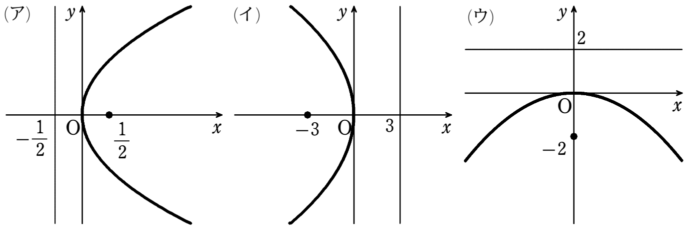
1

解答 (1) (ア) $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$x=-\frac{1}{2}$，[図]　(イ) $(-3,\ 0)$，$x=3$，[図]

(ウ) $(0,\ -2)$，$y=2$，[図]



(2) (エ) $y^2=\frac{2}{3}x$　(オ) $x^2=16y$

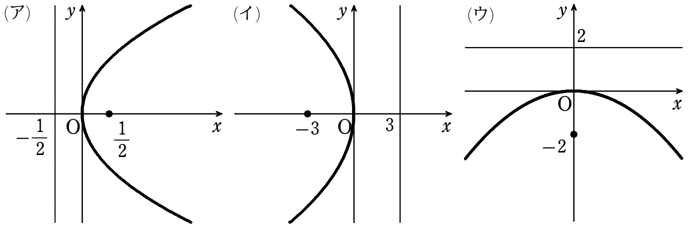
解説

(1) (ア) $y^2=4\cdot\frac{1}{2}x$ から　焦点は点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，準線は直線 $x=-\frac{1}{2}$，概形は下図。

(イ) $y^2=4\cdot(-3)x$ から　焦点は点 $(-3,\ 0)$，準線は直線 $x=3$，概形は下図。

(ウ) $x^2=-8y$　すなわち　$x^2=4\cdot(-2)y$ から

焦点は点 $(0,\ -2)$，準線は直線 $y=2$，概形は下図。



(2) (エ) $y^2=4px$ に $p=\frac{1}{6}$ を代入して　$y^2=\frac{2}{3}x$

(オ) $x^2=4py$ に $p=4$ を代入して　$x^2=16y$

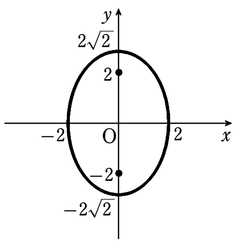
2

解答 (1) (ア) 長軸 $4\sqrt{2}$，短軸 4；焦点は点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$；[図]

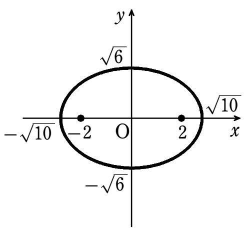
(イ) 長軸 $2\sqrt{10}$，短軸 $2\sqrt{6}$；焦点は点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$；[図]

(2) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

(ア)



(イ)



解説

(1) (ア) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$ であるから

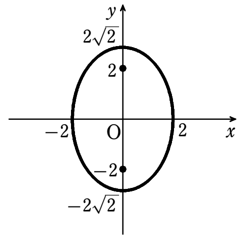
長軸の長さは　$2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，

短軸の長さは　$2\cdot2=4$

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$ であるから，焦点は

2 点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

概形は右図のようになる。



(イ) $3x^2+5y^2=30$ を変形すると，

$\frac{x^2}{(\sqrt{10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1$ となるから，

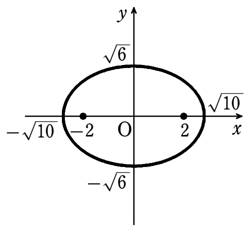
長軸の長さは　$2\cdot\sqrt{10}=2\sqrt{10}$，

短軸の長さは　$2\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2}=2$ であるから，焦点は

2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

概形は右図のようになる。



(2) 2 点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$ を焦点とする楕円の方程式は

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と表されて，焦点からの距離の和が 6 であるから

$2a=6$　よって　$a=3$

焦点の座標から，$\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$ となり　$b^2=1$

ゆえに，求める楕円の方程式は　$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

3

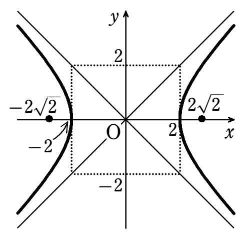
解答 (1) 頂点は点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$；焦点は点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$；

漸近線は 2 直線 $y=\pm x$；[図]

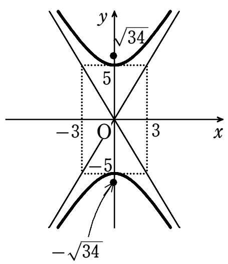
(2) 頂点は点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$；焦点は点 $(0,\ \sqrt{34})$，$(0,\ -\sqrt{34})$；

漸近線は 2 直線 $y=\pm\frac{5}{3}x$；[図]

(1)



(2)



解説

(1) $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ であるから，頂点は

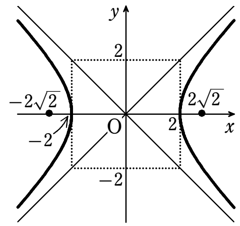
2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ であるから，焦点は

2 点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$

また，漸近線は　2 直線 $y=\pm x$

概形は右図のようになる。



(2) $25x^2-9y^2=-225$ を変形して

$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{5^2}=-1$

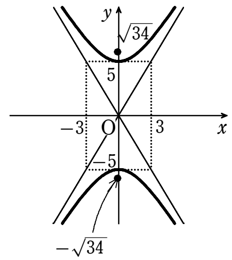
よって，頂点は　2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ であるから，焦点は

2 点 $(0,\ \sqrt{34})$，$(0,\ -\sqrt{34})$

また，漸近線は　2 直線 $y=\pm\frac{5}{3}x$

概形は右図のようになる。



4

解答 (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$　(2) $x^2=-3y$　(3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

解説

(1) 中心が原点で，長軸が y 軸上にあるから，求める楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)\quad とおく。$$

短軸の長さが 8 であるから　$2a=8$　ゆえに　$a=4$

また，点$\left(\frac{12}{5},\ 4\right)$を通るから　$\frac{1}{4^2}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2+\frac{4^2}{b^2}=1$

よって　$\frac{16}{b^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$　ゆえに　$b^2=25$

したがって，求める方程式は　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(2) 頂点が原点で，焦点が y 軸上にあるから軸は y 軸。

また，頂点が原点であるから，求める放物線の方程式は $x^2=4py$ とおける。

点 $(3,\ -3)$ を通るから　$3^2=4p\cdot(-3)$　よって　$p=-\frac{3}{4}$

したがって，求める放物線の方程式は　$x^2=-3y$

(3) 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とするから，求める双曲線の方程式は

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

このとき，焦点からの距離の差は $2a$ であるから，$2a=6$ より　$a=3$

また　$a^2+b^2=4^2$　よって　$b^2=4^2-a^2=16-3^2=7$

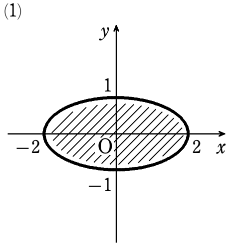
したがって　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

5

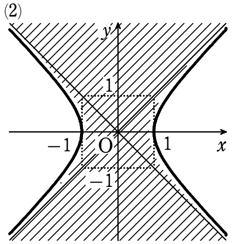
解答 (1) [図]　境界線を含まない　(2) [図]　境界線を含まない

(3)〔図〕 境界線を含む

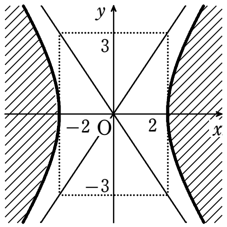
(1)



(2)



(3)



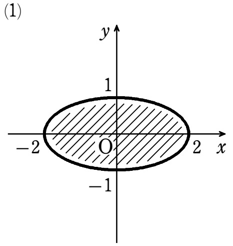
解説

(1)　この領域は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の内部で，〔図〕の斜線部分である。

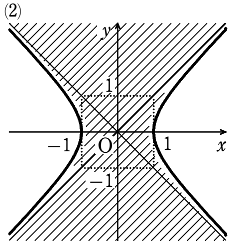
ただし，境界線を含まない。

(2)　この領域は，双曲線 $x^2-y^2=1$ を境界線とし，原点を含む領域で，〔図〕の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

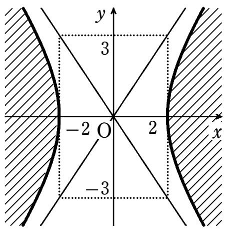
(1)



(2)



(3)　この領域は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ を境界線とし，原点を含まない領域で，〔図〕の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



6

解答　略

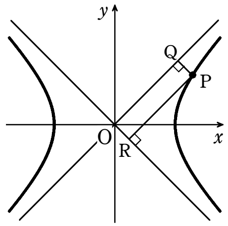
解説

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とする。

P は双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上にあるから

$$x_1{}^2-y_1{}^2=a^2$$

また，漸近線の方程式は　$x-y=0,\ x+y=0$



よって　$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\frac{|x_1-y_1|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x_1+y_1|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_1{}^2-y_1{}^2|}{2}=\frac{|a^2|}{2}=\frac{a^2}{2}\quad(\text{一定})$$

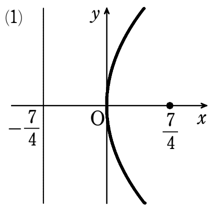
1

解答　(1)　順に　点 $\left(\dfrac{7}{4},\ 0\right)$，直線 $x=-\dfrac{7}{4}$，〔図〕

(2)　$x^2=-4y$

(3)　$y^2=-2x$

(1)

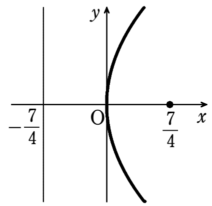


解説

(1)　$y^2=7x$ を変形して　$y^2=4\cdot\dfrac{7}{4}x$

ゆえに　焦点は点 $\left(\dfrac{7}{4},\ 0\right)$，準線は直線 $x=-\dfrac{7}{4}$

概形は右図のようになる。



(2)　条件から　$x^2=4\cdot(-1)y$　すなわち　$x^2=-4y$

(3)　頂点が原点で，焦点が x 軸上にあるから，条件を満たす放物線の方程式は $y^2=ax\ (a\neq 0)$ と表される。

この放物線が点 $(-2,\ 2)$ を通るから　$4=-2a$

ゆえに　$a=-2$

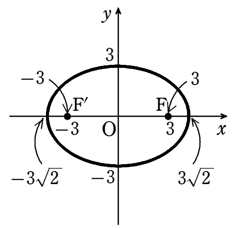
よって，求める方程式は　$y^2=-2x$

2

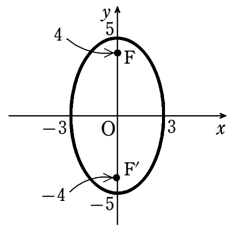
解答　(1)（ア）長軸 $6\sqrt{2}$，短軸 6，焦点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，〔図〕

（イ）長軸 10，短軸 6，焦点 $(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$，〔図〕

（ア）



（イ）



(2)　$\dfrac{4}{169}x^2+\dfrac{4}{25}y^2=1$

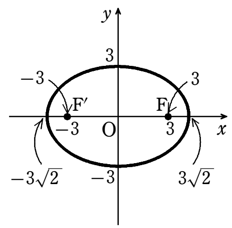
解説

(1)（ア）$\dfrac{x^2}{(3\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ であるから，

長軸の長さは　$2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，

短軸の長さは　$2\cdot 3=6$

$\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$ より，焦点は 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ であり，概形は右図。



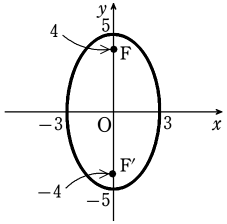
(イ)　$25x^2+9y^2=225$ を変形すると，

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ であるから，長軸の長さは $2\cdot5=10$，

短軸の長さは $2\cdot3=6$

$\sqrt{5^2-3^2}=4$ より，焦点は２点 $(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$

であり，概形は右図。



(2)　２点 $(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$ を焦点とする楕円の方程式は

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と表されて，焦点からの距離の和が 13 であるから　$2a=13$

よって　$a=\frac{13}{2}$

焦点の座標から，$\sqrt{a^2-b^2}=6$ となり　$b^2=a^2-6^2=\frac{25}{4}$

ゆえに，求める楕円の方程式は　$\frac{4}{169}x^2+\frac{4}{25}y^2=1$

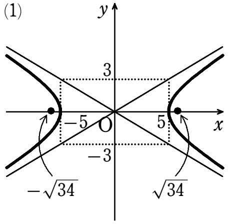
$\boxed{3}$

解答　(1)　頂点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，

焦点 $(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$，

漸近線 $y=\pm\frac{3}{5}x$，[図]

(1)

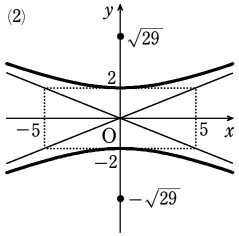


(2)　頂点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$，

焦点 $(0,\ \sqrt{29})$，$(0,\ -\sqrt{29})$，

漸近線 $y=\pm\frac{2}{5}x$，[図]

(2)



解説

(1)　$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ であるから，頂点は

２点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

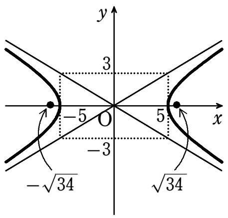
$\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ であるから，焦点は

２点 $(\sqrt{34},\ 0)$，$(-\sqrt{34},\ 0)$

また，漸近線は

２直線 $y=\pm\frac{3}{5}x$

概形は右図。



(2)　$4x^2-25y^2=-100$ を変形して

$\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1$

よって，頂点は

２点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

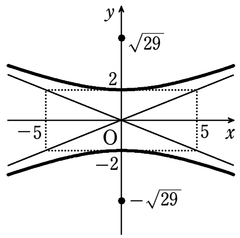
$\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ であるから，焦点は

２点 $(0,\ \sqrt{29})$，$(0,\ -\sqrt{29})$

また，漸近線は

２直線 $y=\pm\frac{2}{5}x$

概形は右図。



$\boxed{4}$

解答　(1)　$y^2=-\frac{1}{2}x$　　(2)　$y^2=12x$，$y^2=-12x$　　(3)　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

(4)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$　　(5)　$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=-1$

解説

(1)　頂点が原点で，焦点が x 軸上にあるから，求める放物線の方程式は $y^2=4px$ $(p\neq0)$ とおける。

点 $(-12,\ \sqrt{6})$ を通ることから　　$(\sqrt{6})^2=4p\cdot(-12)$

$6=-48p$ より　　$p=-\frac{1}{8}$　　これは $p\neq0$ を満たす。

よって，求める方程式は　　$y^2=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)x$　　すなわち　$y^2=-\frac{1}{2}x$

(2)　軸が x 軸，頂点が原点であるから，求める放物線の方程式は $y^2=4px$ $(p\neq0)$ とおける。

このとき，焦点は点 $(p,\ 0)$，準線は直線 $x=-p$ である。

焦点と準線の距離が６であるから

$|p-(-p)|=6$　　すなわち　$|2p|=6$

よって　　$p=\pm3$　　これは $p\neq0$ を満たす。

したがって，求める方程式は　　$y^2=12x$，$y^2=-12x$

(3)　中心が原点で，長軸が x 軸上，短軸が y 軸上にある楕円の方程式は

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と表される。

点 $(-4,\ 0)$ を通るから

$\frac{16}{a^2}=1$　　……①

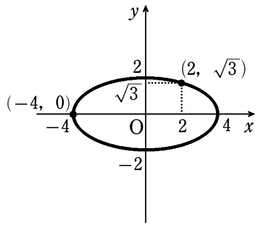
点 $(2,\ \sqrt{3})$ を通るから

$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$　……②

① から　　$a^2=16$

よって，② から　　$b^2=4$

したがって，求める楕円の方程式は　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$



(4)　中心が原点で，焦点が x 軸上にあるから，双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>0,\ b>0)$ と表される。

点 $\left(\frac{5}{2},\ -3\right)$ を通るから　　$\frac{25}{4a^2}-\frac{9}{b^2}=1$　……①

点 $(4,\ 4\sqrt{3})$ を通るから　　$\frac{16}{a^2}-\frac{48}{b^2}=1$　……②

①×16−②×3 から　　$\frac{52}{a^2}=13$

よって　　$a^2=4$　　ゆえに，② から　　$b^2=16$

よって，求める双曲線の方程式は　　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

(5)　中心が原点，１つの焦点が $(0,\ 4)$ であるから，双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$(a>0,\ b>0)$ と表される。

このとき，漸近線は　　$y=\pm\frac{b}{a}x$

漸近線が直交するから　　$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

ゆえに　　$b^2=a^2$　……①

焦点の１つが $(0,\ 4)$ であるから　　$\sqrt{a^2+b^2}=4$

両辺を２乗して　　$a^2+b^2=16$　　① を代入して　　$2a^2=16$

よって　　$a^2=8$　　① から　　$b^2=8$

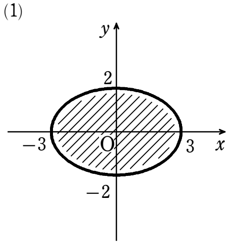
ゆえに，求める直角双曲線の方程式は　　$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=-1$

$\boxed{5}$

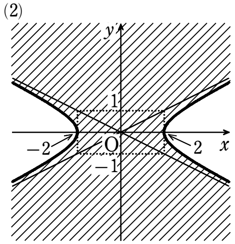
解答　(1)　[図]　境界線を含まない　　(2)　[図]　境界線を含む

(3)　[図]　境界線を含まない

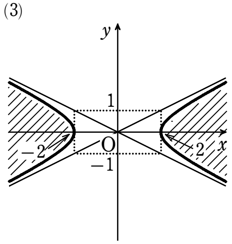
(1)



(2)



(3)



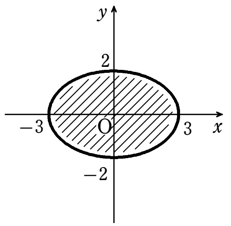
解説

(1)　この領域は，楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の内部で，[図] の斜線部分である。

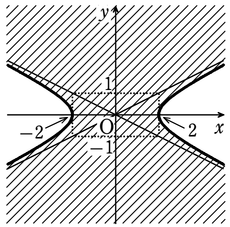
ただし，境界線を含まない。

(2)　この領域は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ を境界線とし，原点を含む領域で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

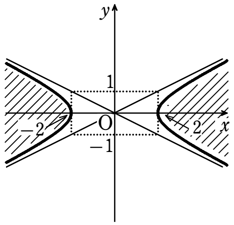
(1)



(2)



(3)　この領域は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ を境界線とし，原点を含まない領域で，[図] の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。



参考　不等式の表す領域が，原点を含むかどうかは，不等式に $x=0$，$y=0$ を代入してみればわかる。

$x=0$，$y=0$ を代入すると

(1)，(2)　不等式が成り立つ ⟶ 原点を含む

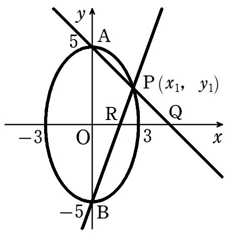
(3)　不等式が成り立たない ⟶ 原点を含まない

6

解答　略

解説

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$ とし，A $(0,\ 5)$，B $(0,\ -5)$ とする。



条件から　$x_1 \neq 0$，$y_1 \neq \pm 5$

直線 PA，PB の方程式は，それぞれ

$$\text{PA} : y=\frac{y_1-5}{x_1}x+5$$

$$\text{PB} : y=\frac{y_1+5}{x_1}x-5$$

これらの方程式で $y=0$ とすると，それぞれ

$$x=-\frac{5x_1}{y_1-5},\quad x=\frac{5x_1}{y_1+5}$$

よって　$\text{OQ}\cdot\text{OR}=\left|-\dfrac{5x_1}{y_1-5}\right|\cdot\left|\dfrac{5x_1}{y_1+5}\right|=\left|\dfrac{25{x_1}^2}{{y_1}^2-25}\right|$

ここで，点 P は楕円上にあるから　$\dfrac{{x_1}^2}{9}+\dfrac{{y_1}^2}{25}=1$

ゆえに　$25{x_1}^2=9(25-{y_1}^2)$

したがって　$\text{OQ}\cdot\text{OR}=\left|\dfrac{9(25-{y_1}^2)}{{y_1}^2-25}\right|=9$ (一定)

1

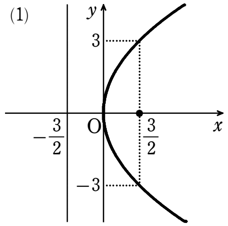
解答　(1)　焦点の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，準線の方程式は　$x=-\dfrac{3}{2}$

(2)　焦点の座標は　$(4\sqrt{2},\ 0)$，$(-4\sqrt{2},\ 0)$，
長軸の長さは　12，短軸の長さは　4

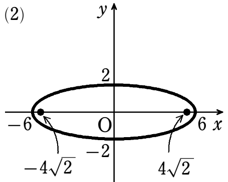
(3)　頂点の座標は　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，焦点の座標は　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，
漸近線の方程式は　$y=\dfrac{4}{3}x$，$y=-\dfrac{4}{3}x$

(4)　[図]

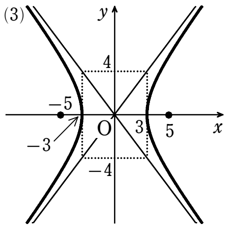
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　$y^2=6x$ から　$y^2=4\cdot\dfrac{3}{2}x$

よって，焦点の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，準線の方程式は　$x=-\dfrac{3}{2}$

(2)　$x^2+9y^2=36$ から　$\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ であるから，焦点の座標は　$(4\sqrt{2},\ 0)$，$(-4\sqrt{2},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot 6=12$，　短軸の長さは　$2\cdot 2=4$

(3)　$16x^2-9y^2=144$ から　$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

よって，頂点の座標は　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

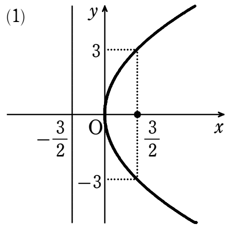
$\sqrt{3^2+4^2}=5$ であるから，焦点の座標は　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線の方程式は　$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=0$，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=0$

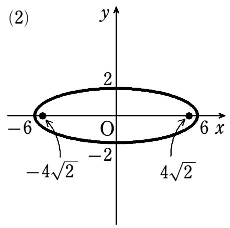
すなわち　$y=\dfrac{4}{3}x$，$y=-\dfrac{4}{3}x$

(4)　(1)，(2)，(3) の結果から，それぞれの概形は図のようになる。

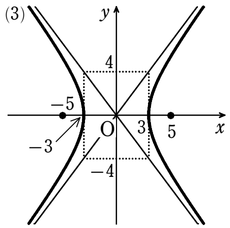
(1)



(2)



(3)



2

解答　(1)　$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$　(2)　$\dfrac{x^2}{49}-y^2=1$，$p=\pm 7$

解説

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ の焦点は，$(\sqrt{16-12},\ 0)$，$(-\sqrt{16-12},\ 0)$ から
$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

求める楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{b^2+4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

点 $(\sqrt{15},\ 2)$ を通るから　$\dfrac{15}{b^2+4}+\dfrac{4}{b^2}=1$

よって　$(b^2+1)(b^2-16)=0$

$b^2+1\neq 0$ であるから　$b^2=16$

したがって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2)　中心が原点で焦点が x 軸上にあり，かつ，点 $(p,\ 0)$ を通り漸近線の方程式が $py=x$ であるから，双曲線の方程式は $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$ と書ける。

焦点の座標が $(5\sqrt{2},\ 0)$，$(-5\sqrt{2},\ 0)$ であるから　$p^2+1=50$

よって　$p=\pm 7$

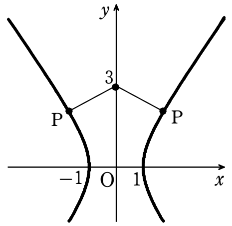
求める双曲線の方程式は　$\dfrac{x^2}{49}-y^2=1$

3

解答　$\text{P}(-\sqrt{3},\ 2)$ または $\text{P}(\sqrt{3},\ 2)$ のときで距離は 2

解説

A$(0,\ 3)$，P$(s,\ t)$ とする。



Pは双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点であるから

$$s^2-\frac{t^2}{2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

ゆえに　$\mathrm{AP}^2=s^2+(t-3)^2=1+\dfrac{t^2}{2}+(t-3)^2$

$$=\frac{3}{2}t^2-6t+10=\frac{3}{2}(t-2)^2+4$$

よって，AP^2 は $t=2$ のとき最小値4をとる。

$\mathrm{AP}\geqq 0$ であるから，AP^2 が最小のとき，APも最小となる。

$t=2$ のとき，① から　$s^2=3$

ゆえに　$s=\pm\sqrt{3}$

よって，P$(-\sqrt{3},\ 2)$ またはP$(\sqrt{3},\ 2)$ のとき最小となり，そのときの距離は2

$\boxed{4}$

解答　双曲線の一部 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1\ (x\geqq 1)$

解説

点$(3,\ 0)$ をF，円 $(x+3)^2+y^2=4$ の中心をF′とおくと　F′$(-3,\ 0)$

題意の点$(X,\ Y)$ をPとおくと，条件から　$\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}=2$

また，線分FF′の中点は原点であるから，点Pは双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 上を動く。

ゆえに $|\mathrm{PF'}-\mathrm{PF}|=2a$ から　$2=2a$　　よって　$a=1$

また，$3=\sqrt{a^2+b^2}$ から　$9=1+b^2$　　ゆえに　$b^2=8$

よって，点Pは双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 上を動く。

ここで，Pが x 軸上にあるときP$(1,\ 0)$ であるから，求める軌跡は双曲線の一部

$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1\ (x\geqq 1)$ である。

別解　点$(3,\ 0)$ を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心$(X,\ Y)$ をP，半径を r とする。

また，A$(-3,\ 0)$ とすると　$\mathrm{AP}=r+2$

ここで，$\mathrm{AP}=\sqrt{(X+3)^2+Y^2}$，$r=\sqrt{(X-3)^2+Y^2}$ であるから

$$\sqrt{(X+3)^2+Y^2}=\sqrt{(X-3)^2+Y^2}+2$$

両辺を2乗すると

$$(X+3)^2+Y^2=(X-3)^2+Y^2+4\sqrt{(X-3)^2+Y^2}+4$$

ゆえに　$3X-1=\sqrt{(X-3)^2+Y^2}$　$\cdots\cdots$①

このとき，$3X-1\geqq 0$ から　$X\geqq\dfrac{1}{3}$　$\cdots\cdots$②

①の両辺を2乗すると　$9X^2-6X+1=(X-3)^2+Y^2$

ゆえに　$Y^2=8(X^2-1)$

このとき，$X^2-1\geqq 0$ から　$X\leqq -1,\ 1\leqq X$　$\cdots\cdots$③

よって　$X^2-\dfrac{Y^2}{8}=1$

ただし，②，③から　$X\geqq 1$

ゆえに，求める軌跡は，双曲線の一部　$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1\ (x\geqq 1)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　ただし，2点$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を除く

解説

(1)　2点A，Bの座標を，それぞれ$(s,\ 0)$，$(0,\ t)$ とすると，$\mathrm{AB}^2=3^2$ であるから

$$s^2+t^2=3^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点Pの座標を$(x,\ y)$ とすると　$x=2s,\ y=-t$

ゆえに　$s=\dfrac{1}{2}x,\ t=-y$

これを①に代入すると　$\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2+(-y)^2=3^2$　すなわち　$\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

よって，点Pの軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ である。

(2)　Qの座標を$(s,\ t)$，Pの座標を$(x,\ y)$ とする。

Qは楕円 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上にあるから　$\dfrac{s^2}{36}+\dfrac{t^2}{9}=1$　$\cdots\cdots$①

Pは△AQBの重心であるから　$x=\dfrac{-2+s+2}{3}$，$y=\dfrac{0+t+0}{3}$

よって　$s=3x,\ t=3y$

これを①に代入すると　$\dfrac{(3x)^2}{36}+\dfrac{(3y)^2}{9}=1$　　ゆえに　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

ここで，$(s,\ t)=(\pm 6,\ 0)$ のとき，3点A，B，Qは同じ直線上にあり，△AQBができない。

よって　$(s,\ t)\neq(\pm 6,\ 0)$　すなわち　$(x,\ y)\neq(\pm 2,\ 0)$

よって，点Pの軌跡は　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

ただし，2点$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を除く。

$\boxed{1}$

解答　2辺の長さ $\sqrt{2}\,a$，$\sqrt{2}\,b$；面積 $2ab$

解説

第1象限にある長方形の頂点をP$(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ とする。

このとき，長方形の面積 S は　$S=2s\cdot 2t=4st$

点Pは楕円上にあるから　$\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$　$\cdots\cdots$①

$\dfrac{s^2}{a^2}>0$，$\dfrac{t^2}{b^2}>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{s^2}{a^2}\cdot\frac{t^2}{b^2}}=\frac{2st}{ab}$$

よって，① から　$\dfrac{2st}{ab}\leqq 1$　　ゆえに　$S\leqq 2ab$

$S=2ab$ となるのは $\dfrac{s}{a}=\dfrac{t}{b}$ のときで，このとき $t=\dfrac{b}{a}s$ を①に代入して整理すると

$$s^2=\frac{a^2}{2}$$

$s>0,\ a>0$ であるから　$s=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$　　ゆえに　$t=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$

よって，求める長方形の2辺の長さは $2s=\sqrt{2}\,a$，$2t=\sqrt{2}\,b$，面積は　$2ab$

$\boxed{2}$

解答　略

解説

双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ とする。

このとき，漸近線は　$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

すなわち　$bx-ay=0,\ bx+ay=0$

P$(x_1,\ y_1)$ とすると　$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$　$\cdots\cdots$①

また　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\dfrac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\dfrac{|b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2|}{a^2+b^2}$

① から　$b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2=a^2b^2$

よって　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{|a^2b^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (一定)

$\boxed{3}$

解答　略

解説

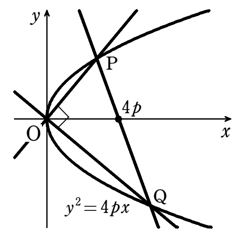
原点O以外で放物線と2直線は交点をもつから，

2直線の方程式は $x=0$ でも $y=0$ でもない。

よって，直交する2直線の方程式は

$$y=mx,\quad y=-\frac{1}{m}x\ (m\neq 0)$$

と表される。



$y=mx$，$y^2=4px$ から y を消去して

$$m^2x^2=4px$$

ゆえに，$x\neq0$ のとき　$x=\frac{4p}{m^2}$

$y=-\frac{1}{m}x$，$y^2=4px$ から y を消去して　$\frac{1}{m^2}x^2=4px$

よって，$x\neq0$ のとき　$x=4pm^2$

$P\left(\frac{4p}{m^2},\ \frac{4p}{m}\right)$，$Q(4pm^2,\ -4pm)$ ……① とする。

P，Q の x 座標が一致するとき　$\frac{4p}{m^2}=4pm^2$

ゆえに　$m^4-1=0$　　よって　$(m^2+1)(m^2-1)=0$

$m^2+1>0$ であるから　$m=\pm1$

[1]　$m=\pm1$ のとき

①から，P，Q の x 座標は，ともに $x=4p$ となる。

ゆえに，直線 PQ は定点 $(4p,\ 0)$ を通る。

[2]　$m\neq\pm1$ のとき

①から，直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{-4pm-\frac{4p}{m}}{4pm^2-\frac{4p}{m^2}}\left(x-\frac{4p}{m^2}\right)+\frac{4p}{m}$$

ゆえに　$y=\frac{-m(m^2+1)}{m^4-1}\left(x-\frac{4p}{m^2}\right)+\frac{4p}{m}$

よって　$y=\frac{-m}{m^2-1}\cdot\frac{m^2x-4p}{m^2}+\frac{4p}{m}$

ゆえに　$y=\frac{-m^2x+4p+4pm^2-4p}{m(m^2-1)}$

すなわち　$y=-\frac{m}{m^2-1}(x-4p)$

よって，直線 PQ は定点 $(4p,\ 0)$ を通る。

[1]，[2] により，直線 PQ は常に x 軸上の定点 $(4p,\ 0)$ を通る。

別解　(①を求めた後の別解)

①から，直線 PQ の方程式は

$$\left(-4pm-\frac{4p}{m}\right)\left(x-\frac{4p}{m^2}\right)-\left(4pm^2-\frac{4p}{m^2}\right)\left(y-\frac{4p}{m}\right)=0$$

よって

$$\left(-m-\frac{1}{m}\right)\left(x-\frac{4p}{m^2}\right)-\left(m^2-\frac{1}{m^2}\right)\left(y-\frac{4p}{m}\right)=0$$

ゆえに

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)\left\{-x+\frac{4p}{m^2}-\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(y-\frac{4p}{m}\right)\right\}=0$$

$m+\frac{1}{m}=\frac{m^2+1}{m}\neq0$ であるから

$$-x-\left(m-\frac{1}{m}\right)y+4p=0$$

よって，直線 PQ は常に x 軸上の定点 $(4p,\ 0)$ を通る。

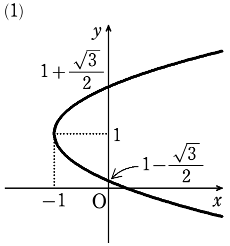
1

解答　(1)　[図]　頂点は点 $(-1,\ 1)$；　焦点は点 $\left(-\frac{13}{16},\ 1\right)$

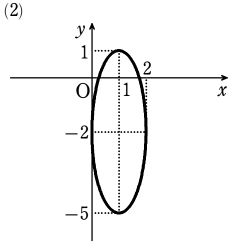
(2)　[図]　中心は点 $(1,\ -2)$；　焦点は 2 点 $(1,\ 2\sqrt{2}-2)$，$(1,\ -2\sqrt{2}-2)$

(3)　[図]　漸近線は 2 直線 $2x-3y-3=0$，$2x+3y+15=0$；
焦点は 2 点 $(-3,\ \sqrt{13}-3)$，$(-3,\ -\sqrt{13}-3)$

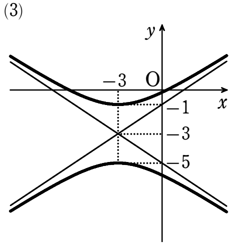
(1)



(2)



(3)

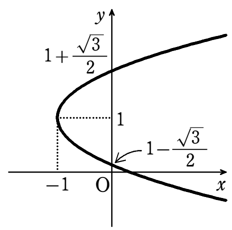


解説

(1)　$4y^2-8y-3x+1=0$ を変形すると　$4(y-1)^2-3(x+1)=0$

よって　$(y-1)^2=\frac{3}{4}(x+1)$　……①

曲線①は放物線 $y^2=\frac{3}{4}x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，その概形は[図]のようになる。



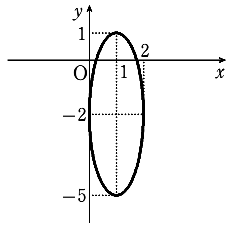
放物線 $y^2=\frac{3}{4}x$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$，焦点は点 $\left(\frac{3}{16},\ 0\right)$ である。

よって，放物線①の頂点は　点 $(-1,\ 1)$，　焦点は　点 $\left(-\frac{13}{16},\ 1\right)$

(2)　$9x^2+y^2-18x+4y+4=0$ を変形すると　$9(x-1)^2+(y+2)^2=9$

よって　$(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{9}=1$　……①

曲線①は，楕円 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，その概形は[図]のようになる。



楕円 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，焦点は 2 点 $(0,\ 2\sqrt{2})$，$(0,\ -2\sqrt{2})$ である。

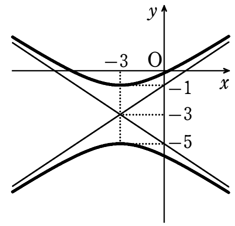
よって，楕円①の中心は　点 $(1,\ -2)$，

焦点は　2 点 $(1,\ 2\sqrt{2}-2)$，$(1,\ -2\sqrt{2}-2)$

(3)　$4x^2-9y^2+24x-54y-9=0$ を変形すると　$4(x+3)^2-9(y+3)^2=-36$

よって　$\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=-1$　……①

曲線①は双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので，その概形は[図]のようになる。



双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ の漸近線は，2 直線

$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=0$

すなわち　$2x-3y=0$，$2x+3y=0$

焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$ である。

よって，双曲線①の漸近線は，2 直線

$2(x+3)-3(y+3)=0$，$2(x+3)+3(y+3)=0$

すなわち　$2x-3y-3=0$，$2x+3y+15=0$

焦点は　2 点 $(-3,\ \sqrt{13}-3)$，$(-3,\ -\sqrt{13}-3)$

2

解答　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

解説

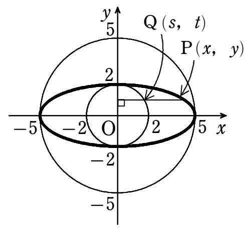
円上に点 Q$(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$x=\frac{5}{2}s$，$y=t$

ゆえに　$s=\frac{2}{5}x$，$t=y$

$s^2+t^2=4$ であるから　$\left(\frac{2}{5}x\right)^2+y^2=4$

よって，求める方程式は　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$



3

解答　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{10}=1$

解説

原点を中心とする $\frac{\pi}{4}$ の回転によって，双曲線上の点 Q$(X,\ Y)$ が点 P$(x,\ y)$ に移るとす

る。

点Qは，点Pを原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると

$$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(x+yi)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)i$$

よって　$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$，$Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$　……①

点Qは曲線 $x^2-3xy+y^2=5$ 上にあるから　$X^2-3XY+Y^2=5$

この式に①を代入して　$\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{3}{2}(x+y)(-x+y)+\frac{1}{2}(-x+y)^2=5$

整理すると　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{10}=1$

参考　①の式は，次のように三角関数の加法定理を用いて求めることもできる。

OP$=r$，x 軸の正の向きから半直線OPまでの回転角を θ とすると

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

また，OQ$=r$ で，x 軸の正の向きから半直線OQまでの回転角は $\theta-\frac{\pi}{4}$ であるから

$$X=r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=r\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+r\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$
$$Y=r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=r\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-r\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

4

解答　$k<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<k$ のとき2個，　$k=\pm\sqrt{3}$ のとき1個，
$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき0個

解説

$$\begin{cases}x^2-4y^2=4 & \cdots\cdots ①\\ y=x+k & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

②を①に代入すると　$x^2-4(x+k)^2=4$

整理すると　$3x^2+8kx+4k^2+4=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(4k)^2-3(4k^2+4)=4k^2-12=4(k^2-3)$$
$$=4(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})$$

①と②の共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<k$ のとき2個

$D=0$　すなわち　$k=\pm\sqrt{3}$ のとき1個

$D<0$　すなわち　$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき0個

5

解答　$(3,\ 4)$，$8\sqrt{2}$

解説

$y=3x-5$ ……①，$4x^2-y^2=4$ ……② とする。

①と②の2つの交点を P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ とする。

①，②から y を消去すると　$5x^2-30x+29=0$　……③

x_1，x_2 は2次方程式③の異なる2つの実数解である。

ここで，③において，解と係数の関係から

$$x_1+x_2=6\ \cdots\cdots ④,\quad x_1x_2=\frac{29}{5}\ \cdots\cdots ⑤$$

線分PQの中点の座標は　$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ 3\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-5\right)$

④を代入して　$(3,\ 4)$

また　$PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+9(x_2-x_1)^2$
$=10(x_2-x_1)^2=10\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}$

④，⑤を代入して　$PQ^2=10\left(6^2-4\cdot\frac{29}{5}\right)=128$

よって　$PQ=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

6

解答　(1)　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$　　(2)　直線 $y=-\frac{1}{4}x$　$\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}<x<\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

解説

(1)　$x^2+4y^2=4$　……①，$y=x+k$　……②

②を①に代入すると　$x^2+4(x+k)^2=4$

整理すると　$5x^2+8kx+4(k^2-1)=0$　……③

求める条件は，2次方程式③が異なる2つの実数解をもつ条件であるから，判別式を D とすると　$D>0$

$$\frac{D}{4}=16k^2-20(k^2-1)=4(-k^2+5)$$

よって　$-k^2+5>0$　　これを解いて　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

(2)　k が(1)で求めた範囲内にあるとき，方程式③は異なる2つの実数解 x_1，x_2 をもち，これらはP，Qの x 座標である。

よって，線分PQの中点Rの座標を $(x,\ y)$ とすると，③の解と係数の関係から

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4}{5}k\ \cdots\cdots ④,\quad y=x+k=-\frac{4}{5}k+k=\frac{1}{5}k\ \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤から，k を消去すると　$y=-\frac{1}{4}x$

④から　$k=-\frac{5}{4}x$　　(1)から　$-\sqrt{5}<-\frac{5}{4}x<\sqrt{5}$　　よって　$-\frac{4\sqrt{5}}{5}<x<\frac{4\sqrt{5}}{5}$

したがって，線分PQの中点Rの軌跡は

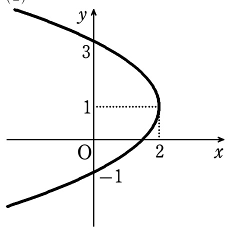
直線 $y=-\frac{1}{4}x$ の $-\frac{4\sqrt{5}}{5}<x<\frac{4\sqrt{5}}{5}$ の部分

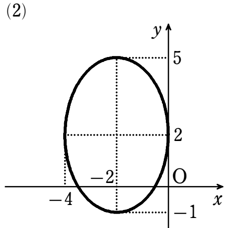
1

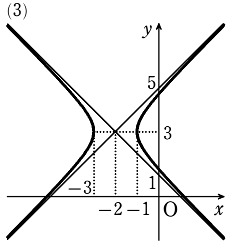
解答　(1)　放物線 $y^2=-2x$ を x 軸方向に2，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線，
[図]

(2)　楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に2だけ平行移動した楕円，
[図]

(3)　双曲線 $x^2-y^2=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動した双曲線，
[図]

(1)


(2)


(3)


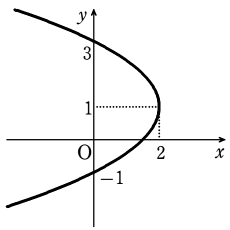
解説

(1)　方程式を変形すると　$(y-1)^2+2(x-2)=0$

よって　$(y-1)^2=-2(x-2)$

この曲線は，放物線 $y^2=-2x$ を x 軸方向に2，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線である。

また，その概形は[図]のようになる。

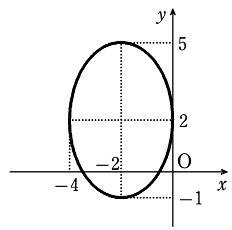


(2)　方程式を変形すると　$9(x+2)^2+4(y-2)^2=36$

よって　$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

この曲線は，楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に2だけ平行移動した楕円である。

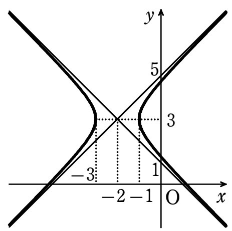
また，その概形は[図]のようになる。



(3)　方程式を変形すると　$(x+2)^2-(y-3)^2=1$

この曲線は，双曲線 $x^2-y^2=1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動した双曲線である。

また，その概形は[図]のようになる。



2

解答　(1)　楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$　　(2)　楕円 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

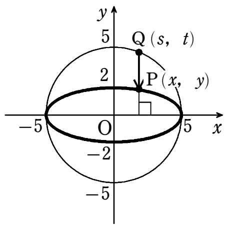
解説

(1)　円上に点Q $(s,\ t)$ をとり，Q が移る点をP $(x,\ y)$ とすると

$x=s,\ y=\dfrac{2}{5}t$　　ゆえに　　$s=x,\ t=\dfrac{5}{2}y$

$s^2+t^2=25$ であるから　　$x^2+\left(\dfrac{5}{2}y\right)^2=25$

よって　　楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

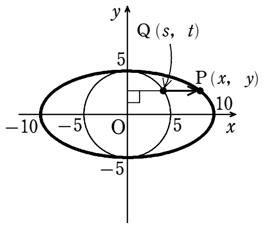


(2)　円上に点 Q $(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を P $(x,\ y)$ とすると

$x=2s,\ y=t$　　ゆえに　　$s=\dfrac{x}{2},\ t=y$

$s^2+t^2=25$ であるから　　$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+y^2=25$

よって　　楕円 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$



$\boxed{3}$

解答　(1)　$xy=1$　　(2)　$13x^2-6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16$

(3)　$x^2+2\sqrt{3}\,xy+3y^2-8\sqrt{3}\,x+8y=0$

解説

(1)　原点を中心とする $\dfrac{\pi}{4}$ の回転によって，双曲線上の点 Q $(X,\ Y)$ が点 P $(x,\ y)$ に移るとする。

点 Q は，点 P を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると　　$X+Yi=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)(x+yi)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)i$

したがって　　$X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\ Y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$　……①

点 Q は双曲線 $x^2-y^2=2$ 上にあるから　　$X^2-Y^2=2$

これに ① を代入すると　　$\dfrac{1}{2}(x+y)^2-\dfrac{1}{2}(-x+y)^2=2$

よって，求める曲線の方程式は　　$xy=1$

(2)　原点を中心とする $\dfrac{\pi}{3}$ の回転によって，楕円上の点 Q $(X,\ Y)$ が点 P $(x,\ y)$ に移るとする。

点 Q は，点 P を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると　　$X+Yi=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(x+yi)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x+yi)$

$=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}\,y)+\dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}\,x+y)i$

したがって　　$X=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}\,y),\ Y=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}\,x+y)$　……①

点 Q は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上にあるから　　$\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$

これに ① を代入すると　　$\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}(x+\sqrt{3}\,y)^2+\dfrac{1}{4}(-\sqrt{3}\,x+y)^2=1$

よって，求める曲線の方程式は　　$13x^2-6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16$

(3)　原点を中心とする $-\dfrac{\pi}{6}$ の回転によって，放物線上の点 Q $(X,\ Y)$ が点 P $(x,\ y)$ に移るとする。

点 Q は，点 P を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると　　$X+Yi=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(x+yi)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(x+yi)$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x-y)+\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}\,y)i$

したがって　　$X=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x-y),\ Y=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{3}\,y)$　……①

点 Q は放物線 $y^2=4x$ 上にあるから　　$Y^2=4X$

これに ① を代入すると　　$\dfrac{1}{4}(x+\sqrt{3}\,y)^2=4\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x-y)$

よって，求める曲線の方程式は　　$x^2+2\sqrt{3}\,xy+3y^2-8\sqrt{3}\,x+8y=0$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$k>-\dfrac{1}{2}$ のとき 2 個；$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個；$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 0 個

(2)　$k<-\sqrt{21}$，$\sqrt{21}<k$ のとき 2 個；$k=\pm\sqrt{21}$ のとき 1 個：

$-\sqrt{21}<k<\sqrt{21}$ のとき 0 個

解説

(1)　$\begin{cases} y^2=-4x & \cdots\cdots ① \\ y=2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入すると　　$(2x+k)^2=-4x$

整理すると　　$4x^2+4(k+1)x+k^2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=\{2(k+1)\}^2-4k^2=8k+4$

① と ② の共有点の個数は

$D>0$ すなわち $k>-\dfrac{1}{2}$ のとき 2 個

$D=0$ すなわち $k=-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個

$D<0$ すなわち $k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 0 個

(2)　$\begin{cases} 4x^2-25y^2=100 & \cdots\cdots ① \\ x+y=k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② から　　$y=k-x$　……②′

②′ を ① に代入すると　　$4x^2-25(k-x)^2=100$

整理すると　　$21x^2-50kx+25(k^2+4)=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-25k)^2-21\cdot25(k^2+4)=100(k^2-21)$

$=100(k+\sqrt{21})(k-\sqrt{21})$

① と ② の共有点の個数は

$D>0$ すなわち $k<-\sqrt{21}$，$\sqrt{21}<k$ のとき 2 個

$D=0$ すなわち $k=\pm\sqrt{21}$ のとき 1 個

$D<0$ すなわち $-\sqrt{21}<k<\sqrt{21}$ のとき 0 個

$\boxed{5}$

解答　(1)　$(7,\ 4)$，$8\sqrt{5}$　　(2)　$\left(\dfrac{4}{13},\ \dfrac{3}{13}\right)$，$\dfrac{8\sqrt{30}}{13}$　　(3)　$\left(\dfrac{12}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$，$\dfrac{2\sqrt{55}}{7}$

解説

(1)　$y^2=8x$ ……①，$x-y=3$ ……②　とする。

① と ② の 2 つの交点を P $(x_1,\ y_1)$，Q $(x_2,\ y_2)$ とする。

② から　　$y=x-3$

これを ① に代入して，y を消去すると

$x^2-14x+9=0$　……③

x_1，x_2 は 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解である。

ここで，③ において，解と係数の関係から

$x_1+x_2=14$ ……④，$x_1x_2=9$ ……⑤

線分 PQ の中点の座標は　　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{x_1+x_2}{2}-3\right)$

④ を代入して　　$(7,\ 4)$

また　　$\mathrm{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2$

$=2(x_2-x_1)^2=2\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}$

④，⑤ を代入して　　$\mathrm{PQ}^2=2(14^2-4\cdot9)=320$

したがって　　$\mathrm{PQ}=8\sqrt{5}$

(2)　$x^2+4y^2=4$ ……①，$x+3y=1$ ……②　とする。

① と ② の 2 つの交点を P $(x_1,\ y_1)$，Q $(x_2,\ y_2)$ とする。

② から　　$x=1-3y$

これを ① に代入して，x を消去すると

$13y^2-6y-3=0$　……③

y_1，y_2 は 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解である。

ここで，③ において，解と係数の関係から

$y_1+y_2=\dfrac{6}{13}$ ……④，$y_1y_2=-\dfrac{3}{13}$ ……⑤

線分 PQ の中点の座標は　　$\left(1-3\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

④ を代入して　　$\left(\dfrac{4}{13},\ \dfrac{3}{13}\right)$

また　　$\mathrm{PQ}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=9(y_2-y_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$=10(y_2-y_1)^2=10\{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\}$

④，⑤ を代入して　　$\mathrm{PQ}^2=10\left\{\left(\dfrac{6}{13}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{13}\right)\right\}=\dfrac{1920}{169}$

したがって　　$\mathrm{PQ}=\dfrac{8\sqrt{30}}{13}$

(3)　$x^2-2y^2=1$ ……①，$2x-y=3$ ……②　とする。

① と ② の 2 つの交点を P $(x_1,\ y_1)$，Q $(x_2,\ y_2)$ とする。

② から　　$y=2x-3$

これを ① に代入して，y を消去すると

$$7x^2-24x+19=0 \quad \cdots\cdots ③$$

x_1，x_2 は２次方程式 ③ の異なる２つの実数解である。

ここで，③ において，解と係数の関係から

$$x_1+x_2=\frac{24}{7} \cdots\cdots ④，\quad x_1x_2=\frac{19}{7} \cdots\cdots ⑤$$

線分 PQ の中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ 2\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}-3\right)$

④ を代入して　$\left(\dfrac{12}{7},\ \dfrac{3}{7}\right)$

また　$PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2$

$=5(x_2-x_1)^2=5\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}$

④，⑤ を代入して　$PQ^2=5\left\{\left(\dfrac{24}{7}\right)^2-4\cdot\dfrac{19}{7}\right\}=\dfrac{220}{49}$

したがって　$PQ=\dfrac{2\sqrt{55}}{7}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$　　(2)　直線 $y=\dfrac{1}{3}x$ の $x<-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{3}{\sqrt{2}}<x$ の部分

解説

(1)　２つの方程式から，y を消去すると　$2x^2+6kx+3k^2+3=0$　$\cdots\cdots$ ①

２次方程式 ① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-2(3k^2+3)=3(k^2-2)$

異なる２点で交わるから　$D>0$

ゆえに　$k^2-2>0$　　よって　$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$

(2)　① の異なる２つの実数解を x_1，x_2 とし，線分の中点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{6k}{2}\right)=-\frac{3}{2}k,\quad y=x+k=-\frac{3}{2}k+k=-\frac{1}{2}k$$

k を消去して　$x=3y$　　(1) から　$x<-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{3}{\sqrt{2}}<x$

よって，求める軌跡は　直線 $y=\dfrac{1}{3}x$ の $x<-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{3}{\sqrt{2}}<x$ の部分

$\boxed{1}$

解答　(ア)　$(-2,\ 5+\sqrt{5})$　　(イ)　6

解説

与えられた楕円の方程式を変形すると

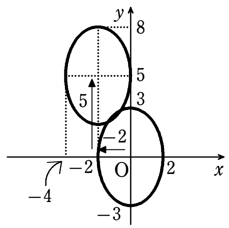
$$9(x^2+4x+4)-9\cdot4+4(y^2-10y+25)-4\cdot25+100=0$$

すなわち　$9(x+2)^2+4(y-5)^2=36$

よって　$\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$　$\cdots\cdots$ ①

これは楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $\cdots\cdots$ ② を x 軸方向に -2，

y 軸方向に 5 だけ平行移動した楕円を表す。



$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ より，楕円 ② の焦点の座標は

$(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

長軸の長さは　$2\cdot3=6$

ゆえに，楕円 ① の２つの焦点のうち，y 座標が大きい方の座標は　ア$(-2,\ 5+\sqrt{5})$

長軸の長さは　イ6

$\boxed{2}$

解答　$k=-1$

解説

$9x^2+y^2+18kx-2(k+2)y-16k-9=0$ から

$$9(x^2+2kx)+y^2-2(k+2)y-16k-9=0$$

よって　$9(x+k)^2-9k^2+\{y-(k+2)\}^2-(k+2)^2-16k-9=0$

すなわち　$9(x+k)^2+\{y-(k+2)\}^2=10k^2+20k+13$

$10k^2+20k+13=10(k+1)^2+3>0$ であるから，与えられた方程式はすべての実数 k に対して楕円を表す。

$10(k+1)^2+3=r$ とおくと　$\dfrac{(x+k)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{r}}{3}\right)^2}+\dfrac{\{y-(k+2)\}^2}{(\sqrt{r})^2}=1$

よって，長軸の長さと短軸の長さの積は　$\dfrac{2\sqrt{r}}{3}\cdot2\sqrt{r}=\dfrac{4}{3}r=\dfrac{4}{3}\{10(k+1)^2+3\}$

これが最小となる k の値は　$k=-1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　双曲線 $\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$　　(2)　放物線 $(y+1)^2=8(x-1)$

解説

(1)　軌跡は点 $(-3,\ 2)$ を中心とする双曲線である。

２点 $(-3,\ -3)$，$(-3,\ 7)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

２点 $(0,\ -5)$，$(0,\ 5)$

２点 $(0,\ -5)$，$(0,\ 5)$ を焦点とする双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$ $\cdots\cdots$ ① と表される。

焦点からの距離の差が 6 であるから　$2b=6$　　よって　$b=3$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+b^2}=5$ であるから　$a^2+b^2=25$

$b=3$ であるから　$a^2=16$

ゆえに，① は　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$

よって，軌跡は　双曲線 $\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$

別解　A$(-3,\ -3)$，B$(-3,\ 7)$，軌跡上の点を P$(x,\ y)$ とする。

AP－BP$=\pm6$ であるから

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}=\pm6$$

よって　$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=\pm6+\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}$

両辺を２乗して

$$(x+3)^2+(y+3)^2=36\pm12\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}+(x+3)^2+(y-7)^2$$

よって　$y^2+6y+9=\pm12\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}+y^2-14y+85$

ゆえに　$\pm3\sqrt{(x+3)^2+(y-7)^2}=5y-19$

この式の両辺を２乗して整理すると　$9(x+3)^2-16(y-2)^2=-144$

したがって，求める軌跡は　双曲線 $\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$

(2)　軌跡は点 $(1,\ -1)$ を頂点とする放物線である。

点 $(3,\ -1)$ と直線 $x=-1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると

点 $(2,\ 0)$，直線 $x=-2$

焦点が点 $(2,\ 0)$，準線が直線 $x=-2$ である放物線の方程式は

$$y^2=8x$$

よって，軌跡は　放物線 $(y+1)^2=8(x-1)$

別解　A$(3,\ -1)$，ℓ：$x=-1$，軌跡上の点を P$(x,\ y)$ とする。

また，P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると　AP＝PH

ゆえに　$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=|x-(-1)|$

両辺を２乗して　$(x-3)^2+(y+1)^2=(x+1)^2$

整理して　$(y+1)^2=8(x-1)$

したがって，求める軌跡は　放物線 $(y+1)^2=8(x-1)$

$\boxed{4}$

解答　(ア)　2　　(イ)　0　　(ウ)　6　　(エ)　楕円

解説

曲線 $3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1$ 上の点 P$(X,\ Y)$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を Q$(x,\ y)$ とすると　$3X^2+2\sqrt{3}XY+5Y^2=1$　$\cdots\cdots$ ①

P は Q を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから，複素数平面で考えると

$$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}(x+yi)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(x+yi)$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)+\frac{1}{2}(\sqrt{3}y-x)i$$

よって　$X=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)$，$Y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}y-x)$

これを ① に代入して整理すると　ア$2x^2+$イ$0xy+$ウ$6y^2=1$

これは楕円を表すから，もとの曲線は エ楕円 である。

$\boxed{5}$

解答　(1)　(ア)　$k<-4$，$4<k$　　(イ)　$-4<k<4$

(2)　$k=\sqrt{6}$ のとき接点 $\left(-\frac{4\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$，　$k=-\sqrt{6}$ のとき接点 $\left(\frac{4\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

解説

(1)　$\begin{cases} x^2-y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=3x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入すると　　$x^2-(3x+k)^2=2$

整理すると　　$8x^2+6kx+k^2+2=0$

この２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(3k)^2-8(k^2+2)=(k+4)(k-4)$$

(ア)　① と ② が異なる２点で交わるための条件は

$D>0$　すなわち　$(k+4)(k-4)>0$

よって　　$k<-4,\ 4<k$

(イ)　① と ② が共有点をもたないための条件は

$D<0$　すなわち　$(k+4)(k-4)<0$

よって　　$-4<k<4$

(2)　$\begin{cases} x^2+4y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=kx+5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入すると　　$x^2+4(kx+5)^2=4$

整理すると　　$(4k^2+1)x^2+40kx+96=0$　$\cdots\cdots$ ③

この２次方程式の判別式を D とすると　　$\frac{D}{4}=(20k)^2-(4k^2+1)\cdot 96=16(k^2-6)$

① と ② が接するための条件は　　$D=0$　すなわち　$16(k^2-6)=0$

よって　　$k^2=6$　　　ゆえに　　$k=\pm\sqrt{6}$

接点の x 座標は，③ から　　$x=-\frac{40k}{2(4k^2+1)}=-\frac{20k}{4\cdot 6+1}=-\frac{4}{5}k$

接点の y 座標は，② から　　$y=k\cdot\left(-\frac{4}{5}k\right)+5=-\frac{4}{5}k^2+5=-\frac{4}{5}\cdot 6+5=\frac{1}{5}$

よって，接点の座標は

$k=\sqrt{6}$　のとき　$\left(-\frac{4\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$，　$k=-\sqrt{6}$ のとき　$\left(\frac{4\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

6

解答　$-\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$，$y=\frac{1}{4}x\ \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

解説

$y=-x+k$ を $x^2+4y^2=1$ に代入すると　　$x^2+4(-x+k)^2=1$

整理すると　$5x^2-8kx+4k^2-1=0$　$\cdots\cdots$ ①

この x の２次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-4k)^2-5(4k^2-1)=-4k^2+5$$

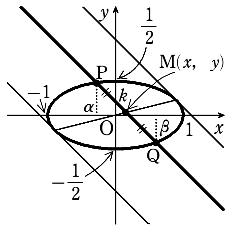
楕円 $x^2+4y^2=1$ と直線 $y=-x+k$ が異なる２点で交わるのは $D>0$ のときであるから

$-4k^2+5>0$

これを解くと　　$-\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$　$\cdots\cdots$ ②

２点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とする。

α，β は方程式 ① の解であるから，解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=\frac{8}{5}k$



線分 PQ の中点 M の座標が $(x,\ y)$ であるから

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}k=\frac{4}{5}k$　　$\cdots\cdots$ ③

$y=-x+k=-\frac{4}{5}k+k=\frac{1}{5}k$　$\cdots\cdots$ ④

③，④ から k を消去すると　　$y=\frac{1}{4}x$

また，② より　　$\frac{4}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)<\frac{4}{5}k<\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$

よって，③ から　$-\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<\frac{2\sqrt{5}}{5}$

したがって　　　$y=\frac{1}{4}x\ \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}<x<\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

1

解答　略

解説

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$\cdots\cdots$ ①，$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$　$\cdots\cdots$ ②　とする。

①，② から y を消去して整理すると

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)x^2-2x_1x+a^2\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0\quad\cdots\cdots ③$$

また，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 ① 上の点であるから　　$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$1-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}$

よって　　$x^2-2x_1x+x_1^2=0$　すなわち　$(x-x_1)^2=0$

したがって，x の２次方程式 ③ は重解 $x=x_1$ をもち，直線 ② は，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における楕円 ① の接線である。

2

解答　$-\frac{65}{16}<k<-1$

解説

$x^2=y-k$ を $x^2+4y^2=4$ に代入して整理すると

$4y^2+y-(k+4)=0$　$\cdots\cdots$ ①

$x^2=4-4y^2\geqq 0$ から　$-1\leqq y\leqq 1$

放物線 $y=x^2+k$ と楕円 $x^2+4y^2=4$ は y 軸に関して対称であるから，２つの曲線が異なる４点で交わる条件は，① が $-1<y<1$ において異なる２つの実数解をもつことである。

① の左辺を $f(y)$ とすると，この条件は

[1]　判別式 $D>0$ から　　$1+16(k+4)>0$

ゆえに　　$k>-\frac{65}{16}$　$\cdots\cdots$ ②

[2]　軸：$y=-\frac{1}{8}$ であり，$-1<-\frac{1}{8}<1$ となっている。

[3]　$f(1)=1-k>0$ から　　$k<1$　$\cdots\cdots$ ③

[4]　$f(-1)=-1-k>0$ から　　$k<-1$　$\cdots\cdots$ ④

②，③，④ の共通範囲を求めて　　$-\frac{65}{16}<k<-1$

3

解答　(1)　$9a^2-b^2+4=0$　　(2)　円 $x^2+y^2=13$

解説

(1)　$y=ax+b$ を $4x^2+9y^2=36$ に代入すると　　$4x^2+9(ax+b)^2=36$

整理すると　　$(9a^2+4)x^2+18abx+9(b^2-4)=0$

判別式を D とすると　　$\frac{D}{4}=(9ab)^2-9(9a^2+4)(b^2-4)=36(9a^2-b^2+4)$

直線 $y=ax+b$ と楕円 C が接するための条件は　　$D=0$

よって　　$9a^2-b^2+4=0$　$\cdots\cdots$ ①

(2)　点 P の座標を $(X,\ Y)$ とする。

点 P から楕円 C に引いた接線が x 軸と垂直になるのは，$X=\pm 3$ のときである。

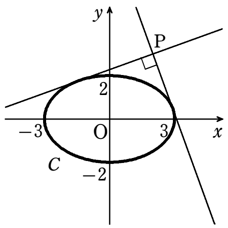
[1]　$X \neq \pm 3$ のとき

点 P から楕円 C に引いた接線は x 軸に垂直ではない。

よって，その方程式は　$y-Y=m(x-X)$

すなわち　$y=mx-mX+Y$　……②

とおける。



② が楕円 C に接するとき，① において $a=m$，$b=-mX+Y$ とすると

$$9m^2-(-mX+Y)^2+4=0$$

整理すると

$$(9-X^2)m^2+2XYm+4-Y^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③ の 2 つの解を m_1，m_2 とすると，これらは点 P から楕円 C に引いた 2 本の接線の傾きを表す。

2 本の接線が直交するから　$m_1m_2=-1$

また，解と係数の関係から　$m_1m_2=\dfrac{4-Y^2}{9-X^2}$　　すなわち　$\dfrac{4-Y^2}{9-X^2}=-1$

整理すると　$X^2+Y^2=13$　……④

[2]　$X=\pm 3$ のとき

2 本の接線は $x=\pm 3$，$y=\pm 2$ (複号任意) の組で，その交点は

$(3,\ 2)$，$(3,\ -2)$，$(-3,\ 2)$，$(-3,\ -2)$

これらの点は ④ を満たす。

[1]，[2] から，求める軌跡は　円 $x^2+y^2=13$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　(2)　$\dfrac{(x+k)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

(3)　$k<-\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+b^2}<k$

解説

(1)　P $(s,\ t)$，Q $(x,\ y)$ とすると

$x=s$，$y=\dfrac{b}{a}t$　　ゆえに　$s=x$，$t=\dfrac{a}{b}y$

$s^2+t^2=a^2$ であるから　$x^2+\left(\dfrac{a}{b}y\right)^2=a^2$

よって，C_1 の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(2)　Q $(s,\ t)$，C_2 上の点を R $(x,\ y)$ とすると，線分 QR の中点 $\left(\dfrac{s+x}{2},\ \dfrac{t+y}{2}\right)$ は直線 $y=x+k$ 上にあるから

$$\frac{t+y}{2}=\frac{s+x}{2}+k$$

ゆえに　$s-t=-x+y-2k$　……①

また，線分 QR は直線 $y=x+k$ に垂直であるから

$$\frac{y-t}{x-s}=-1$$

よって　$s+t=x+y$　……②

①，② から　$s=y-k$，$t=x+k$

Q は C_1 上の点であるから　$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x+k)^2}{b^2}=1$

したがって，C_2 の方程式は　$\dfrac{(x+k)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

(3)　$y=x+k$ と C_2 の共有点の x 座標は

$$\frac{(x+k)^2}{b^2}+\frac{(x+k-k)^2}{a^2}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

の実数解である。

③ を変形して　$(a^2+b^2)x^2+2a^2kx+a^2(k^2-b^2)=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a^2k)^2-(a^2+b^2)a^2(k^2-b^2)$$

$$=a^2b^2(a^2+b^2-k^2)$$

$D<0$ から　$a^2+b^2-k^2<0$

$a^2+b^2>0$ であるから　$k<-\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+b^2}<k$

解説

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y=x+1$　　(2)　$2x+3y=12$　　(3)　$\sqrt{5}x+2y+8=0$

解説

(1)　$2y=2\cdot 1\cdot(x+1)$　　すなわち　$y=x+1$

(2)　$\dfrac{3x}{18}+\dfrac{2y}{8}=1$　　すなわち　$2x+3y=12$

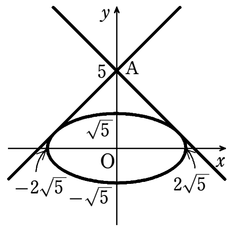
(3)　$\dfrac{-2\sqrt{5}x}{16}-\dfrac{1\cdot y}{4}=1$　　すなわち　$\sqrt{5}x+2y+8=0$

$\boxed{2}$

解答　$y=x+5$，$y=-x+5$

解説

$x^2+4y^2=20$ ……① とする。



点 A を通る接線は，x 軸に垂直ではないから，接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y=mx+5 \quad \cdots\cdots ②$$

② を ① に代入して，整理すると

$$(4m^2+1)x^2+40mx+80=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(20m)^2-(4m^2+1)\cdot 80=80(m+1)(m-1)$$

直線 ② が楕円 ① に接する条件は，$D=0$ から　$m=\pm 1$

よって，接線の方程式は　$y=x+5$，$y=-x+5$

別解　接点の座標を P $(x_1,\ y_1)$ とすると

点 P は楕円 $x^2+4y^2=20$ ……① 上の点であるから

$$x_1{}^2+4y_1{}^2=20 \quad \cdots\cdots ②$$

楕円 ① 上の点 P における接線の方程式は　$x_1x+4y_1y=20$

点 A を通るから　$x_1\cdot 0+4y_1\cdot 5=20$　　よって　$y_1=1$

これを ② に代入すると　$x_1{}^2=16$　　ゆえに　$x_1=\pm 4$

よって，接線の方程式は　$y=x+5$，$y=-x+5$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=5\cos\theta$，$y=5\sin\theta$　　(2)　$x=5\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

(3)　$x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$

解説

(1)　$x=5\cos\theta$，$y=5\sin\theta$　　(2)　$x=5\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

(3)　$x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$

$\boxed{4}$

解答　(1)　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ の $-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の部分

(2)　双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x\geqq 1$ の部分

(3)　円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　ただし，点 $(0,\ 0)$ を除く

解説

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗し，整理すると

$$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

これに $\sin\theta\cos\theta=y$ を代入すると

$$x^2=1+2y$$

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$-1\leqq\sin\theta+\cos\theta\leqq\sqrt{2}$$

よって　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ の $-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の部分

(2) $x=\dfrac{1}{2}(3^t+3^{-t})$ ……①，$y=\dfrac{1}{2}(3^t-3^{-t})$ ……②

①+② から　$x+y=3^t$　　①−② から　$x-y=3^{-t}$

ゆえに　$(x+y)(x-y)=3^t\cdot3^{-t}$　　よって　$x^2-y^2=1$

$3^t>0$，$3^{-t}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x=\frac{1}{2}(3^t+3^{-t})\geqq\sqrt{3^t\cdot3^{-t}}=1$$

ゆえに　双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x\geqq1$ の部分

(3) $x=\dfrac{1}{1+t^2}$ ……①，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$ ……② とする。

① を ② に代入して　$y=tx$

$x\neq0$ であるから　$t=\dfrac{y}{x}$

これを ① に代入して t を消去すると　$x=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

整理すると　$x(x^2-x+y^2)=0$

$x\neq0$ であるから　$x^2-x+y^2=0$

よって　円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　ただし，点 $(0,\ 0)$ を除く。

$\boxed{5}$

解答　$\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

解説

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上を動くから，

$x=2\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$　と表される。

このとき　$3x^2-16xy-12y^2$

$=3\cdot4\cos^2\theta-16\cdot2\cos\theta\cdot\sin\theta-12\sin^2\theta$

$=12(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-16\cdot2\sin\theta\cos\theta=12\cos2\theta-16\sin2\theta$

$=-4(4\sin2\theta-3\cos2\theta)=-4\cdot5\sin(2\theta-\alpha)$

ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす角とする。

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-\alpha<2\theta-\alpha<4\pi-\alpha$ であり，さらに $-\dfrac{\pi}{2}<-\alpha<0$，

$\dfrac{7}{2}\pi<4\pi-\alpha<4\pi$ であるから，$3x^2-16xy-12y^2$ は $2\theta-\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$ のとき最大となる。

このとき　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{7}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

ここで，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{5}\right)}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

[1]　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$ のとき

$$x=2\cos\theta=2\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=2\left(\cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$y=\sin\theta=\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

[2]　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi+\dfrac{\alpha}{2}$ のとき

[1] の結果を利用すると

$$x=2\cos\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\left\{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+\pi\right\}=-2\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$y=\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left\{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+\pi\right\}=-\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

[1]，[2] より，求める点 P の座標は　$\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\boxed{6}$

解答　$\begin{cases}x=3\cos\theta-\cos3\theta\\ y=3\sin\theta-\sin3\theta\end{cases}$

解説

円 C' の中心 C' が O の周りを θ だけ回転したときの接点を T とし，$\mathrm{A}(2,\ 0)$ とする。

$\overset{\frown}{\mathrm{PT}}=\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=2\theta$，$\mathrm{PC}'=1$ から　$\angle\mathrm{TC'P}=2\theta$

よって，線分 $\mathrm{C'P}$ の，x 軸の正方向からの角 α は

$$\alpha=\theta+\pi+2\theta=3\theta+\pi$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$，

$\overrightarrow{\mathrm{C'P}}=(\cos(3\theta+\pi),\ \sin(3\theta+\pi))$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'P}}$ であるから

$$\begin{cases}x=3\cos\theta+\cos(3\theta+\pi)=3\cos\theta-\cos3\theta\\ y=3\sin\theta+\sin(3\theta+\pi)=3\sin\theta-\sin3\theta\end{cases}$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y=x+2$　　(2)　$x+y-3=0$　　(3)　$2\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-1=0$

解説

(1)　$4\cdot y=2\cdot2(x+2)$

すなわち　$y=x+2$

(2)　$\dfrac{1\cdot x}{3}+\dfrac{2\cdot y}{6}=1$

すなわち　$x+y-3=0$

(3)　$2\cdot\sqrt{2}\cdot x-(-\sqrt{3})\cdot y=1$

すなわち　$2\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-1=0$

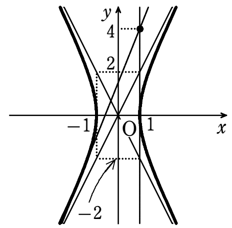
$\boxed{2}$

解答　接線の方程式が $x=1$ のとき，接点 $(1,\ 0)$；

接線の方程式が $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$ のとき，接点 $\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{8}{3}\right)$

解説

$4x^2-y^2=4$ ……① とする。



点 A を通る接線のうち，x 軸に垂直なものの方程式は $x=1$ であり，その接点の座標は $(1,\ 0)$ である。

x 軸に垂直ではない接線の傾きを m とすると，接線の方程式は

$$y=m(x-1)+4\quad\cdots\cdots②$$

② を ① に代入して，整理すると

$$(4-m^2)x^2+2m(m-4)x-m^2+8m-20=0\quad\cdots\cdots③$$

$m=\pm2$ のとき，直線 ② は漸近線と平行で，接線ではない。

よって　$m\neq\pm2$

このとき，2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{m(m-4)\}^2-(4-m^2)(-m^2+8m-20)$$

$$=-32m+80=-16(2m-5)$$

直線 ② が双曲線 ① に接する条件は，$D=0$ から　$m=\dfrac{5}{2}$

このとき，接線の方程式は ② から　$y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$　……④

$m=\dfrac{5}{2}$ を ③ に代入して　$-\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{15}{2}x-\dfrac{25}{4}=0$

ゆえに　$9x^2+30x+25=0$　　よって　$(3x+5)^2=0$

ゆえに　$x=-\dfrac{5}{3}$　　④ から　$y=-\dfrac{8}{3}$

したがって，接線の方程式と接点の座標は

接線の方程式が $x=1$ のとき　接点 $(1,\ 0)$

接線の方程式が $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$ のとき　接点 $\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{8}{3}\right)$

別解　接点の座標を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると

点 P は双曲線上の点であるから　$4x_1{}^2-y_1{}^2=4$　……①

点 P における双曲線の接線の方程式は　$4x_1x-y_1y=4$　……②

点 A を通るから　$4x_1\cdot 1-y_1\cdot 4=4$　　よって　$y_1=x_1-1$　……③

これを ① に代入すると　$4x_1{}^2-(x_1-1)^2=4$　　ゆえに　$3x_1{}^2+2x_1-5=0$

よって　$(3x_1+5)(x_1-1)=0$　　ゆえに　$x_1=-\dfrac{5}{3},\ 1$

$x_1=-\dfrac{5}{3}$ のとき，③ から　$y_1=-\dfrac{8}{3}$

このとき，接線の方程式は ② から　$-\dfrac{20}{3}x+\dfrac{8}{3}y=4$

すなわち　$y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$

$x_1=1$ のとき，③ から　$y_1=0$

このとき，接線の方程式は ② から　$4x=4$　すなわち　$x=1$

したがって，接線の方程式と接点の座標は

接線の方程式が $x=1$ のとき　接点 $(1,\ 0)$

接線の方程式が $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}$ のとき　接点 $\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{8}{3}\right)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=4\cos\theta,\ y=4\sin\theta$　　(2)　$x=\sqrt{5}\cos\theta,\ y=\sqrt{5}\sin\theta$

(3)　$x=2\cos\theta,\ y=\sin\theta$　　(4)　$x=2\cos\theta,\ y=3\sin\theta$

(5)　$x=\dfrac{4}{\cos\theta},\ y=3\tan\theta$　　(6)　$x=\dfrac{1}{\cos\theta},\ y=2\tan\theta$

解説

(1)　$x=4\cos\theta,\ y=4\sin\theta$

(2)　$x=\sqrt{5}\cos\theta,\ y=\sqrt{5}\sin\theta$

(3)　$x=2\cos\theta,\ y=\sin\theta$

(4)　$9x^2+4y^2=36$ の両辺を 36 で割って　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

よって　$x=2\cos\theta,\ y=3\sin\theta$

(5)　$x=\dfrac{4}{\cos\theta},\ y=3\tan\theta$

(6)　$4x^2-y^2=4$ の両辺を 4 で割って　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

よって　$x=\dfrac{1}{\cos\theta},\ y=2\tan\theta$

$\boxed{4}$

解答　(1)　放物線 $y=1-x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

(2)　双曲線 $x^2-y^2=4$ の $x\geqq 2$ の部分

(3)　双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　ただし，点 $(-1,\ 0)$ を除く

解説

(1)　$y=1-\cos^2\theta=1-x^2$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

よって　放物線 $y=1-x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分

(2)　$x=t^2+\dfrac{1}{t^2}$　……①，$y=t^2-\dfrac{1}{t^2}$　……②

①＋② から　$x+y=2t^2$　　①－② から　$x-y=\dfrac{2}{t^2}$

ゆえに　$(x+y)(x-y)=2t^2\cdot\dfrac{2}{t^2}=4$　　よって　$x^2-y^2=4$

$t^2>0,\ \dfrac{1}{t^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$x=t^2+\dfrac{1}{t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}=2$

ゆえに　双曲線 $x^2-y^2=4$ の $x\geqq 2$ の部分

(3)　$x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ から　$(1-t^2)x=1+t^2$　　よって　$(x+1)t^2=x-1$

$x\neq -1$ であるから　$t^2=\dfrac{x-1}{x+1}$　……①

また，$y=\dfrac{4t}{1-t^2}$ から

$t=\dfrac{1-t^2}{4}y=\dfrac{y}{4}\left(1-\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{y}{4}\cdot\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{y}{2(x+1)}$　……②

①，② から t を消去して　$\left\{\dfrac{y}{2(x+1)}\right\}^2=\dfrac{x-1}{x+1}$

両辺に $4(x+1)^2$ を掛けて　$y^2=4(x^2-1)$

したがって　双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　ただし，点 $(-1,\ 0)$ を除く。

別解　$x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ から　$x=-1+\dfrac{2}{1-t^2}$　すなわち　$\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{x+1}{2}$

$y=\dfrac{4t}{1-t^2}$ から　$\dfrac{t}{1-t^2}=\dfrac{y}{4}$

ゆえに　$\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{x+1}{2}$

よって　$4x^2-y^2=4$　　すなわち　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

また，$x=-1+\dfrac{2}{1-t^2}$ から　$x<-1,\ 1\leqq x$

したがって　双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　ただし，点 $(-1,\ 0)$ を除く。

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{\sqrt{31}+1}{12}$

解説

楕円 $2x^2+3y^2=1$ 上の点 $(x,\ y)$ は，

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$

と表されるから

$$x^2-y^2+xy=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2\sqrt{6}}\sin2\theta$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{12}\sin2\theta+\frac{5}{12}\cos2\theta+\frac{1}{12}$$
$$=\frac{\sqrt{31}}{12}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{1}{12}$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{31}},\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\alpha\leqq 2\theta+\alpha<4\pi+\alpha$

よって　$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq 1$

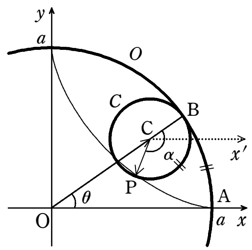
ゆえに，求める最大値は　$\dfrac{\sqrt{31}+1}{12}$

$\boxed{6}$

解答　$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$

解説

P$(x,\ y)$ とし，円 O と円 C との接点を B とする。



$\angle$BCP$=\alpha$ とすると，$\overset{\frown}{\text{AB}}=\overset{\frown}{\text{PB}}$ であるから

$a\theta=\dfrac{a}{4}\cdot\alpha$

よって　$\alpha=4\theta$

半直線 CP が x 軸の正の向きとなす角は

$\theta-\alpha=\theta-4\theta=-3\theta$

したがって

$$\overrightarrow{\text{OP}}=\overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{CP}}$$
$$=\left(\frac{3}{4}a\cos\theta,\ \frac{3}{4}a\sin\theta\right)+\left(\frac{a}{4}\cos(-3\theta),\ \frac{a}{4}\sin(-3\theta)\right)$$
$$=\left(\frac{3}{4}a\cos\theta+\frac{a}{4}(4\cos^3\theta-3\cos\theta),\ \frac{3}{4}a\sin\theta-\frac{a}{4}(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\right)$$
$$=(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$$

ゆえに　$x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$

1

解答　略

解説

点Pにおける接線の方程式は　$y_1y=2p(x+x_1)$　……①

点Pは放物線上の点であるから　$y_1{}^2=4px_1$

また，焦点Fの座標は $(p,\ 0)$ であるから

$$\mathrm{FP}=\sqrt{(x_1-p)^2+y_1{}^2}=\sqrt{(x_1-p)^2+4px_1}$$
$$=\sqrt{(x_1+p)^2}=x_1+p$$

Tの x 座標は，接線①に $y=0$ を代入して　$x=-x_1$

ゆえに　$\mathrm{FT}=p-(-x_1)=p+x_1$

よって，FP＝FTとなり，△FPTは二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{PTF}=\angle\mathrm{TPF}$$

2

解答　(ア)　$-x^2+1$　(イ)　$-\dfrac{1}{2}$　(ウ)　1　(エ)　π

解説

$x=\sin\theta$，$y=\cos^2\theta$ から　$x^2+y=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　よって　$y=-x^2+1$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq1$　　すなわち　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq1$

ゆえに，点Pが描く曲線は放物線 $y={}^{ア}-x^2+1$ の ${}^{イ}-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq{}^{ウ}1$ の部分であり，

点Pの y 座標が最大となるのは，$x=0$ すなわち $\sin\theta=0$ のときである。

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ において，$\sin\theta=0$ を満たす θ の値は　$\theta={}^{エ}\pi$

3

解答　$\dfrac{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

解説

$x=t+\dfrac{1}{t}+\dfrac{5}{2}$ から　$t+\dfrac{1}{t}=x-\dfrac{5}{2}$　……①

$y=2t-\dfrac{2}{t}$ から　$t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{y}{2}$　……②

①＋② から　$2t=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{y}{2}$　　よって　$t=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{y}{4}$

①－② から　$\dfrac{2}{t}=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{y}{2}$　　よって　$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{y}{4}$

$t\cdot\dfrac{1}{t}=1$ に代入すると　$\left\{\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{y}{4}\right\}\cdot\left\{\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{y}{4}\right\}=1$

したがって　$\dfrac{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

4

解答　(ア)　$\dfrac{3}{2}$　(イ)　$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

解説

$x+y=k$ とおくと　$y=-x+k$ ……①

$x+y$ のとりうる値の範囲は，直線①が楕円 $x^2+x+2y^2+y=3$ と共有点をもつような k の値の範囲と一致する。

①を $x^2+x+2y^2+y=3$ に代入して整理すると　$3x^2-4kx+2k^2+k-3=0$　……②

②の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-3\cdot(2k^2+k-3)=-(2k-3)(k+3)$

直線①が楕円 $x^2+x+2y^2+y=3$ と共有点をもつとき，$D\geqq0$ であるから

$$-(2k-3)(k+3)\geqq0\qquad\text{すなわち}\qquad-3\leqq k\leqq\frac{3}{2}$$

k が最大となるとき，$x+y$ は最大となるから，$k=\dfrac{3}{2}$ のとき $x+y$ は最大値 ${}^{ア}\dfrac{3}{2}$ をとる。

このとき，②は　$3x^2-6x+3=0$　　すなわち　$(x-1)^2=0$

よって　$x=1$

したがって　$y=-x+k=\dfrac{1}{2}$

ゆえに，このときの点の座標は　${}^{イ}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

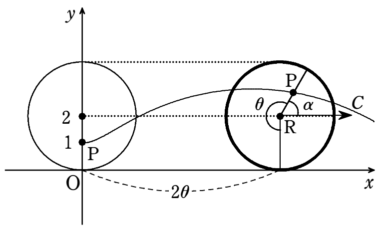
5

解答　$(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$

解説

円板がその中心の周りに角 θ だけ回転したときの中心をR，円板上の点で最初に原点Oにあった点が移った点をQ，Rから x 軸に引いた垂線をRHとすると　$\mathrm{OH}=\overset{\frown}{\mathrm{QH}}=2\theta$

よって　$\mathrm{H}(2\theta,\ 0)$，$\mathrm{R}(2\theta,\ 2)$



$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$\alpha=\frac{3}{2}\pi-\theta$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|=1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)=(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(2\theta,\ 2)+(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$
$$=(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$$

ゆえに，点Pの座標は　$(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$

1

解答　(1)　$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　(2)　$\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

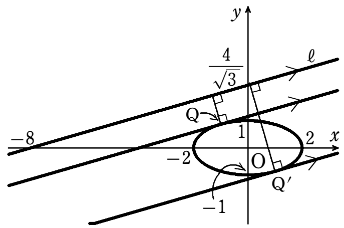
解説

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は　$\dfrac{a}{4}x+by=1$

よって，求める条件は　$\dfrac{a}{4}\cdot(-2\sqrt{3})-1\cdot b=0$

ゆえに　$b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　……①

(2)　点Qにおける接線は ℓ に平行であるから，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ とすると(1)より，①が成り立つ。



また　$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$　……②

①を②に代入して整理すると

$a^2=1$　　よって　$a=\pm1$

右図から　$\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

点Qから直線 ℓ : $x-2\sqrt{3}y+8=0$ までの距離は

$$\frac{\left|-1-2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+8\right|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{3})^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

2

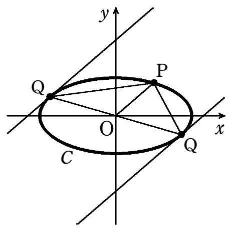
解答　(1)　$\sqrt{3}x-2y=4$，$-\sqrt{3}x+2y=4$

(2)　最大値1，Qの座標 $\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

解説

(1)　接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は

$$\frac{ax}{4}+by=1\quad\cdots\cdots①$$



直線OPの傾きは　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，直線①が直線OPに平行であるための条件は

$$-\frac{a}{4b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すなわち　$a=-2\sqrt{3}b$　……②

接点 $(a,\ b)$ は曲線 C 上の点であるから　$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$　……③

②，③を連立させて解くと

$$(a,\ b)=\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって，求める直線は

$$\sqrt{3}x-2y=4,\ -\sqrt{3}x+2y=4$$

(2)　線分OPを△OPQの底辺と考えると，高さは点Qと直線OPの距離 d に等しい。△OPQの面積が最大になるのは，d が最大のときであり，そのとき，Qは(1)で求めた接線の接点に一致する。

Qの座標が$\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)$のとき，△OPQの面積は

$$\frac{1}{2}\left|1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$$

Qの座標が$\left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$のとき，△OPQの面積は上で求めた値と等しいから　1

よって，△OPQの面積の最大値は1である。

また，それを与えるQの座標は

$$\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

別解　(1)　直線OPの傾きは　$\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める接線の方程式は $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+k$ と表せる。

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入して整理すると

$$x^2+\sqrt{3}\,kx+k^2-1=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(\sqrt{3}\,k)^2-4(k^2-1)=-(k+2)(k-2)$$

$D=0$ から　　$k=\pm2$

よって，求める直線は　　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x\pm2$

(2)　(Qの x 座標の求め方)

接点の x 座標は $x^2\pm2\sqrt{3}\,x+3=0$ の重解であるから

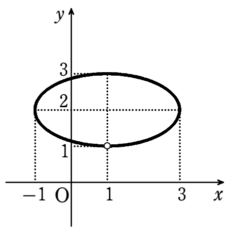
$$x=-\frac{\pm2\sqrt{3}}{2}=\mp\sqrt{3}\ \text{(複号同順)}$$

(以下同様)

3

解答　(1)　$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1,\ 1<y\leqq3$

(2)　〔図〕



解説

(1)　$y=\frac{3+t^2}{1+t^2}$ から　　$(y-1)t^2=3-y$　……①

$y=1$ は①を満たさないから　　$y\neq1$

よって　　$t^2=\frac{3-y}{y-1}$　……②

これを $x=1+\frac{4t}{1+t^2}$ に代入して整理すると　　$t=\frac{x-1}{4}(1+t^2)=\frac{x-1}{2(y-1)}$　……③

②，③から t を消去して　　$\left\{\frac{x-1}{2(y-1)}\right\}^2=\frac{3-y}{y-1}$

整理すると　　$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$

また，$y=1+\frac{2}{1+t^2}$ かつ $1<1+\frac{2}{1+t^2}\leqq3$ であるから

$1<y\leqq3$

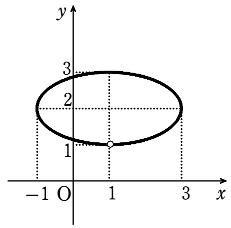
よって，曲線 C の方程式は

$$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1,\ 1<y\leqq3$$

(2)　(1)の結果により，曲線 C は楕円

$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$ から点(1，1)を除いた部分である。

よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。



4

解答　$\mathrm{OP}=\sqrt{5+4\cos\theta}$

解説

OO′＝2, ∠AOO′＝θ　から　O′$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

更に，O′P が x 軸の正の向きとなす角は 2θ であるから，

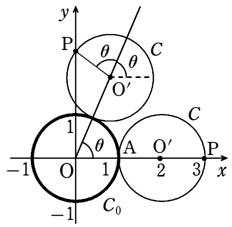
P$(x,\ y)$ とおくと

$$x=2\cos\theta+\cos2\theta,\ y=2\sin\theta+\sin2\theta$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=x^2+y^2=(2\cos\theta+\cos2\theta)^2+(2\sin\theta+\sin2\theta)^2\\&=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^22\theta+\sin^22\theta)\\&\quad+4(\cos\theta\cos2\theta+\sin\theta\sin2\theta)\\&=5+4\cos\theta\end{aligned}$$

OP＞0 であるから　$\mathrm{OP}=\sqrt{5+4\cos\theta}$



解説

1

解答　(1)　A$(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$，B$(-\sqrt{3},\ -1)$　　(2)　C$\left(2\sqrt{3},\ \frac{5}{3}\pi\right)$，D$(2,\ \pi)$

解説

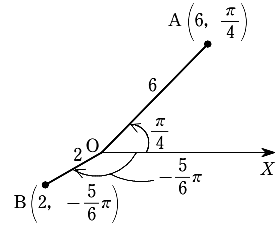
(1)　$x=6\cos\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$，$y=6\sin\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}$ から

A$(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$

$x=2\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}$，

$y=2\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-1$ から

B$(-\sqrt{3},\ -1)$



(2)　$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$

また　　$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\theta=\frac{5}{3}\pi$

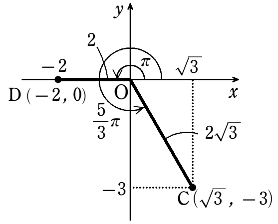
よって　　C$\left(2\sqrt{3},\ \frac{5}{3}\pi\right)$

$r=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

また　　$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ から　　$\theta=\pi$

よって　　D$(2,\ \pi)$



2

解答　(1)　$r\cos\left(\theta-\frac{5}{3}\pi\right)=1$　　(2)　$r=-2\cos\theta$　　(3)　$r\sin^2\theta=4\cos\theta$

解説

(1)　$x-\sqrt{3}\,y-2=0$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=2$$

ゆえに　　$r\left\{\cos\theta\cdot\frac{1}{2}+\sin\theta\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=1$

よって，求める極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\frac{5}{3}\pi\right)=1$

(2)　$x^2+y^2=-2x$ に $x^2+y^2=r^2$，$x=r\cos\theta$ を代入すると

$$r(r+2\cos\theta)=0$$

ゆえに　　$r=0$　または　$r=-2\cos\theta$

$r=0$ は極を表し，$r=-2\cos\theta$ は極$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$を通る。

よって，求める極方程式は　　$r=-2\cos\theta$

(3)　$y^2=4x$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r(r\sin^2\theta-4\cos\theta)=0$$

ゆえに　　$r=0$　または　$r\sin^2\theta=4\cos\theta$

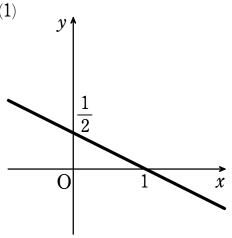
$r=0$ は極を表し，$r\sin^2\theta=4\cos\theta$ は極$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$を通る。

よって，求める極方程式は　　$r\sin^2\theta=4\cos\theta$

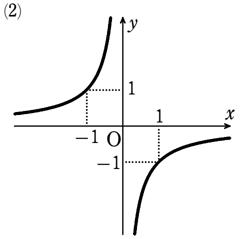
$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，[図]　　(2)　$xy=-1$，[図]　　(3)　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，[図]

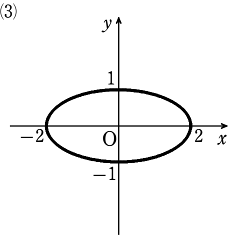
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　$\frac{1}{r}=\cos\theta+2\sin\theta$ の両辺を r 倍して　　$1=r\cos\theta+2r\sin\theta$

ゆえに　　$1=x+2y$　　　　すなわち　　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，下図。

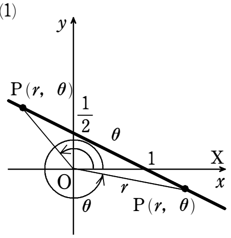
(2)　$r^2\sin 2\theta=r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=2r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ であるから　　$2xy=-2$

ゆえに　　$xy=-1$，下図。

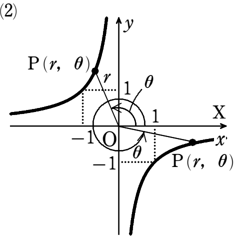
(3)　$3(r\sin\theta)^2+r^2=4$ であるから　　$3y^2+(x^2+y^2)=4$

ゆえに　　$x^2+4y^2=4$　　　　すなわち　　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，下図。

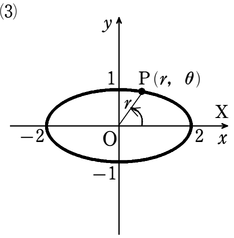
(1)



(2)



(3)



$\boxed{4}$

解答　(1)　中心が極，半径が３の円　[図]

(2)　極を通り，始線とのなす角が $\frac{\pi}{3}$ の直線　[図]

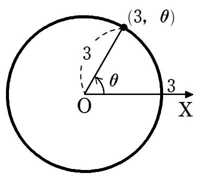
(3)　中心の極座標が $(3,\ 0)$，半径が３の円　[図]

(4)　極座標が $(2,\ 0)$ である点を通り，始線に垂直な直線　[図]

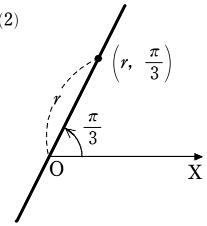
(5)　極座標が $\left(1,\ \frac{5}{6}\pi\right)$ である点Ａを通り，OA に垂直な直線（O は極）[図]

(6)　極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$ である点を通り，始線に平行な直線　[図]

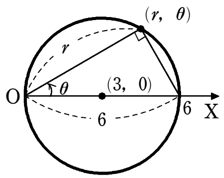
(1)



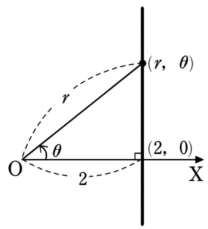
(2)



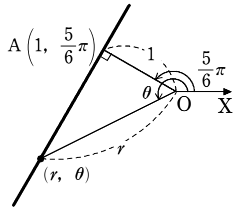
(3)



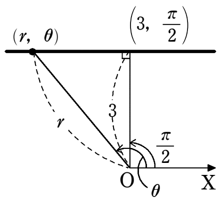
(4)



(5)



(6)

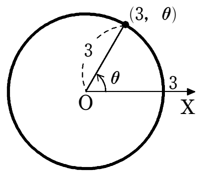


解説

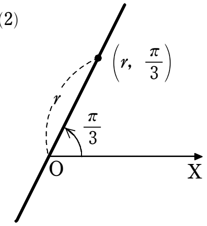
(1)　中心が極，半径が３の円を表す。[図]

(2)　極を通り，始線とのなす角が $\frac{\pi}{3}$ の直線を表す。[図]

(1)



(2)

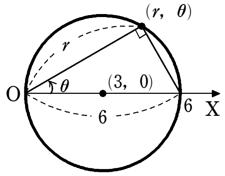


(3)　$r=6\cos\theta$ から　　$r=2\cdot 3\cos\theta$

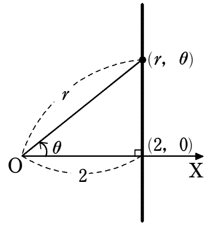
よって，中心の極座標が $(3,\ 0)$，半径が３の円を表す。[図]

(4)　極座標が $(2,\ 0)$ である点を通り，始線に垂直な直線を表す。[図]

(3)



(4)

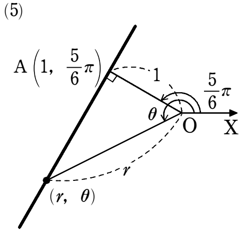


(5)　極座標が $\left(1,\ \frac{5}{6}\pi\right)$ である点Ａを通り，OA に垂直な直線を表す（O は極）。[図]

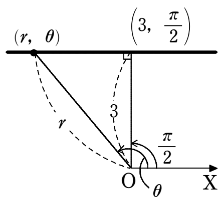
(6)　$\sin\theta=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ であるから，極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=3$

よって，極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$ である点を通り，始線に平行な直線を表す。[図]

(5)



(6)



$\boxed{5}$

解答　(1)　$r=5$　　(2)　$r=6\cos\theta$　　(3)　$\theta=\frac{\pi}{3}$　　(4)　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$

解説

(1)　$r=5$

(2)　点 $(3,\ 0)$ を中心とする半径３の円であるから

$r=2\cdot 3\cos\theta$　　　　よって　$r=6\cos\theta$

(3)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

(4)　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$

$\boxed{6}$

解答　$r=\dfrac{6}{3+2\cos\theta}$

解説

点Ｐの極座標を $(r,\ \theta)$，Ｐから直線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると

　　OP：PH＝2：3

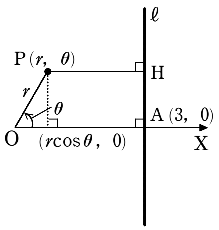
ここで　OP＝r，PH＝$3-r\cos\theta$

よって　$r:(3-r\cos\theta)=2:3$

ゆえに　$3r=2(3-r\cos\theta)$

したがって，求める極方程式は

$$r=\frac{6}{3+2\cos\theta}$$



$\boxed{7}$

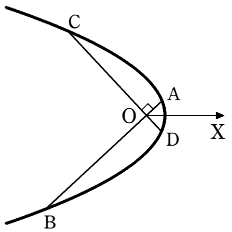
解答　$\dfrac{1}{6}$

解説

OA＝r_1，OB＝r_2，OC＝r_3，OD＝r_4 とおき，点 A の極座標を $(r_1,\ \theta_1)$ とする。

4点 A，C，B，D が，この順で極 O の周りに正の回転の向きで並んでいるとすると，3点 B，C，D の極座標は B$(r_2,\ \theta_1+\pi)$，C$\left(r_3,\ \theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

D$\left(r_4,\ \theta_1-\dfrac{\pi}{2}\right)$　とおける。



4点 A，B，C，D は放物線上にあるから

$$r_1=\frac{3}{1+\cos\theta_1}$$

$$r_2=\frac{3}{1+\cos(\theta_1+\pi)}=\frac{3}{1-\cos\theta_1}$$

$$r_3=\frac{3}{1+\cos\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{3}{1-\sin\theta_1}$$

$$r_4=\frac{3}{1+\cos\left(\theta_1-\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{3}{1+\sin\theta_1}$$

ここで　$\mathrm{AB}=r_1+r_2=\dfrac{3}{1+\cos\theta_1}+\dfrac{3}{1-\cos\theta_1}$

$$=\frac{6}{1-\cos^2\theta_1}=\frac{6}{\sin^2\theta_1}$$

$\mathrm{CD}=r_3+r_4=\dfrac{3}{1-\sin\theta_1}+\dfrac{3}{1+\sin\theta_1}$

$$=\frac{6}{1-\sin^2\theta_1}=\frac{6}{\cos^2\theta_1}$$

よって　$\dfrac{1}{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{\mathrm{CD}}=\dfrac{\sin^2\theta_1}{6}+\dfrac{\cos^2\theta_1}{6}=\dfrac{1}{6}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　A$(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$，B$(0,\ -3)$　　(2)　C$\left(1,\ \dfrac{7}{4}\pi\right)$，D$\left(4,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$

解説

(1)　A：$x=4\cos\dfrac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$，$y=4\sin\dfrac{5}{4}\pi=-2\sqrt{2}$

　よって　A$(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

B：$x=3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$y=3\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$

　よって　B$(0,\ -3)$

(2)　C：$r=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

　よって　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

　したがって　C$\left(1,\ \dfrac{7}{4}\pi\right)$

D：$r=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$

　よって　$\cos\theta=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

　したがって　D$\left(4,\ \dfrac{4}{3}\pi\right)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$r\cos\left(\theta-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$　　(2)　$r=4\sin\theta$　　(3)　$r^2\cos2\theta=-4$

解説

(1)　$x+y+2=0$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r(\cos\theta+\sin\theta)=-2$$

すなわち　$r(-\cos\theta-\sin\theta)=2$

ゆえに　$r\left\{\cos\theta\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sin\theta\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\sqrt{2}$

よって，求める極方程式は　$r\cos\left(\theta-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$

(2)　$x^2+y^2-4y=0$ に $x^2+y^2=r^2$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r(r-4\sin\theta)=0$$

ゆえに　$r=0$　または　$r=4\sin\theta$

$r=0$ は極を表し，$r=4\sin\theta$ は極 $(0,\ 0)$ を通る。

よって，求める極方程式は　$r=4\sin\theta$

(3)　$x^2-y^2=-4$ に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-4$$

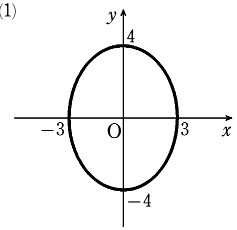
ゆえに　$r^2\cos2\theta=-4$

よって，求める極方程式は　$r^2\cos2\theta=-4$

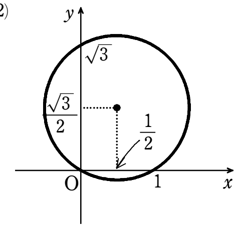
$\boxed{3}$

解答　(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，［図］　　(2)　$x^2+y^2-x-\sqrt{3}\,y=0$，［図］

(1)



(2)



解説

(1)　$r^2(7\cos^2\theta+9)=144$ から

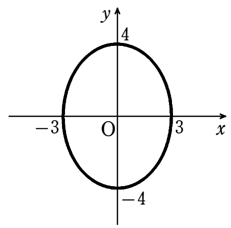
$$7(r\cos\theta)^2+9r^2=144$$

これに $r\cos\theta=x$，$r^2=x^2+y^2$ を代入して

$$7x^2+9(x^2+y^2)=144$$

よって　$16x^2+9y^2=144$

ゆえに　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，右図。



(2)　極方程式の右辺を加法定理を用いて展開すると

$$r=2\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

すなわち　$r=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

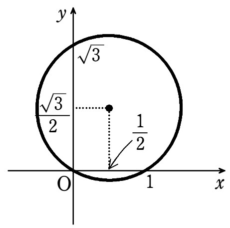
よって　$r^2=r\cos\theta+\sqrt{3}\,r\sin\theta$

これに $r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ を代入して　$x^2+y^2-x-\sqrt{3}\,y=0$

これを変形して

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

ゆえに，右図。



別解　$r=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ……① を変形して

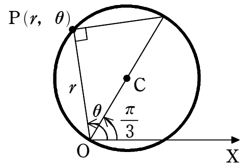
$$r=2\cdot1\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，極方程式①は C$\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ を中心とし，半径 1 の円を表す。

C$\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ を直交座標で表すと

$$\mathrm{C}\left(1\cdot\cos\frac{\pi}{3},\ 1\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

すなわち　C$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



ゆえに，極方程式①を直交座標に関する方程式で表すと

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$$

$\boxed{4}$

解答　(1)～(6)〔図〕

(1)　中心が極，半径が７の円

(2)　中心の極座標が$(5,\ 0)$，半径が５の円

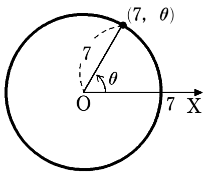
(3)　極を通り，始線とのなす角が$\dfrac{\pi}{3}$の直線

(4)　極座標が$(3,\ 0)$である点を通り，始線に垂直な直線

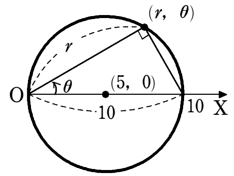
(5)　極座標が$\left(1,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$である点Ａを通り，ＯＡに垂直な直線（Ｏは極）

(6)　極座標が$\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$である点を通り，始線に平行な直線

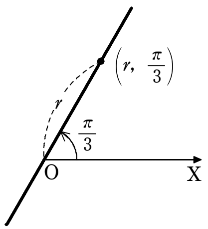
(1)



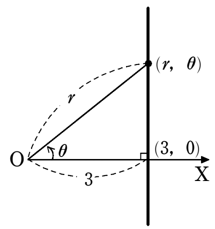
(2)



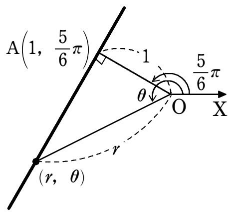
(3)



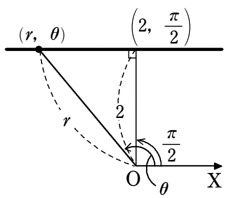
(4)



(5)



(6)



解説

(1)　中心が極，半径が７の円〔図〕

(2)　$r=10\cos\theta$ から　　$r=2\cdot5\cos\theta$

　よって，中心の極座標が$(5,\ 0)$，半径が５の円〔図〕

(3)　極を通り，始線とのなす角が$\dfrac{\pi}{3}$の直線〔図〕

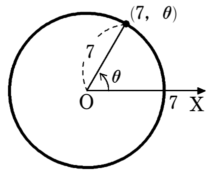
(4)　極座標が$(3,\ 0)$である点を通り，始線に垂直な直線〔図〕

(5)　極座標が$\left(1,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$である点Ａを通り，ＯＡに垂直な直線（Ｏは極）〔図〕

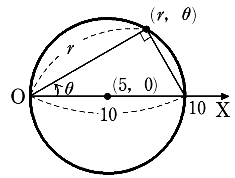
(6)　$\sin\theta=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$であるから，極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

　よって，極座標が$\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$である点を通り，始線に平行な直線〔図〕

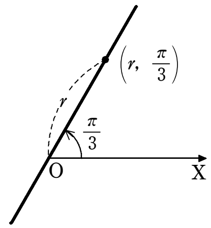
(1)



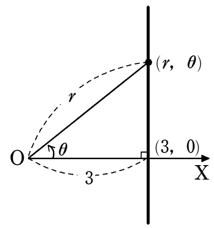
(2)



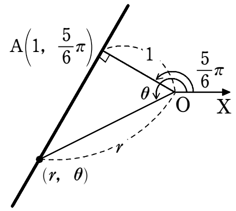
(3)



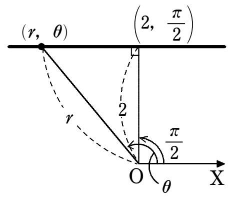
(4)



(5)



(6)



$\boxed{5}$

解答　(1)　$r=4$　　(2)　$r=\dfrac{3}{\cos\theta}$　　(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$　　(4)　$r=6\cos\theta$

(5)　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$　　(6)　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

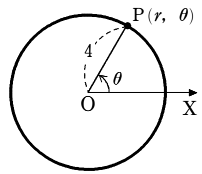
解説

曲線上の点Ｐの極座標を$(r,\ \theta)$とする。

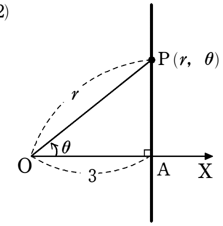
(1)　$r=4$

(2)　$r\cos\theta=3$ から　　$r=\dfrac{3}{\cos\theta}$

(1)



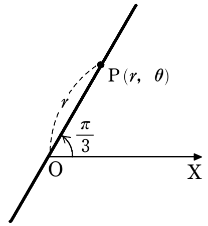
(2)



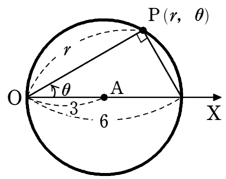
(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(4)　$r=6\cos\theta$

(3)



(4)



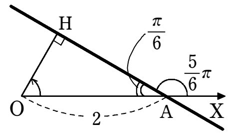
(5)　極Ｏからこの直線に下ろした垂線をＯＨとする。右の図から

$\angle \mathrm{AOH}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

よって，点Ｈの極座標は　　$\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって，求める極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$



(6)　極Ｏからこの直線に下ろした垂線をＯＨ，直線と始線の交点をＣとする。右の図から

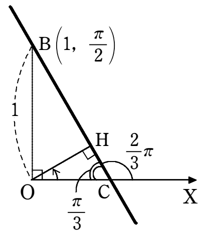
$\angle \mathrm{COH}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle \mathrm{HOB}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

$\mathrm{OH}=\mathrm{OB}\cos\angle \mathrm{HOB}=1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

よって，点Ｈの極座標は　　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

したがって，求める極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

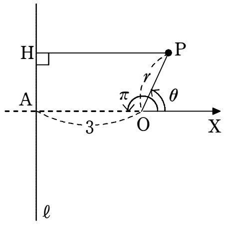


$\boxed{6}$

解答　(1)　$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$　　(2)　$r=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$

解説

点Pの極座標を$(r,\ \theta)$とし，Pから直線ℓに下ろした垂線をPHとする。



(1)　OP : PH $=\dfrac{1}{2}$: 1 より　　2OP $=$ PH

これを満たす点Pは直線ℓの右側にあり

$\mathrm{OP}=r$

$\mathrm{PH}=3+r\cos\theta$

よって　$2r=3+r\cos\theta$

したがって，求める極方程式は　$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$

(2)　OP : PH $=1:1$ より　　OP $=$ PH

これを満たす点Pは直線ℓの右側にあり

$\mathrm{OP}=r$

$\mathrm{PH}=3+r\cos\theta$

よって　$r=3+r\cos\theta$

したがって，求める極方程式は　$r=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$

7

解答　略

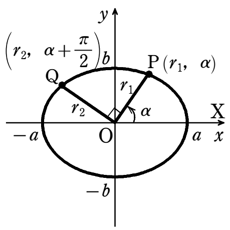
解説

楕円を直交座標において $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とする。

楕円の中心O(原点)を極，x軸の正の向きを始線とすると，楕円の極方程式は

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

よって　$\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$



OP⊥OQ であるから，2点P，Qの極座標は P$(r_1,\ \alpha)$，Q$\left(r_2,\ \alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(r_1>0,\ r_2>0)$ とおけて，このとき

$\mathrm{OP}=r_1,\ \mathrm{OQ}=r_2$

P，Qは楕円上にあるから

$$\frac{1}{r_1{}^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2},$$

$$\frac{1}{r_2{}^2}=\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}$$

よって　$\dfrac{1}{r_2{}^2}=\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\cos^2\alpha}{b^2}$

したがって　$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}=\dfrac{1}{r_1{}^2}+\dfrac{1}{r_2{}^2}=\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a^2}+\dfrac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2}$$

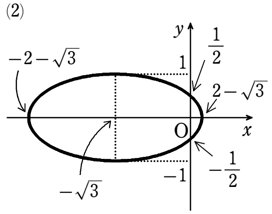
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\quad(\text{一定})$$

1

解答　(1)　$r=\dfrac{3}{1+\cos\theta}$

(2)　$\dfrac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$，[図]

(2)



解説

(1)　放物線上の点Pの極座標を$(r,\ \theta)$とし，点Pから準線ℓに下ろした垂線をPHとすると　　OP $=$ PH

$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{PH}=3-r\cos\theta$ であるから　　$r=3-r\cos\theta$

よって　$r=\dfrac{3}{1+\cos\theta}$

(2)　$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ から　$2r=1-\sqrt{3}\,r\cos\theta$

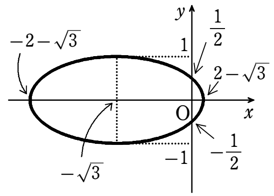
$r\cos\theta=x$ を代入して　　$2r=1-\sqrt{3}\,x$

両辺を２乗して　　$4r^2=1-2\sqrt{3}\,x+3x^2$

$r^2=x^2+y^2$ を代入して

$x^2+2\sqrt{3}\,x+4y^2-1=0$

よって　$\dfrac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1$，右図

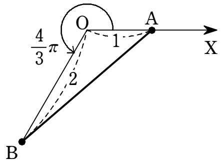


2

解答　(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$　　(2)　$r(\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta)=\sqrt{3}$

解説

極をOとする。



(1)　△OABについて，余弦定理により

$\mathrm{AB}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos\left(2\pi-\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$=1+4-4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$

したがって　　$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$

(2)　Aの直交座標は $1\cdot\cos0=1$，$1\cdot\sin0=0$ より　　$(1,\ 0)$

Bの直交座標は $2\cos\dfrac{4}{3}\pi=-1$，$2\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\sqrt{3}$ より　　$(-1,\ -\sqrt{3})$

直線ABの直交座標に関する方程式は

$y-0=\dfrac{-\sqrt{3}-0}{-1-1}(x-1)$　　すなわち　$\sqrt{3}\,x-2y=\sqrt{3}$

これに $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して，求める極方程式は

$r(\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta)=\sqrt{3}$

3

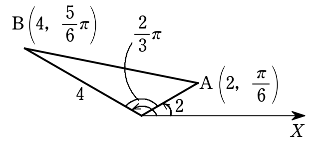
解答　(1)　①　$2\sqrt{7}$　　②　$2\sqrt{3}$　　(2)　$\dfrac{-\sqrt{2}+12\sqrt{3}+7\sqrt{6}}{4}$

解説

(1)　△OABにおいて

$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=4$，

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$



①　余弦定理により

$\mathrm{AB}^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cos\dfrac{2}{3}\pi=28$

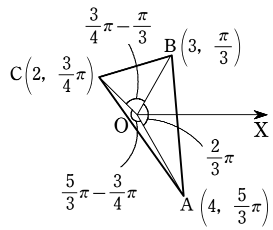
ゆえに　　$\mathrm{AB}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

②　△OABの面積Sは　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot4\sin\dfrac{2}{3}\pi=2\sqrt{3}$

(2)　A$\left(4,\ -\dfrac{\pi}{3}\right)$から　　A$\left(4,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)$　　すなわち　　A$\left(4,\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$

△ABCを図示すると，右の図のようになる。

ゆえに



$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot3\sin\dfrac{2}{3}\pi=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=3\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\angle\mathrm{BOC}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=3\left(\sin\dfrac{3}{4}\pi\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{3}{4}\pi\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=3\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$

$\triangle\mathrm{OCA}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{COA}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot4\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$=4\left(\sin\dfrac{5}{3}\pi\cos\dfrac{3}{4}\pi-\cos\dfrac{5}{3}\pi\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$=4\left\{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=3\sqrt{3}+\dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$=\dfrac{-\sqrt{2}+12\sqrt{3}+7\sqrt{6}}{4}$

4

解答　$\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$

解説

A$(2a,\ 0)$，P$(r,\ \theta)$とすると，A，Pの直交座標は

A$(2a,\ 0)$，P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$r=a(1+\cos\theta)$ であるから

$\mathrm{AP}^2=(r\cos\theta-2a)^2+(r\sin\theta)^2$

$=r^2-4ar\cos\theta+4a^2$

$=a^2(1+\cos\theta)^2-4a^2\cos\theta(1+\cos\theta)+4a^2$

$=-3a^2\cos^2\theta-2a^2\cos\theta+5a^2$

$=-3a^2\left(\cos^2\theta+\dfrac{2}{3}\cos\theta\right)+5a^2$

$=-3a^2\left(\cos\theta+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}a^2$

ゆえに，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ の範囲において，$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，AP^2 は最大となる。

$AP\geqq0$ であるから，AP^2 が最大のとき，AP も最大となる。

したがって，AP の最大値は　$\sqrt{\dfrac{16}{3}a^2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$

$\boxed{5}$

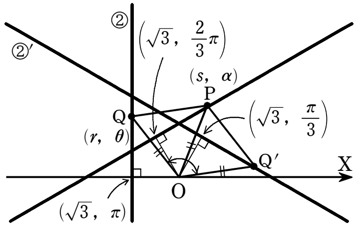
解答　$r\cos\theta=-\sqrt{3}$，$r\cos\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}$

解説

P の極座標を $(s,\ \alpha)$，Q の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

P は与えられた直線上にあるから

$s\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$　……①



△OPQ は正三角形であるから

$OQ=OP$，$\angle POQ=\dfrac{\pi}{3}$

よって　$(r,\ \theta)=\left(s,\ \alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(s,\ \alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

ゆえに　$(s,\ \alpha)=\left(r,\ \theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(r,\ \theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$(s,\ \alpha)=\left(r,\ \theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき，① から　$r\cos\theta=-\sqrt{3}$

$(s,\ \alpha)=\left(r,\ \theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき，① から　$r\cos\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}$

したがって，Q の軌跡の極方程式は

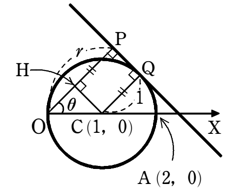
$r\cos\theta=-\sqrt{3}$，$r\cos\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}$

$\boxed{1}$

解答　$r=1+\cos\theta$

解説

円 C の中心を C とすると，その極座標は (1，0) である。



[1]　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

中心 C から直線 OP に下ろした垂線の足を H とすると

$OC=CQ=HP=1$

$\angle COH=\theta$，$OH=\cos\theta$ から

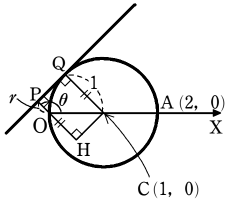
$OP=HP+OH=1+\cos\theta$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

[1] と同様にして，$\angle COH=\pi-\theta$，

$OH=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ から

$OP=HP-OH=1+\cos\theta$



[3]　$\theta=0$ のとき

このとき，P は A に一致して　　$OP=2$

よって，$OP=1+\cos\theta$ を満たす。

[4]　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

このとき，$OP=CQ=1$ であるから，$OP=1+\cos\theta$ を満たす。

ゆえに，点 P の軌跡の極方程式は

$r=1+\cos\theta$

$\boxed{2}$

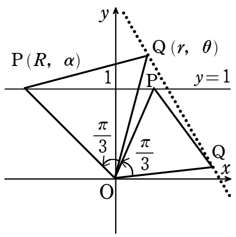
解答　(1)　$r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$　　(2)　$\sqrt{3}x+y=2$

解説

(1)　点 Q の極座標を $(r,\ \theta)$，点 P の極座標を $(R,\ \alpha)$ とする。

点 P は直線 $y=1$ 上を動くから　　$R\sin\alpha=1$　……①

また，△OPQ は正三角形で，O，P，Q はこの順で時計回りに並ぶから　　$R=r$，$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{3}$



これを ① に代入すると　　$r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

よって，点 Q の軌跡を極方程式で表すと

$r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

(2)　(1) から　　$r\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

すなわち　　$\dfrac{1}{2}r\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta=1$

$r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ を代入すると　　$\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=1$

すなわち　　$\sqrt{3}x+y=2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　中心は (1，0)，半径は 1

(2)　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

(3)　$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

解説

(1)　$r=2\cos\theta$ の両辺に r を掛けると　　$r^2=2r\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を代入すると　　$x^2+y^2=2x$

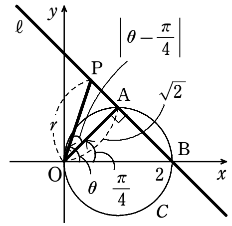
すなわち　　$(x-1)^2+y^2=1$

よって，円 C の中心の直交座標は (1，0)，半径は 1

(2)　線分 OB は円 C の直径であるから　　$OA\perp AB$

よって，直線 ℓ は，点 A を通り OA に垂直な直線である。

ゆえに，直線 ℓ 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$OA=OP\cos\angle POA$ から　$\sqrt{2}=r\cos\left|\theta-\dfrac{\pi}{4}\right|$



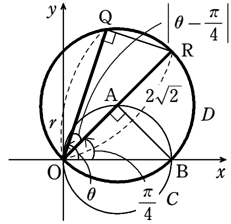
したがって，直線 ℓ の極方程式は

$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

(3)　円 D 上の点 Q の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$AB=OA=\sqrt{2}$ であるから，極座標が $\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点を R とすると，直角三角形 OQR において

$OQ=OR\cos\angle QOR$



したがって，円 D の極方程式は

$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

別解　(直交座標の x，y の方程式を極方程式に直す)

(2)　点 A，B の直交座標は，それぞれ

A (1，1)，B (2，0)

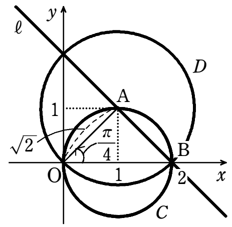
よって，直線 ℓ の方程式は　　$x+y=2$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して

$r\cos\theta+r\sin\theta=2$

すなわち　　$r(\cos\theta+\sin\theta)=2$

ここで　　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$



したがって，直線 ℓ の極方程式は　　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

(3)　$AB=\sqrt{2}$ であるから，円 D の方程式は　　$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

すなわち　　$x^2+y^2=2x+2y$

$x^2+y^2=r^2$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入して　　$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

よって　　$r\{r-2(\cos\theta+\sin\theta)\}=0$

すなわち　　$r\left\{r-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}=0$

ゆえに　　$r=0$ または $r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$r=0$ は極を表し，曲線 $r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は極を通る。

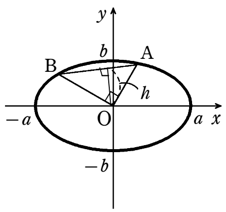
したがって，円 D の極方程式は　$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　略　　(2)　$h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

解説

(1)　△OABの面積を S とする。



$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$　……①

また，△OABは直角三角形であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h=\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}\cdot h$　……②

①，②から　$\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}\cdot h$

両辺を２乗して整理すると　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}$

(2)　$\mathrm{OA}=r_1$，$\mathrm{OB}=r_2$ とし，動径OA，OBの表す角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする。

ここで，$\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{2}$ としても一般性を失わない。

このとき，$\cos\theta_2=\cos\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta_1$，$\sin\theta_2=\sin\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta_1$ であるから，$\mathrm{A}(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$，$\mathrm{B}(-r_2\sin\theta_1,\ r_2\cos\theta_1)$ とおける。

２点A，Bは楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから

$$\frac{r_1{}^2\cos^2\theta_1}{a^2}+\frac{r_1{}^2\sin^2\theta_1}{b^2}=1,\quad \frac{r_2{}^2\sin^2\theta_1}{a^2}+\frac{r_2{}^2\cos^2\theta_1}{b^2}=1$$

よって　$\dfrac{1}{r_1{}^2}=\dfrac{\cos^2\theta_1}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta_1}{b^2}$，$\dfrac{1}{r_2{}^2}=\dfrac{\sin^2\theta_1}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta_1}{b^2}$

ゆえに　$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{\mathrm{OA}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OB}^2}=\dfrac{1}{r_1{}^2}+\dfrac{1}{r_2{}^2}=\dfrac{\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1}{b^2}$

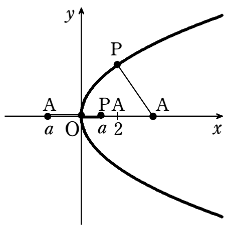
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$a>0$，$b>0$，$h>0$ であるから　$h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a \leqq 2$ のとき最小値 $|a|$，$a>2$ のとき最小値 $2\sqrt{a-1}$

(2)　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$



(2)　P は放物線 $y^2=4x$ 上の点であるから，$\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると　$t^2=4s$

ゆえに　$\mathrm{AP}^2=(s-a)^2+t^2=(s-a)^2+4s$

$=s^2-2(a-2)s+a^2$

$=\{s-(a-2)\}^2+4a-4$

$s=\dfrac{t^2}{4} \geqq 0$ であるから

[1]　$a-2 \leqq 0$ すなわち $a \leqq 2$ のとき

AP^2 は $s=0$ のとき最小で，最小値は　a^2

[2]　$0<a-2$ すなわち $a>2$ のとき

AP^2 は $s=a-2$ のとき最小で，最小値は　$4a-4$

$a>2$ から　$4a-4>0$

$\mathrm{AP} \geqq 0$ であるから，AP^2 が最小のとき，AP も最小となる。

以上から　$a \leqq 2$ のとき　最小値 $|a|$

$a>2$ のとき　最小値 $2\sqrt{a-1}$

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は楕円 C 上にあるから

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1 \quad \text{すなわち} \quad y^2=6-\frac{3}{5}x^2$$

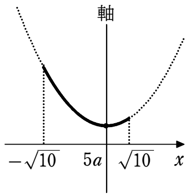
よって　$\mathrm{PA}^2=(x-2a)^2+y^2=(x-2a)^2+6-\dfrac{3}{5}x^2$

$=\dfrac{2}{5}x^2-4ax+4a^2+6$

$=\dfrac{2}{5}(x-5a)^2+6-6a^2$

また，$y^2=\dfrac{3}{5}(10-x^2) \geqq 0$ より　$-\sqrt{10} \leqq x \leqq \sqrt{10}$

$0<5a<\sqrt{10}$ のとき



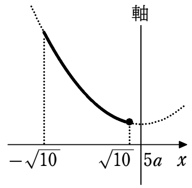
[1]　$0<5a<\sqrt{10}$ すなわち $0<a<\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ のとき

PA^2 は $x=5a$ で最小値 $6-6a^2$ をとる。

よって　$6-6a^2=2^2$

$0<a<\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ を満たす a の値は　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{10} \leqq 5a$ のとき



[2]　$\sqrt{10} \leqq 5a$ すなわち $\dfrac{\sqrt{10}}{5} \leqq a$ のとき

PA^2 は $x=\sqrt{10}$ で最小値 $(2a-\sqrt{10})^2$ をとる。

よって　$(2a-\sqrt{10})^2=2^2$

$\dfrac{\sqrt{10}}{5} \leqq a$ を満たす a の値は　$a=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$

以上から　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{(x+6)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=-1$

双曲線 $x^2-2y^2=-4$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(u,\ v)$ とする。

また，点 $(-3,\ 1)$ に関して P と対称な点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする。

線分 PQ の中点の座標が $(-3,\ 1)$ であるから

$$\frac{u+x}{2}=-3,\quad \frac{v+y}{2}=1$$

ゆえに　$u=-x-6,\ v=-y+2$　……①

P は，双曲線 $x^2-2y^2=-4$ 上にあるから，① より

$$(-x-6)^2-2(-y+2)^2=-4$$

すなわち　$(x+6)^2-2(y-2)^2=-4$

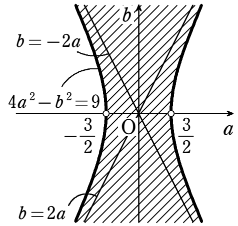
したがって，求める曲線の方程式は

$$\frac{(x+6)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{2}=-1$$

$\boxed{3}$

解答　[図]，境界線は，点 $\left(\pm\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除き，

他はすべて含む



(1)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と直線 $y=ax+b$ が共有点をもつための条件は，$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ と $y=ax+b$ の 2 式から y を消去して得られる x の方程式

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(ax+b)^2}{9}=1$$

すなわち　$(4a^2-9)x^2+8abx+4(b^2+9)=0$　……①

が実数解をもつことである。

[1]　$4a^2-9 \neq 0$ すなわち $a \neq \pm\dfrac{3}{2}$ のとき

2 次方程式 ① の判別式を D とすると　$D \geqq 0$

$\dfrac{D}{4}=(4ab)^2-(4a^2-9)\cdot 4(b^2+9)=36(b^2-4a^2+9)$ であるから，$D \geqq 0$ より

$$b^2-4a^2+9 \geqq 0$$

すなわち　$4a^2-b^2 \leqq 9$

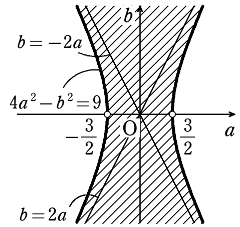
[2]　$4a^2-9=0$ すなわち $a=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき

① は　$\pm 12bx+4(b^2+9)=0$

これが実数解をもつための条件は　$b \neq 0$

[1]，[2] より，求める領域 E は，右の図の斜線部分のようになる。

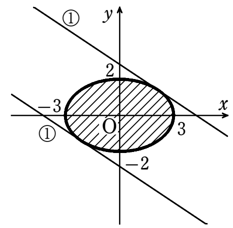
ただし，境界線は，点 $\left(\pm\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を除き，他はすべて含む。



$\boxed{4}$

解答　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $6\sqrt{2}$；

$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-6\sqrt{2}$



不等式 $4x^2+9y^2 \leqq 36$ で表される領域 P は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の周および内部である。

$2x+3y=k$ とおくと　$y=\dfrac{1}{3}(-2x+k)$　……①

直線 ① と領域 P が共有点をもつような k の最大値，最小値が求めるものである。

① を $4x^2+9y^2=36$ に代入して

$$4x^2+(-2x+k)^2=36$$

よって　$8x^2-4kx+k^2-36=0$　……②

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-8(k^2-36)=-4(k^2-72)$

$\dfrac{D}{4} \geqq 0$ とすると　$k^2-72 \leqq 0$　　ゆえに　$-6\sqrt{2} \leqq k \leqq 6\sqrt{2}$

$k=6\sqrt{2}$ のとき，② の重解は　$x=-\dfrac{-4k}{2\cdot 8}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$y=\dfrac{1}{3}(-3\sqrt{2}+6\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$k=-6\sqrt{2}$ のとき，② の重解は　$x=-\dfrac{-4k}{2\cdot 8}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，① から　$y=\dfrac{1}{3}(3\sqrt{2}-6\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

したがって　$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $6\sqrt{2}$；

$x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $-6\sqrt{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\dfrac{ax}{4}+by=1$　　(2)　$\pm\dfrac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$　　(3)　$t=\sqrt{13}$，面積は $\dfrac{13}{\sqrt{3}}$

(1)　$\dfrac{ax}{4}+by=1$ ……①

(2)　接線 ① が点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ を通るとき　$bt=1$

よって　$b=\dfrac{1}{t}$　……②

また，点 $(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$　……③

②，③ から　$\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{1}{t^2}=1$

ゆえに　$a^2=4\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)=\dfrac{4(t^2-1)}{t^2}$

ここで，$t>1$ であるから　$t^2-1>0$

よって　$a=\pm\dfrac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$　……④

接線 ① と x 軸との交点の x 座標は，① で $y=0$ として　$x=\dfrac{4}{a}$

ゆえに，④ から，求める x 座標は

$\pm\dfrac{4t}{2\sqrt{t^2-1}}$ すなわち $\pm\dfrac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$

(3) $\dfrac{t}{\dfrac{2t}{\sqrt{t^2-1}}}=\tan 60^\circ$ であるから $\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{2}=\sqrt{3}$

両辺を2乗して $\dfrac{t^2-1}{4}=3$ よって $t^2=13$

$t>1$ であるから $t=\sqrt{13}$

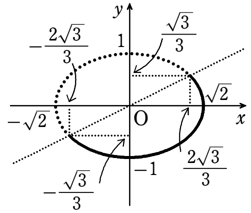
このときの正三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13-1}}\cdot\sqrt{13}=\dfrac{13}{\sqrt{3}}$

6

解答 (1) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$y\leqq\dfrac{x}{2}$，［図］

(2) 接線の方程式は $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}$，

接点の座標は $\left(1,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$



(1) $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta$ ……①，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta$ ……② とする。

①＋② から $x+y=\sqrt{3}\cos\theta$ よって $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y)$ ……③

①－②×2 から $x-2y=\sqrt{6}\sin\theta$ よって $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y)$ ……④

③，④を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると $\dfrac{1}{6}(x-2y)^2+\dfrac{1}{3}(x+y)^2=1$

整理すると $x^2+2y^2=2$

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\sin\theta\geqq 0$ であるから $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y)\geqq 0$

すなわち $y\leqq\dfrac{x}{2}$

ゆえに，C 上の点 $(x,\ y)$ は $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$y\leqq\dfrac{x}{2}$ を満たす。

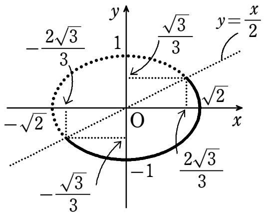
逆に，平面上の点 $(x,\ y)$ が $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$y\leqq\dfrac{x}{2}$ を満たすとすると，上の計算を逆にたどることにより，①，②を満たす $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ が存在する。

よって，点 $(x,\ y)$ は C 上の点である。

以上から，曲線 C を表す x と y の関係式は

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1,\quad y\leqq\frac{x}{2}$$

であり，曲線 C の概形は右の図の実線部分のようになる。



(2) まず，点 $(2,\ 0)$ を通り，楕円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ……⑤ に接する直線を考える。

この直線と楕円⑤の接点を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は $\dfrac{x_1}{2}x+y_1y=1$

これが点 $(2,\ 0)$ を通るから $x_1=1$

また，$(x_1,\ y_1)$ は楕円⑤上にあるから $\dfrac{x_1{}^2}{2}+y_1{}^2=1$

これに $x_1=1$ を代入して整理すると $y_1{}^2=\dfrac{1}{2}$ よって $y_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ここで，点 $\left(1,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は C 上の点であり，点 $\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ は C 上の点でない。

したがって，求める接線の方程式は $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}$

接点の座標は $\left(1,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

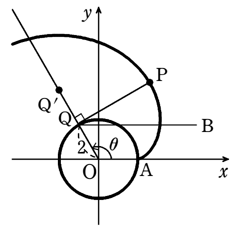
7

解答 略

点Qの座標は $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

右の図において，QBは x 軸に平行な半直線であり，Q′は半直線OQ上の点で $\mathrm{OQ'}>\mathrm{OQ}$ とする。



図から $\angle\mathrm{BQP}=\angle\mathrm{BQQ'}-\angle\mathrm{PQQ'}=\theta-\dfrac{\pi}{2}$

また，$\mathrm{PQ}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=2\theta$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(2\theta\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ 2\theta\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$=(2\theta\sin\theta,\ -2\theta\cos\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから，Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=2\cos\theta+2\theta\sin\theta=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$

$y=2\sin\theta-2\theta\cos\theta=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$

よって，Pが描く曲線の媒介変数表示は

$x=2(\cos\theta+\theta\sin\theta)$，$y=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

8

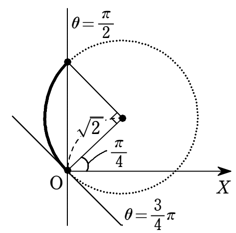
解答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の両辺を r 倍して

$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

ゆえに $x^2+y^2=2x+2y$

すなわち $(x-1)^2+(y-1)^2=2$



$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より，曲線は右の図の太い実線部分のようになるから，求める曲線の長さは $\sqrt{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

別解 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ から $r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ は

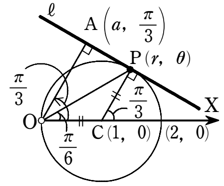
中心が $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，半径 $\sqrt{2}$

の円を表す。

以下同様。

9

解答 $a=\dfrac{3}{2}$，$\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$



直線 ℓ の極方程式は

$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=a$ ……①

曲線 C は，中心Cの極座標が $(1,\ 0)$，半径が1の円である。ただし，極Oを除く。

このとき，点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

図から $\angle\mathrm{PCO}=\dfrac{2}{3}\pi$

△PCOは，二等辺三角形であるから $\angle\mathrm{COP}=\dfrac{\pi}{6}$

$r=2\cos\theta$ に $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ を代入して $r=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって，点Pの極座標は $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

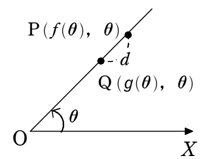
Pは直線 ℓ 上の点であるから，①より

$a=\sqrt{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$

10

解答 (1) $\theta=\pi$ のとき最大値3，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値0

(2) $\left(\dfrac{3}{16},\ \pm\dfrac{3\sqrt{15}}{16}\right)$



(1) 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ \theta)$ と点 $\mathrm{Q}(g(\theta),\ \theta)$ の間の距離を d とすると

$d=|f(\theta)-g(\theta)|=|3\cos\theta-(1+\cos\theta)|=|2\cos\theta-1|$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから，d は

$\cos\theta=-1$ すなわち $\theta=\pi$ のとき最大値3，

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最小値0

をとる。

(2) 線分PQの中点が原点Oとなるための条件は $f(\theta)+g(\theta)=0$ かつ $f(\theta)\neq 0$

すなわち $3\cos\theta+(1+\cos\theta)=0$ かつ $3\cos\theta\neq 0$

よって $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

このとき $f(\theta)=3\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

点Pの直交座標は $(f(\theta)\cos\theta,\ f(\theta)\sin\theta)$ で表されるから $\left(\dfrac{3}{16},\ \pm\dfrac{3\sqrt{15}}{16}\right)$

1

解答　(1)　$\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2=2k^2+32$，$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=34-k^2$

(2)　$k=\sqrt{22}$，$\left(\dfrac{5\sqrt{13}}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(1)　点Pの座標を $(x,\ y)$ $(x>0,\ y>0)$ とする。

$\mathrm{OP}=k$ より $\mathrm{OP}^2=k^2$ であるから　$x^2+y^2=k^2$　…… ①

よって　$\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2=(x-4)^2+y^2+(x+4)^2+y^2$

$=2(x^2+y^2)+32=2k^2+32$

また，楕円の方程式から　$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2\cdot5=10$

ゆえに　$\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=\dfrac{1}{2}\{(\mathrm{PF}+\mathrm{PF}')^2-(\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{10^2-(2k^2+32)\}=34-k^2$

(2)　△PFF′ において，余弦定理から

$$\mathrm{FF}'^2=\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2-2\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'\cos\frac{\pi}{3}$$

よって　$64=2k^2+32-2(34-k^2)\cdot\dfrac{1}{2}$

したがって　$k^2=22$　　$k>0$ から　$k=\sqrt{22}$

このとき，① は　$x^2+y^2=22$　…… ②

また，楕円の方程式から　$9x^2+25y^2=25\times9$　…… ③

②，③ から　$x^2=\dfrac{325}{16}$，$y^2=\dfrac{27}{16}$

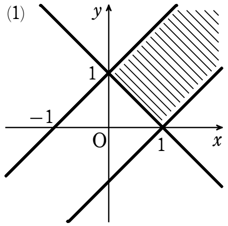
$x>0$，$y>0$ であるから　$x=\dfrac{5\sqrt{13}}{4}$，$y=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

よって，点Pの座標は　$\left(\dfrac{5\sqrt{13}}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

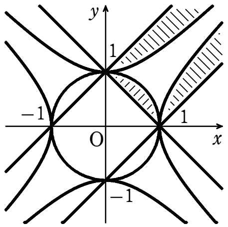
2

解答　(1)　［図］　境界線は含まない。　　(2)　［図］　境界線は含まない。

(1)



(2)



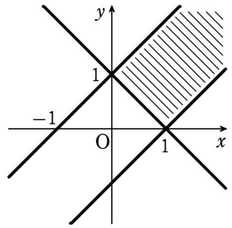
(1)　3辺の長さが 1，x，y であるような三角形が存在するための条件は

$$1<x+y\ \text{かつ}\ x<1+y\ \text{かつ}\ y<1+x$$

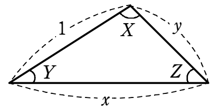
すなわち　$y>-x+1$ かつ $y>x-1$ かつ $y<x+1$

よって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は含まない。



(2)　右の図の三角形において，余弦定理により



$\cos X=\dfrac{y^2+1-x^2}{2y}$，$\cos Y=\dfrac{x^2+1-y^2}{2x}$，

$\cos Z=\dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}$

この三角形が鈍角三角形であるとき

$\cos X<0$ または $\cos Y<0$ または $\cos Z<0$

よって　$\dfrac{y^2+1-x^2}{2y}<0$ または $\dfrac{x^2+1-y^2}{2x}<0$ または $\dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}<0$

x，y は辺の長さであるから　$x>0$，$y>0$

ゆえに　$x^2-y^2>1$ または $x^2-y^2<-1$ または $x^2+y^2<1$

よって，3辺の長さが 1，x，y であるような鈍角三角形が存在するための条件は

「$y>-x+1$ かつ $y>x-1$ かつ $y<x+1$」

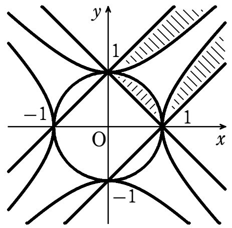
かつ

「$x^2-y^2>1$ または $x^2-y^2<-1$

または $x^2+y^2<1$」

よって，求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は含まない。

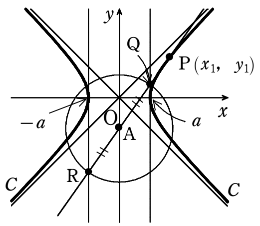


3

解答　略

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1\quad\cdots\cdots ①$$



また，$x_1>a$ であるから　$y_1\fallingdotseq0$

① に $x=a$ を代入すると

$$\frac{x_1}{a}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$y_1\fallingdotseq0$ であるから

$$y=\frac{b^2x_1}{ay_1}-\frac{b^2}{y_1}$$

① に $x=-a$ を代入すると　$-\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

$y_1\fallingdotseq0$ であるから　$y=-\dfrac{b^2x_1}{ay_1}-\dfrac{b^2}{y_1}$

よって　$\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{b^2x_1}{ay_1}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)$，$\mathrm{R}\left(-a,\ -\dfrac{b^2x_1}{ay_1}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)$

$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{b^2x_1}{ay_1}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)+\left(-\dfrac{b^2x_1}{ay_1}-\dfrac{b^2}{y_1}\right)\right\}=-\dfrac{b^2}{y_1}$ であるから，線分QRの中点をAとすると　$\mathrm{A}\left(0,\ -\dfrac{b^2}{y_1}\right)$

また　$\mathrm{AQ}^2=a^2+\dfrac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}$

ゆえに，線分QRを直径とする円の方程式は

$$x^2+\left(y+\frac{b^2}{y_1}\right)^2=a^2+\frac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}\quad\cdots\cdots ②$$

双曲線 C の2つの焦点は

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

② の左辺に $x=\sqrt{a^2+b^2}$，$y=0$ を代入すると　$a^2+b^2+\dfrac{b^4}{y_1^2}$

ここで，点Pは双曲線 C 上の点であるから　$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$

よって　$a^2+b^2+\dfrac{b^4}{y_1^2}=a^2+\dfrac{b^4}{y_1^2}\left(\dfrac{y_1^2}{b^2}+1\right)=a^2+\dfrac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}$

したがって，点 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ は円 ② 上にある。

また，円 ② は y 軸に関して対称であるから，点 $(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ も円 ② 上にある。

4

解答　(1)　$X=\dfrac{s+t}{2}$，$Y=st$　　(2)　$2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ $\left(y<-\dfrac{1}{4}\right)$

(1)　$y=x^2$ から　$y'=2x$

放物線 $y=x^2$ 上の異なる2点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線の方程式は，それぞれ

$y=2tx-t^2$　…… ①，　$y=2sx-s^2$　…… ②

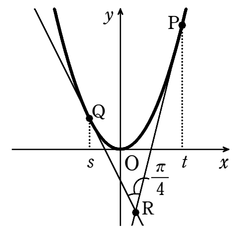
①，② から y を消去すると　$2tx-t^2=2sx-s^2$

よって　$2(t-s)x=(t-s)(t+s)$

$t-s\fallingdotseq0$ から　$x=\dfrac{s+t}{2}$　　このとき，① から　$y=st$

ゆえに　$X=\dfrac{s+t}{2}$，$Y=st$

(2)　直線PR，QR と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると



$\tan\alpha=2t$，$\tan\beta=2s$

$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$\tan(\beta-\alpha)=1$

ここで

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{2s-2t}{1+2s\cdot2t}$$

よって，$\dfrac{2s-2t}{1+4st}=1$ から　$2(s-t)=1+4st$　…… ③

$s<t$ であるから　$1+4st<0$　…… ④

③，④ と (1) で求めた式から，s，t を消去する。

③ から　$\{2(s-t)\}^2=(1+4st)^2$

左辺を変形すると　$4(s+t)^2-16st=(1+4st)^2$

(1) より，$s+t=2X$，$st=Y$ であるから　$4(2X)^2-16Y=(1+4Y)^2$

整理して　$2X^2-2\left(Y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$

また，④ と $st=Y$ から　　$Y<-\frac{1}{4}$

したがって，点 R は双曲線　$2x^2-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=-1\ \left(y<-\frac{1}{4}\right)$　上を動く。

$\boxed{5}$

解答　$y=2\sqrt{5}\,x-5$，$y=-2\sqrt{5}\,x-5$

$y=x^2$ ……①，$x^2+\frac{y^2}{5}=1$ ……② とする。

放物線 ① と楕円 ② の共通接線は x 軸に垂直でないから，その方程式は

$y=mx+n$　……③

と表される。

①，③ から y を消去して　　$x^2=mx+n$

ゆえに　　$x^2-mx-n=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(-n)=m^2+4n$

直線 ③ が放物線 ① と接するとき，$D=0$ から

$m^2+4n=0$　……④

また，②，③ から y を消去して

$$x^2+\frac{(mx+n)^2}{5}=1$$

よって　　$5x^2+m^2x^2+2mnx+n^2-5=0$

ゆえに　　$(m^2+5)x^2+2mnx+n^2-5=0$

この 2 次方程式の判別式を D' とすると

$$\frac{D'}{4}=m^2n^2-(m^2+5)(n^2-5)=5(m^2-n^2+5)$$

直線 ③ が楕円 ② と接するとき，$D'=0$ から

$m^2-n^2+5=0$　……⑤

④，⑤ から m を消去して　　$n^2+4n-5=0$

よって　　$(n-1)(n+5)=0$　　　　ゆえに　　$n=1,\ -5$

④ より，$n\leqq0$ であるから　　$n=-5$

よって，④ から　　$m^2=-4\cdot(-5)=20$　　　　ゆえに　　$m=\pm2\sqrt{5}$

したがって，求める共通接線の方程式は　　$y=2\sqrt{5}\,x-5$，$y=-2\sqrt{5}\,x-5$

別解　$y=x^2$ ……①，$x^2+\frac{y^2}{5}=1$ ……② とする。

楕円 ② 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$x_1x+\frac{y_1y}{5}=1$　……③

① と ③ から y を消去して

$y_1x^2+5x_1x-5=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(5x_1)^2-4\cdot y_1\cdot(-5)=5(5{x_1}^2+4y_1)$

直線 ③ が放物線 ① と接するとき，$D=0$ から

$5{x_1}^2+4y_1=0$　……④

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は楕円 ② 上の点であるから

${x_1}^2+\frac{{y_1}^2}{5}=1$　……⑤

④，⑤ から x_1 を消去して

${y_1}^2-4y_1-5=0$

よって　　$(y_1+1)(y_1-5)=0$

ゆえに　　$y_1=-1,\ 5$

④ より，$y_1\leqq0$ であるから　　$y_1=-1$

よって，④ から　　${x_1}^2=\frac{4}{5}$

ゆえに　　$x_1=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$y_1=-1$ を ③ に代入して

$\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{5}y=1$　すなわち　$y=2\sqrt{5}\,x-5$

$x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，$y_1=-1$ を ③ に代入して

$-\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{5}y=1$　すなわち　$y=-2\sqrt{5}\,x-5$

したがって，求める共通接線の方程式は

$y=2\sqrt{5}\,x-5$，$y=-2\sqrt{5}\,x-5$

$\boxed{6}$

解答　円 $x^2+y^2=25$

[1]　$a=\pm\sqrt{17}$ のとき　　$b=\pm2\sqrt{2}$（複号任意）

[2]　$a\neq\pm\sqrt{17}$ のとき

点 P を通る傾き m の直線の方程式は　　$y=m(x-a)+b$

これを楕円の方程式に代入して y を消去すると　　$\frac{x^2}{17}+\frac{\{mx+(b-ma)\}^2}{8}=1$

整理すると　　$(17m^2+8)x^2+34m(b-ma)x+17\{(b-ma)^2-8\}=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=17^2m^2(b-ma)^2-17(17m^2+8)\{(b-ma)^2-8\}$$

$$=17\cdot8\{-(b-ma)^2+17m^2+8\}$$

$$=17\cdot8\{(17-a^2)m^2+2abm+8-b^2\}$$

$D=0$ から　　$(17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0$　……①

m の 2 次方程式 ① の 2 つの解を α，β とすると　　$\alpha\beta=-1$

解と係数の関係から　　$\frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$

ゆえに　　$8-b^2=-(17-a^2)$

よって　　$a^2+b^2=25$　……②

② は，$a=\pm\sqrt{17}$，$b=\pm2\sqrt{2}$ のときも成り立つ。

以上から，求める軌跡は　　円 $x^2+y^2=25$

$\boxed{7}$

解答　$\mathrm{P}\left(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最大値 $\frac{12}{\sqrt{13}}$，$\mathrm{P}\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最小値 $\frac{4}{\sqrt{13}}$

楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 P は，$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

点 P から直線 $x-2\sqrt{3}\,y+8=0$ に下ろした垂線の長さを l とすると

$$l=\frac{|2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta+8|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{3})^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}\left\{2-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

ゆえに，$\theta=\frac{5}{3}\pi$ のとき，l は最大となり，l の最大値は　$\frac{12}{\sqrt{13}}$

このとき，P の座標は　$\left(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

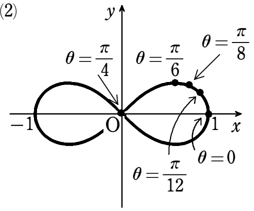
$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき，l は最小となり，l の最小値は　$\frac{4}{\sqrt{13}}$

このとき，P の座標は　$\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{8}$

解答　(1)　略　　(2)　$r^2=\cos2\theta$，[図]

(2)



(1)　$f(x,\ y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ とすると，与えられた曲線の方程式は

$f(x,\ y)=0$　……①

$f(x,\ -y)=f(-x,\ y)=f(-x,\ -y)=f(x,\ y)$ であるから曲線 ① は，x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称である。

(2)　与式に　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$x^2+y^2=r^2$ を代入すると

$(r^2)^2=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$　　　よって　　$r^2=\cos2\theta$（$r=0$ も含む）

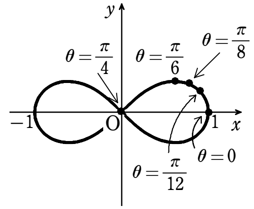
曲線の対称性から，$r\geqq0$，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ とする。

また，$r^2\geqq0$ から　　$\cos2\theta\geqq0$

ゆえに，曲線の存在範囲は　　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r^2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

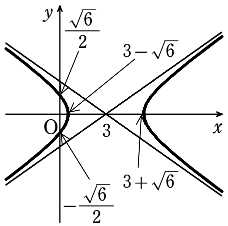
これらをもとにして，第 1 象限における曲線 ① をかき，それと x 軸，y 軸，原点に関して対称な曲線もかき加えると，曲線の概形は右の図のようになる。



9

解答 (1) $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$，[図]

(2) $a=1$，$k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



(1) 極方程式を変形して $2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$

$r\cos\theta=x$ であるから $2r+\sqrt{6}\,x=\sqrt{6}$

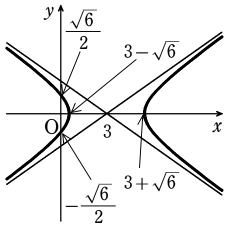
すなわち $2r=\sqrt{6}(1-x)$ 両辺を 2 乗して $4r^2=6(1-x)^2$

$r^2=x^2+y^2$ であるから $4(x^2+y^2)=6(1-2x+x^2)$

整理すると $x^2-6x-2y^2=-3$ ……①

したがって $\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$

曲線の概形は右の図のようになる。



(2) $k\mathrm{PH}=\mathrm{OP}$ から $k^2\mathrm{PH}^2=\mathrm{OP}^2$

$\mathrm{PH}^2=(x-a)^2$，$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$ を代入して

$k^2(x-a)^2=x^2+y^2$ ……②

① から $y^2=\dfrac{1}{2}(x^2-6x+3)$

② に代入して $k^2(x^2-2ax+a^2)=\dfrac{3}{2}x^2-3x+\dfrac{3}{2}$

P$(x,\ y)$ が (1) の曲線上を動くとき，k が一定となるから，この等式は x の恒等式である。

よって $k^2=\dfrac{3}{2}$，$2ak^2=3$，$k^2a^2=\dfrac{3}{2}$

$k>0$ であるから $k=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ゆえに $a=1$

10

解答 (1) 略 (2) 略

(1) 楕円の直交座標による方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とする。

$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，P，Q の極座標は P$(r_1,\ \theta)$，Q$\left(r_2,\ \theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される。

ただし，$r_1>0$，$r_2>0$ とする。

よって，P，Q の直交座標は

$$\mathrm{P}(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta),\ \mathrm{Q}\left(r_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ r_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

ゆえに Q$(-r_2\sin\theta,\ r_2\cos\theta)$

点 P は楕円上にあるから $\dfrac{r_1{}^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{r_1{}^2\sin^2\theta}{b^2}=1$

よって $r_1{}^2\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1$

点 Q は楕円上にあるから $\dfrac{r_2{}^2\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{r_2{}^2\cos^2\theta}{b^2}=1$

ゆえに $r_2{}^2\left(\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}\right)=1$

よって
$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}=\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}$$
$$=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)$$
$$=\frac{1}{a^2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\frac{1}{b^2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ (一定)$$

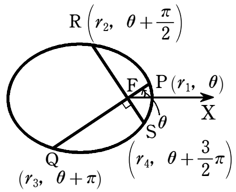
(2) $r(1+e\cos\theta)=l$ $(0<e<1,\ l>0)$ ……① とする。

PQ⊥RS であるから

P$(r_1,\ \theta)$，R$\left(r_2,\ \theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

Q$(r_3,\ \theta+\pi)$，S$\left(r_4,\ \theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

と表される。ただし，$r_1>0$，$r_2>0$，$r_3>0$，$r_4>0$ とする。



2 点 P，Q は楕円 ① 上にあるから

$$\mathrm{PF}=r_1=\frac{l}{1+e\cos\theta},\ \mathrm{QF}=r_3=\frac{l}{1+e\cos(\theta+\pi)}$$

ここで $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$

ゆえに $\dfrac{1}{\mathrm{PF}}=\dfrac{1+e\cos\theta}{l}$，$\dfrac{1}{\mathrm{QF}}=\dfrac{1-e\cos\theta}{l}$

よって $\dfrac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}=\dfrac{1}{\mathrm{PF}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{QF}}=\dfrac{1-e^2\cos^2\theta}{l^2}$ ……②

2 点 R，S は楕円 ① 上にあるから

$$\mathrm{RF}=r_2=\frac{l}{1+e\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\mathrm{SF}=r_4=\frac{l}{1+e\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}$$

ここで $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$，$\cos\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sin\theta$

よって $\dfrac{1}{\mathrm{RF}}=\dfrac{1-e\sin\theta}{l}$，$\dfrac{1}{\mathrm{SF}}=\dfrac{1+e\sin\theta}{l}$

ゆえに $\dfrac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}=\dfrac{1}{\mathrm{RF}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{SF}}=\dfrac{1-e^2\sin^2\theta}{l^2}$ ……③

②，③ から

$$\frac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\frac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}=\frac{2-e^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{l^2}=\frac{2-e^2}{l^2}\ (一定)$$

章末問題C

1

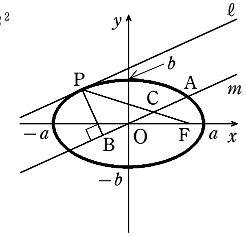
解答 (1) 略 (2) 略

(1) P$(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha<0,\ \beta>0)$ とおくと，接線 ℓ の方程式は $\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}=1$

ゆえに，直線 m の方程式は $\dfrac{\alpha x}{a^2}+\dfrac{\beta y}{b^2}=0$ すなわち $y=-\dfrac{b^2\alpha}{a^2\beta}x$

これを楕円の方程式に代入して $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\left(-\dfrac{b^2\alpha}{a^2\beta}\right)^2x^2=1$

よって $x^2=\dfrac{a^4\beta^2}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}=\dfrac{a^4\beta^2}{a^2b^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}\right)}=\dfrac{a^2}{b^2}\beta^2$



$a>0$，$b>0$，$\beta>0$，$x>0$ から

$x=\dfrac{a}{b}\beta$，$y=-\dfrac{b^2\alpha}{a^2\beta}\cdot\dfrac{a}{b}\beta=-\dfrac{b}{a}\alpha$

よって A$\left(\dfrac{a}{b}\beta,\ -\dfrac{b}{a}\alpha\right)$ であるから

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\beta^2+\frac{b^2}{a^2}\alpha^2}=ab\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}}$$

また，PB の長さは原点 O と直線 ℓ との距離に等しいから

$$\mathrm{PB}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{a^4}+\dfrac{\beta^2}{b^4}}}$$

したがって $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{PB}=ab$

(2) △OPA，△OFA の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，(1) から

$S_1=\dfrac{1}{2}ab$ ……①

また，F$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ であるから

$S_2=-\dfrac{b}{2a}\alpha\sqrt{a^2-b^2}$ ……②

ここで，$S_1:S_2=\mathrm{PC}:\mathrm{CF}$ であるから

$\dfrac{S_1}{S_1+S_2}=\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PC}+\mathrm{CF}}=\dfrac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PF}}$ ……③

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(\alpha-\sqrt{a^2-b^2})^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha^2-2\alpha\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+b^2\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)}$$
$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^4-2a^2\alpha\sqrt{a^2-b^2}+\alpha^2(a^2-b^2)}=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-\alpha\sqrt{a^2-b^2})^2}$$

$\alpha<0$ であるから $\mathrm{PF}=\dfrac{1}{a}(a^2-\alpha\sqrt{a^2-b^2})$ ……④

①，② から $\dfrac{S_1}{S_1+S_2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}ab}{\dfrac{1}{2}ab-\dfrac{b}{2a}\alpha\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{a^2}{a^2-\alpha\sqrt{a^2-b^2}}$

これと ③，④ から $\mathrm{PC}=\dfrac{S_1}{S_1+S_2}\mathrm{PF}=a$

2

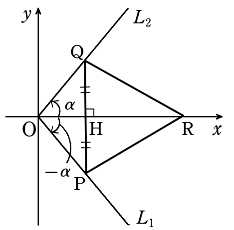
解答 (1) R$\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ (2) 略

(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，その交点を H とすると，H は線分 PQ の中点である。

よって　$\mathrm{OH}=\dfrac{\mathrm{QH}}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$

また，点 R は x 軸上にあり，$\mathrm{RH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，点 R の座標は

$$\left(\frac{1}{2\tan\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$



(2)　$\mathrm{OP}=s$，$\mathrm{OQ}=t$ とすると

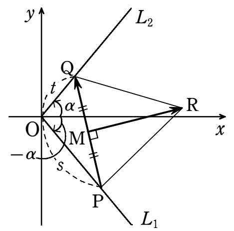
$\mathrm{P}(s\cos\alpha,\ -s\sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=((t-s)\cos\alpha,\ (t+s)\sin\alpha)$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\mathrm{PQ}=1$

線分 PQ の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\frac{t+s}{2}\cos\alpha,\ \frac{t-s}{2}\sin\alpha\right)$$



$\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に垂直で大きさ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，x 成分が正のベクトルである。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と垂直で x 成分が正の単位ベクトルは $((t+s)\sin\alpha,\ -(t-s)\cos\alpha)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$
$$=\left(\frac{t+s}{2}\cos\alpha,\ \frac{t-s}{2}\sin\alpha\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}((t+s)\sin\alpha,\ -(t-s)\cos\alpha)$$
$$=\left(\frac{t+s}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha),\ \frac{t-s}{2}(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\right)$$

$\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{2}=A$，$\dfrac{\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}{2}=B$ とおき，R の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=A(t+s)$，$y=B(t-s)$

よって　$t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}\right)$，$s=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{A}-\dfrac{y}{B}\right)$　……①

一方，△OPQ に余弦定理を適用すると　$t^2+s^2-2ts\cos2\alpha=1$

これに ① を代入して整理すると　$\dfrac{1-\cos2\alpha}{2A^2}x^2+\dfrac{1+\cos2\alpha}{2B^2}y^2=1$

$\dfrac{1-\cos2\alpha}{2A^2}>0$，$\dfrac{1+\cos2\alpha}{2B^2}>0$ であるから，点 R の軌跡は楕円の一部である。

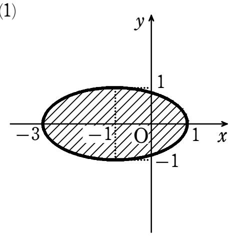
3

解答　(1)　[図] の斜線部分。ただし，境界線を含む。

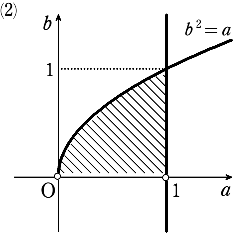
(2)　$0<a\leqq1$，$b>0$，$b^2\leqq a$

領域は [図] の斜線部分。ただし，境界線のうち a 軸を除く。

(1)



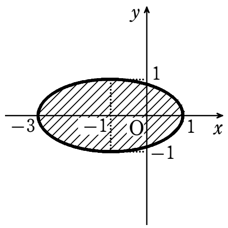
(2)



(1)　$a=2$，$b=1$ のとき，領域 D を表す不等式は

$$\frac{(x+1)^2}{4}+y^2\leqq1$$

よって，D は楕円 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$ およびその内部で，右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。



(2)　$\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　……①，

$x^2+y^2=1$　……②

とする。

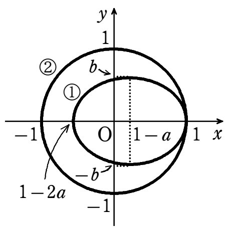
楕円 ① の頂点のうち，x 軸上にあるものは

$(1-2a,\ 0)$，$(1,\ 0)$

D が E に含まれるとき

$1-2a\geqq-1$

よって　$0<a\leqq1$　……③



① から　$y^2=b^2\left\{1-\dfrac{(x-1+a)^2}{a^2}\right\}$

② から　$y^2=1-x^2$

したがって，D が E に含まれるための条件は，

$1-2a\leqq x\leqq1$ ……④ (ただし，$0<a\leqq1$) を満たすすべての x について

$$b^2\left\{1-\frac{(x-1+a)^2}{a^2}\right\}\leqq1-x^2\quad\cdots\cdots⑤$$

が成り立つことである。

$\dfrac{x-1+a}{a}=t$ とおくと　$x=at-a+1$

④ から　$-1\leqq t\leqq1$

⑤ から　$(at-a+1)^2+b^2(1-t^2)-1\leqq0$

変形して　$a^2(t-1)^2+2a(t-1)+b^2(1-t^2)\leqq0$

$(t-1)\{(a^2-b^2)t-(a^2-2a+b^2)\}\leqq0$

$-1\leqq t\leqq1$ で $t-1\leqq0$ であるから，$-1\leqq t\leqq1$ において $(a^2-b^2)t-(a^2-2a+b^2)\geqq0$ が成り立てばよい。そのための条件は，

$a=b$ のとき　$-(a^2-2a+b^2)\geqq0$　　よって　$0<a\leqq1$

$a\neq b$ のとき

$(a^2-b^2)-(a^2-2a+b^2)\geqq0$

かつ　$-(a^2-b^2)-(a^2-2a+b^2)\geqq0$

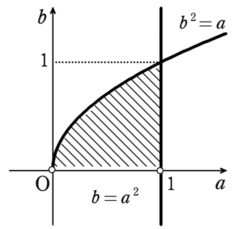
よって　$b^2\leqq a$ かつ $0<a\leqq1$

まとめると

$0<a\leqq1$，$b>0$，$b^2\leqq a$

これは ③ を満たす。

よって，求める領域は右の図の斜線部分。ただし，境界線のうち a 軸を除く。



4

解答　双曲線 $2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ の $y<-\dfrac{1}{4}$ の部分

点 P の座標を $(X,\ Y)$ とおき，2つの接点 A，B を $\mathrm{A}(s,\ s^2)$，$\mathrm{B}(t,\ t^2)$ (ただし $s<t$) とする。

$y=x^2$ から　$y'=2x$

点 A，B における接線の方程式はそれぞれ

$y=2sx-s^2$ ……①，$y=2tx-t^2$ ……②

点 P は，直線 ①，② の交点である。

①，② から y を消去すると　$2sx-s^2=2tx-t^2$

よって　$2(t-s)x=(t-s)(t+s)$

$t-s\neq0$ から　$x=\dfrac{s+t}{2}$　　① から　$y=st$

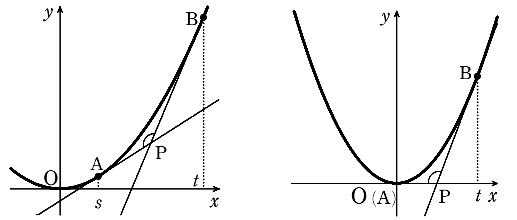
ゆえに　$X=\dfrac{s+t}{2}$，$Y=st$

したがって，s，t は 2 次方程式 $c^2-2Xc+Y=0$ の異なる 2 つの実数解であるから，判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-X)^2-1\cdot Y>0$

ゆえに，$Y<X^2$ であるから，点 P は放物線 $y=x^2$ よりも下側にある。

ここで，$0<s<t$ とすると，①，② の傾きはともに正となり　$\angle\mathrm{APB}>\dfrac{\pi}{2}$

また，$s=0$，$t>0$ とすると，① の傾きは 0，② の傾きは正となり　$\angle\mathrm{APB}>\dfrac{\pi}{2}$



$s<t<0$ のとき，$s<0$，$t=0$ のときもそれぞれ同様に考えて　$\angle\mathrm{APB}>\dfrac{\pi}{2}$

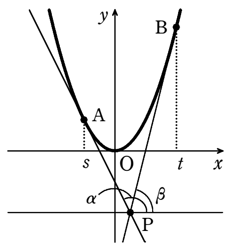
よって，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{4}$ となるためには，$s<0<t$ となることが必要である。

直線 AP，BP と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると，①，② の傾きから $\tan\alpha=2s$，$\tan\beta=2t$

であり　$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

よって　$\angle\mathrm{APB}=\alpha-\beta$

ゆえに，$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$\tan(\alpha-\beta)=1$



ここで　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2s-2t}{1+4st}$

よって，$\dfrac{2s-2t}{1+4st}=1$ から　$2(s-t)=1+4st$　……③

$s<t$ であるから　$1+4st<0$　……④

③ から　$\{2(s-t)\}^2=(1+4st)^2$　　すなわち　$4(s+t)^2-16st=(1+4st)^2$

$s+t=2X$，$st=Y$ を代入すると　$4(2X)^2-16Y=(1+4Y)^2$

整理して　$2X^2-2\left(Y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$

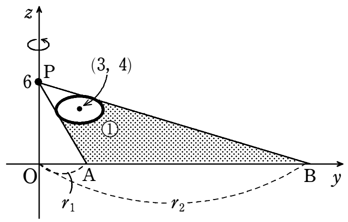
また，④ と $st=Y$ から　$Y<-\dfrac{1}{4}$

ゆえに，点 P の軌跡は　双曲線 $2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ の $y<-\dfrac{1}{4}$ の部分

5

解答　$288\sqrt{2}\pi$

$(y-3)^2+3(z-4)^2=3$ ……① とする。
yz 平面上で，点Pを通る楕円①の2つの接線と y 軸との交点をA，Bとし，$\mathrm{OA}=r_1$，$\mathrm{OB}=r_2$ $(r_1<r_2)$ とする。
立体 T が xy 平面上に作る影は，原点Oを中心とする半径 r_1 と r_2 の2つの円で囲まれる部分である。



r_1 と r_2 は，yz 平面上で楕円①と直線 $\dfrac{y}{r}+\dfrac{z}{6}=1$ ……② が接するときの r の値である。

②から　$z=6-\dfrac{6}{r}y$

これを①に代入して整理すると

$$(r^2+108)y^2-6(r^2+12r)y+18r^2=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=9(r^2+12r)^2-(r^2+108)\cdot 18r^2$$

$$=9r^2\{(r+12)^2-2(r^2+108)\}=-9r^2(r^2-24r+72)$$

楕円①と直線②が接するとき，$D=0$ であるから

$$-9r^2(r^2-24r+72)=0$$

$r>0$ であるから　$r^2-24r+72=0$

これを解くと　$r=12\pm 6\sqrt{2}=6(2\pm\sqrt{2})$

$r_1<r_2$ から　$r_1=6(2-\sqrt{2})$，$r_2=6(2+\sqrt{2})$

したがって，求める影の面積は

$$\pi r_2{}^2-\pi r_1{}^2=\pi(r_2+r_1)(r_2-r_1)=\pi\times 6\cdot 4\times 6\cdot 2\sqrt{2}=288\sqrt{2}\pi$$

6

解答　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$

(2)　双曲線 $\dfrac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ の $x\geqq 2\cos\alpha$ の部分

(1)　$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{R(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

よって　$w+\dfrac{1}{w}=\left(R+\dfrac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\dfrac{1}{R}\right)\sin\theta$

$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ であるから，実部と虚部を比較して

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$R>1$ であるから　$R+\dfrac{1}{R}\neq 0$，$R-\dfrac{1}{R}\neq 0$

ゆえに　$\cos\theta=\dfrac{x}{R+\dfrac{1}{R}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{R-\dfrac{1}{R}}$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるから，求める軌跡は　楕円 $\dfrac{x^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$

(2)　$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $\left(r>0,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，(1)と同様にして

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$

よって　$r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，$r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$

ゆえに　$r=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)$，$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)$

$r\cdot\dfrac{1}{r}=1$ であるから　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}\right)=1$

整理すると　$\dfrac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$

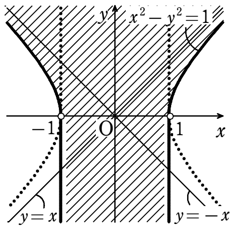
また，$r>0$ であるから　$\dfrac{x}{\cos\alpha}+\dfrac{y}{\sin\alpha}>0$，$\dfrac{x}{\cos\alpha}-\dfrac{y}{\sin\alpha}>0$

このとき　$x\geqq 2\cos\alpha$

したがって，求める軌跡は　双曲線 $\dfrac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ の $x\geqq 2\cos\alpha$ の部分

7

解答　[図]　境界線は，直線 $x=\pm 1$ の $y\leqq 0$ の部分を含まず，他は含む



$y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$ から　$(x^2-1)a^2-ya+\dfrac{1}{4}=0$　……①

求める C の通過する領域は，①を満たす正の実数 a が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体である。

[1]　$x^2-1=0$ すなわち $x=\pm 1$ のとき

①は $ya=\dfrac{1}{4}$ となるから，これを満たす正の実数 a が存在するための条件は　$y>0$

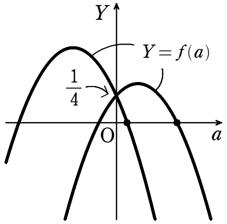
[2]　$x^2-1\neq 0$ のとき

$f(a)=(x^2-1)a^2-ya+\dfrac{1}{4}$ とおく。

①を満たす正の実数 a が存在するための条件は，放物線 $Y=f(a)$ が a 軸の正の部分と共有点をもつことである。

(i)　$x^2-1<0$ すなわち $-1<x<1$ のとき

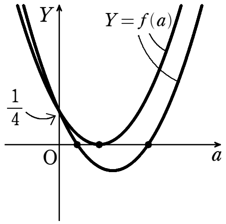
$Y=f(a)$ は上に凸の放物線であり，$f(0)=\dfrac{1}{4}$ であるから，右の図より，a 軸の正の部分と常に共有点をもつ。



よって，$-1<x<1$ のとき
y はすべての実数

(ii)　$x^2-1>0$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$Y=f(a)$ は下に凸の放物線であり，$f(0)=\dfrac{1}{4}$ であるから，右の図より，a 軸の正の部分と共有点をもつための条件は，①の判別式 D について

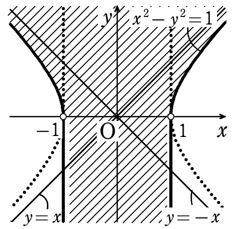


$$D=(-y)^2-4\cdot\frac{1}{4}(x^2-1)=y^2-x^2+1\geqq 0$$

かつ　軸について　$\dfrac{y}{2(x^2-1)}>0$

よって　$x^2-y^2\leqq 1$　かつ　$y>0$

以上から，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は，直線 $x=\pm 1$ の $y\leqq 0$ の部分を含まず，他は含む。



別解　【数Ⅲの微分利用】

x を固定して考える。

$y=(x^2-1)a+\dfrac{1}{4a}$ から

$$\frac{dy}{da}=x^2-1-\frac{1}{4a^2}=\frac{4(x^2-1)a^2-1}{4a^2}$$

[1]　$x^2-1\leqq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{da}<0$

また　$\displaystyle\lim_{a\to+0}y=\infty$，　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}y=\begin{cases}0 & (x^2-1=0\ のとき)\\ -\infty & (x^2-1<0\ のとき)\end{cases}$

よって，a が正の実数全体を動くとき，y のとりうる値の範囲は

$x=\pm 1$ のとき　$y>0$
$-1<x<1$ のとき　すべての実数

[2]　$x^2-1>0$ のとき

$\dfrac{dy}{da}=0$ とすると　$a=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$

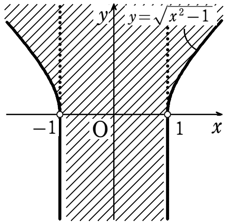
$a>0$ における y の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$	$\cdots$
$\dfrac{dy}{da}$		$-$	0	$+$
y		↘	$\sqrt{x^2-1}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{a\to+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}y=\infty$

よって，a が正の実数全体を動くとき，y のとりうる値の範囲は　$y\geqq\sqrt{x^2-1}$

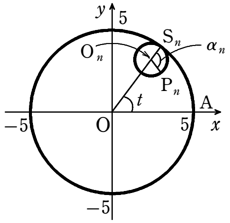
以上から，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は，直線 $x=\pm1$ の $y\leqq0$ の部分を含まず，他は含む。



8

解答　(1)　$\mathrm{P}_n\left(\left(5-n\right)\cos t+n\cos\left(t-\dfrac{5t}{n}\right),\ (5-n)\sin t+n\sin\left(t-\dfrac{5t}{n}\right)\right)$　　(2)　略

(1)　A$(5,\ 0)$，$\angle\mathrm{S}_n\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n=\alpha_n$ とすると，円 C_n が滑ることなく回転するから　$\overset{\frown}{\mathrm{AS}_n}=\overset{\frown}{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n}$



よって　$5t=n\alpha_n$　　ゆえに　$\alpha_n=\dfrac{5t}{n}$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OO}_n}+\overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n}$$
$$=((5-n)\cos t,\ (5-n)\sin t)+(n\cos(t-\alpha_n),\ n\sin(t-\alpha_n))$$
$$=\left((5-n)\cos t+n\cos\left(t-\frac{5t}{n}\right),\ (5-n)\sin t+n\sin\left(t-\frac{5t}{n}\right)\right)$$

したがって　$\mathrm{P}_n\left((5-n)\cos t+n\cos\left(t-\dfrac{5t}{n}\right),\ (5-n)\sin t+n\sin\left(t-\dfrac{5t}{n}\right)\right)$

(2)　円 C_n の中心が円 C の内部を反時計回りに n 周するから，$n=2$ のとき

$$\mathrm{P}_2\left(3\cos t+2\cos\frac{3}{2}t,\ 3\sin t-2\sin\frac{3}{2}t\right),\ 0\leqq t\leqq4\pi$$

$n=3$ のとき　$\mathrm{P}_3\left(2\cos t+3\cos\dfrac{2}{3}t,\ 2\sin t-3\sin\dfrac{2}{3}t\right)$，$0\leqq t\leqq6\pi$

ここで，$n=2$ に対し $t=4\pi-\dfrac{2}{3}u$ とおくと

$$3\cos\left(4\pi-\frac{2}{3}u\right)+2\cos\frac{3}{2}\left(4\pi-\frac{2}{3}u\right)=3\cos\frac{2}{3}u+2\cos u,$$
$$3\sin\left(4\pi-\frac{2}{3}u\right)-2\sin\frac{3}{2}\left(4\pi-\frac{2}{3}u\right)=-3\sin\frac{2}{3}u+2\sin u,$$

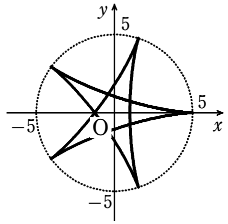
$0\leqq t\leqq4\pi$ のとき $0\leqq u\leqq6\pi$ であるから

$$\mathrm{P}_2\left(2\cos u+3\cos\frac{2}{3}u,\ 2\sin u-3\sin\frac{2}{3}u\right),\ 0\leqq u\leqq6\pi$$

と表せる。

よって，点 P_2 の描く曲線と点 P_3 の描く曲線は一致する。

参考　点 P_2，P_3 の描く曲線は右の図のようになる。

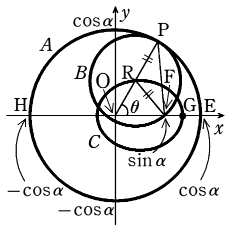


9

解答　(1)　$2\sqrt{x^2+y^2}\cos\alpha-2x\sin\alpha=\cos2\alpha$　　(2)　$r(\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta)=\dfrac{\cos2\alpha}{2}$

(3)　$\sqrt{2}<f(\alpha)\leqq\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

(1)　円 B の中心を R$(x,\ y)$ とすると，
円 B は円 A に内接するから，
R は円 A の半径 OP 上にある。
円 B は点 F を通るから　$\mathrm{RP}=\mathrm{RF}$
ゆえに　$\mathrm{OP}=\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=\mathrm{OR}+\mathrm{RF}$
円 A の半径は $\mathrm{OP}=\cos\alpha$ であるから
$\mathrm{OR}+\mathrm{RF}=\cos\alpha$　……①
ゆえに　$\mathrm{RF}=\cos\alpha-\mathrm{OR}$



よって　$\sqrt{(x-\sin\alpha)^2+y^2}=\cos\alpha-\sqrt{x^2+y^2}$

両辺を 2 乗して整理すると　$2\sqrt{x^2+y^2}\cos\alpha-2x\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

したがって　$2\sqrt{x^2+y^2}\cos\alpha-2x\sin\alpha=\cos2\alpha$　……②

(2)　R$(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とおくと，

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

であるから，② は　$2r\cos\alpha-2r\cos\theta\sin\alpha=\cos2\alpha$

ゆえに　$r(\cos\alpha-\sin\alpha\cos\theta)=\dfrac{\cos2\alpha}{2}$

(3)　① より，軌跡 C は 2 点 O，F を焦点とする楕円であるから，円 A 上の動点 P と楕円 C 上の動点 Q が最も遠くなるのは，点 P が H$(-\cos\alpha,\ 0)$ の位置にあり，かつ，点 Q が楕円 C の長軸の右端 G の位置にあるときである。

② において $y=0$，$x>0$ のとき　$2x(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

ゆえに　$x=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}$

よって　$\mathrm{G}\left(\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2},\ 0\right)$

したがって，PQ の最大値は

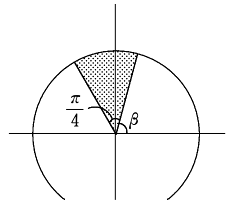
$$f(\alpha)=\mathrm{HG}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}-(-\cos\alpha)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+3\cos\alpha)$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta)\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

ただし　$\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

ここで，$0<\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}<\dfrac{1}{2}$ から，$\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

としてよい。



（角 $\alpha+\beta$ の存在範囲）

このとき，$\dfrac{\pi}{3}<\beta<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{4}+\beta<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ のときに $f(\alpha)$ は最大値 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。

一方，$f(0)=\dfrac{1}{2}(\sin0+3\cos0)=\dfrac{3}{2}$　　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+3\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$ であるから，$f(\alpha)$ のとりうる値の範囲は　$\sqrt{2}<f(\alpha)\leqq\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

10

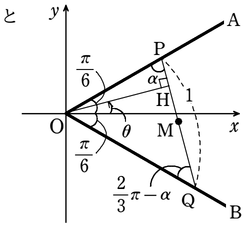
解答　(1)　$0\leqq\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{OP}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$

(2)　$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=1$，$x\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$y\neq-\dfrac{1}{4}$

(3)　$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos2\theta+\dfrac{1}{2}\right)$　$\left(-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1)　$0<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，△OPQ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)}=\frac{\mathrm{OQ}}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$$



よって　$\mathrm{OP}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)$　……①

$\mathrm{OQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$　……②

$\alpha=0$ のとき　$\mathrm{OP}=1$，$\mathrm{OQ}=0$

ゆえに，①，② は $\alpha=0$ のときも成り立つ。

したがって，$0\leqq\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{OP}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$

注意　Q が O に重なってもよいと考えた。P が O に重なる場合は，∠OPQ が定義できないから除いた。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\mathrm{OP}\cos\dfrac{\pi}{6},\ \mathrm{OP}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\mathrm{OQ}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right),\ \mathrm{OQ}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

したがって，(1) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\alpha\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$

$$=\left(\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\sin\alpha\right\},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)-\sin\alpha\right\}\right)$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$$

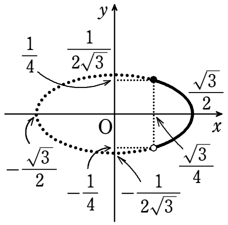
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$$

$0\leqq\alpha<\frac{2}{3}\pi$ から　　$-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}-\alpha\leqq\frac{\pi}{3}$　…… ③

M $(x,\ y)$ とすると　　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，$y=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

よって　　$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{y}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

ゆえに　　$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=1$$



また，③ から　　$\frac{\sqrt{3}}{4}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{4}<y\leqq\frac{1}{4}$

したがって，中点 M の軌跡の方程式は

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=1,\ x\geqq\frac{\sqrt{3}}{4},\ y\fallingdotseq-\frac{1}{4}$$

(3)　H の偏角を θ とすると

$$\theta=(\overrightarrow{\mathrm{QP}}\text{ と }x\text{ 軸の正の向きとのなす角})-\frac{\pi}{2}=\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{\pi}{2}=\alpha-\frac{\pi}{3}$$

③ から $-\frac{\pi}{3}\leqq\alpha-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$ であるが，$\alpha=0$ のとき，O から PQ へ垂線 OH を引けないから　　$\alpha\fallingdotseq0$

したがって　　$-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$

また　　$$\mathrm{OH}=\mathrm{OP}\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-2\alpha\right)-\cos\frac{2}{3}\pi\right\}$$

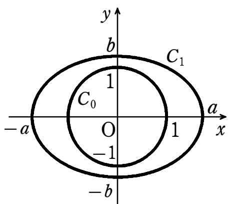
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos(-2\theta)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos2\theta+\frac{1}{2}\right)$$

したがって，H の軌跡の極方程式は

$$r=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos2\theta+\frac{1}{2}\right)\ \left(-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$$

$\boxed{11}$

解答　$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$



楕円 C_1 が，円 C_0 を含むから　$a>1$，$b>1$

ゆえに，x 座標が 1 である楕円 C_1 上の点が存在して，そのうち第 1 象限にある点を P とする。点 P から円 C_0 に引いた接線のうち 1 本は直線 $x=1$ であり，直線 $x=1$ と C_1 の P でない交点を S とする。

平行四辺形 PQRS が，題意を満たすように作れるとき，C_0 が y 軸に関して対称な図形であるから，2 点 Q，R は，直線 $x=-1$ と C_1 との交点である。

C_1 も y 軸に関して対称な図形であるから点 P と点 Q，点 R と点 S も y 軸に関して対称である。

ゆえに，辺 PQ が，C_0 に接するとき，2 点 P，Q は，直線 $y=1$ 上の点である。

よって，P(1，1) であり，点 P は C_1 上の点であるから　$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

逆に，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ が成り立つとする。C_1 上の任意の点 P に対し，C_1 は x 軸，y 軸，原点に関して対称な図形であるから，原点に関して点 P と対称な点を R とすると，R は C_1 上にある。また，線分 PR の垂直二等分線と C_1 の交点を Q，S とすると，Q，S も C_1 上の点であり，原点に関して対称である。ゆえに，四辺形 PQRS は，その対角線 PR，QS が原点で直交し，互いに他を 2 等分するからひし形である。

このとき，$\mathrm{OP}=r_1$，$\mathrm{OQ}=r_2$，x 軸の正の部分と OP のなす角を θ とおくと

P$(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$　…… ①，　Q$\left(r_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ r_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$　…… ②

② から　Q$(-r_2\sin\theta,\ r_2\cos\theta)$　…… ③

P，Q は C_1 上の点であるから，①，③ より

$$r_1^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=1,\ r_2^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)=1$$

ゆえに　$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$　…… ④

一方　$\triangle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\frac{1}{2}r_1r_2$　…… ⑤

また，原点 O と辺 PQ の距離を d $(d>0)$ とおくと　$\triangle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot d$　…… ⑥

更に　$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=r_1^2+r_2^2$

これと ⑤，⑥ から　$r_1^2r_2^2=(r_1^2+r_2^2)d^2$

よって，④ から　$d^2=\dfrac{r_1^2r_2^2}{r_1^2+r_2^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}}=1$

ゆえに　$d=1$　　よって，PQ は C_0 に接する。

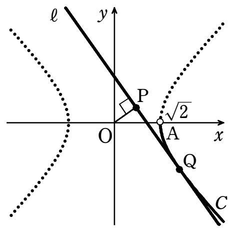
同様に，QR，RS，SP も C_0 に接する。

したがって，求める必要十分条件は　$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

$\boxed{12}$

解答　(1)　略　　(2)　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

(1)　曲線 C 上の点 Q の座標は，媒介変数 t $\left(-\frac{\pi}{2}<t<0\right)$ を用いて，Q$\left(\frac{\sqrt{2}}{\cos t},\ \sqrt{2}\tan t\right)$ と表される。



この点 Q における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos t}x-\sqrt{2}(\tan t)y=2$$

すなわち　　$x-(\sin t)y=\sqrt{2}\cos t$　…… ①

原点 O を通り，接線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$(\sin t)x+y=0$　…… ②

①＋②×$\sin t$ から　　$(1+\sin^2t)x=\sqrt{2}\cos t$　　　よって　　$x=\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2t}$

また，②－①×$\sin t$ から　　$(1+\sin^2t)y=-\sqrt{2}\sin t\cos t$

よって　　$y=-\dfrac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2t}$

ゆえに，点 P を直交座標で表すと　　$\left(\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2t},\ -\dfrac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2t}\right)$

ここで，$-\frac{\pi}{2}<t<0$ であるから　　$x=\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2t}>0$，　$y=-\dfrac{\sqrt{2}\sin t\cos t}{1+\sin^2t}>0$

よって，点 P を点 O を極とする極座標 $(r,\ \theta)$ で表したとき，$r>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ としてよい。

このとき　$r=\mathrm{OP}=\dfrac{|-\sqrt{2}\cos t|}{\sqrt{1+\sin^2t}}=\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{1+\sin^2t}}$，

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2t}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin^2t}}{\sqrt{2}\cos t}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2t}}$$

よって　　$$r^2-2\cos2\theta=r^2-2(2\cos^2\theta-1)=\frac{2\cos^2t}{1+\sin^2t}-2\cdot\left(2\cdot\frac{1}{1+\sin^2t}-1\right)$$

$$=\frac{2(\cos^2t+\sin^2t)-2}{1+\sin^2t}=0$$

また，$-\frac{\pi}{2}<t<0$ より，$0<\sin^2t<1$ であるから　　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2t}}<1$

すなわち　　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，これを解くと　　$0<\theta<\frac{\pi}{4}$

したがって，点 P の軌跡は，点 O を極とする極方程式

$r^2=2\cos2\theta$　$\left(r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$　　　で表される。

(2)　点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，直交座標は $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ である。

△OAP の面積を S とすると　　$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot r\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta$

(1) より，$r^2=2\cos2\theta$ であるから

$$S^2=\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta=\frac{1}{2}\cdot2\cos2\theta\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}=-\frac{1}{2}\left(\cos2\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

また，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$0<\cos2\theta<1$

よって，S^2 は $\cos2\theta=\frac{1}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大となる。

$S>0$ であるから，S も $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき最大となる。

このとき，$r=\sqrt{2\cos2\theta}=1$ であるから　　$x=r\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$y=r\sin\theta=\frac{1}{2}$

したがって，求める点 P の直交座標は　　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

参考　極方程式 $r^2=2\cos2\theta$ で表される曲線は，「レムニスケート」と呼ばれる曲線で，$r>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲が表す部分は，右の図の実線部分である。