねを自然長に保ったまま，なめらかな水平面上に置く。A に極めて短時間だけ大きな力を右向きに加えて初速度 v を与えたところ，2 つのおもりは振動しながら右方へ進んだ。



（１）ばねが最も縮んだときの A，B の速度 V と，
そのときの縮み r を求めよ。

（２）次に，ばねが自然長にもどったときの A，B の速度 v_1， v_2 を求めよ。

【５】図のように，なめらかな水平面上に質量mの物体Ａと質量M（$M>m$）の物体Ｂがあり，Ｂにはばね定数kの軽いばねが取り付けてある。



Ａ，Ｂおよびばねは一直線上にある。まず，ＡとＢでばねを押し縮めて，ばねが自然長からlだけ縮んだところで，ＡとＢを同時にはなした。

（１）ばねを自然長からlだけ縮めるのに要した仕事は$\boxed{\text{ア}}$である。

（２）ばねが自然長にもどったとき，ＡとＢの運動エネルギーの和は$\boxed{\text{イ}}$である。

（３）Ａがばねから離れた後，Ａは速さ$\boxed{\text{ウ}}$で動き，Ｂは速さ$\boxed{\text{エ}}$で動く。

次に，静止しているＢに向かってＡを図の右向きに速さvでばねに衝突させた。衝突時には力学的エネルギーが失われることはないものとする。

（４）衝突後，Ａがばねと接触している間に，ＡとＢの速度が等しくなるときがある。このとき，Ａ，Ｂは速さ$\boxed{\text{オ}}$で動き，ばねは最も$\boxed{\text{カ}}$いる。また，ばねは弾性エネルギー$\boxed{\text{キ}}$をたくわえている。

（５）Ａがばねと衝突してばねから離れるまでの過程をＡとＢの直接の衝突と考えると，この過程は，反発係数（はねかえり係数）eが$\boxed{\text{ク}}$の衝突に相当する。

（６）Ａがばねから離れるときＡは図の$\boxed{\text{ケ}}$向きに速さ$\boxed{\text{コ}}$で動く。

（福岡大）

＜例題６＞

高さ h の台上から速さ v_0 で水平に投げ出された質量 m の小球が，水平でなめらかな床の面上の点 A で衝突してはね上がり，点 B で再び床に衝突した。
反発係数を e，重力加速度の大きさを g とする。

（１）小球が台を離れてから点 A に至るまでの時間 t を求めよ。

（２）点 A における衝突直前の小球の速度の y 方向成分の大きさ v_y を求めよ。

（３）点 A における衝突で小球が床から受ける力積 I を求めよ。

（４）点 A で衝突したのち，最高点に達したときの高さ h' を求めよ。

（５）AB の距離 x を求めよ。

【６】

鉛直な壁 AP から l [m]だけ離れた床上の点 O から，斜め上方 45° をなす方向に小球を投げたところ，小球は壁面の点 P に垂直に当たり，はねかえって床上の一点 B に落ちてはね上がり，点 Q まで上がってふたたび床上の一点 C に落ちた。小球の質量を m[kg]，小球と床や壁の間の反発係数を e，重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし，また，床はなめらかなものとする。

（１）P の床からの高さ h_1[m]を求めよ。

（２）AB 間の距離 l_1 [m]を求めよ。

（３）Q の床からの高さ h_2[m]を求めよ。

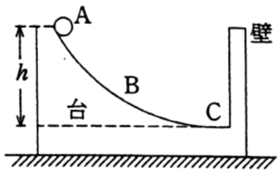
（４）BC 間の距離 l_2 [m]を求めよ。

（５）C に落下する直前までに小球が失った力学的エネルギー ΔK [J]を求めよ。

（６）C が O に一致するとき，e の値はいくらになるか。

■発展問題■

【７】



図のような形をした台がある。台の上面 ABC はなめらかな曲面で，C では水平となり，鉛直にたつ壁と接続する。左端 A は C より h だけ高くなっている。A より質量 m の小球を曲面に沿って静かにすべらせる。小球は壁に垂直に衝突する。

重力加速度の大きさを g とする。

[A]　台が床に固定してある場合について，次の問いに答えよ。

（１）小球が壁と衝突する直前の小球の速さ v を，g, h を用いて表せ。

（２）反発係数 e で小球がはねかえった。h の何倍の高さまで上がるか。

[B]　質量 M の台がなめらかな床の上を自由に動く場合について，次の問いに答えよ。

（１）小球が壁と衝突する直前の小球と台の速さ v，V を m，M，g, h を用いて表せ。

（２）反発係数 e ではねかえった直後の小球と台の速さ v'，V' を e，v，V を用いて表せ。

（３）小球がはねかえった後上がりうる最高の高さ h' はいくらか。

（４）小球が C に達するまでに台が動いた距離を求めよ。ただし，AC の水平距離を l とする。