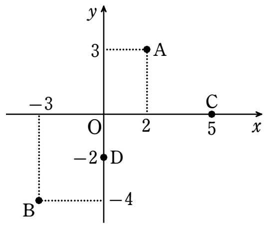
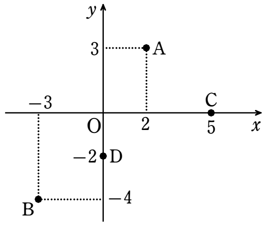
1

解答

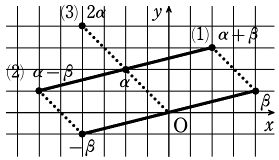


解説

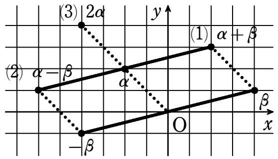


2

解答



解説



3

解答　$a=-\dfrac{4}{3}$

解説

3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

$-1+ai=k(3+4i)$ から　　$-1+ai=3k+4ki$

よって　　$-1=3k$，$a=4k$　　　これを解いて　　$k=-\dfrac{1}{3}$，$a=-\dfrac{4}{3}$

4

解答　略

解説

$z=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ とすると

$$\overline{z}=\overline{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\overline{\beta}}+\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}+\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}$$
$$=\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=z$$

ゆえに，z すなわち $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

$w=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ とすると，$w\neq0$ で

$$\overline{w}=\overline{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}\beta}$$
$$=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=-(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)$$
$$=-w$$

よって，w すなわち $\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ は純虚数である。

5

解答　(1)　$\sqrt{5}$　　(2)　$\sqrt{29}$

解説

(1)　$|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2)　$|\beta-\alpha|=|(5+7i)-(3+2i)|=|2+5i|$

$\qquad=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

6

解答　(1)　9　　(2)　$-\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$z\overline{z}=|z|^2=9$

(2)　$|z-2|^2=16$ より　　$(z-2)(\overline{z-2})=16$

　したがって　　$(z-2)(\overline{z}-2)=16$

　よって　　$z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4=16$

　(1) より，$z\overline{z}=9$ であるから

　　$9-2(z+\overline{z})+4=16$

　したがって　　$-2(z+\overline{z})=3$

　よって　　$z+\overline{z}=-\dfrac{3}{2}$

7

解答　略

解説

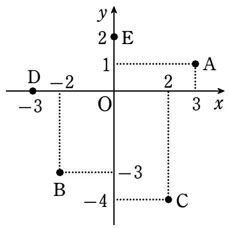
$|\alpha|=1$ のとき，$|\alpha|^2=1$ であるから　　$\alpha\overline{\alpha}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$

よって　　$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=\alpha^2+\overline{\alpha^2}$

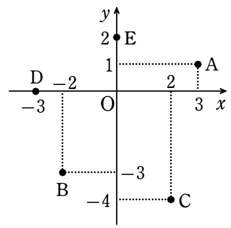
$\alpha^2+\overline{\alpha^2}$ は実数であるから，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

1

解答　［図］

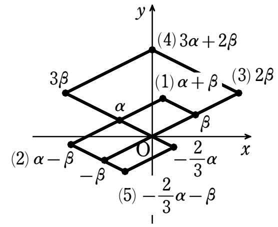


解説



2

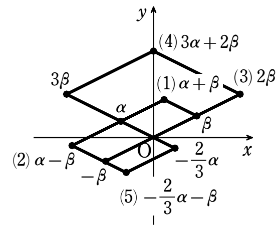
解答　(1) ～ (5)　［図］



解説

右の図で，線分で囲まれた四角形はすべて平行四辺形である。

このとき，(1) から (5) の各点は，右図のようになる。



3

解答　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2}$

解説

3 点 O, P_1, P_2 が同一直線上にある.

$\iff \dfrac{z_1}{z_2}$ が実数 $\iff \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \iff z_1\overline{z_2}=\overline{z_1}z_2$

よって　$\{3+i(2a-1)\}(a+2+i)=\{3-i(2a-1)\}(a+2-i)$

したがって　$i\{(2a-1)(a+2)+3\}=0$

ゆえに　$(2a-1)(a+2)+3=0$ から　$(2a+1)(a+1)=0$

よって　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2}$

別解　3 点 $\mathrm{O},\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ が同一直線上にあるから次の式を満たす実数が存在する.

$a+2-i=3k+ik(2a-1)$

$a,\ k$ が実数であるから　$a+2=3k$ ……①　$-1=k(2a-1)$ ……②

①, ② から k を消去すると　$\dfrac{(a+2)(2a-1)}{3}=-1$　　よって　$(2a+1)(a+1)=0$

ゆえに　$a=-1,\ -\dfrac{1}{2}$

4

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$w=z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z$ とする。

両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{w}=\overline{z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z}=\overline{z\overline{z}}+\overline{\alpha\overline{z}}+\overline{\overline{\alpha}z}$$
$$=\overline{z}z+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z$$
$$=w$$

したがって，$z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z$ は実数である。

別解　$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})=z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}$ から

$$w=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha})-\alpha\overline{\alpha}$$
$$=(z+\alpha)\overline{(z+\alpha)}-\alpha\overline{\alpha}$$
$$=|z+\alpha|^2-|\alpha|^2$$

したがって，$z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z$ は実数である。

(2)　$v=\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z$ とする。

$\alpha\overline{z}$ が実数ではないから　$\overline{\alpha\overline{z}}\fallingdotseq\alpha\overline{z}$

よって　$\overline{\alpha}z\fallingdotseq\alpha\overline{z}$

ゆえに　$\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z\fallingdotseq 0$

すなわち　$v\fallingdotseq 0$

$v=\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z$ の両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{v}=\overline{\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z}=\overline{\alpha\overline{z}}-\overline{\overline{\alpha}z}=-\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z$$
$$=-v$$

したがって，$\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z$ は純虚数である。

5

解答　(1)　①　$\sqrt{29}$　②　2　　③　7　　(2)　①　$2\sqrt{10}$　②　$5\sqrt{2}$

解説

(1)　①　$|5-2i|=|5+(-2)i|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

②　$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

③　$|-7i|=\sqrt{(-7)^2}=7$

(2)　①　$\mathrm{AB}=|(-4+5i)-(2+3i)|$

$=|-6+2i|=\sqrt{(-6)^2+2^2}$

$=2\sqrt{10}$

(2)　②　$\mathrm{AB}=|(3-4i)-(-2+i)|=|5-5i|$

$=\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

6

解答　(1)　25　　(2)　6

解説

(1)　$z\overline{z}=|z|^2=5^2=25$

(2)　$|z-3|=4$ から　　$|z-3|^2=16$

よって　　$(z-3)\overline{(z-3)}=16$

すなわち　　$(z-3)(\overline{z}-3)=16$

展開すると　　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=16$

$z\overline{z}=25$ を代入して整理すると　　$3(z+\overline{z})=18$

したがって　　$z+\overline{z}=6$

7

解答　略

解説

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{1+\alpha^2}}=\frac{\overline{\alpha}}{1+\overline{\alpha^2}}=\frac{\overline{\alpha}}{1+(\overline{\alpha})^2}$$
$$=\frac{\overline{\alpha}\alpha^2}{\{1+(\overline{\alpha})^2\}\alpha^2}=\frac{\alpha(\alpha\overline{\alpha})}{\alpha^2+(\alpha\overline{\alpha})^2}=\frac{\alpha|\alpha|^2}{\alpha^2+|\alpha|^4}$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+1}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

よって，$\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$ は実数である。

1

解答　(1)　$1+2i$　　(2)　$\dfrac{1}{3}-2i$

解説

(1)　$2\overline{z}+z=\overline{2z+\overline{z}}=\overline{1-2i}=1+2i$

(2)　条件式から　$2z+\overline{z}=1-2i$　……①

(1) から　$2\overline{z}+z=1+2i$　　……②

①×2−② から　$3z=1-6i$

よって　$z=\dfrac{1}{3}-2i$

別解　$z=a+bi$ とおくと

$2(a+bi)+(a-bi)=1-2i$

$3a+bi=1-2i$

よって，$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-2$

したがって，$z=\dfrac{1}{3}-2i$

2

解答　略

解説

$\overline{\alpha}\beta$ が実数のとき　$\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\beta$

すなわち　$\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta$

$\alpha\fallingdotseq 0$，$\overline{\alpha}\fallingdotseq 0$ から，両辺を $\alpha\overline{\alpha}$ で割ると

$\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\dfrac{\beta}{\alpha}$　　すなわち　　$\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\beta}{\alpha}$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから，$\dfrac{\beta}{\alpha}=k$ すなわち $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

逆に，$\beta=k\alpha$ となる実数 k があるとき，$\alpha\fallingdotseq 0$ から　$\dfrac{\beta}{\alpha}=k$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから

$\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\beta}{\alpha}$　　すなわち　　$\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\dfrac{\beta}{\alpha}$

両辺に $\alpha\overline{\alpha}$ を掛けると　$\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta$

すなわち　$\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\beta$

したがって，$\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

3

解答　(1)　略　　(2)　2　　(3)　0

解説

(1)　$|z-3|=|z+3i|$ から　　$|z-3|^2=|z+3i|^2$

ゆえに　　$(z-3)\overline{(z-3)}=(z+3i)\overline{(z+3i)}$

よって　　$(z-3)(\overline{z}-3)=(z+3i)(\overline{z}-3i)$

展開すると　　$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=z\overline{z}-3iz+3i\overline{z}+9$

整理すると　　$(1-i)z=-(1+i)\overline{z}$

ゆえに　　$z=-\dfrac{1+i}{1-i}\overline{z}=-\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\overline{z}=-\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}\overline{z}=-\dfrac{2i}{2}\overline{z}$

$=-i\bar{z}$

したがって　$z+i\bar{z}=0$

(2)　$|z+1|=2|z-2|$ から　$|z+1|^2=4|z-2|^2$

変形すると　$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$

$(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$

$z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4z\bar{z}-8z-8\bar{z}+16$

$z\bar{z}-3z-3\bar{z}+5=0$

$(z-3)(\bar{z}-3)=4$

よって　$|z-3|^2=4$

$|z-3|\geqq 0$ であるから　$|z-3|=2$

(3)　$|\alpha|=|\beta|=2$ から　$|\alpha|^2=|\beta|^2=4$　ゆえに　$\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=4$

よって　$\bar{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha}$，$\bar{\beta}=\dfrac{4}{\beta}$　……①

また，$|\alpha+\beta|=2$ から　$|\alpha+\beta|^2=4$　ゆえに　$(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=4$

① を代入して　$(\alpha+\beta)\left(\dfrac{4}{\alpha}+\dfrac{4}{\beta}\right)=4$　よって　$(\alpha+\beta)\cdot\dfrac{4(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=4$

ゆえに　$(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$　したがって　$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$

4

解答　(1)　$z+\bar{z}=\dfrac{3}{2}$　(2)　$|z-3|=2$　(3)　0

解説

(1)　$|z+2|=4$ から　$|z+2|^2=16$

よって　$(z+2)\overline{(z+2)}=16$

$(z+2)(\bar{z}+2)=16$

$z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4=16$

ここで　$|z|=3$ から　$z\bar{z}=|z|^2=9$

ゆえに　$9+2(z+\bar{z})+4=16$

$2(z+\bar{z})=3$

よって　$z+\bar{z}=\dfrac{3}{2}$

(2)　$|z+1|=2|z-2|$ の両辺を平方すると

$|z+1|^2=4|z-2|^2$

$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$

$(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$

展開すると

$z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}$

整理すると

$3z\bar{z}-9(z+\bar{z})+15=0$

$z\bar{z}-3(z+\bar{z})+5=0$

$(z-3)(\bar{z}-3)-9+5=0$

$(z-3)(\bar{z}-3)=4$

$|z-3|^2=4$

よって　$|z-3|=2$

(3)　$|1-\bar{\alpha}\beta|^2-|\bar{\alpha}-\bar{\beta}|^2=(1-\bar{\alpha}\beta)\overline{(1-\bar{\alpha}\beta)}-(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\overline{(\bar{\alpha}-\bar{\beta})}$

$=(1-\bar{\alpha}\beta)(1-\alpha\bar{\beta})-(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\alpha-\beta)$

$=1-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\alpha}\cdot\beta\bar{\beta}-(\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta})$

$=1+|\alpha|^2|\beta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2=1+|\beta|^2-1-|\beta|^2=0$

5

解答　(1)　1　(2)　i　(3)　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

解説

(1)　$z\bar{z}=|z|^2=1^2=1$

(2)　$|z+i|=\sqrt{3}$ から　$|z+i|^2=3$

よって　$(z+i)\overline{(z+i)}=3$

すなわち　$(z+i)(\bar{z}-i)=3$

展開すると　$z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1=3$

$z\bar{z}=1$ を代入して整理すると　$i(z-\bar{z})=-1$

よって　$z-\bar{z}=i$

(3)　$z=a+bi$（a，b は実数）とおく。

$\bar{z}=a-bi$ であるから　$z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi$

(2) より，$z-\bar{z}=i$ であるから　$b=\dfrac{1}{2}$

また，$|z|=1$ であるから　$a^2+b^2=1$

$b=\dfrac{1}{2}$ を代入して　$a^2=\dfrac{3}{4}$　よって　$a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

1

解答　略

解説

O(0)，A(z)，B$(\bar{z})$，C(w) とする。

OA が対角線のとき

$z=\bar{z}+w$ から　$w=z-\bar{z}$　ゆえに　$\bar{w}=\overline{z-\bar{z}}=\bar{z}-z=-w$

よって，点 w は虚軸上にある。

OB が対角線のとき

$\bar{z}=w+z$ から　$w=\bar{z}-z$　ゆえに　$\bar{w}=\overline{\bar{z}-z}=z-\bar{z}=-w$

よって，点 w は虚軸上にある。

OC が対角線のとき

$w=z+\bar{z}$ から　$\bar{w}=\overline{z+\bar{z}}=\bar{z}+z=w$

よって，点 w は実軸上にある。

以上から，題意は示された。

2

解答　略

解説

$\left|\dfrac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right|<1$ を同値変形すると

$\left|\dfrac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right|<1$

$\iff \dfrac{|\alpha+z|}{|1+\bar{\alpha}z|}<1$

$\iff |\alpha+z|<|1+\bar{\alpha}z|$

$\iff |\alpha+z|^2<|1+\bar{\alpha}z|^2$

$\iff (\alpha+z)(\bar{\alpha}+\bar{z})<(1+\bar{\alpha}z)(1+\alpha\bar{z})$

$\iff |\alpha|^2+|z|^2<1+|\alpha|^2|z|^2$

$\iff (|\alpha|^2-1)(|z|^2-1)>0$

$|\alpha|<1$ であるから　$|\alpha|^2-1<0$

よって　$|z|^2-1<0 \iff |z|<1$

したがって，複素数 z が $\left|\dfrac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right|<1$ を満たすための必要十分条件は，$|z|<1$ である。

3

解答　(1)　$\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$　(2)　略

解説

(1)　$z_1+z_2=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)+i(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)$

よって

$|z_1+z_2|^2$

$=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2$

$={r_1}^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+{r_2}^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)+2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$

$={r_1}^2+{r_2}^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

したがって　$|z_1+z_2|=\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

(2)　$|z_1+z_2|^2-(|z_1|+|z_2|)^2$

$=r_1{}^2+r_2{}^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)-(r_1+r_2)^2=2r_1r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2)-1\}$

$-1\leqq\cos(\theta_1-\theta_2)\leqq 1$ より　$|z_1+z_2|^2-(|z_1|+|z_2|)^2\leqq 0$

すなわち　$|z_1+z_2|^2\leqq(|z_1|+|z_2|)^2$

$|z_1+z_2|\geqq 0$，$|z_1|+|z_2|\geqq 0$ であるから　$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$

参考　(2)の不等式において，等号が成り立つのは　$\cos(\theta_1-\theta_2)=1$

すなわち $\theta_1-\theta_2=2n\pi$（n は整数）のときである。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$　(2)　$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3)　$3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　(4)　$4(\cos\pi+i\sin\pi)$

解説

(1)　$|3+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

また，偏角は　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

ゆえに　$3+\sqrt{3}\,i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2)　$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，偏角は　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値は　$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

ゆえに　$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)$

(3)　$|3i|=\sqrt{3^2}=3$

また，偏角は　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$3i=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4)　$|-4|=4$

また，偏角は　$\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲でθ の値は　$\theta=\pi$

ゆえに　$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

$\boxed{2}$

解答　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23}{12}\pi+i\sin\dfrac{23}{12}\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

解説

$\alpha=2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$\beta=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$　と表される。

よって　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23}{12}\pi+i\sin\dfrac{23}{12}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5}{3}\pi\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{17}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{17}{12}\pi\right)\right\}$

$-\dfrac{17}{12}\pi=\dfrac{7}{12}\pi+2\pi\times(-1)$ から　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi+i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

$\boxed{3}$

解答　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

$1+\sqrt{3}\,i$，$1+i$ をそれぞれ極形式で表すと

$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

したがって　$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$　……①

また　$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}=\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i+\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}}{1+1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$　……②

よって，①，② から　$\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

したがって　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　(ア)　$3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i$　(イ)　$-6-2i$

(2)　原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点

解説

(1)　求める点を表す複素数は

(ア)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(2-6i)=\sqrt{3}-3\sqrt{3}\,i+i+3$

$=3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i$

(イ)　$\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}z=-i(2-6i)=-6-2i$

(2)　$(1-i)z=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)z=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}z$

よって，点 $(1-i)z$ は，点 z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

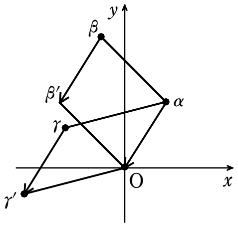
$\boxed{5}$

解答　(1)　$\gamma=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$　(2)　$z=-1+3i$，$\sqrt{3}-1$　(3)　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

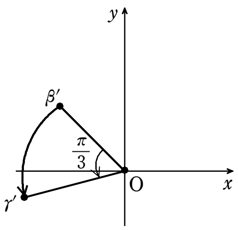
(1) 点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=(-1+4i)-(1+2i)$$
$$=-2+2i$$
$$\gamma'=\gamma-\alpha$$



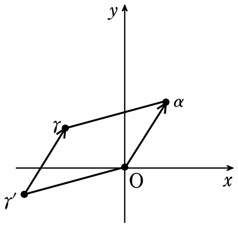
点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-2+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i)$$
$$=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

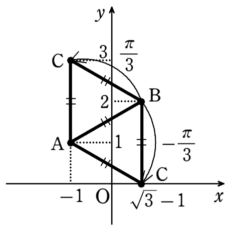


よって

$$\gamma=\gamma'+\alpha$$
$$=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i+(1+2i)$$
$$=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$$



(2) 点 C は，点 A を中心として点 B を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。



回転角が $\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(\sqrt{3}-1+2i)-(-1+i)\}-1+i$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)-1+i=2i-1+i$$
$$=-1+3i$$

回転角が $-\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(\sqrt{3}-1+2i)-(-1+i)\}-1+i$$
$$=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)-1+i=\sqrt{3}-i-1+i=\sqrt{3}-1$$

したがって　$z=-1+3i$，$\sqrt{3}-1$

(3) $\alpha=2+2i$，$\beta=4+i$，$\gamma=5+3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{5+3i-(2+2i)}{4+i-(2+2i)}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2}$$
$$=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$1+i$ を極形式で表すと

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{4}$

6

解答　(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$　(2) $(1,\ -2)$

解説

(1) 座標平面上の点 A(2, 1) は，複素数平面上で $2+i$ と表される。

点 $2+i$ を，原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2+i)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(2+i)=\frac{1+3i}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\mathrm{B}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，複素数平面上で考えると，条件から

$$1-\sqrt{2}+(-2+2\sqrt{2})i=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\{(2+i)-(x+yi)\}+(x+yi)$$

よって　$1-\sqrt{2}+(-2+2\sqrt{2})i=\frac{1+3i}{\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(x+yi)$

両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて　$\sqrt{2}-2+(4-2\sqrt{2})i=1+3i+(\sqrt{2}-1-i)(x+yi)$

ゆえに　$(\sqrt{2}-1-i)(x+yi)=\sqrt{2}-3+(1-2\sqrt{2})i$

よって　$x+yi=\frac{\sqrt{2}-3+(1-2\sqrt{2})i}{\sqrt{2}-1-i}=\frac{\{\sqrt{2}-3+(1-2\sqrt{2})i\}(\sqrt{2}-1+i)}{(\sqrt{2}-1-i)(\sqrt{2}-1+i)}$

ここで　$(分子)=(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-1)+\{(\sqrt{2}-3)+(1-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)\}i-(1-2\sqrt{2})$

$$=4-2\sqrt{2}-2(4-2\sqrt{2})i=(4-2\sqrt{2})(1-2i)$$

$(分母)=(\sqrt{2}-1)^2+1=4-2\sqrt{2}$

ゆえに　$x+yi=\frac{(4-2\sqrt{2})(1-2i)}{4-2\sqrt{2}}=1-2i$

よって　$x=1$，$y=-2$　　したがって　$\mathrm{P}(1,\ -2)$

1

解答　(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　(2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　(4) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(5) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$　(6) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

解説

絶対値を r とする。

(1) $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{3}{4}\pi$

よって　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

(2) $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

よって　$2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

(3) $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

よって　$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

(4) $r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

$\cos\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{\pi}{3}$

よって　$2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(5) $r=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$

$\cos\theta=-\frac{3}{3}=-1$，$\sin\theta=\frac{0}{3}=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\pi$

よって　$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$

(6) $r=\sqrt{0^2+2^2}=2$

$\cos\theta=\frac{0}{2}=0$，$\sin\theta=\frac{2}{2}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{\pi}{2}$

よって　$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\alpha\beta=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$

(2)　$\alpha\beta=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$，$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$

解説

(1)　α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

よって　$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$$=2\sqrt{6}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

(2)　α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

よって　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{12}\pi+i\sin\frac{25}{12}\pi\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

$\boxed{3}$

解答　$\cos\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

解説

$1+i$，$\sqrt{3}+i$ をそれぞれ極形式で表すと

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに　$(1+i)(\sqrt{3}+i)=\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\quad\cdots\cdots①$$

また　$(1+i)(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$　……②

よって，①，②から　$2\sqrt{2}\cos\frac{5}{12}\pi=\sqrt{3}-1$，$2\sqrt{2}\sin\frac{5}{12}\pi=\sqrt{3}+1$

したがって　$\cos\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin\frac{5}{12}\pi=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　①　$w_1=\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$　②　$w_2=-2+4i$

③　$w_3=-1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i$

(2)　(ア)　原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点

(イ)　原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点

(ウ)　実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点

解説

(1)　①　$w_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3+i)$

$$=\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

②　$w_2=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(-3+i)=-2+4i$$

③　$w_3=\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}z=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(2+4i)$

$$=-1+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i$$

(2)　(ア)　$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)z$

よって，点 $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点である。

(イ)　$\frac{z}{1-\sqrt{3}i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z$

よって，点 $\frac{z}{1-\sqrt{3}i}$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を $\frac{1}{2}$ 倍した点である。

(ウ)　点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

また　$-i\overline{z}=(0-i)\overline{z}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\overline{z}$

よって，点 $-i\overline{z}$ は，点 z を実軸に関して対称移動し，原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

$\boxed{5}$

解答　(1)　①　$1+2\sqrt{3}i$　②　$2-2\sqrt{3}+(4-\sqrt{3})i$　()2　$\beta=-1+5i$，$5+i$

(3)　$\frac{3}{4}\pi$

解説

(1)　点 α が原点に移るような平行移動によって，点 β が点 β' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha=(6+\sqrt{3}i)-(2-\sqrt{3}i)=4+2\sqrt{3}i$$

①　点 β' を原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を β'' とすると

$$\beta''=\beta'\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(4+2\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+3\sqrt{3}i$$

よって，求める複素数は

$$\beta''+\alpha=(-1+3\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=1+2\sqrt{3}i$$

②　点 β' を原点の周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を β'' とすると

$$\beta''=\beta'\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(4+2\sqrt{3}i)\cdot i=-2\sqrt{3}+4i$$

よって，求める複素数は

$$\beta''+\alpha=(-2\sqrt{3}+4i)+(2-\sqrt{3}i)=2-2\sqrt{3}+(4-\sqrt{3})i$$

(2)　点 B は，点 A を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

[1]　$\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2+3i)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i)=-1+5i$$

[2]　$-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\beta=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(2+3i)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i)=5+i$$

別解　点 B は，原点を点 A を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 A が原点に移るような平行移動で，点 O，B がそれぞれ点 O′，B′ に移るとすると
O′$(-2-3i)$，B′$(\beta-(2+3i))$

点 B′ は点 O′ を原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$\beta-(2+3i)=\pm i(-2-3i)=\pm3\mp2i\ (複号同順)$$

よって　$\beta=-1+5i$，$5+i$

(3)　$\alpha=2-3i$，$\beta=5-i$，$\gamma=-3-2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-3-2i-(2-3i)}{5-i-(2-3i)}=\frac{-5+i}{3+2i}=\frac{(-5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{-15+10i+3i-2i^2}{9-4i^2}$$

$$=\frac{-13+13i}{13}=-1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ として，$-1+i$ を極形式で表すと

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC}=\frac{3}{4}\pi$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$　(2)　$(1,\ -2)$

解説

(1)　複素数平面上で，点 $2+i$ を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2+i)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)$$
$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i$$

よって，点 B の座標は　$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。点 P が原点に移るような平行移動で，点 A，Q がそれぞれ A′，Q′ に移るとすると

$A'(2-x,\ 1-y)$，$Q'\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-x,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)$

点 Q′ は点 A′ を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)i$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\{(2-x)+(1-y)i\}$$

右辺を整理すると

$$\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)i$$
$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{y}{2}\right)i$$

x，y は実数であるから

$3-3\sqrt{3}-2x=2-\sqrt{3}-x+\sqrt{3}y$，

$-1+\sqrt{3}-2y=1+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x-y$

この連立方程式を解くと　$x=1$，$y=-2$

よって，点 P の座標は　$(1,\ -2)$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$　(2)　$4\left(\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi\right)$

(3)　$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

解説

(1)　$(\text{与式})=\frac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}=\frac{3+(-15+2)i-10i^2}{1^2+5^2}=\frac{1-i}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

(2)　$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$ であるから

$$(\text{与式})=4(\cos\pi+i\sin\pi)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=4\left\{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right\}$$
$$=4\left(\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi\right)$$

別解　$(\text{与式})=4\left(-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)=4\left\{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right\}$

$$=4\left(\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi\right)$$

(3)　$(\text{与式})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$\boxed{2}$

解答　i

解説

題意のように移動した点を表す複素数は

$$z\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+1+i=iz+1+i$$

よって，$z=iz+1+i$ が成り立つとき

$$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=i$$

$\boxed{3}$

解答　$a=-4$，1

解説

直線 OB は，直線 OA を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転すると得られる。

よって　$\angle\alpha 0\beta=\frac{\pi}{4}$　または　$\angle\alpha 0\beta=-\frac{\pi}{4}$

[1]　$\angle\alpha 0\beta=\frac{\pi}{4}$ のとき

r_1 を実数として，$\beta=r_1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha$ と表される。

よって　$3+(2a-1)i=r_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)$

整理すると　$3+(2a-1)i=\frac{3}{\sqrt{2}}r_1+\frac{1}{\sqrt{2}}r_1 i$

ゆえに　$3=\frac{3}{\sqrt{2}}r_1$，$2a-1=\frac{1}{\sqrt{2}}r_1$

これを解くと　$r_1=\sqrt{2}$，$a=1$

[2]　$\angle\alpha 0\beta=-\frac{\pi}{4}$ のとき

r_2 を実数として，$\beta=r_2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha$ と表される。

よって　$3+(2a-1)i=r_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2-i)$

整理すると　$3+(2a-1)i=\frac{1}{\sqrt{2}}r_2-\frac{3}{\sqrt{2}}r_2 i$

ゆえに　$3=\frac{1}{\sqrt{2}}r_2$，$2a-1=-\frac{3}{\sqrt{2}}r_2$

これを解くと　$r_2=3\sqrt{2}$，$a=-4$

[1]，[2] から　$a=-4$，1

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\beta=-1+5i$，$5+i$　(2)　$z=4+2\sqrt{3}i$，$1-3\sqrt{3}i$

解説

(1)　点 B は，点 A を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ または $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

[1]　$\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2+3i)$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i)=-1+5i$$

[2]　$-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した場合

$$\beta=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(2+3i)$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+3i)=5+i$$

別解　点 B は，原点を点 A を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 A が原点に移るような平行移動で，点 O，B がそれぞれ点 O′，B′ に移るとすると　$O'(-2-3i)$，$B'(\beta-(2+3i))$

点 B′ は点 O′ を原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$\beta-(2+3i)=\pm i(-2-3i)=\pm3\mp2i$ (複号同順)

よって　$\beta=-1+5i$，$5+i$

(2)　$O(0)$，$A(5-\sqrt{3}i)$，$B(z)$ とおくと，△OAB が正三角形であるとき

$$OA=OB,\ \angle AOB=\frac{\pi}{3}$$

したがって，点 B は，点 O を中心として，点 A を $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(5-\sqrt{3}i)$　……①

または　$z=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(5-\sqrt{3}i)$　……②

①から　$z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5-\sqrt{3}i)=4+2\sqrt{3}i$

② から　$z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5-\sqrt{3}\,i)=1-3\sqrt{3}\,i$

$\boxed{5}$

解答　(1) $(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$　(2) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$

(3) $\theta=\frac{\pi}{3}$

解説

(1) 座標平面上の点 P$(x,\ y)$ に対応する複素数平面上の複素数を z とすると　$z=x+yi$

同様に，点 Q に対応する複素数を w とすると，条件から

$w=(\cos\theta+i\sin\theta)z=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi)$

$=x\cos\theta+iy\cos\theta+ix\sin\theta+i^2y\sin\theta$

$=(x\cos\theta-y\sin\theta)+(x\sin\theta+y\cos\theta)i$

よって，点 Q の座標は　$(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$

(2) 点 z を点 w の周りに θ だけ回転した点を表す複素数は

$(z-w)(\cos\theta+i\sin\theta)+w$ と表される。

したがって

$$\{3+i-(2-i)\}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+2-i=(1+2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+2-i$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i$$

(3) $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}i=\{3-2i-(1+i)\}(\cos\theta+i\sin\theta)+1+i$

$$=(2-3i)(\cos\theta+i\sin\theta)+1+i$$

$$=2\cos\theta+3\sin\theta+1+(-3\cos\theta+2\sin\theta+1)i$$

ゆえに　$2\cos\theta+3\sin\theta+1=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$，$-3\cos\theta+2\sin\theta+1=\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$

これを解くと　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$

したがって　$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\boxed{1}$

解答　$-5+\sqrt{3}\,i$

解説

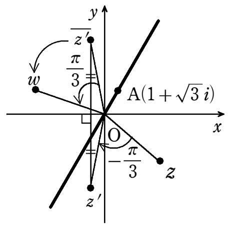
求める複素数を w とする。

$$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，点 z を原点の周りに $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を z' とすると

$$z'=z\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=(4-2\sqrt{3}\,i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-3\sqrt{3}\,i$$



点 z' を実軸に関して対称移動した点を，原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させると，求める点 w が得られる。

点 z' と実軸に関して対称な点は，$\overline{z'}$ で表されるから

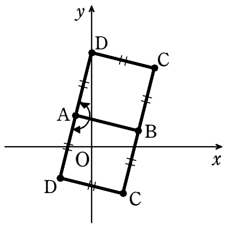
$$w=\overline{z'}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(-1+3\sqrt{3}\,i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-5+\sqrt{3}\,i$$

$\boxed{2}$

解答　C$(4+5i)$，D$(6i)$ または C$(2-3i)$，D$(-2-2i)$

解説

点 C(γ)，D(δ) とする。点 D は，点 B を点 A を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。



点 A が原点に移るような平行移動で，点 B，D がそれぞれ点 B′，D′ に移るとすると

B′$(4-i)$，D′$(\delta-(-1+2i))$

点 D′ は，点 B′ を原点を中心として $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから　$\delta-(-1+2i)=\pm i(4-i)$　(複号同順)

よって　$\delta=i(4-i)+(-1+2i)=6i$

または　$\delta=-i(4-i)+(-1+2i)=-2-2i$

また，点 C は，点 D を点 A から点 B に向かう向きに

$3+i-(-1+2i)$

すなわち $4-i$ だけ平行移動すると得られる。

よって　$\gamma=\delta+4-i$

したがって，$\delta=6i$ のとき　$\gamma=4+5i$

$\delta=-2-2i$ のとき　$\gamma=2-3i$

ゆえに　C$(4+5i)$，D$(6i)$　または　C$(2-3i)$，D$(-2-2i)$

$\boxed{3}$

解答　(1) 1　(2) $z=\pm i,\ \frac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$　(複号任意)

解説

(1) $z+\frac{1}{z}$ が実数となるとき　$z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$

すなわち　$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$

両辺に $z\overline{z}$ を掛けると　$z^2\overline{z}+\overline{z}=z(\overline{z})^2+z$

$z\overline{z}=|z|^2$ であるから，整理すると　$(z-\overline{z})|z|^2-(z-\overline{z})=0$

すなわち　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

z は虚数であるから　$z\neq\overline{z}$　　よって　$|z|^2=1$

$|z|>0$ であるから　$|z|=1$

(2) $z+\frac{1}{z}$ が整数となるとき，$z+\frac{1}{z}$ は実数であるから，(1) の結果より　$|z|=1$

よって，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

ここで，z は虚数であるから　$\sin\theta\neq0$

$\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ であるから

$$z+\frac{1}{z}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$$

$\sin\theta\neq0$ より $-1<\cos\theta<1$ であるから，これが整数となるとき

$2\cos\theta=0,\ \pm1$　すなわち　$\cos\theta=0,\ \pm\frac{1}{2}$

$\cos\theta=0$ のとき　$\sin\theta=\pm1$

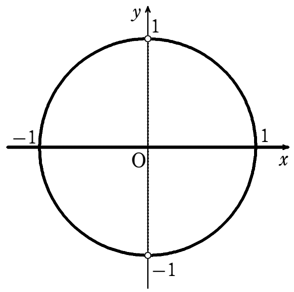
$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ のとき　$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める z の値は　$z=\pm i,\ \frac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ (複号任意)

$\boxed{4}$

解答　(1) 略　(2) [図]



解説

(1) $|z|=1$ であれば $|z|^2=1$ であるから　$z\overline{z}=1$　　よって　$\overline{z}=\frac{1}{z}$

ゆえに　$z^3+\frac{1}{z^3}=z^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3=z^3+(\overline{z})^3=z^3+\overline{z^3}$

よって，$z^3+\frac{1}{z^3}$ は実数である。

(2) $\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}$ が実数となるための条件は

$$\overline{\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\right)}=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}$$

左辺を変形すると　$\frac{1}{\overline{z}-i}+\frac{1}{\overline{z}+i}=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}$

すなわち　$\dfrac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}=\dfrac{2z}{z^2+1}$

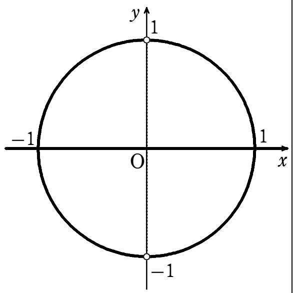
ゆえに　$\overline{z}(z^2+1)=z\{(\overline{z})^2+1\}$

$z\overline{z}=|z|^2$ であるから　$|z|^2z+\overline{z}=|z|^2\overline{z}+z$

よって　$(|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$

ゆえに　$|z|=1$　または　$z=\overline{z}$

したがって，$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となるような点 z 全体は，原点を中心とする半径１の円のうち，２点 i，$-i$ を除いた部分と実軸の和集合であり，図示すると右の図の太い実線部分となる。



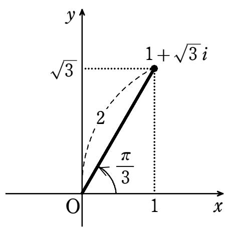
$\boxed{1}$

解答　(1) 64　(2) $-\dfrac{1}{4}$　(3) $-\dfrac{81}{2}-\dfrac{81\sqrt{3}}{2}i$

解説

(1) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ から

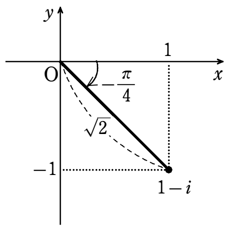
$$(1+\sqrt{3}i)^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$
$$=64(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$$
$$=64$$



(2) $1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

から

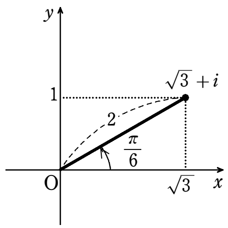
$$(1-i)^{-4}=(\sqrt{2})^{-4}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{-4}$$
$$=\frac{1}{4}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{4}$$



(3) $\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ から}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^8=(\sqrt{3})^8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8$$
$$=3^4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=81\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{81}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{2}i$$



$\boxed{2}$

解答　(1) 0　(2) -1

解説

(1) $\alpha^{20}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$　　よって　$\alpha^{20}-1=0$

左辺を因数分解すると　$(\alpha-1)(\alpha^{19}+\alpha^{18}+\cdots\cdots+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}\neq 1$ から　(与式)$=0$

(2) (与式)$=\alpha^{1+2+\cdots\cdots+19}=\alpha^{\frac{1}{2}\cdot 19(19+1)}=\alpha^{190}$

$$=\alpha^{20\times 9+10}=\alpha^{10}=\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{10}$$
$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$\boxed{3}$

解答　(1) $z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$　または　$z=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) -2

解説

(1) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ から　$z^2-\sqrt{2}z+1=0$

これを解いて　$z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

よって

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき　$z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき　$z=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) [1] $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき

$$z^{20}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{20}=\cos 5\pi+i\sin 5\pi=-1$$

よって　$z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}=-1+\dfrac{1}{-1}=-2$

[2] $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき

$$z^{20}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{20}$$
$$=\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi)=-1$$

よって　$z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}=-1+\dfrac{1}{-1}=-2$

以上より　$z^{20}+\dfrac{1}{z^{20}}=-2$

$\boxed{4}$

解答　$n=24$

解説

$1+i$，$\sqrt{3}+i$ をそれぞれ極形式で表すと

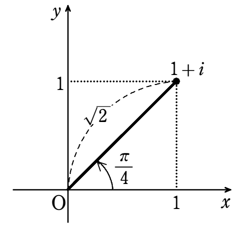
$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

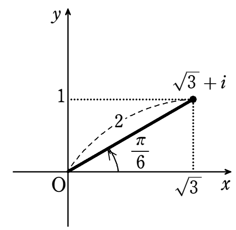
よって　$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ゆえに　$z^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^n$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n}{12}\pi+i\sin\frac{n}{12}\pi\right)$$





z^n が正の実数となるとき

$$\cos\frac{n}{12}\pi>0,\ \sin\frac{n}{12}\pi=0$$

ゆえに　$\dfrac{n}{12}\pi=2m\pi$　(m は整数)

よって，最小の正の整数 n は $m=1$ のときで，$\dfrac{n}{12}\pi=2\pi$ から　$n=24$

$\boxed{5}$

解答　$m=6,\ n=12$

解説

$\sqrt{3}+i=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$，$1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ であるから

$(\sqrt{3}+i)^m=2^m\{\cos(30^\circ\times m)+i\sin(30^\circ\times m)\}$，

$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\{\cos(45^\circ\times n)+i\sin(45^\circ\times n)\}$

ゆえに　$2^m\cos(30^\circ\times m)=(\sqrt{2})^n\cos(45^\circ\times n)$ ……①

$2^m\sin(30^\circ\times m)=(\sqrt{2})^n\sin(45^\circ\times n)$ ……②

①^2＋②^2 から　$2^{2m}=(\sqrt{2})^{2n}$　　よって　$n=2m$ ……③

また　$45^\circ\times n-30^\circ\times m=360^\circ\times k$（$k$ は整数）……④

③ を ④ に代入して　$90^\circ\times m-30^\circ\times m=360^\circ\times k$

ゆえに　$60^\circ\times m=360^\circ\times k$ から $m=6k$

よって，最小の正の整数となる m の値は，$k=1$ とすると　$m=6$

このとき，③ から　$n=12$

6

解答　(1)　$z=1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　(2)　$z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}i)$

解説

(1)　z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

とすると　　$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

また，1 を極形式で表すと　　$1=\cos 0+i\sin 0$

よって，方程式は　　$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos 0+i\sin 0$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1,\ 3\theta=0+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　　また　　$\theta=\frac{2k\pi}{3}$

よって　$z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では　$k=0,\ 1,\ 2$

① で $k=0,\ 1,\ 2$ としたときの z をそれぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2$ とすると

$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$，

$z_1=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

$z_2=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，求める解は　$z=1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(2)　z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

とすると　　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また，$-8+8\sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$-8+8\sqrt{3}i=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

よって，方程式は

$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^4=16,\ 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=2$　　また　　$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)\right\}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

① で $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ としたときの z をそれぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ とすると

$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$，

$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-1+\sqrt{3}i$，

$z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}-i$，

$z_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}i$

したがって，求める解は

$z=\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-\sqrt{3}i)$

7

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

解説

(1)　$\alpha^5=1$ から　　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ であるから　　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha\neq 0$ であるから，両辺を α^2 で割ると　　$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$

(2)　$\alpha^5=1$ から　　$|\alpha|^5=1$　　　よって　　$|\alpha|=1$

ゆえに　　$|\alpha|^2=1$　すなわち　$\alpha\overline{\alpha}=1$　　　よって　　$\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

ゆえに　　$t^2+t-1=(\alpha+\overline{\alpha})^2+(\alpha+\overline{\alpha})-1=\alpha^2+\alpha+2\alpha\overline{\alpha}-1+(\overline{\alpha})^2+\overline{\alpha}$

$=\alpha^2+\alpha+2-1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}=0$

(3)　$72^\circ\times 5=360^\circ$ であるから，$\alpha=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ とすると，α は条件

$\alpha^5=1,\ \alpha\neq 1$　　を満たす。

このとき　$\overline{\alpha}=\cos 72^\circ-i\sin 72^\circ$

よって，$t=\alpha+\overline{\alpha}$ とすると $t=2\cos 72^\circ$ であり，(2) から $t^2+t-1=0$ が満たされる。

$t^2+t-1=0$ の解は　　$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$t>0$ であるから　　$t=2\cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　　ゆえに　　$\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1

解答　(1)　-64　　(2)　$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　(3)　$-\frac{81}{2}+\frac{81\sqrt{3}}{2}i$　　(4)　$-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i$

解説

(1)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

与式$=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{12}=(\sqrt{2})^{12}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)$

$=64(\cos\pi+i\sin\pi)=-64$

(2)　$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから

与式$=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-5}$

$=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3)　$\frac{3-\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ であるから

与式$=(\sqrt{3})^8\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^8=(\sqrt{3})^8\left\{\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$

$=81\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{81}{2}+\frac{81\sqrt{3}}{2}i$

(4)　$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ であるから

与式$=2^{-4}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^{-4}=2^{-4}\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}$

$=\frac{1}{16}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{32}+\frac{\sqrt{3}}{32}i$

2

解答　(1)　0　　(2)　1

解説

(1)　$\alpha^{17}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$　　　よって　　$\alpha^{17}-1=0$

左辺を因数分解すると　　$(\alpha-1)(\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots\cdots+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha=\cos\frac{2}{17}\pi+i\sin\frac{2}{17}\pi\neq 1$ から　　（与式）$=0$

(2)　（与式）$=\alpha^{1+2+\cdots\cdots+16}=\alpha^{\frac{1}{2}\cdot 16(16+1)}=\alpha^{17\times 8}=1$

3

解答　$z=\cos\theta\pm i\sin\theta$，証明略

解説

$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ から　　$z^2+1=2z\cos\theta$

ゆえに　　$z^2-(2\cos\theta)z+1=0$

よって　　$z=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき

$z^n+\frac{1}{z^n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$

$$=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}=2\cos n\theta$$

$z=\cos\theta-i\sin\theta$ すなわち $z=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ のとき

$$z^n+\frac{1}{z^n}=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^n+\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{-n}$$

$$=\{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}+(\cos n\theta+i\sin n\theta)=2\cos n\theta$$

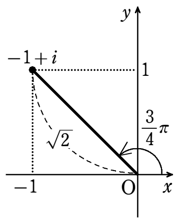
以上から　$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

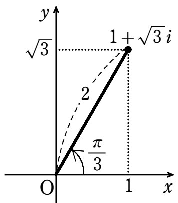
4

解答　$n=12$

解説

$-1+i$，$1+\sqrt{3}\,i$ をそれぞれ極形式で表すと





$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって　$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

ゆえに　$z^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)^n$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos\frac{5}{12}n\pi+i\sin\frac{5}{12}n\pi\right)$$

z^n が実数となるとき　$\sin\dfrac{5}{12}n\pi=0$　　ゆえに　$\dfrac{5}{12}n\pi=m\pi$（m は整数）

よって，最小の正の整数 n は $m=5$ のときで　$n=12$

5

解答　$m=6$，$n=12$

解説

$$i-\sqrt{3}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ド・モアブルの定理から　$(i-\sqrt{3})^m=2^m\left(\cos\dfrac{5m}{6}\pi+i\sin\dfrac{5m}{6}\pi\right)$

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ の両辺の絶対値と偏角を比較して

$2^m=2^{\frac{n}{2}}$　……①

$\dfrac{5m}{6}\pi=\dfrac{n}{4}\pi+2k\pi$　（k は整数）　……②

① から　$n=2m$

これを ② に代入して　$\dfrac{5m}{6}\pi=\dfrac{m}{2}\pi+2k\pi$　　よって　$m=6k$

これを満たす自然数 m で最小のものは $m=6$ である。このとき　$n=12$

6

解答　(1)　$z=3,\ -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

(2)　$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ -i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(3)　$z=i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　(4)　$z=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

(5)　$z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i,\ -\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i,\ \sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

解説

(1)　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……① とすると　$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

また，27 を極形式で表すと　$27=27(\cos0+i\sin0)$

よって，方程式は　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=27(\cos0+i\sin0)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=27$，$3\theta=0+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=3$　……②　　また　$\theta=\dfrac{2k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は　$z=3,\ -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

(2)　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……① とすると　$z^6=r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)$

また，-1 を極形式で表すと　$-1=\cos\pi+i\sin\pi$

よって，方程式は　$r^6(\cos6\theta+i\sin6\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^6=1$，$6\theta=\pi+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　……②　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2，3，4，5 であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は

$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ -i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(3)　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……① とすると　$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$

また，$-i$ を極形式で表すと　$-i=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

よって，方程式は　$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=1$　……②　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は　$z=i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

(4)　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……① とすると　$z^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

また，$1-\sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと　$1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

よって，方程式は　$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^2=2$，$2\theta=\dfrac{5}{3}\pi+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{2}$　……②　　また　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1 であるから　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は　$z=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

(5)　z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……① とすると　$z^4=r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)$

また，$-32(1+\sqrt{3}\,i)$ を極形式で表すと　$-32(1+\sqrt{3}\,i)=64\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

よって，方程式は　$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=64\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^4=64$，$4\theta=\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi$　（k は整数）

$r>0$ であるから　$r=2\sqrt{2}$　……②　　また　$\theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2，3 であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　……③

②，③ を ① に代入して，求める解は

$z=\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i,\ -\sqrt{6}+\sqrt{2}\,i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i,\ \sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$

7

解答　（ア）5　（イ）1　（ウ）1　（エ）-1　（オ）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

解説

$z^n=(\cos72^\circ+i\sin72^\circ)^n=\cos(72^\circ\times n)+i\sin(72^\circ\times n)$

よって　$z^n=1$ を満たす最小の自然数 n は，$72^\circ\times n=360^\circ$ を解いて　$n=5$

したがって，$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$，$z\neq1$ から，

z は $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ ……① の解である．

$z\neq0$ であるから，① の両辺を z^2 で割ると　$\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+1=0$

ゆえに　$(w^2-2)+w+1=0$　すなわち　$w^2+w-1=0$ ……②

また　$w=z+\dfrac{1}{z}=(\cos72^\circ+i\sin72^\circ)+(\cos72^\circ-i\sin72^\circ)$

$=2\cos72^\circ>0$

したがって，② から　$w=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　ゆえに　$\cos72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　ド・モアブルの定理により

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta \quad \cdots\cdots ①$$

また　$(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$$=\cos^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta+i^2\sin^2\theta$$

$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(2\sin\theta\cos\theta) \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② の実部と虚部を比較して

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(2)　ド・モアブルの定理により

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta \quad \cdots\cdots ③$$

また　$(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

$$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta\cdot i^2\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+3i\sin\theta\cos^2\theta-i\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3i\sin\theta(1-\sin^2\theta)-i\sin^3\theta$$

$$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta) \quad \cdots\cdots ④$$

③ と ④ の実部と虚部を比較して

$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$，$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

2

解答　-1

解説

$\alpha^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，$\beta^2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ であるから　$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{2}$，$\alpha^2-\beta^2=1$

また　$\alpha\beta=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}=\dfrac{(\alpha+i\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta i}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　$\left(\dfrac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right)^{2004}=\left\{\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4\right\}^{501}=(-1)^{501}=-1$

3

解答　m を自然数とすると

$n=3m$ のとき 2，　$n=3m-1$，$3m-2$ のとき -1

解説

$$(与式)=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n+\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^n$$

$$=\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)+\left\{\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{2n\pi}{3}$$

よって，m を自然数として

$n=3m$ のとき　2

$n=3m-1$，$3m-2$ のとき　-1

4

解答　(1)　$z+\dfrac{1}{z}=2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　(2)　$\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1)　$z^5=1$ から　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

[1]　$z=1$ のとき　$z+\dfrac{1}{z}=2$

[2]　$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ のとき　$z\fallingdotseq 0$ であるから，

両辺を z^2 で割ると　$z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$

ゆえに　$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=0$

よって　$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[1]，[2] から　$z+\dfrac{1}{z}=2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　z は 1 の 5 乗根であるから

$$z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$k=2$ のとき　$z=\cos\dfrac{4}{5}\pi+i\sin\dfrac{4}{5}\pi$ であり

$$z+\frac{1}{z}=\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi\right)=2\cos\frac{4}{5}\pi$$

$\cos\dfrac{4}{5}\pi<0$ であるから，(1) より　$2\cos\dfrac{4}{5}\pi=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

よって　$\cos\dfrac{4}{5}\pi=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

5

解答　略

解説

解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $[r>0]$ とおくと

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

また　$1=\cos0+i\sin0$

ゆえに　$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\cos0+i\sin0$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^n=1$，$n\theta=0+2\pi\times k$　(k は整数)

$r>0$ であるから　$r=1$

また　$\theta=\dfrac{2\pi}{n}\times k$

よって　$z=\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\times k\right)=\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)^k=\omega^k$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$

したがって，$z^n=1$ の解は 1，ω，ω^2，……，ω^{n-1} で表される。

1

解答　(1)　実部は $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，虚部は $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$　　(2)　略

解説

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ から

$$z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

よって，実部は $\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$，虚部は $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

(2)　$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ から

$$z^n+\frac{1}{z^n}=\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)\cos n\theta+i\left(r^n-\frac{1}{r^n}\right)\sin n\theta$$

[1]　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき

$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$ から　$r=1$　または　$\sin\theta=0$

ゆえに　$r=1$　または　$\theta=m\pi$ (m は整数)

$r=1$ のとき　$r^n-\dfrac{1}{r^n}=0$，　$\theta=m\pi$ のとき　$\sin n\theta=0$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数。

[2]　$z+\dfrac{1}{z}$ が純虚数のとき

$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=0$　かつ　$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\fallingdotseq 0$

ゆえに　$r\fallingdotseq 1$　かつ　$\theta=\dfrac{2m+1}{2}\pi$ (m は整数)

n が偶数のとき　$\sin n\theta=\sin\dfrac{2m+1}{2}n\pi=0$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数。

n が奇数のとき　$\cos n\theta=\cos\dfrac{2m+1}{2}n\pi=0$

$\sin n\theta=\sin\dfrac{2m+1}{2}n\pi\fallingdotseq 0$

よって，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は純虚数。

[1]，[2] から，題意は示された。

2

解答　1

解説

$|z|=1$ であるから，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

$z^n+1=(\cos n\theta+1)+i\sin n\theta$

$|z^n+1|=1$ のとき　$(\cos n\theta+1)^2+\sin^2 n\theta=1$

ゆえに　$2+2\cos n\theta=1$　　よって　$\cos n\theta=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$n\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi$ ($k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1$)

よって　$\theta=\dfrac{2\pi}{3n}+\dfrac{2k\pi}{n}$，$\theta=\dfrac{4\pi}{3n}+\dfrac{2k\pi}{n}$　($k=0$，1，……，$n-1$)

ここで　$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$\times\left\{\cos\left(\frac{4\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right)$$

ゆえに，求める複素数を w とすると

$$w=\cos\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right)\right\}+i\sin\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right)\right\}$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2k)=\frac{2\pi}{n}\cdot\left\{n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right\}=2n\pi$

したがって　$w=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1$

3

解答　(1)　$n=5$　　(2)　0　　(3)　1　　(4)　$-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　ド・モアブルの定理により　　$z^n=\cos\dfrac{2n\pi}{5}+i\sin\dfrac{2n\pi}{5}$

$z^n=1$ の両辺の偏角を比較すると　　$\dfrac{2n\pi}{5}=2m\pi$　(m は整数)

すなわち　　$n=5m$　　　これを満たす最小の正の整数 n は　　$n=5$

(2)　(1) より　　$z^5=1$　　　すなわち　　$z^5-1=0$

左辺を因数分解して　　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ であるから　　$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

(3)　$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)=(1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^8+z^{12})$

ここで，$z^5=1$ から　　$z^8=z^5z^3=z^3$，$z^{12}=(z^5)^2z^2=z^2$

これと $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ から

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)=(1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^3+z^2)$$
$$=(-z^4)(-z)=z^5=1$$

(4)　$k=1$，2，3，4 に対して　　$z^k=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$

これと $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ から

$$\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)=-1$$

両辺の実部を比較して　　$\cos\dfrac{8\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{2\pi}{5}=-1$

ここで，$\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5}$，$\cos\dfrac{6\pi}{5}=\cos\dfrac{4\pi}{5}$　であるから

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=-1$$

よって　$\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$

別解　(3)　$k=1$，2，3，4 に対して　　$(z^k)^5=(z^5)^k=1$

$$z^k=\cos\frac{2k}{5}\pi+i\sin\frac{2k}{5}\pi$$

よって，z，z^2，z^3，z^4 は相異なる 1 の 5 乗根で，1 と異なるから，これらは 4 次方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の 4 つの解である。

ゆえに，$(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$ は x についての恒等式である。

これに $x=-1$ を代入すると　　$(-1-z)(-1-z^2)(-1-z^3)(-1-z^4)=1$

すなわち　　$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)=1$

$z^8=z^5z^3=z^3$ であるから　　$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)=1$

4

解答　(1)　略　　(2)　$\beta+\overline{\beta}=-1$，$\beta\overline{\beta}=2$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解説

(1)　$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos(2\pi-\theta)+i\sin(2\pi-\theta)$
$=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^6=\alpha^6$

(2)　α は 1 の 7 乗根であるから　$\alpha^7=1$

$\alpha^7-1=(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ で，$\alpha\neq 1$ であるから

$$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

また，(1) と同様に考えると，$\overline{\alpha^2}=\alpha^5$，$\overline{\alpha^4}=\alpha^3$ が導かれる。

ゆえに　$\overline{\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\alpha^2}+\overline{\alpha^4}=\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3$

したがって　$\beta+\overline{\beta}=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3=-1$

また　$\beta\overline{\beta}=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^3)$
$=\alpha^7+\alpha^6+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^7$
$=3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$
$=3-1=2$

(3)　$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta$　は，β の虚部を表す。

(2) より，β は $x^2+x+2=0$ の解である。

これを解いて　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

$\sin 2\theta>0$，$\sin 4\theta+\sin\theta=2\sin\dfrac{5}{2}\theta\cos\dfrac{3}{2}\theta>0$　であるから

$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta>0$

したがって　$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

5

解答　(1)　$z=2\left(\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi\right)$，$2\left(\cos\dfrac{4}{5}\pi+i\sin\dfrac{4}{5}\pi\right)$，$2\left(\cos\dfrac{6}{5}\pi+i\sin\dfrac{6}{5}\pi\right)$，$2\left(\cos\dfrac{8}{5}\pi+i\sin\dfrac{8}{5}\pi\right)$

(2)　$z=\cos\dfrac{2}{9}\pi+i\sin\dfrac{2}{9}\pi$，$\cos\dfrac{4}{9}\pi+i\sin\dfrac{4}{9}\pi$，$\cos\dfrac{8}{9}\pi+i\sin\dfrac{8}{9}\pi$，$\cos\dfrac{10}{9}\pi+i\sin\dfrac{10}{9}\pi$，$\cos\dfrac{14}{9}\pi+i\sin\dfrac{14}{9}\pi$，$\cos\dfrac{16}{9}\pi+i\sin\dfrac{16}{9}\pi$

解説

(1)　両辺を 16 で割ると　　$\left(\dfrac{z}{2}\right)^4+\left(\dfrac{z}{2}\right)^3+\left(\dfrac{z}{2}\right)^2+\dfrac{z}{2}+1=0$

$\dfrac{z}{2}=w$ とおくと　　$w^4+w^3+w^2+w+1=0$　……①

ここで　　$w^5-1=(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$

よって，方程式 ① の解は，方程式 $w^5=1$ の虚数解である。

したがって　　$w=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$　($k=1$，2，3，4)

$z=2w$ であるから，求める解は

$$z=2\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right),\ 2\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right),$$
$$2\left(\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi\right),\ 2\left(\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi\right)$$

(2)　$z^6+z^3+1=0$ から　　$(z^3)^2+z^3+1=0$

z^3 について解くと　　$z^3=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

方程式の解 z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……①　とすると

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

[1]　$z^3=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき　$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　　$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$（$k$ は整数）

$r>0$ であるから　　$r=1$　……②

また　　$\theta=\dfrac{2}{9}\pi+\dfrac{2k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1，2 であるから

$$\theta=\frac{2}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{14}{9}\pi\quad\cdots\cdots③$$

②，③ を ① に代入すると

$$z=\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi,\ \cos\frac{8}{9}\pi+i\sin\frac{8}{9}\pi,\ \cos\frac{14}{9}\pi+i\sin\frac{14}{9}\pi$$

[2]　$z^3=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき　$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$ であるから

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　　$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi$（$k$ は整数）

$r>0$ であるから　　$r=1$　……④

また　　$\theta=\dfrac{4}{9}\pi+\dfrac{2k\pi}{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1，2 であるから

$$\theta=\frac{4}{9}\pi,\ \frac{10}{9}\pi,\ \frac{16}{9}\pi\quad\cdots\cdots⑤$$

④，⑤ を ① に代入すると

$$z=\cos\frac{4}{9}\pi+i\sin\frac{4}{9}\pi,\ \cos\frac{10}{9}\pi+i\sin\frac{10}{9}\pi,\ \cos\frac{16}{9}\pi+i\sin\frac{16}{9}\pi$$

[1]，[2] から，求める解は

$$z=\cos\frac{2}{9}\pi+i\sin\frac{2}{9}\pi,\ \cos\frac{4}{9}\pi+i\sin\frac{4}{9}\pi,\ \cos\frac{8}{9}\pi+i\sin\frac{8}{9}\pi,$$
$$\cos\frac{10}{9}\pi+i\sin\frac{10}{9}\pi,\ \cos\frac{14}{9}\pi+i\sin\frac{14}{9}\pi,\ \cos\frac{16}{9}\pi+i\sin\frac{16}{9}\pi$$

1

解答 (1)　順に $3+i$，$-1-7i$　(2)　$\frac{15}{4}i$　(3)　$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i$

解説

(1)　点Cを表す複素数は　$\frac{2\cdot(2-i)+1\cdot(5+5i)}{1+2}=3+i$

点Dを表す複素数は　$\frac{-2\cdot(2-i)+1\cdot(5+5i)}{1-2}=-1-7i$

(2)　点Gを表す複素数は　$\frac{(3+i)+(-1-7i)+\frac{15}{4}i}{3}=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i$

(3)　E(ki) (k は実数) とすると

$AE^2=|ki-(2-i)|^2=|(-2)+(k+1)i|^2$
$=(k+1)^2+4=k^2+2k+5$

$BE^2=|ki-(5+5i)|^2=|(-5)+(k-5)i|^2$
$=(k-5)^2+25=k^2-10k+50$

$AE=BE$ より　$AE^2=BE^2$ であるから

$$k^2+2k+5=k^2-10k+50$$

整理すると　$12k=45$　　よって　$k=\frac{15}{4}$

したがって，求める複素数は　$\frac{15}{4}i$

2

解答 (1)　2点1，i を結ぶ線分の垂直二等分線　(2)　点 $1-i$ を中心とする半径2の円

解説

(1)　点 z 全体は，2点1，i を結ぶ線分の垂直二等分線。

(2)　点 z 全体は，点 $1-i$ を中心とする半径2の円。

3

解答 点 $2i$ を中心とする半径2の円

解説

方程式の両辺を平方すると　$4|z-i|^2=|z+2i|^2$

ゆえに　$4(z-i)\overline{(z-i)}=(z+2i)\overline{(z+2i)}$

よって　$4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}=0$

ゆえに　$(z-2i)(\overline{z}+2i)-4=0$

よって　$(z-2i)\overline{(z-2i)}=4$

すなわち　$|z-2i|^2=2^2$

よって　$|z-2i|=2$

したがって，点 z の全体は，点 $2i$ を中心とする半径2の円である。

4

解答 点2を中心とする半径2の円

解説

点 z は中心O，半径2の円上にあるから　$|z|=2$　……①

$w=\frac{z+2}{z-1}$ から　$(z-1)w=z+2$

よって　$(w-1)z=w+2$

$w=1$ は等式を満たさないから，$w\neq1$ で　$z=\frac{w+2}{w-1}$

① に代入して　$\left|\frac{w+2}{w-1}\right|=2$　　ゆえに　$|w+2|=2|w-1|$

両辺を2乗すると　$|w+2|^2=4|w-1|^2$

よって　$(w+2)(\overline{w}+2)=4(w-1)(\overline{w}-1)$

両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}-2(w+\overline{w})=0$　　ゆえに　$(w-2)(\overline{w}-2)=4$

すなわち　$|w-2|^2=2^2$　　よって　$|w-2|=2$

したがって，点 w は，点2を中心とする半径2の円を描く。

参考 $|w+2|=2|w-1|$ であるから，点 w の軌跡はアポロニウスの円 (2点 -2，1からの距離の比が $2:1$) であることがわかる。

5

解答 最大値5

解説

点 z が原点を中心とし，半径が2の円上を動くから，$|z|=2$ と表される.

また，$w=\frac{2z-i}{z+i}$ から　$(z+i)w=2z-i$

よって　$(w-2)z=-i(w+1)$

ゆえに　$z=\frac{-i(w+1)}{w-2}$

これを $|z|=2$ に代入すると　$\left|\frac{-i(w+1)}{w-2}\right|=2$

よって　$|-i||w+1|=2|w-2|$

$|w+1|^2=4|w-2|^2$

$(w+1)(\overline{w}+1)=4(w-2)(\overline{w}-2)$

展開して整理すると　$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$

ゆえに　$(w-3)(\overline{w}-3)=4$

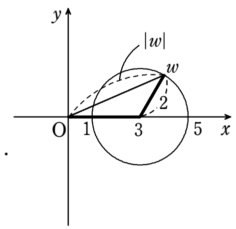
よって　$|w-3|=2$

したがって，w は点3を中心とし，半径が2の円上を動く.

右の図から　$|w|\leqq3+2=5$

等号が成り立つのは $w=5$ のときである.

よって，$w=5$ のとき $|w|$ は最大値5をとる.



6

解答 点 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円。ただし，原点を除く

解説

$\alpha=\frac{(1-i)(z+1)}{z}$ $(z\neq0)$ とおくと，α が実数である条件は

$\overline{\alpha}=\alpha$ から　$\frac{(1+i)(\overline{z}+1)}{\overline{z}}=\frac{(1-i)(z+1)}{z}$

分母を払って整理すると　$2iz\overline{z}+(1+i)z-(1-i)\overline{z}=0$

ゆえに　$z\overline{z}+\frac{1-i}{2}z+\frac{1+i}{2}\overline{z}=0$

これを変形すると　$\left(z+\frac{1+i}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1-i}{2}\right)=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}$

よって　$\left(z+\frac{1+i}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1+i}{2}\right)}=\frac{1}{2}$　　ゆえに　$\left|z+\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，z は，点 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を描く。

ただし，$z\neq0$ であるから，原点を除く。

7

解答 点 $\frac{1}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円を描く。ただし，点1を除く

解説

$w=\frac{z+1}{z-2}$ から　$(w-1)z=2w+1$

$\frac{z+1}{z-2}=1$ を満たす z は存在しないから　$w\neq1$

したがって　$z=\frac{2w+1}{w-1}$

点 z が虚軸上を動くとき　$z+\overline{z}=0$

よって　$\frac{2w+1}{w-1}+\frac{2\overline{w}+1}{\overline{w}-1}=0$

ゆえに　$(\overline{w}-1)(2w+1)+(w-1)(2\overline{w}+1)=0$

整理すると　$w\overline{w}-\frac{1}{4}w-\frac{1}{4}\overline{w}-\frac{1}{2}=0$

よって　$\left(w-\frac{1}{4}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}$

すなわち　$\left(w-\frac{1}{4}\right)\overline{\left(w-\frac{1}{4}\right)}=\frac{9}{16}$

よって　$\left|w-\frac{1}{4}\right|^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

ゆえに　$\left|w-\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$

したがって，点 w は点 $\frac{1}{4}$ を中心とする半径 $\frac{3}{4}$ の円を描く。ただし，点1を除く。

$\boxed{1}$

解答　(1)　順に　$\frac{21}{5}+\frac{8}{5}i$，$9+16i$　　(2)　$3+\frac{4}{3}i$　　(3)　$4+i$

解説

(1)　点 D を表す複素数は

$$\frac{3\cdot(5+4i)+2\cdot(3-2i)}{2+3}=\frac{21}{5}+\frac{8}{5}i$$

点 E を表す複素数は

$$\frac{-3\cdot(5+4i)+2\cdot(3-2i)}{2-3}=9+16i$$

(2)　点 G を表す複素数は

$$\frac{(5+4i)+(3-2i)+(1+2i)}{3}=3+\frac{4}{3}i$$

(3)　点 $P(a+bi)$（a，b は実数）とすると

$$AP^2=|(a+bi)-(5+4i)|^2=|(a-5)+(b-4)i|^2$$
$$=(a-5)^2+(b-4)^2$$
$$BP^2=|(a+bi)-(3-2i)|^2=|(a-3)+(b+2)i|^2$$
$$=(a-3)^2+(b+2)^2$$
$$CP^2=|(a+bi)-(1+2i)|^2=|(a-1)+(b-2)i|^2$$
$$=(a-1)^2+(b-2)^2$$

$AP=BP$ より $AP^2=BP^2$ であるから

$$(a-5)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$$

整理すると　$a+3b=7$　……①

$BP=CP$ より $BP^2=CP^2$ であるから

$$(a-3)^2+(b+2)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$$

整理すると　$a-2b=2$　……②

①，② を解くと　$a=4$，$b=1$

したがって，求める点 P を表す複素数は　$4+i$

$\boxed{2}$

解答　(1)　点 3 を中心とする半径 1 の円　　(2)　点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

(3)　点 1 を中心とする半径 2 の円　　(4)　2 点 -2，i を結ぶ線分の垂直二等分線

(5)　2 点 $-2-5i$，$1-3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

解説

(1)　点 3 を中心とする半径 1 の円

(2)　点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

(3)　$(z-1)(\overline{z}-1)=4$ より　$|z-1|^2=2^2$

よって　$|z-1|=2$

したがって　点 1 を中心とする半径 2 の円

(4)　2 点 -2，i を結ぶ線分の垂直二等分線

(5)　$|z-(-2-5i)|=|z-(1-3i)|$

よって　2 点 $-2-5i$，$1-3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

$\boxed{3}$

解答　(1)　点 -1 を中心とする半径 3 の円　　(2)　点 $5i$ を中心とする半径 6 の円

解説

(1)　方程式の両辺を平方すると　$9|z|^2=|z-8|^2$

ゆえに　$9z\overline{z}=(z-8)\overline{(z-8)}$　　よって　$9z\overline{z}=(z-8)(\overline{z}-8)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+z+\overline{z}=8$

ゆえに　$(z+1)(\overline{z}+1)-1=8$　　よって　$(z+1)\overline{(z+1)}=9$

すなわち　$|z+1|^2=3^2$　　よって　$|z+1|=3$

ゆえに，点 z の全体は，点 -1 を中心とする半径 3 の円である。

別解 1.　$A(0)$，$B(8)$，$P(z)$ とすると，方程式は　$3AP=BP$

ゆえに　$AP:BP=1:3$

線分 AB を $1:3$ に内分する点を $C(\alpha)$，外分する点を $D(\beta)$ とすると

$$\alpha=\frac{3\cdot0+1\cdot8}{1+3}=2,\quad \beta=\frac{-3\cdot0+1\cdot8}{1-3}=-4$$

よって，点 z の全体は，2 点 2，-4 を直径の両端とする円。

別解 2.　$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$9|z|^2=|z-8|^2$ から

$$9(x^2+y^2)=(x-8)^2+y^2$$

展開して整理すると　$x^2+2x+y^2-8=0$　　変形すると　$(x+1)^2+y^2=3^2$

よって，点 z の全体は，点 -1 を中心とする半径 3 の円。

(2)　方程式の両辺を平方すると　$4|z+4i|^2=9|z-i|^2$

ゆえに　$4(z+4i)\overline{(z+4i)}=9(z-i)\overline{(z-i)}$

よって　$4(z+4i)(\overline{z}-4i)=9(z-i)(\overline{z}+i)$

両辺を展開して整理すると　$z\overline{z}+5iz-5i\overline{z}=11$

ゆえに　$(z-5i)(\overline{z}+5i)-25=11$　　よって　$(z-5i)\overline{(z-5i)}=36$

すなわち　$|z-5i|^2=6^2$　　よって　$|z-5i|=6$

ゆえに，点 z の全体は，点 $5i$ を中心とする半径 6 の円である。

別解 1.　$A(-4i)$，$B(i)$，$P(z)$ とすると，方程式は　$2AP=3BP$

ゆえに　$AP:BP=3:2$

線分 AB を $3:2$ に内分する点を $C(\alpha)$，外分する点を $D(\beta)$ とすると

$$\alpha=\frac{2\cdot(-4i)+3\cdot i}{3+2}=-i,\quad \beta=\frac{-2\cdot(-4i)+3\cdot i}{3-2}=11i$$

よって，点 z の全体は，2 点 $-i$，$11i$ を直径の両端とする円。

別解 2.　$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$4|z+4i|^2=9|z-i|^2$ から

$$4\{x^2+(y+4)^2\}=9\{x^2+(y-1)^2\}$$

展開して整理すると　$x^2+y^2-10y-11=0$　　変形すると　$x^2+(y-5)^2=6^2$

よって，点 z の全体は，点 $5i$ を中心とする半径 6 の円。

$\boxed{4}$

解答　(1)　点 $2i$ を中心とする半径 2 の円　　(2)　点 $-2i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円

(3)　原点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円

解説

点 z が原点中心，半径 2 の円上を動くから　$|z|=2$　……①

(1)　$w=z+2i$ から　$z=w-2i$

これを ① に代入すると　$|w-2i|=2$

よって，点 w は　点 $2i$ を中心とする半径 2 の円　を描く。

(2)　$w=(1-i)z-2i$ から　$z=\frac{w+2i}{1-i}$

これを ① に代入すると　$\left|\frac{w+2i}{1-i}\right|=2$

ゆえに　$|w+2i|=2|1-i|$

$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ であるから　$|w+2i|=2\sqrt{2}$

よって，点 w は　点 $-2i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円　を描く。

(3)　$w=\frac{1}{z}$ から　$z=\frac{1}{w}$

これを ① に代入すると　$\left|\frac{1}{w}\right|=2$　　ゆえに　$|w|=\frac{1}{2}$

よって，点 w は　原点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円　を描く。

$\boxed{5}$

解答　中心が点 i，半径 1 の円；$z=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ のとき最大値 2

解説

$(z-1-i)w=z-i$ から　$(w-1)z=w+(w-1)i$

$w\neq1$ であるから　$z=\frac{w}{w-1}+i$ ……①

$|z|=1$ から　$z\overline{z}=1$ に代入して　$\left(\frac{w}{w-1}+i\right)\left(\frac{\overline{w}}{\overline{w}-1}-i\right)=1$

よって　$w\overline{w}+\{\overline{w}(w-1)-w(\overline{w}-1)\}i=0$　　ゆえに　$w\overline{w}+(w-\overline{w})i=0$

$(w-i)\overline{(w-i)}=1$ から　$|w-i|=1$

よって，点 w の描く曲線は中心が点 i，半径 1 の円である．

これより，$|w|$ が最大となるのは，2 点 0, w を結ぶ線分が円の直径となるときである．

ゆえに，$w=2i$ のとき最大で，最大値は 2 である．

① に $w=2i$ を代入すると　$z=\frac{2i}{2i-1}+i=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

$\boxed{6}$

解答　点 $1+i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円。ただし，点 2 を除く。

解説

$\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$ は実数であるから

$$\overline{\left\{\frac{(i-1)z}{i(z-2)}\right\}}=\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$$

よって　$\frac{(-i-1)\overline{z}}{-i(\overline{z}-2)}=\frac{(i-1)z}{i(z-2)}$

ゆえに　$(-i-1)\overline{z}i(z-2)=-(i-1)zi(\overline{z}-2)$

展開して整理すると　$z\overline{z}+(i-1)z-(i+1)\overline{z}=0$　$(z\neq2)$

よって　$\{z-(i+1)\}\{\overline{z}-(-i+1)\}=2$ より　$\{z-(i+1)\}\overline{\{z-(i+1)\}}=2$

ゆえに　$|z-(i+1)|^2=2$

したがって　$|z-(i+1)|=\sqrt{2}$

よって，点 z は，中心が点 $1+i$，半径が $\sqrt{2}$ の円。ただし，点 2 を除く。

(検討)　点 2 を除くのは，与式の分母を 0 とする場合であるからである。

$\boxed{7}$

解答　点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円　ただし，点 1 を除く

解説

$w=\frac{z}{z+1}$ から　$(1-w)z=w$

$\frac{z}{z+1}=1$ を満たす z は存在しないから　$w \neq 1$

したがって　$z=\frac{w}{1-w}$

z が虚軸上を動くとき　$z+\overline{z}=0$

よって　$\frac{w}{1-w}+\frac{\overline{w}}{1-\overline{w}}=0$

ゆえに　$w(1-\overline{w})+\overline{w}(1-w)=0$

整理すると　$w\overline{w}-\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}\overline{w}=0$

よって　$\left(w-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

すなわち　$\left(w-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(w-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$

よって　$\left|w-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$　　ゆえに　$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

したがって，点 w は

点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く。ただし，点 1 を除く。

1

解答　(1)　$(2a-x)+(2b-y)i$　　(2)　$-i,\ -2+3i,\ 4+i$

解説

(1)　Q$(X+Yi)$ (X，Y は実数) とすると，点 A は線分 PQ の中点であるから

$$\frac{(x+yi)+(X+Yi)}{2}=a+bi$$

すなわち　$\frac{x+X}{2}+\frac{y+Y}{2}i=a+bi$

よって　$\frac{x+X}{2}=a,\ \frac{y+Y}{2}=b$

したがって　$X=2a-x,\ Y=2b-y$

点 Q を表す複素数は　$(2a-x)+(2b-y)i$

(2)　三角形の 3 つの頂点を表す複素数を z_1，z_2，z_3 とし，$\frac{z_1+z_2}{2}=-1+i$，

$\frac{z_2+z_3}{2}=1+2i$，$\frac{z_3+z_1}{2}=2$ とすると

$z_1+z_2=-2+2i$　……①

$z_2+z_3=2+4i$　……②

$z_3+z_1=4$　……③

辺々加えると　$2(z_1+z_2+z_3)=4+6i$

よって　$z_1+z_2+z_3=2+3i$　……④

①，④ から　$z_3=4+i$

②，④ から　$z_1=-i$

③，④ から　$z_2=-2+3i$

したがって，求める複素数は　$-i,\ -2+3i,\ 4+i$

2

解答　(1)　2 点 $-\frac{1}{2}$，$\frac{i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2)　点 $-3+4i$ を中心とする半径 2 の円　　(3)　点 $-\frac{2}{3}$ を中心とする半径 1 の円

(4)　点 $2i$ を通り，虚軸に垂直な直線

解説

(1)　方程式を変形すると　$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\frac{i}{2}\right|$

よって，点 z の全体は　2 点 $-\frac{1}{2}$，$\frac{i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2)　方程式を変形すると　$|z-(-3+4i)|=2$

よって，点 z の全体は　点 $-3+4i$ を中心とする半径 2 の円

(3)　方程式から　$(3z+2)\overline{(3z+2)}=9$　　よって　$|3z+2|^2=3^2$

ゆえに　$|3z+2|=3$　　したがって　$\left|z-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|=1$

よって，点 z の全体は　点 $-\frac{2}{3}$ を中心とする半径 1 の円

(4)　$z=x+yi$ (x，y は実数) とおくと　$\overline{z}=x-yi$

これらを方程式に代入して　$(x+yi)-(x-yi)=4i$

よって，$2yi=4i$ から　$y=2$　　ゆえに　$z=x+2i$

z の虚部は常に 2 であるから，点 z の全体は

点 $2i$ を通り，虚軸に垂直な直線

3

解答　(1)　点 2 を中心とする半径 2 の円　　(2)　点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(3)　点 $2i$ を中心とする半径 3 の円の内部　ただし，境界線を含まない

(4)　A$(-5+2i)$，B(-7) とすると，線分 AB の垂直二等分線および垂直二等分線で分けられる平面の点 B を含む部分

解説

(1)　方程式の両辺を 2 乗すると　$4|z-1|^2=|z+2|^2$

よって　$4(z-1)\overline{(z-1)}=(z+2)\overline{(z+2)}$

ゆえに　$4(z-1)(\overline{z}-1)=(z+2)(\overline{z}+2)$

展開して整理すると　$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$

式を変形すると　$(z-2)(\overline{z}-2)=4$

よって　$(z-2)\overline{(z-2)}=4$　　すなわち　$|z-2|^2=4$

したがって　$|z-2|=2$

よって，点 z 全体は　点 2 を中心とする半径 2 の円

(2)　方程式の両辺を 2 乗すると　$|z-5i|^2=|i+2\overline{z}|^2$

よって　$(z-5i)\overline{(z-5i)}=(i+2\overline{z})\overline{(i+2\overline{z})}$

ゆえに　$(z-5i)(\overline{z}+5i)=(i+2\overline{z})(-i+2z)$

展開して整理すると　$z\overline{z}-iz+i\overline{z}-8=0$

式を変形すると　$(z+i)(\overline{z}-i)=9$

よって　$(z+i)\overline{(z+i)}=9$　　すなわち　$|z+i|^2=9$

したがって　$|z+i|=3$

よって，点 z 全体は　点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(3)　$|z-2i|<3$ を満たす点 z 全体は

点 $2i$ を中心とする半径 3 の円の内部。ただし，境界線を含まない。

(4)　$|z+5-2i|\geqq|z+7|$ から

$|z-(-5+2i)|\geqq|z-(-7)|$　……①

A$(-5+2i)$，B(-7)，P(z) とすると，① は AP≧BP を表す。

方程式 $|z-(-5+2i)|=|z-(-7)|$ を満たす点 z 全体は，線分 AB の垂直二等分線であるから，点 z 全体は，

線分 AB の垂直二等分線および垂直二等分線で分けられる平面の点 B を含む部分

4

解答　(1)　2 点 -1，1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち，虚軸

(2)　原点を中心とする半径 1 の円。ただし，点 1 を除く

解説

$w=\frac{z-i}{z+i}$ から　$w(z+i)=z-i$

ゆえに　$(w-1)z=-i(w+1)$

$\frac{z-i}{z+i}=1$ を満たす z は存在しないから　$w\neq 1$

したがって　$z=\frac{-i(w+1)}{w-1}$　……①

(1)　点 z が複素数平面の原点を中心とした半径 1 の円周上 (ただし，$z=-i$ を除く) を動くから　$|z|=1$

① を代入して　$\left|\frac{-i(w+1)}{w-1}\right|=1$

ゆえに　$\frac{|w+1|}{|w-1|}=1$　　よって　$|w+1|=|w-1|$

したがって，点 w は，2 点 -1，1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち，虚軸を描く。

(2)　点 z が実軸上を動くことから　$z=\overline{z}$

① より

$$\overline{z}=\overline{\left\{\frac{-i(w+1)}{w-1}\right\}}=\frac{\overline{-i}\cdot\overline{w+1}}{\overline{w-1}}=\frac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$$

であるから　$\frac{-i(w+1)}{w-1}=\frac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$

ゆえに　$-(w+1)(\overline{w}-1)=(\overline{w}+1)(w-1)$

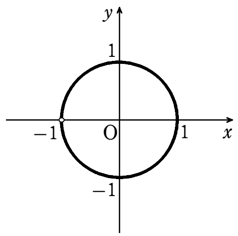
両辺を展開して整理すると　$w\overline{w}=1$

よって　$|w|=1$

したがって，点 w は原点を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，点 1 を除く。

5

解答　[図]　最大値 $\sqrt{2}+1$，最小値 $\sqrt{2}-1$



解説

$w=\frac{z+1}{1-z}$ から　$w(1-z)=z+1$

すなわち　$(w+1)z=w-1$　……①

$w=-1$ とすると，(① の左辺)$=0$，(① の右辺)$=-2$ となり，矛盾する。

よって　$w\neq-1$　……②

したがって，$w+1\neq0$ であるから，① の両辺を $w+1$ で割ると　$z=\frac{w-1}{w+1}$

z は虚軸上にあるから　$z+\overline{z}=0$

ゆえに，$\frac{w-1}{w+1}+\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)}=0$ であるから　$\frac{w-1}{w+1}+\frac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}=0$

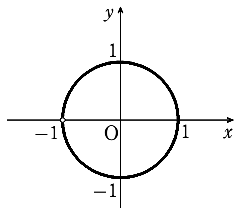
両辺に $(w+1)(\overline{w}+1)$ を掛けると

$(w-1)(\overline{w}+1)+(\overline{w}-1)(w+1)=0$

$2w\overline{w}-2=0$

$|w|^2=1$

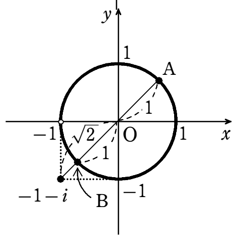
よって　$|w|=1$



これと ② から，w が描く図形を複素数平面上に図示すると，右の図のようになる。

$|w+i+1|=|w-(-1-i)|$ であるから，$|w+i+1|$ は，点 w と点 $-1-i$ の距離に等しい。

また　$|-1-i|=\sqrt{2}$



$|w+i+1|$ が最大となるのは，w が右の図において A の位置にあるときであるから，求める最大値は

$\sqrt{2}+1$

$|w+i+1|$ が最小となるのは，w が右の図において B の位置にあるときであるから，求める最小値は

$\sqrt{2}-1$

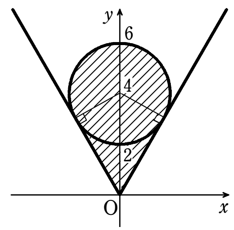
参考　$|w+i+1|$ が最大となるとき　$w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$|w+i+1|$ が最小となるとき　$w=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

1

解答　(1)　[図]　境界線上の点を含む．

(2)　$60°\leqq\arg w\leqq120°$



解説

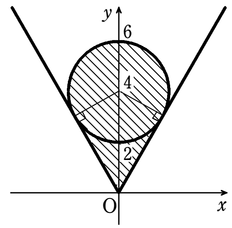
(1)　P(z), Q(w), O(0) とする．

P は中心が点 2，半径 1 の円の内部または円周上を動く．また，点 w は点 z を点 0 の周りに 90° 回転し，a 倍 (OQ$=a$OP) した点である．

よって，点 Q は中心が点 $2ai$，半径 a の円の内部または円周上を動き，$a=0$ のときは原点，$a=2$ のときは中心が点 $4i$，半径 2 の円となる．

$0\leqq a\leqq2$ から，w の存在範囲は右図のようになる．

ただし，境界線上の点を含む．



別解　[1]　$a\neq0$ のとき　$z=\frac{w}{ia}$　$|z-2|\leqq1$ に代入して　$\left|\frac{w}{ia}-2\right|\leqq1$

$|i|=1$ であるから　$|w-2ai|\leqq a$

[2]　$a=0$ のとき　$w=0$

[1], [2] から，$0\leqq a\leqq2$ で a を動かすと　$w=0$ から $|w-4i|\leqq2$ まで動く．

(2)　(1) の図から，w が境界線の 2 直線の線分上にあるときに，偏角は最大または最小となる．

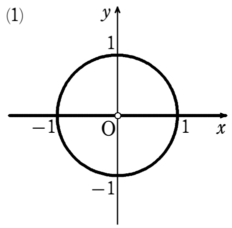
C$(4i)$，接点を T とすると　OC$=4$, CT$=2$, ∠CTO$=90°$ であるから　∠COT$=30°$

よって　$60°\leqq\arg w\leqq120°$

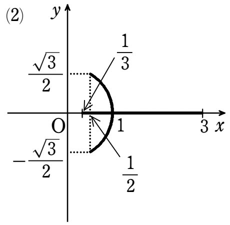
2

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]

(1)



(2)



解説

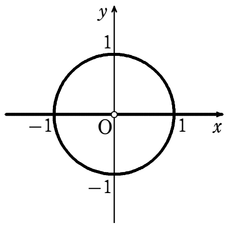
(1) w が実数であるから $w=\overline{w}$

よって $z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ から $(z-\overline{z})\left(1-\frac{1}{z\overline{z}}\right)=0$

ゆえに $z=\overline{z}$，$|z|=1$

条件から $z\neq0$

したがって，右の図のようになる。



(2) [1] $z=\overline{z}$，$z\neq0$ のとき

z は実数で，$1\leqq z+\frac{1}{z}\leqq\frac{10}{3}$

$z>0$ のとき $z\leqq z^2+1\leqq\frac{10}{3}z$

$z^2-z+1=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$z^2-\frac{10}{3}z+1\leqq0$ から $\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-3)\leqq0$

よって $\frac{1}{3}\leqq z\leqq3$

$z<0$ のとき $\frac{10}{3}z\leqq z^2+1\leqq z$

$z^2-z+1>0$ から，これは成り立たない。

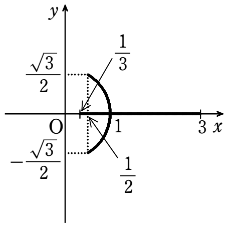
[2] $|z|=1$ のとき

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(-\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ であるから $1\leqq2\cos\theta\leqq\frac{10}{3}$

よって $\frac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$ から $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

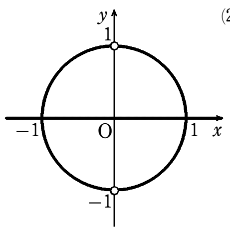
以上から，右の図のようになる。



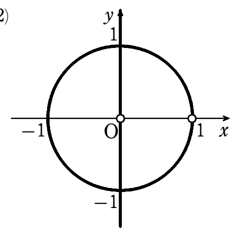
$\boxed{3}$

解答 (1) [図] 点 i，$-i$ を除く　(2) [図] 点 0，1 を除く

(1)



(2)



解説

(1) $z+i\neq0$ かつ $z-i\neq0$ から $z\neq\pm i$

$\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\frac{2z}{z^2+1}$

これが実数のとき，$\frac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)}$ が成り立つ。

ゆえに $\frac{2z}{z^2+1}=\frac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}$

すなわち $\overline{z}|z|^2+z-z|z|^2-\overline{z}=0$

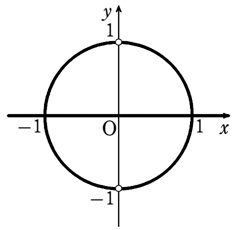
$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

よって $z=\overline{z}$ または $|z|=1$

したがって，z は実数 または $|z|=1$

(ただし，$z\neq\pm i$)

よって，求める図形は右の図のようになる。ただし，点 i，$-i$ を除く。



(2) $w=\frac{z+i}{z-i}$ から $z=\frac{w+1}{w-1}i$ $(w\neq1)$

[1] $z=\overline{z}$ のとき

$\frac{w+1}{w-1}i=\overline{\left(\frac{w+1}{w-1}i\right)}$ から $\frac{w+1}{w-1}i=\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1}(-i)$

ゆえに $(w+1)(\overline{w}-1)+(\overline{w}+1)(w-1)=0$

よって $|w|^2-w+\overline{w}-1+|w|^2-\overline{w}+w-1=0$

すなわち $|w|=1$ $(w\neq1)$

よって，点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。ただし，点 1 を除く。

[2] $|z|=1$ のとき

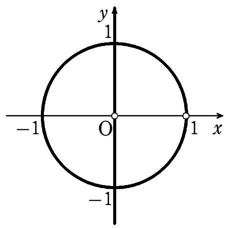
$z\neq\pm i$ から $w\neq0$

$\left|\frac{w+1}{w-1}i\right|=1$ から $|w+1|=|w-1|$

よって，点 w は 2 点 -1，1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸上を動く。ただし，点 0 を除く。

[1]，[2] から，求める図形は右の図のようになる。

ただし，点 0，1 を除く。



$\boxed{4}$

解答 (1) $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{4}$　(2) $t=28$

解説

(1) A(α)，B(β)，P(γ) とする。

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{7+7i-\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}{6-\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}}=\frac{(7+7i)\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}{6\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}$$

$$=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}=\frac{7(1+7i)}{2t(4+3i)}=\frac{7}{2t}\cdot\frac{(1+7i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$=\frac{7}{2t}(1+i)=\frac{7}{\sqrt{2}\,t}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

t は正の実数であるから $\angle\alpha\gamma\beta=\frac{\pi}{4}$

したがって $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{\beta-0}{\alpha-0}=\frac{7+7i-0}{6-0}=\frac{7}{6}(1+i)=\frac{7\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

よって，$\angle\alpha0\beta=\frac{\pi}{4}$ であるから $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{4}$

ゆえに，点 P，O は直線 AB に関して同じ側にあり

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{APB}$

であるから，円周角の定理の逆により，4 点 O，A，B，P は同一円周上にある。

この円の中心を Q(z) とすると $\angle\mathrm{AQB}=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

よって $(7+7i)-z=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)(6-z)$

したがって $z=\frac{7+i}{1-i}=\frac{(7+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=3+4i$

P(w) とすると，線分 OP の長さが最大となるのは，OP が円の直径となるときで

$w=2z=6+8i$

よって，$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i$ から $7(t-3)=\{(t-7)-ti\}(3+4i)$

ゆえに $(t-28)i=0$

t は正の実数であるから $t=28$

1

解答　(1) $\dfrac{3}{4}\pi$　(2) $a=-\dfrac{3}{2}$　(3) $a=1$

解説

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}-i\right)-(-1)}{2i-(-1)}=\dfrac{\dfrac{1}{3}-i}{1+2i}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}-i\right)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}i\right)=\dfrac{1}{3}(-1-i)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$

したがって　$\angle\mathrm{BAC}=\left|-\dfrac{3}{4}\pi\right|=\dfrac{3}{4}\pi$

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{(a-i)-(-1)}{2i-(-1)}=\dfrac{(a+1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{(a-1)-(2a+3)i}{5}$　……①

3 点 A，B，C が一直線上にあるための条件は，① が実数となることであるから

$2a+3=0$　よって　$a=-\dfrac{3}{2}$

(3) 2 直線 AB，AC が垂直であるための条件は，① が純虚数となることであるから

$a-1=0$　かつ　$2a+3\neq0$　よって　$a=1$

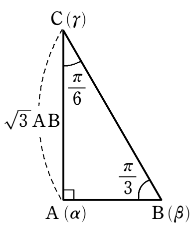
2

解答　(1) $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形

(2) $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形

解説

(1) $\sqrt{3}\,i$ は純虚数であるから，2 直線 AB，AC は垂直に交わり　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$



また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\sqrt{3}$ であるから

$|\gamma-\alpha|=\sqrt{3}|\beta-\alpha|$

$\mathrm{AC}=\sqrt{3}\,\mathrm{AB}$ であるから　$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:\sqrt{3}$

よって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形である。

(2) 等式から　$\gamma-\beta=-i(\alpha-\beta)$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=-i$

これは純虚数であるから，2 直線 BA，BC は垂直に交わり　$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=1$ であるから　$|\gamma-\beta|=|\alpha-\beta|$

ゆえに　BC＝BA

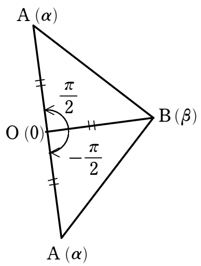
よって，△ABC は $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。

3

解答　(1) 辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形

(2) 辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形

解説



(1) $\alpha^2+\beta^2=0$ から　$(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)=0$

よって　$\alpha=\pm i\beta$

ゆえに　$\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\beta$

または　$\alpha=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\beta$

したがって，点 A は，点 B を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

よって，三角形 OAB は辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形である。

(2) 点 B は点 O と異なるから　$\beta\neq0$

よって，$\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2(\neq0)$ で割って

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+2=0$

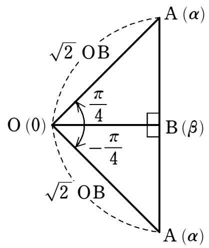
これを $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について解くと　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm i$

ゆえに　$\alpha=(1+i)\beta$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\beta$

または　$\alpha=(1-i)\beta$

$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}\beta$



したがって，点 A は，点 B を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ または $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点である。

よって，三角形 OAB は辺 OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

4

解答　略

解説

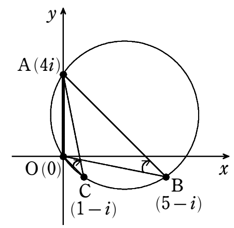
$\alpha=4i$，$\beta=5-i$，$\gamma=1-i$ とすると

$\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\dfrac{4i-(5-i)}{-(5-i)}=\dfrac{5(1-i)}{5-i}=\dfrac{5(1-i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\dfrac{5(6-4i)}{26}$

$=\dfrac{5}{13}(3-2i)$

$\dfrac{\alpha-\gamma}{0-\gamma}=\dfrac{4i-(1-i)}{-(1-i)}=\dfrac{1-5i}{1-i}=\dfrac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{6-4i}{2}$

$=3-2i$



よって　$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\arg\dfrac{\alpha-\gamma}{0-\gamma}$

ゆえに，$\angle 0\beta\alpha=\angle 0\gamma\alpha$ から

$\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{OCA}$

β，γ の実部は正であるから，2 点 B，C は直線 OA に関して同じ側にある。

したがって，4 点 O，A，B，C は 1 つの円周上にある。

5

解答　略

解説

異なる 3 点 α，β，γ が同一直線上にあるから，$\beta-\alpha\neq0$ であり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数である。

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$

すなわち　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$

分母を払って　$(\gamma-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})=(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\beta-\alpha)$

ゆえに　$(\gamma-\alpha)\overline{\beta}-(\gamma-\alpha)\overline{\alpha}=\overline{\gamma}(\beta-\alpha)-\overline{\alpha}(\beta-\alpha)$

したがって　$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$

6

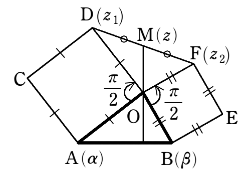
解答　略

解説

O を複素数平面上の原点にとり，

A(α)，B(β)，D(z_1)，F(z_2)，M(z)

とする。



点 D は，点 A を点 O の周りに $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$z_1=\alpha\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}=-i\alpha$

点 F は，点 B を点 O の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$z_2=\beta\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=i\beta$

また，点 M は，線分 DF の中点であるから　$z=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{-i\alpha+i\beta}{2}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}i$

ここで　$\dfrac{z-0}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2}i$

よって，$\dfrac{z-0}{\beta-\alpha}$ は純虚数となるから　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{OM}$

7

解答　略

解説

$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}\iff\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=0$ かつ $\dfrac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq 0$ ……①

が成り立つから，① を示す。

$z=\alpha+\beta+\gamma$ より，$z-\alpha=\beta+\gamma$ であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\overline{\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}\quad\cdots\cdots②$$

ここで，点 A(α)，B(β)，C(γ) は単位円上にあるから

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$$

すなわち　$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=\gamma\overline{\gamma}=1$

よって　$\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，$\overline{\gamma}=\dfrac{1}{\gamma}$

これを ② に代入すると

$$\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\gamma+\beta}=0$$

また，A，B，C，H はすべて異なる点であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\neq 0$$

よって，① が成り立つから　AH⊥BC

同様にして　BH⊥CA

したがって，H は △ABC の垂心である。

1

解答　(1) $\dfrac{\pi}{4}$　　(2) $a=-\dfrac{3}{2}$　　(3) $a=1$

解説

(1) $a=1$ のとき，$\gamma=1-2i$ であるから

$$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\frac{(1-2i)-i}{(-1-i)-i}=\frac{1-3i}{-1-2i}=\frac{(1-3i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}$$
$$=\frac{5+5i}{5}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，∠ABC の大きさは　$\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{(a-2i)-(-1-i)}{i-(-1-i)}=\dfrac{a+1-i}{1+2i}=\dfrac{(a-1)-(2a+3)i}{5}$ ……①

3 点 A，B，C が一直線上にあるための条件は，① が実数となることであるから

$2a+3=0$　　よって　$a=-\dfrac{3}{2}$

(3) 2 直線 AB，AC が垂直であるための条件は，① が純虚数となることであるから

$a-1=0$　かつ　$2a+3\neq 0$　　ゆえに　$a=1$

2

解答　(1) 正三角形　　(2) BA＝BC の直角二等辺三角形

解説

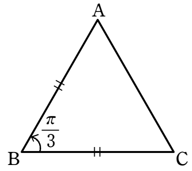
(1) 等式から　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{|\gamma-\beta|}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=1$

よって　BA＝BC

また，$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\angle\mathrm{CBA}=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，△ABC は正三角形である。



(2) 等式から　$\beta-\alpha=(\beta-\gamma)i$

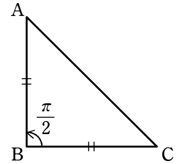
よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=i$

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{|\gamma-\beta|}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=1$

よって　BA＝BC

$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ は純虚数であるから　BC⊥BA

したがって，△ABC は BA＝BC の直角二等辺三角形である。



3

解答　(1) $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形

(2) OA＝AB の直角二等辺三角形

解説

(1) $\alpha\neq 0$ より $\alpha^2\neq 0$ であるから，等式 $3\alpha^2+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で割ると

$3+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=0$　　すなわち　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+3=0$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ について解くと　$\dfrac{\beta}{\alpha}=\pm\sqrt{3}\,i=\sqrt{3}\cdot(\pm i)$

$$=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}\ (複号同順)$$

ゆえに　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$

よって　$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:\sqrt{3}$

また，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数であるから　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに，△OAB は　$\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形　である。

(2) $\alpha\neq 0$ より $\alpha^2\neq 0$ であるから，等式 $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で割ると

$2-2\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}+\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2=0$　　すなわち　$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}+2=0$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ について解くと　$\dfrac{\beta}{\alpha}=1\pm i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ (複号同順)

ゆえに　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$

よって　$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=1:\sqrt{2}$

また，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{4}$ から　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，△OAB は　OA＝AB の直角二等辺三角形　である。

4

解答　略

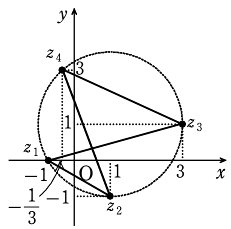
解説

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{4+i}{2-i}=\frac{7+6i}{5}$$

$$\frac{z_3-z_4}{z_2-z_4}=\frac{\frac{10}{3}-2i}{\frac{4}{3}-4i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5-3i}{1-3i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7+6i}{5}$$

よって　$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\div\dfrac{z_3-z_4}{z_2-z_4}=2$

したがって，4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は同一円周上にある。



5

解答　略

解説

C(γ) を A(α) に移す平行移動によって，D(δ) が D′(δ') に移るとすると

$\delta'=\delta+(\alpha-\gamma)$

よって　$\delta'-\alpha=\delta-\gamma$

ゆえに　$\dfrac{\delta'-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$

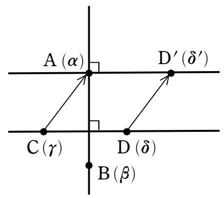
したがって

AB⊥CD $\Longleftrightarrow$ AB⊥AD′

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{\delta'-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数

が成り立つ。



参考　異なる 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) について，次のことも成り立つ。

$$\mathrm{AB} /\!/ \mathrm{CD} \iff \frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha} \text{ が実数}$$

6

解答　略

解説

複素数平面上で，P(0)，A(α)，B(β)，C(γ)とする。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{PC}^2=|\beta-\alpha|^2+|\gamma|^2=(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+|\gamma|^2$$
$$=|\beta|^2-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+|\alpha|^2+|\gamma|^2$$
$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{PB}^2=|\gamma-\alpha|^2+|\beta|^2=(\gamma-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+|\beta|^2$$
$$=|\gamma|^2-\overline{\alpha}\gamma-\alpha\overline{\gamma}+|\alpha|^2+|\beta|^2$$

よって，等式 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{PC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{PB}^2$ から

$$|\beta|^2-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+|\alpha|^2+|\gamma|^2=|\gamma|^2-\overline{\alpha}\gamma-\alpha\overline{\gamma}+|\alpha|^2+|\beta|^2$$

ゆえに　$(\overline{\gamma}-\overline{\beta})\alpha=-(\gamma-\beta)\overline{\alpha}$

$\alpha\neq 0$，$\overline{\alpha}\neq 0$ であるから　$\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=-\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$

すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}\right)}=-\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$

また，B と C は異なる点であるから　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}\neq 0$

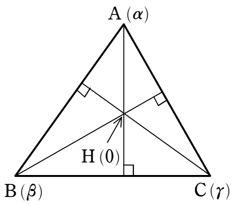
よって，$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$ は純虚数であるから　PA⊥BC

7

解答　略

解説

A，B から対辺に下ろした 2 つの垂線の交点を H とする。



HA⊥BC であるから，$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$ は純虚数である。

すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}\right)}=-\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$

よって　$\alpha\overline{\gamma}-\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta-\overline{\alpha}\gamma$　……①

HB⊥CA であるから，$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}$ は純虚数である。

すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}\right)}=-\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}$

よって　$\beta\overline{\alpha}-\beta\overline{\gamma}=\overline{\beta}\gamma-\overline{\beta}\alpha$　……②

①，② の辺々を加えて整理すると　$(\alpha-\beta)\overline{\gamma}=(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\gamma$

$\gamma\neq 0$，$\overline{\gamma}\neq 0$ であるから

$\dfrac{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}{\overline{\gamma}}=-\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma}$　すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma}\right)}=-\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma}$

また，A と B は異なる点であるから　$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma}\neq 0$

よって，$\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma}$ は純虚数となり，HC⊥AB となる。

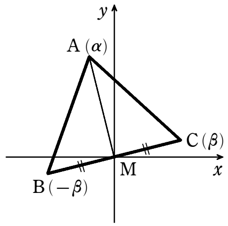
したがって，3 つの垂線 AH，BH，CH は 1 点で交わる。

1

解答　略

解説

複素数平面上において，M を原点とし，点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ α，$-\beta$，β とおく。



このとき

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2$$
$$=|-\beta-\alpha|^2+|\beta-\alpha|^2=|\beta+\alpha|^2+|\beta-\alpha|^2$$
$$=(\beta+\alpha)\overline{(\beta+\alpha)}+(\beta-\alpha)\overline{(\beta-\alpha)}$$
$$=(\beta+\alpha)(\overline{\beta}+\overline{\alpha})+(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$$
$$=\beta\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\alpha}$$
$$=2(\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta})=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

また　$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)=2\{|0-\alpha|^2+|0-(-\beta)|^2\}$
$$=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

よって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

2

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{2+2i-(5-i)}{3+i-(5-i)}=\dfrac{-3+3i}{-2+2i}=\dfrac{3}{2}$

よって，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であるから，3 点 α，β，γ は一直線上にある。

(2)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{-1+3i-(2+i)}{4+4i-(2+i)}=\dfrac{-3+2i}{2+3i}=\dfrac{(-3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$$=\frac{-6+(9+4)i-6i^2}{4-9i^2}=\frac{13i}{13}=i$$

よって，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数であるから，$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$

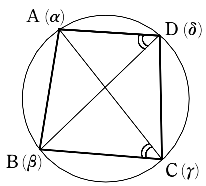
したがって，直線 AB と直線 AC は垂直に交わる。

3

解答　略

解説

円周角の定理から　$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}$



よって　$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\arg\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$

すなわち　$\arg\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}-\arg\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=0$

ゆえに　$\arg\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\right)=0$

したがって，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\div\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ は実数である。

4

解答　略

解説

$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ から　$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$

よって，四角形 ABCD の対角線 AC，BD の中点が一致する。

ゆえに，四角形 ABCD は平行四辺形である。

また，$\delta-\alpha=i(\beta-\alpha)$，$\alpha\neq\beta$ から

$$\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=i \quad \cdots\cdots ①$$

これは純虚数であるから，2 直線 AD，AB は垂直に交わる。

よって　$\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{\pi}{2}$

また，① から　$\left|\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$

ゆえに　$|\delta-\alpha|=|\beta-\alpha|$

したがって　AD＝AB

以上から，四角形 ABCD は正方形である。

5

解答　(1)　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\sqrt{3}\,i$

(2)　$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形

(3)　$\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$

解説

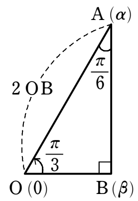
(1)　$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ の両辺を $\beta^2\,(\neq 0)$ で割ると　$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$

したがって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 4}=1\pm\sqrt{3}\,i$

$0<\arg\dfrac{\alpha}{\beta}<\pi$ であるから，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の虚部は正である。

よって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\sqrt{3}\,i$

(2)　(1) より　$\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)\beta=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\beta$



よって，点 A は，点 B を点 O を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，点 O からの距離を 2 倍に拡大した点である。

したがって，△OAB は $\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形である。

(3)　点 C を表す複素数を γ とする。

四角形 OABC が平行四辺形となるとき　OC∥AB，OC＝AB

よって　$\gamma=\beta-\alpha=\beta-(1+\sqrt{3}\,i)\beta=-\sqrt{3}\,i\beta=-\sqrt{3}\,i(1+i)=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$

6

解答　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形

解説

等式を変形すると　$3(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=0$

すなわち　$3(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2=0$

両辺を $(\alpha-\beta)^2\,(\neq 0)$ で割ると　$3+\left(\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}\right)^2=0$

よって　$\left(\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=-3$　　ゆえに　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\pm\sqrt{3}\,i$

第５講　レベルA

これは純虚数であるから，2 直線 BA，BC は垂直に交わり

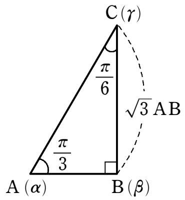
$$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$$

また，$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right|=\sqrt{3}$ であるから　　$|\gamma-\beta|=\sqrt{3}\,|\alpha-\beta|$

すなわち　$\mathrm{BC}=\sqrt{3}\,\mathrm{AB}$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{6}$

の直角三角形である。



第５講　レベルB

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2)　$\mathrm{A}(\alpha),\mathrm{B}(\beta),\mathrm{C}(\gamma)$ とすると，$A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$ の直角三角形

解説

(1)　等式から　$(\alpha-\beta)^3=(-2)^3(\gamma-\beta)^3$　　$\beta\neq\gamma$ から　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^3=(-2)^3$

ゆえに　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}+2\right)\left\{\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}+4\right\}=0$

よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$

(2)　同一直線上にないことから　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\neq-2$

ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=2,\ \arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\pm(60^\circ)$

よって，点 $\mathrm{A}(\alpha),\mathrm{B}(\beta),\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする三角形について $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}=2, B=60^\circ$ であるから，$C=90^\circ$ となる.

したがって，$A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$ の直角三角形である.

$\boxed{2}$

解答　(1)　$z_1=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$z_2=\dfrac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}$

(3)　$z_0=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

解説

(1)　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{4}\cdot2(\cos\theta+i\sin\theta)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

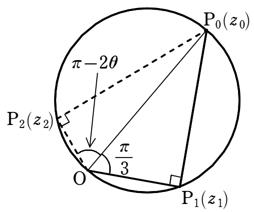
(2)　$z_2=-\dfrac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=-\dfrac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}$

(3)　$\mathrm{OP}_0=2$，$\mathrm{OP}_1=1$，$\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_0=\dfrac{\pi}{3}$ から

$$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{O}=\frac{\pi}{2}$$

よって，4 点 O, P_0，P_1，P_2 が同一円周上にあるのは，

$\angle\mathrm{OP}_2\mathrm{P}_0=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\dfrac{z_0-z_2}{0-z_2}$ が純虚数のとき。



$\dfrac{z_0-z_2}{0-z_2}=\left(z_0+\dfrac{1}{z_0}\right)z_0=z_0{}^2+1$

$=(4\cos2\theta+1)+i\cdot4\sin2\theta$

ゆえに，$4\cos2\theta+1=0$ から　$4(2\cos^2\theta-1)+1=0$　　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{3}{8}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

したがって　$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

章末問題A

$\boxed{1}$

解答　$a=1$，$b=4$

解説

3 点 $\alpha=a+2i$，$\beta=2+bi$，$\gamma=b+8ai$ が一直線上にあるから，

$2+bi=k(a+2i)$，$b+8ai=l(a+2i)$ となる実数 k，l が存在する。

ゆえに　$ak=2$　……①，$2k=b$　……②，$al=b$　……③，$2l=8a$　……④

①，② から　$ab=4$　……⑤，　　③，④ から　$b=4a^2$　……⑥

⑤，⑥ から　$4a^3=4$　　a は実数であるから　$a=1$

これを ⑥ に代入して　$b=4$

$\boxed{2}$

解答　$|\alpha|=1$

解説

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right)=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\cdot\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\alpha}\cdot\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}=|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2$

よって　　$|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=4$

すなわち　$|\alpha|^2+\dfrac{1}{|\alpha|^2}=2$

$|\alpha|^2=t$ とおくと　$t+\dfrac{1}{t}=2$

両辺に t を掛けると　$t^2+1=2t$

よって　　$t^2-2t+1=0$　　すなわち　$(t-1)^2=0$

ゆえに　　$t=1$　　すなわち　$|\alpha|^2=1$

$|\alpha|>0$ であるから　$|\alpha|=1$

$\boxed{3}$

解答　証明略；$\beta=-\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$，$a=\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}-(\alpha+\overline{\alpha})$，$b=\alpha\overline{\alpha}-\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$

解説

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ …… ① が $x=\alpha$ を解にもつから

$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0$　　　よって　$\overline{\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1}=\overline{0}$

ゆえに　$\overline{\alpha^3}+a\overline{\alpha^2}+b\overline{\alpha}+1=0$　　すなわち　$(\overline{\alpha})^3+a(\overline{\alpha})^2+b\overline{\alpha}+1=0$

したがって，① は $x=\overline{\alpha}$ を解にもつ。

また，① の解は α，$\overline{\alpha}$，β であるから，解と係数の関係より

$\alpha+\overline{\alpha}+\beta=-a$ ……②，$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha=b$ ……③，$\alpha\overline{\alpha}\beta=-1$ ……④

$\alpha\neq0$ であるから，④ より　　$\beta=-\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$

② から　　$a=-\beta-(\alpha+\overline{\alpha})=\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}-(\alpha+\overline{\alpha})$

③ から　　$b=\alpha\overline{\alpha}+\beta(\alpha+\overline{\alpha})=\alpha\overline{\alpha}-\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$\overline{\alpha}\beta$ が実数のとき　　$\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\beta$

すなわち　　$\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta$

$\alpha \neq 0$，$\overline{\alpha} \neq 0$ から，両辺を $\alpha\overline{\alpha}$ で割ると

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{すなわち} \qquad \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\beta}{\alpha}$$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから，$\dfrac{\beta}{\alpha}=k$ すなわち $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

逆に，$\beta=k\alpha$ となる実数 k があるとき，$\alpha\neq 0$ から　$\dfrac{\beta}{\alpha}=k$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数であるから

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=\frac{\beta}{\alpha}$$

両辺に $\alpha\overline{\alpha}$ を掛けると　$\alpha\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta$

すなわち　$\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\beta$

したがって，$\overline{\alpha}\beta$ は実数である。

5

解答　(1)　$i-1$　(2)　0　(3)　略

解説

(1)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$

$\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$

よって　$\gamma_3=\alpha^3+\beta^3=(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^3+(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^3=i-1$

(2)　同様にして　$\alpha^{12}=1$，$\beta^{12}=1$

$\alpha\neq 1$，$\beta\neq 1$ であるから　$\alpha^{11}+\alpha^{10}+\cdots\cdots+\alpha+1=0$，$\beta^{11}+\beta^{10}+\cdots\cdots+\beta+1=0$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{12}\gamma_n=\sum_{n=1}^{12}(\alpha^n+\beta^n)=\alpha\sum_{n=1}^{12}\alpha^{n-1}+\beta\sum_{n=1}^{12}\beta^{n-1}=0$

(3)　$\overline{\gamma_q}=\overline{\alpha}^q+\overline{\beta}^q=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^q+\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^q=\dfrac{1}{\alpha^q}+\dfrac{1}{\beta^q}=\dfrac{\alpha^p}{\alpha^{12}}+\dfrac{\beta^p}{\beta^{12}}$

$=\alpha^p+\beta^p=\gamma_p$

よって，γ_p と γ_q は共役な複素数である．

6

解答　(1)　0　(2)　0　(3)　$\dfrac{n}{2}$

解説

(1)　$\theta=\dfrac{360^\circ}{n}$，$n\geqq 3$ であるから　$z\neq 1$，

$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^k=\frac{z(1-z^n)}{1-z}=0$

(2)　$z^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

よって，(1) から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z^k=\sum_{k=1}^{n}(\cos k\theta+i\sin k\theta)=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=0$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=0$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\theta=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\cos 2k\theta}{2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta$

ここで　$w=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ とおく．$2\theta=\dfrac{720^\circ}{n}$，$n\geqq 3$ であるから

$w\neq 1$，$w^n=\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta=\cos 720^\circ+i\sin 720^\circ=1$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w^k=\frac{w(1-w^n)}{1-w}=0$

よって，(2) と同様にして　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=0$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k\theta=\frac{n}{2}$

7

解答　(1)　-1　(2)　$-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ は初項 z，公比 z である等比数列の，初項から第 6 項までの和である。

$z\neq 1$ であるから　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\dfrac{z(1-z^6)}{1-z}=\dfrac{z-z^7}{1-z}$

これと $z^7=1$ から　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\dfrac{z-1}{1-z}=-\dfrac{z-1}{z-1}=-1$

別解　$z^7=1$ から　$z^7-1=0$

左辺を因数分解すると　$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ であるから　$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

すなわち　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$

(2)　$z^7=1$ から　$|z|^7=1$

よって　$|z|=1$

z の偏角は θ であるから　$z=\cos\theta+i\sin\theta$

したがって

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$
$+(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)+(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$
$+(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)+(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$

(1) より，$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$ であるから，実部に着目すると

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta+\cos 6\theta=-1$　……①

また，$z^7=1$ より，$7\theta=2k\pi$（k は整数）と表されるから

$\cos 3\theta=\cos(7\theta-4\theta)=\cos(2k\pi-4\theta)=\cos(-4\theta)=\cos 4\theta$

同様に考えると　$\cos 5\theta=\cos 2\theta$，$\cos 6\theta=\cos\theta$

ゆえに，① から　$2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta=-1$

すなわち　$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta=-\dfrac{1}{2}$

別解　$z^7=1$ から　$z^3=z^{-4}$，$z^5=z^{-2}$，$z^6=z^{-1}$

したがって

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z+z^2+z^{-4}+z^4+z^{-2}+z^{-1}$
$=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$
$+\{\cos(-4\theta)+i\sin(-4\theta)\}+(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$
$+\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}+\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$
$=2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta$

(1) より，$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$ であるから

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta=-\dfrac{1}{2}$

8

解答　(1)　$z_5=\alpha$　(2)　25 個　(3)　-25

解説

(1)　$\alpha=\cos\dfrac{360^\circ}{5}+i\sin\dfrac{360^\circ}{5}$ であるから　$\alpha^5=1$

よって　$z_2=\alpha^3$，$z_3=\alpha^9=\alpha^4$，$z_4=\alpha^{12}=\alpha^2$

ゆえに　$z_5=\alpha^6=\alpha$

(2)　$\alpha=\cos\dfrac{360^\circ}{5}+i\sin\dfrac{360^\circ}{5}$ であるから，α，α^2，α^3，α^4 は互いに相異なる．

(1) から，z_1 の次に α となるのは　z_5

同様の計算をして，z_5 の次に α となるのは $z_{5+4}=z_9$

以下同様に考えて，$z_n=\alpha$ となる n は　$n=4l-3$（l は自然数）

$1\leqq n\leqq 100$ から　$1\leqq l\leqq 25$　よって　25 個

(3)　(2) の考えから，z_n は α，α^3，α^4，α^2 の値を繰り返しとる．

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}z_n=\sum_{l=1}^{25}(\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^2)=25(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$

ここで，$\alpha^5=1$ より　$\alpha^5-1=0$ であるから　$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ であるから　$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

すなわち　$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=-1$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}z_n=25\cdot(-1)=-25$

9

解答　(1)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$n=2m$　(3)　$(m,\ n)=(12,\ 24)$，$(24,\ 48)$

解説

(1)　$|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$|1+\sqrt{3}\,i|=\sqrt{1+3}=2$

よって　$1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$|(1+i)^n|=|1+i|^n=(\sqrt{2})^n=2^{\frac{n}{2}}$，$|(1+\sqrt{3}\,i)^m|=|1+\sqrt{3}\,i|^m=2^m$

$|(1+i)^n|=|(1+\sqrt{3}\,i)^m|$ から　$2^{\frac{n}{2}}=2^m$　よって　$n=2m$

(3)　$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

$(1+\sqrt{3}\,i)^m=2^m\left(\cos\dfrac{m\pi}{3}+i\sin\dfrac{m\pi}{3}\right)$

$(1+i)^n=(1+\sqrt{3}\,i)^m$ から　$|(1+i)^n|=|(1+\sqrt{3}\,i)^m|$

よって，(2) から　$n=2m$　……①

$\arg(1+i)^n=\arg(1+\sqrt{3}\,i)^m$ から

$\dfrac{n\pi}{4}=\dfrac{m\pi}{3}+2k\pi$（$k$ は整数）

すなわち　$3n=4m+24k$　……②

①，②から　$m=12k$，$n=24k$

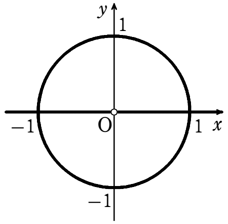
$m>0$ から　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$

更に，$m+n=36k\leqq 100$ から　$k=1,\ 2$

以上から　$(m,\ n)=(12,\ 24),\ (24,\ 48)$

$\boxed{10}$

解答 ［図］



解説

w が実数のとき　$w=\overline{w}$

よって　$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z+\dfrac{1}{z}}$

ゆえに　$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

すなわち　$z^2\overline{z}+\overline{z}=z(\overline{z})^2+z$

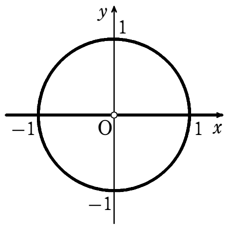
よって　$z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$

ゆえに　$(|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$

すなわち　$|z|^2=1$　または　$z=\overline{z}$

よって　$|z|=1$　または　z は実数

$z\neq 0$ であるから，求める図形は右の図のようになる。



別解　z は0でない複素数であるから，実数 r を用いて

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0)$　と表せる。

このとき　$w=z+\dfrac{1}{z}=z+z^{-1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^{-1}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^{-1}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+\left(r-\dfrac{1}{r}\right)i\sin\theta$

w が実数となるとき　$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=0$

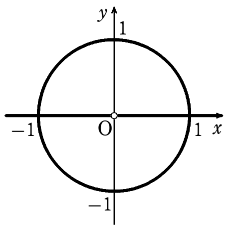
よって　$r-\dfrac{1}{r}=0$　または　$\sin\theta=0$

$r-\dfrac{1}{r}=0$ より　$r^2=1$　　$r>0$ より　$r=1$

$\sin\theta=0$ より　$\cos\theta=\pm1$

よって　$z=\cos\theta+i\sin\theta$　または　$z=\pm r\ (r>0)$

ゆえに，求める図形は右の図のようになる。

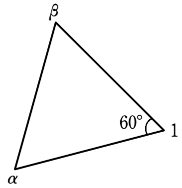


$\boxed{11}$

解答　$k=1$

解説

点1，α，β は時計回りに正三角形の頂点をなすとしてよい．



このとき　$\alpha-1=(\beta-1)(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-1)$

よって　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\beta+\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ …… ①

また，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-1$ …… ②　　$\alpha\beta=k$ …… ③

①，②から　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(-1-\alpha)+\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$

よって　$\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}\alpha=-\sqrt{3}\,i$

ゆえに　$\alpha=-\dfrac{2i}{\sqrt{3}+i}=-\dfrac{(\sqrt{3}-i)i}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

②から　$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，③から　$k=\alpha\beta=\dfrac{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}{4}=1$

$\boxed{12}$

解答　$z_1=6+6i,\ z_2=2+2i$

解説

$\mathrm{P}(z)$ とし，原点Oと点 $\mathrm{A}(3+3i)$ を考える．

$2|z-3-3i|=|z|$ から 2AP=OP

すなわち OP : PA=2 : 1 であるから，点Pの軌跡は

アポロニウスの円で，Pは線分OAを2 : 1の比に内分，

外分する点を直径の両端とする円周上にある．

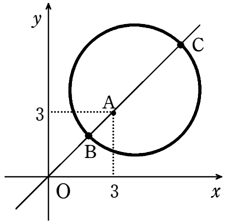
線分OAを2 : 1の比に内分する点をBとすると

点Bを表す複素数は $\dfrac{2(3+3i)}{2+1}=2+2i$

線分OAを2 : 1の比に外分する点をCとすると点Cを

表す複素数は $\dfrac{2(3+3i)}{2-1}=6+6i$

OB≦$|z|$≦OC であるから $z_1=6+6i,\ z_2=2+2i$



$\boxed{13}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　△ABCが正三角形であるとき　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}$　かつ　∠BAC=∠CBA=60°

ゆえに　$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|$　かつ　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$　　ゆえに　$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)$

展開して整理すると　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

(2)　(*)が成り立つとき　$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)$ …… ①

$\alpha=\beta$ のとき

$(\gamma-\alpha)^2=0$　　ゆえに　$\gamma=\alpha$　　よって　$\alpha=\beta=\gamma$

したがって，A=B=C となる．

$\alpha\neq\beta$ のとき

①より，$\beta\neq\gamma$ であるから　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$

よって　$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|$　かつ　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}$　かつ　∠BAC=∠CBA　　よって　△ABC∽△BCA

したがって　∠A=∠B=∠C　　ゆえに，△ABCは正三角形である．

以上から，題意は証明された．

$\boxed{1}$

解答　$\alpha=1$ のとき -1 以外の任意の数，$\alpha=-1$ のとき 1 以外の任意の数，

$\alpha\neq\pm1$ のとき $|z|=1$ $\left(z\neq-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ を満たす数

解説

$\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}$ が実数となるための条件は　$\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}=\overline{\left(\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}\right)}$

よって　$\dfrac{\alpha+z}{1+\alpha z}=\dfrac{\overline{\alpha}+\overline{z}}{1+\overline{\alpha}\,\overline{z}}$

ゆえに　$(\alpha+z)(1+\overline{\alpha}\,\overline{z})=(\overline{\alpha}+\overline{z})(1+\alpha z)$

展開して　$\alpha+\alpha\overline{\alpha}\,\overline{z}+z+\overline{\alpha}z\overline{z}=\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}z+\overline{z}+\alpha z\overline{z}$

$|\alpha|=1$ から　$|\alpha|^2=1$　よって　$\alpha\overline{\alpha}=1$　……①

したがって　$\alpha+\overline{z}+z+\overline{\alpha}|z|^2=\overline{\alpha}+z+\overline{z}+\alpha|z|^2$

整理して　$\alpha-\overline{\alpha}+|z|^2(\overline{\alpha}-\alpha)=0$　ゆえに　$(\alpha-\overline{\alpha})(1-|z|^2)=0$

① から　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$　これを代入して　$\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)(1-|z|^2)=0$

よって　$\dfrac{1}{\alpha}(\alpha^2-1)(1-|z|^2)=0$

ゆえに　$\alpha=\pm1$　または　$|z|=1$

$1+\alpha z\neq0$ であるから，題意を満たす z は次のようになる。

$\alpha=1$ のとき　-1 以外の任意の数

$\alpha=-1$ のとき　1 以外の任意の数

$\alpha\neq\pm1$ のとき　$|z|=1$ $\left(z\neq-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ を満たす数

$\boxed{2}$

解答　$z=\pm1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

解説

$|z|=1$ から　$z\overline{z}=1$　……①　　$\dfrac{z+1}{z^2}=\dfrac{1}{z}+\left(\dfrac{1}{z}\right)^2$　……②

① から　$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$　これを ② に代入して　$\dfrac{z+1}{z^2}=\overline{z}+(\overline{z})^2$

よって，$\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数であるための条件は

$\overline{\overline{z}+(\overline{z})^2}=\overline{z}+(\overline{z})^2$　すなわち　$z+z^2=\overline{z}+(\overline{z})^2$

整理すると　$z-\overline{z}+z^2-(\overline{z})^2=0$　ゆえに　$(z-\overline{z})(1+z+\overline{z})=0$

よって　$z-\overline{z}=0$　または　$1+z+\overline{z}=0$

[1]　$z-\overline{z}=0$ のとき　$\overline{z}=z$

ゆえに，z は実数であるから，$|z|=1$ より　$z=\pm1$

[2]　$1+z+\overline{z}=0$ のとき　$z+\overline{z}=-1$

また，① から　$z\overline{z}=1$

ゆえに，z，$\overline{z}$ は 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

この方程式を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[1]，[2] から　$z=\pm1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

別解　① から　$\dfrac{1}{\overline{z}}=z$　よって　$\overline{\left(\dfrac{z+1}{z^2}\right)}=\dfrac{\overline{z}+1}{(\overline{z})^2}=\dfrac{1}{\overline{z}}+\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^2=z+z^2$

よって，$\dfrac{z+1}{z^2}$ が実数であるための条件は　$z+z^2=\dfrac{z+1}{z^2}$

整理すると　$z^4+z^3-z-1=0$

左辺を因数分解して　$(z+1)(z-1)(z^2+z+1)=0$

これを解いて　$z=\pm1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\boxed{3}$

解答　[略]

解説

$$\begin{aligned}2|1+z|^2-(1+|z|)^2&=2(1+z)(1+\overline{z})-(1+2|z|+|z|^2)\\&=2+2\overline{z}+2z+2|z|^2-1-2|z|-|z|^2\\&=|z|^2-2|z|+1+2z+2\overline{z}=(|z|-1)^2+2(z+\overline{z})\end{aligned}$$

$z+\overline{z}$ は実数であり，また $x\geqq0$ であるから　$z+\overline{z}\geqq0$

ゆえに　$2|1+z|^2-(1+|z|)^2\geqq0$　よって　$|1+z|^2\geqq\dfrac{(1+|z|)^2}{2}$

$|1+z|>0$，$1+|z|>0$ であるから　$|1+z|\geqq\dfrac{1+|z|}{\sqrt{2}}$

等号は $|z|=1$ かつ $z+\overline{z}=0$ のとき成り立つ.

$z+\overline{z}=0$ から，z は純虚数または 0 である.

このうち $|z|=1$ を満たすものは $z=\pm i$　すなわち　$z=\pm i$ のとき等号が成り立つ.

$\boxed{4}$

解答　$\sqrt{2}-1\leqq r\leqq\sqrt{2}+1$

解説

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

よって，点 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ と実軸との距離は　$\left|\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\right|$

ゆえに，求める条件は，$\left|\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\right|\leqq2$ が任意の角 θ に対して成り立つことである。

$|\sin\theta|\leqq1$ であるから　$\left|r-\dfrac{1}{r}\right|\leqq2$　両辺を 2 乗して　$r^2-2+\dfrac{1}{r^2}\leqq4$

$r^2>0$ であるから　$r^4-6r^2+1\leqq0$　したがって　$3-2\sqrt{2}\leqq r^2\leqq3+2\sqrt{2}$

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ で，$r>0$ であるから

$\sqrt{2}-1\leqq r\leqq\sqrt{2}+1$

$\boxed{5}$

解答　(1)　-1　(2)　1　(3)　3　(4)　-2

解説

(1)　$\alpha^7=\cos360^\circ+i\sin360^\circ=1$ であるから　$\alpha^7-1=0$

$\alpha^7-1=(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq1$ であるから　$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=-1$

(2)　(与式)$=\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\alpha-\alpha^7}=\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha}=1$

(3)　(与式)$=\left(\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}\right)+\left(\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}\right)+\left(\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}\right)$

ここで，(2) と同様に　$\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}=\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}=1$，

$\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}=\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{\alpha^3}{\alpha^3-1}=1$

ゆえに　(与式)$=1+1+1=3$

(4)　(与式)$=\left(-\alpha-1+\dfrac{1}{1-\alpha}\right)+\left(-\alpha^2-1+\dfrac{1}{1-\alpha^2}\right)+\left(-\alpha^3-1+\dfrac{1}{1-\alpha^3}\right)$

$+\left(-\alpha^4-1+\dfrac{1}{1-\alpha^4}\right)+\left(-\alpha^5-1+\dfrac{1}{1-\alpha^5}\right)+\left(-\alpha^6-1+\dfrac{1}{1-\alpha^6}\right)$

$=-6-(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)+\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}$

$+\dfrac{1}{1-\alpha^5}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

$=-6-(-1)+3=-2$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$z=2\sin\theta\left\{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$　(2)　1001 個

解説

(1)　$z=1-(\cos2\theta+i\sin2\theta)=1-\cos2\theta-i\sin2\theta$

$=2\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta)$

$0<\theta<\pi$ であるから　$\sin\theta>0$

また　$\sin\theta=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$-\cos\theta=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって　$z=2\sin\theta\left\{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

(2)　(1) から

$z^{2001}=(2\sin\theta)^{2001}\left[\cos\left\{2001\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}+i\sin\left\{2001\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}\right]$

$=(2\sin\theta)^{2001}\left\{\cos\left(2001\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2001\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

$(2\sin\theta)^{2001}>0$ であるから，求める条件は　$2001\theta-\dfrac{\pi}{2}=2n\pi$（$n$ は整数）……①

$0<\theta<\pi$ であるから　$-\dfrac{\pi}{2}<2001\theta-\dfrac{\pi}{2}<1000\times2\pi+\dfrac{\pi}{2}$

① から　$-\dfrac{1}{4}<n<1000+\dfrac{1}{4}$

これを満たす整数 n は　$n=0$，1，2，……，1000

したがって，$2001\theta-\dfrac{\pi}{2}=2n\pi$ となる整数 n は　1001 個。

すなわち，求める θ の値は全部で 1001 個。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$

(2)　$\alpha+\overline{\alpha}=-1$，$\alpha\overline{\alpha}=2$，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}$　(3)　7

解説

(1)　ド・モアブルの定理から　$z^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

よって　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\dfrac{z(1-z^6)}{1-z}=\dfrac{z-z^7}{1-z}=\dfrac{z-1}{1-z}=-1$

(2)　$|z|=1$ であるから，$|z|^2=z\overline{z}$ より　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

ゆえに，$k=1$，2，……，6 に対し

$\overline{z^k}=(\overline{z})^k=\dfrac{1}{z^k}=\dfrac{z^7}{z^k}=z^{7-k}$

が成り立つ。

よって　$\overline{\alpha}=\overline{z+z^2+z^4}=z^6+z^5+z^3$

ゆえに

$\alpha+\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)+(z^6+z^5+z^3)=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$

$\alpha\overline{\alpha}=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)=z^7+z^8+z^{10}+z^6+z^7+z^9+z^4+z^5+z^7$

$=1+z+z^3+z^6+1+z^2+z^4+z^5+1=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=2$

よって，解と係数の関係から，α，$\overline{\alpha}$ は2次方程式 $x^2+x+2=0$ の解である。

これを解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

ここで，$\sin\dfrac{8}{7}\pi=-\sin\dfrac{\pi}{7}$ であり

$\sin\dfrac{2}{7}\pi>\sin\dfrac{\pi}{7}$，$\sin\dfrac{4}{7}\pi>0$

であるから，ド・モアブルの定理より α の虚部は

$\sin\dfrac{2}{7}\pi+\sin\dfrac{4}{7}\pi+\sin\dfrac{8}{7}\pi=\sin\dfrac{2}{7}\pi+\sin\dfrac{4}{7}\pi-\sin\dfrac{\pi}{7}>0$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}$

(3)　(2) の結果から　$\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}$

$\beta=(1-z)(1-z^2)(1-z^4)$ とおくと

$\overline{\beta}=(1-\overline{z})(1-\overline{z^2})(1-\overline{z^4})=(1-z^6)(1-z^5)(1-z^3)$

ゆえに　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=\beta\overline{\beta}$

ここで

$\beta=\{1-(z+z^2+z^4)+(z^3+z^6+z^5)-z^7\}=-\alpha+\overline{\alpha}=-\dfrac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}$

$=-\sqrt{7}\,i$

であるから　$\overline{\beta}=\sqrt{7}\,i$

したがって，求める値は　$\beta\overline{\beta}=(-\sqrt{7}\,i)\cdot\sqrt{7}\,i=7$

別解　z^k ($k=1$，2，……，6) は，方程式

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

の解である。特に $k=1$，2，……，6 のとき $z^k\neq1$ で，各 z^k はすべて異なるから

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$

ここに $x=1$ を代入して

$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=1+1+1+1+1+1+1=7$

8

解答　(1)　$\alpha^2=-4\sqrt{3}+4i$　(2)　$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

(3)　$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{36}\pi+i\sin\dfrac{5}{36}\pi\right)$，$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{29}{36}\pi+i\sin\dfrac{29}{36}\pi\right)$，

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{53}{36}\pi+i\sin\dfrac{53}{36}\pi\right)$

(4)　9

解説

(1)　$\alpha^2=\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\}^2=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i-(\sqrt{3}+1)^2$

$=-4\sqrt{3}+4i$

(2)　$|\alpha^2|=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+4^2}=8$ であるから

$\alpha^2=8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$　……①

$|\alpha|^2=|\alpha^2|=8$ であるから　$|\alpha|=2\sqrt{2}$

よって，α の偏角を θ とすると

$\alpha=2\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

ド・モアブルの定理から

$\alpha^2=8(\cos2\theta+i\sin2\theta)$　……②

$0\leqq\theta<2\pi$ より $0\leqq2\theta<4\pi$ であるから，①，②より　$2\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{5}{6}\pi+2\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{17}{12}\pi$

α の虚部は正であるから　$\theta=\dfrac{5}{12}\pi$

よって　$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$

(3)　$z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ $(0\leqq\phi<2\pi)$ とおくと，ド・モアブルの定理から

$z^3=r^3(\cos3\phi+i\sin3\phi)$

$z^3=\alpha$ のとき　$r^3=2\sqrt{2}$

r は正の実数であるから　$r=\sqrt{2}$

また，$0\leqq\phi<2\pi$ より $0\leqq3\phi<6\pi$ であるから，(1) より

$3\phi=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{5}{12}\pi+2\pi$，$\dfrac{5}{12}\pi+4\pi$

ゆえに　$\phi=\dfrac{5}{36}\pi$，$\dfrac{29}{36}\pi$，$\dfrac{53}{36}\pi$

よって，方程式 $z^3=\alpha$ の解は

$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{36}\pi+i\sin\dfrac{5}{36}\pi\right)$，$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{29}{36}\pi+i\sin\dfrac{29}{36}\pi\right)$，

$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{53}{36}\pi+i\sin\dfrac{53}{36}\pi\right)$

(4)　(2) とド・モアブルの定理により　$\alpha^n=(2\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{5n}{12}\pi+i\sin\dfrac{5n}{12}\pi\right)$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$w_n=\sqrt{2}(2\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{5n+3}{12}\pi+i\sin\dfrac{5n+3}{12}\pi\right)$

w_n が実数となるとき，$\dfrac{5n+3}{12}$ は整数であるから，自然数 n は 3 の倍数でなければならない。

$n=3$，6 のとき，$\dfrac{5n+3}{12}$ は自然数ではないので不適。

$n=9$ のとき，$\dfrac{5n+3}{12}=4$ であるから条件を満たす。

したがって，求める最小の自然数 n は　$n=9$

9

解答　(1)　$z_2=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$z_3=1+\sqrt{3}\,i$　(2)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(3)　$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(4)　$n=6k+5$　(k は 0 以上の整数)

解説

(1)　$z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_1+1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}+1=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$

$z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_2+1=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}+1$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}\,i+3\sqrt{3}\,i-3}{4}+1=1+\sqrt{3}\,i$

(2)　$z_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_n+1$ ……①，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}(z_n-\alpha)$ ……② とする。

①−② から　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\alpha+1$

よって　$\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}\,i}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(3)　(2) から　$z_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\left(z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

よって　$z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}\left(z_1-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(4)　$-\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると

$\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}=-1$　……③

$\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1}=\cos\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\times(n-1)\right\}+i\sin\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\times(n-1)\right\}$

また　$-1=\cos\pi+i\sin\pi$

よって，③ から　$-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\times(n-1)=\pi+2k\pi$　(k は整数)

すなわち　$n=6k+5$

したがって，求める自然数 n は　$n=6k+5$　(k は 0 以上の整数)

10

解答　$c=1$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2c-3$　……①

また，条件から $\dfrac{\alpha+\beta+c^2}{3}=0$ ……②

①，② から　$c^2+2c-3=0$　よって　$c=1$，-3

$c=1$ のとき　$x^2+x+6=0$ となり，この方程式は虚数解 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$ をもつから適する。

$c=-3$ のとき　$x^2+9x+14=0$ となり，解は実数 $(x=-2,\ -7)$ であるから三角形ができず，不適。

以上から　$c=1$

11

解答　(1)　$z_n=4(1+i)^{n-1}-1$　　(2)　略　　(3)　2^{n+2}

解説

(1)　漸化式を変形すると　$z_{n+1}+1=(1+i)(z_n+1)$

また　$z_1+1=3+1=4$

よって，数列 $\{z_n+1\}$ は初項 4，公比 $1+i$ の等比数列である。

ゆえに　$z_n+1=4\cdot(1+i)^{n-1}$

よって　$z_n=4(1+i)^{n-1}-1$

(2)　$z_{8m-7}=4(1+i)^{8m-8}-1=4\{(1+i)^8\}^{m-1}-1$

ここで　$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=2^4$

よって　$z_{8m-7}=4\cdot(2^4)^{m-1}-1=2^{4m-2}-1$

(3)　(1) から　$|z_{n+1}-z_n|=|4(1+i)^n-4(1+i)^{n-1}|=4|(1+i)^{n-1}|=4(\sqrt{2})^{n-1}$

よって　$|z_{n+2}-z_{n+1}|=4(\sqrt{2})^n$

ここで

$$\arg\frac{z_n-z_{n+1}}{z_{n+2}-z_{n+1}}=\arg\frac{(1+i)^{n-1}-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}-(1+i)^n}=\arg\frac{1-(1+i)}{(1+i)^2-(1+i)}$$

$$=\arg\frac{1-1-i}{2i-1-i}=\arg\frac{-i}{i-1}=\arg\frac{i}{1-i}=90^\circ+45^\circ=135^\circ$$

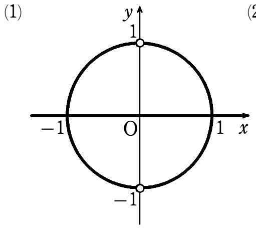
したがって，求める面積は

$$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=\frac{1}{2}\times4(\sqrt{2})^{n-1}\times4(\sqrt{2})^n\sin135^\circ=8\times2^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{n+2}$$

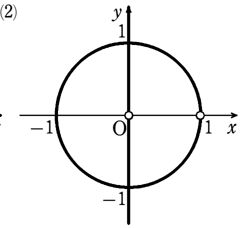
12

解答　(1)　[図] 点 i，$-i$ を除く　　(2)　[図] 点 0，1 を除く

(1)



(2)

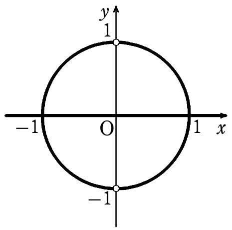


解説

(1)　$z+i\neq0$ かつ $z-i\neq0$ から　$z\neq\pm i$

$$\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\frac{2z}{z^2+1}$$

これが実数のとき，$\dfrac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\dfrac{2z}{z^2+1}\right)}$ が成り立つ。



よって　$\dfrac{2z}{z^2+1}=\dfrac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}$

すなわち　$\overline{z}|z|^2+z-z|z|^2-\overline{z}=0$

ゆえに　$(z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

よって　$z=\overline{z}$　または　$|z|=1$

したがって，z は実数，または　$|z|=1$

(ただし，$z\neq\pm i$)

よって，求める図形は右図のようになる。ただし，点 i，$-i$ を除く。

(2)　$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ から　$z=\dfrac{w+1}{w-1}i$ $(w\neq1)$

[1]　$z=\overline{z}$ のとき

$\dfrac{w+1}{w-1}i=\overline{\left(\dfrac{w+1}{w-1}i\right)}$ から　$\dfrac{w+1}{w-1}i=\dfrac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1}(-i)$

ゆえに　$(w+1)(\overline{w}-1)+(\overline{w}+1)(w-1)=0$

よって　$|w|^2-w+\overline{w}-1+|w|^2-\overline{w}+w-1=0$

すなわち　$|w|=1$ $(w\neq1)$

よって，点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。ただし，点 1 を除く。

[2]　$|z|=1$ のとき

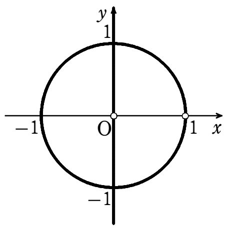
$z\neq\pm i$ から　$w\neq0$

$\left|\dfrac{w+1}{w-1}i\right|=1$ から　$|w+1|=|w-1|$

よって，点 w は 2 点 -1，1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸上を動く。ただし，点 O を除く。

[1]，[2] から，求める図形は右図のようになる。

ただし，点 0，1 を除く。



13

解答　略

解説

[1]　$p\Longrightarrow q$ の証明

複号はそれぞれ同順とする。

点 z_1，z_2，z_3 は点 z_1 を原点を中心として，それぞれ $\pm\dfrac{2}{3}\pi$，$\mp\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転したものであるから　$z_1+z_2+z_3$

$$=z_1+\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\}z_1+\left\{\cos\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

$$=z_1+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1+\left(-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1=0$$

[2]　$q\Longrightarrow p$ の証明

$z_1+z_2+z_3=0$ のとき，$z_1+z_2=-z_3$ であるから　$|z_1+z_2|=|-z_3|$

すなわち　$|z_1+z_2|=|z_3|$

両辺を 2 乗すると　$|z_1+z_2|^2=|z_3|^2$

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$，$|z_3|=1$ であるから

$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=1$　　ゆえに　$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1$

$z_1\overline{z_1}=|z_1|^2=1$，$z_2\overline{z_2}=|z_2|^2=1$ であるから　$1+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+1=1$

よって　$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1$

このとき　$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2$

$=1-(-1)+1=3$

すなわち　$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

同様にして，$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，$|z_3-z_1|=\sqrt{3}$ も示される。

以上から　$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

したがって，3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形は正三角形である。

[1]，[2] から，条件 p と q は同値である。

14

解答　(1)　略　　(2)　$n=4$，$a=2^{\frac{1}{18}}$ または $a=2^{-\frac{1}{18}}$

解説

(1)　$\arg z_{n+1}=\arg z_n+(2n+1)\arg w$ であるから

$n\geqq2$ のとき　$\arg z_n=\arg z_1+\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\right\}\arg w=n^2\arg w=\dfrac{n^2}{36}\pi$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，z_n が実数 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{n^2}{36}\pi=k\pi$ (k は整数) $\Longleftrightarrow$ $n^2=36k$

ゆえに，z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることである。

(2)　$\arg\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=(2n+1)\arg w=\dfrac{2n+1}{36}\pi$

$1\leqq n\leqq17$ であるから　$\dfrac{\pi}{12}\leqq\dfrac{2n+1}{36}\pi\leqq\dfrac{35}{36}\pi$

$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形であるから

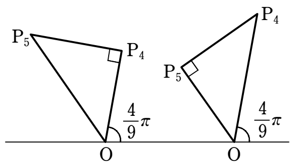
$\dfrac{2n+1}{36}\pi=\dfrac{\pi}{4}$ または $\dfrac{\pi}{2}$

n は正の整数であるから　$n=4$

よって　$\angle \mathrm{P}_4\mathrm{OP}_5=\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$|w|^9=\sqrt{2}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$|w|=a$ であるから　$a=2^{\frac{1}{18}}$ または $a=2^{-\frac{1}{18}}$



1

解答 $a=-3,\ -1+\sqrt{2}$

解説

虚軸上の複素数解は $x=yi$ (y は実数) とおける.

与式に代入すると

$$(yi)^4-(yi)^3+(yi)^2-(a+2)yi-a-3=0$$

ゆえに $y^4-y^2-a-3+\{y^3-(a+2)y\}i=0$

a, y は実数であるから

$$\begin{cases} y^4-y^2-a-3=0 & \cdots\cdots ① \\ y^3-(a+2)y=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② から $y=0$ または $y^2=a+2$

$y=0$ のとき ① から $a=-3$

$y^2=a+2$ のとき ① から $(a+2)^2-(a+2)-a-3=0$

ゆえに $a^2+2a-1=0$

$y^2=a+2\geqq 0$ であるから $a=-1+\sqrt{2}$

以上から $a=-3,\ -1+\sqrt{2}$

2

解答 (1) 略 (2) $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ -2)$

解説

(1) α が $x^3+px^2+qx+r=0$ の解であるから

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

$$\overline{\alpha}^3+p\overline{\alpha}^2+q\overline{\alpha}+r=\overline{\alpha^3}+\overline{p\alpha^2}+\overline{q\alpha}+\overline{r}$$

$$=\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}=\overline{0}=0$$

$\beta\neq\alpha$ であるから $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つ。

(2) 点 γ は実軸上にあり, 2 点 α, β は実軸に関して対称な位置にある。α の虚部を正, β の虚部を負とすると, 3 点 α, β, γ が 1 辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形をなすから

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\quad\cdots\cdots ①$$

または $(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\quad\cdots\cdots ②$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ から $\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)-3=0\quad\cdots\cdots ③$

① を ③ に代入すると $\left(\gamma+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}+\gamma(2\gamma+3)-3=0$ ゆえに $\gamma=0,\ -2$

$p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(3\gamma+3)$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ から $q=3$,

$r=-\alpha\beta\gamma=-(\gamma^2+3\gamma+3)\gamma$

よって $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ 2)$

② を ③ に代入すると $\left(\gamma-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}+\gamma(2\gamma-3)-3=0$ ゆえに $\gamma=0,\ 2$

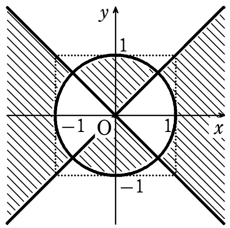
$p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(3\gamma-3)$, $q=3$, $r=-\alpha\beta\gamma=-(\gamma^2-3\gamma+3)\gamma$

よって $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ -2)$

以上から $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ 2),\ (3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ -2)$

3

解答 [図] 境界線上の点を含まない



解説

w の実部が正であるとき $w+\overline{w}>0$

$$w+\overline{w}=z^2-\frac{1}{z^2}+(\overline{z})^2-\frac{1}{(\overline{z})^2}=\frac{|z|^4z^2-(\overline{z})^2+|z|^4(\overline{z})^2-z^2}{|z|^4}$$

$$=\frac{|z|^4\{z^2+(\overline{z})^2\}-\{z^2+(\overline{z})^2\}}{|z|^4}=\frac{\{z^2+(\overline{z})^2\}(|z|^2+1)(|z|^2-1)}{|z|^4}$$

$|z|^2+1>0$ であるから $\{z^2+(\overline{z})^2\}(|z|^2-1)>0,\ |z|\neq 0$

$z=x+yi$ とすると $z^2+(\overline{z})^2=2(x^2-y^2)$ であるから

$$(x+y)(x-y)(x^2+y^2-1)>0$$

[1] $x^2+y^2-1>0$ のとき $(x+y)(x-y)>0$ から

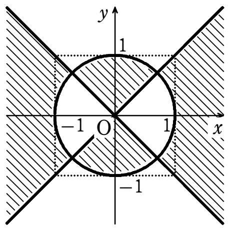
$y<x,\ y>-x$ または $y>x,\ y<-x$

[2] $x^2+y^2-1<0$ のとき $(x+y)(x-y)<0$ から

$y<x,\ y<-x$ または $y>x,\ y>-x$

よって, 求める z の範囲は右図のようになる.

ただし, 境界線上の点を含まない.



4

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $|u_i|^2=u_i\overline{u_i}=(z_i-b^{-1}\alpha w_i)\overline{(z_i-b^{-1}\alpha w_i)}$

$$=(z_i-b^{-1}\alpha w_i)(\overline{z_i}-b^{-1}\overline{\alpha}\,\overline{w_i})$$

$$=|z_i|^2-b^{-1}(\overline{\alpha}z_i\overline{w_i}+\alpha\overline{z_i}w_i)+b^{-2}|\alpha|^2|w_i|^2$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\{|z_i|^2-b^{-1}(\overline{\alpha}z_i\overline{w_i}+\alpha\overline{z_i}w_i)+b^{-2}|\alpha|^2|w_i|^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-b^{-1}(\overline{\alpha}\alpha+\alpha\overline{\alpha})+b^{-2}|\alpha|^2b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-2b^{-1}|\alpha|^2+b^{-1}|\alpha|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-\frac{|\alpha|^2}{b}$$

ゆえに, 与えられた等式は成り立つ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\geqq 0$ であるから, (1) より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2-\frac{|\alpha|^2}{b}\geqq 0\cdots\cdots ①$

$b>0$ であるから, ① の両辺に b を掛けて整理すると $|\alpha|^2\leqq\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)b$

$|\alpha|\geqq 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\geqq 0$ であるから $|\alpha|\leqq\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}\sqrt{b}$

ゆえに, 与えられた不等式は成り立つ。

5

解答 (ア) $r+\dfrac{1}{r}$ (イ) $r^n+\dfrac{1}{r^n}$ (ウ) $r^n-\dfrac{1}{r^n}$ (エ) $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

(オ) $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

解説

$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

$$\frac{1}{\alpha^n}=(\alpha^n)^{-1}=(r^n)^{-1}(\cos n\theta+i\sin n\theta)^{-1}=\frac{1}{r^n}\{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}$$

$$=\frac{1}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

したがって $z_n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\dfrac{1}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

$$=\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)\cos n\theta+i\left(r^n-\frac{1}{r^n}\right)\sin n\theta$$

よって $f_1(r)={}^{ア}r+\dfrac{1}{r}$, $f_n(r)={}^{イ}r^n+\dfrac{1}{r^n}$, $g_n(r)={}^{ウ}r^n-\dfrac{1}{r^n}$

$z_1=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ であるから

$$w=z_1+\frac{1}{2}i=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left\{\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta+\frac{1}{2}\right\}$$

ゆえに, w の虚部の絶対値が 1 以下となるとき

$$\left|\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta+\frac{1}{2}\right|\leqq 1$$

$$-1\leqq\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta+\frac{1}{2}\leqq 1$$

$$-\frac{3}{2}\leqq\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\leqq\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots ①$$

θ がすべての実数を動くとき, $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ の最大値は $\left|r-\dfrac{1}{r}\right|$, 最小値は $-\left|r-\dfrac{1}{r}\right|$

である。

ゆえに, 実数 θ のどのような値に対しても, w の虚部の絶対値が 1 以下となるための

条件は, ① から $-\dfrac{3}{2}\leqq-\left|r-\dfrac{1}{r}\right|$ かつ $\left|r-\dfrac{1}{r}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

すなわち $\left|r-\dfrac{1}{r}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

$\left|r-\dfrac{1}{r}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$ から $-\dfrac{1}{2}\leqq r-\dfrac{1}{r}\leqq\dfrac{1}{2}$

両辺に $2r$ (>0) を掛けると $-r\leqq 2r^2-2\leqq r$

$-r\leqq 2r^2-2$ から $2r^2+r-2\geqq 0$

これを $r>0$ の範囲で解くと $r\geqq\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\quad\cdots\cdots ②$

$2r^2-2\leqq r$ から $2r^2-r-2\leqq 0$

これを $r>0$ の範囲で解くと $0<r\leqq\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\quad\cdots\cdots ③$

②，③ から，求める r の値の範囲は　${}^{エ}\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \leqq r \leqq {}^{オ}\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

正三角形 ABC の 3 頂点がすべて有理点であると仮定する。

複素数平面上で，A(0)，B$(a+bi)$，C$(c+di)$（a，b，c，d は有理数，$ab \neq 0$ かつ $cd \neq 0$）とおける。

A の周りに B を $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させると，C に一致するから

$$c+di=(a+bi)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}=(a+bi)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a\mp\sqrt{3}\,b)+(b\pm\sqrt{3}\,a)i\}\qquad\text{（複号同順）}$$

よって　$2c-a=\pm\sqrt{3}\,b$，$2d-b=\pm\sqrt{3}\,a$

$2c-a$，$2d-b$ は有理数で，$\pm\sqrt{3}\,b$，$\pm\sqrt{3}\,a$ は無理数であるから，これは矛盾する。

したがって，3 つの頂点が有理点である正三角形は存在しない。

$\boxed{7}$

解答　(1)　略　　(2)　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　　(3)　略

解説

(1)　整数 n に対し，ド・モアブルの定理から

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\quad\cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{z^n}=z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

$$=\cos n\theta-i\sin n\theta\quad\cdots\cdots ②$$

①＋② より　$2\cos n\theta=z^n+\dfrac{1}{z^n}$　ゆえに　$\cos n\theta=\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$

①－② より　$2i\sin n\theta=z^n-\dfrac{1}{z^n}$　ゆえに　$\sin n\theta=\dfrac{1}{2i}\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)=-\dfrac{i}{2}\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)$

(2)　$z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$ であるから，(1) で $\theta=x$ とすれば

$$\cos 2x=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\right\}=2\cos^2 x-1$$

$$\cos 3x=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}=4\cos^3 x-3\cos x$$

ゆえに，$\cos x=t$ とおくと，与式は

$$t+(2t^2-1)-(4t^3-3t)=1$$

$$2t^3-t^2-2t+1=0$$

$$(t+1)(t-1)(2t-1)=0\qquad\text{よって}\qquad t=-1,\ 1,\ \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3)　$\sin^2 20^\circ=\dfrac{1-\cos 40^\circ}{2}$，$\sin^2 40^\circ=\dfrac{1-\cos 80^\circ}{2}$，$\sin^2 60^\circ=\dfrac{1-\cos 120^\circ}{2}$，

$\sin^2 80^\circ=\dfrac{1-\cos 160^\circ}{2}$

であるから，(1) で $\theta=40^\circ$ とすると

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ$$

$$=2-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 120^\circ+\cos 160^\circ)$$

$$=2-\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}+z^2+\frac{1}{z^2}+z^3+\frac{1}{z^3}+z^4+\frac{1}{z^4}\right)$$

ここで，$z^9=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$ であるから，$k=1$，2，3，4 に対し

$$\frac{1}{z^k}=z^{-k}=z^9\cdot z^{-k}=z^{9-k}$$

が成り立つので

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ=2-\frac{1}{4}(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8)$$

$$=2-\frac{1}{4}\cdot\frac{z(1-z^8)}{1-z}=2-\frac{1}{4}\cdot\frac{z-z^9}{1-z}$$

$$=2-\frac{1}{4}\cdot\frac{z-1}{1-z}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$p_2=\dfrac{k(6-k)}{18}$，$p_3=\dfrac{12-6k+k^2}{12}$，$p_4=\dfrac{k^2(6-k)^2}{216}$

(3)　$m+2l$ が 3 の倍数　　(4)　$p_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

解説

(1)　$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$\alpha^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，$\alpha^6=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ であり，自然数 m に対して，次のことが成り立つ。

$$\alpha^m \text{ が実数} \iff m \text{ が 3 の倍数}\quad\cdots\cdots ①$$

$w_2=z_1z_2$ は α^2，α^3，α^4 のいずれかであり，w_2 が実数となるのは，$w_2=\alpha^3$ となる場合である。

$w_2=\alpha^3$ となるのは，2 回の試行で k 以下の目が 1 回，k より大きい目が 1 回出る場合であるから　　$p_2={}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{k}{6}\right)\left(\dfrac{6-k}{6}\right)=\dfrac{k(6-k)}{18}$

$w_3=z_1z_2z_3$ は α^3，α^4，α^5，α^6 のいずれかであり，w_3 が実数となるのは，$w_3=\alpha^3$，α^6 となる場合である。

$w_3=\alpha^3$，α^6 となるのは，3 回の試行で 3 回とも k 以下の目が出る場合，または 3 回とも k より大きい目が出る場合であるから

$$p_3=\left(\frac{k}{6}\right)^3+\left(\frac{6-k}{6}\right)^3=\frac{k^3+(6-k)^3}{6^3}=\frac{6^3-3\cdot 6^2\cdot k+3\cdot 6\cdot k^2}{6^3}$$

$$=\frac{12-6k+k^2}{12}$$

$w_4=z_1z_2z_3z_4$ は α^4，α^5，α^6，α^7，α^8 のいずれかであり，w_4 が実数となるのは，$w_4=\alpha^6$ となる場合である。

$w_4=\alpha^6$ となるのは，4 回の試行で k 以下の目が 2 回，k より大きい目が 2 回出る場合であるから　　$p_4={}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{k}{6}\right)^2\left(\dfrac{6-k}{6}\right)^2=\dfrac{k^2(6-k)^2}{216}$

(3)　k 以下の目が m 回，k より大きい目が l 回出たとき

$$w_n=\alpha^m\cdot(\alpha^2)^l=\alpha^{m+2l}$$

① から，w_n が実数であるための条件は，$m+2l$ が 3 の倍数であることである。

(4)　w_{n+1} が実数となる確率が p_{n+1} である。

w_n は α の累乗で表され，$\alpha^6=1$ であるから，w_n は 1，α，α^2，α^3（$=-1$），α^4，α^5 のいずれかである。

[1]　$w_n=\pm 1$ のとき

w_{n+1} は $\pm\alpha$，$\pm\alpha^2$ のいずれかであるから，w_{n+1} は実数にならない。

[2]　$w_n=\alpha$，α^2，α^4，α^5 のとき

推移図を考えると，次のようになる。

w_n　　w_{n+1}
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \alpha^2 \\ \alpha \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & \\ & \alpha^3=-1 \end{tikzcd}$$

w_n　　w_{n+1}
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \alpha^3=-1 \\ \alpha^2 \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & \\ & \alpha^4 \end{tikzcd}$$

w_n　　w_{n+1}
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \alpha^5 \\ \alpha^4 \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & \\ & \alpha^6=1 \end{tikzcd}$$

w_n　　w_{n+1}
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \alpha^6=1 \\ \alpha^5 \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & \\ & \alpha^7=\alpha \end{tikzcd}$$

いずれの場合も，$n+1$ 回目の試行で w_{n+1} が実数となる確率は　$\dfrac{1}{2}$

また，$w_n=\alpha$，α^2，α^4，α^5 となる確率は，w_n が実数でない確率であるから

$$1-p_n$$

よって，w_{n+1} が実数となる確率は　$\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

[1]，[2] から　　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-p_n)$

したがって　　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$

この式を変形すると　　$p_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{1}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は　　$p_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

ゆえに　　$p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　すなわち　　$p_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|^2-(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots\cdots+|z_n|^2)$

$$=(z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\cdots\cdots+\overline{z_n})-(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\cdots\cdots+z_n\overline{z_n})$$

$$=\sum_{p=2}^{n}\sum_{q=1}^{p-1}(z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q)\quad\cdots\cdots ①$$

ここで，$\arg z_k=\alpha_k$，$|z_k|=r_k$ とすると

$$z_p\overline{z_q}+\overline{z_p}z_q$$

$= r_p(\cos\alpha_p + i\sin\alpha_p)r_q(\cos\alpha_q - i\sin\alpha_q) + r_p(\cos\alpha_p - i\sin\alpha_p)r_q(\cos\alpha_q + i\sin\alpha_q)$

$= r_p r_q(2\cos\alpha_p\cos\alpha_q + 2\sin\alpha_p\sin\alpha_q) = 2r_p r_q\cos(\alpha_p - \alpha_q)$

ここで，$0° \leqq \alpha_p \leqq 90°$，$0° \leqq \alpha_q \leqq 90°$ から　$-90° \leqq \alpha_p - \alpha_q \leqq 90°$

よって　$\cos(\alpha_p - \alpha_q) \geqq 0$

ゆえに　$z_p\overline{z_q} + \overline{z_p}z_q \geqq 0$

よって，$\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\sum_{q=1}^{p-1}(z_p\overline{z_q} + \overline{z_p}z_q) \geqq 0$ であるから，① より

$|z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n|^2 - (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots\cdots + |z_n|^2) \geqq 0$

すなわち

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots\cdots + |z_n|^2 \leqq |z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n|^2$

(2)　$0° \leqq \theta_k \leqq 90°$ であるから，$z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$ とおいて (1) が利用できる．

条件から

$|z_1 + z_2 + \cdots\cdots + z_n|^2$

$= |\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots\cdots + \cos\theta_n + i(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n)|^2$

$= (\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots\cdots + \cos\theta_n)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n)^2$

$= 1 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n)^2$

また　$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots\cdots + |z_n|^2 = 1^2 + 1^2 + \cdots\cdots + 1^2 = n$

よって，(1) から　$n \leqq 1 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n)^2$

すなわち　$n - 1 \leqq (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n)^2$

$0° \leqq \theta_k \leqq 90°$ であるから　$\sin\theta_k \geqq 0$

よって　$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots\cdots + \sin\theta_n$

10

解答　略

解説

条件 (b) から　$z_{n+1} - z_n = (\cos\theta° + i\sin\theta°)(z_n - z_{n-1})$

よって，$\cos\theta° + i\sin\theta° = \alpha$ とおくと，数列 $\{z_{n+1} - z_n\}$ $(n \geqq 0)$ は初項 $z_1 - z_0 = \alpha$，公比 α の等比数列であるから　$z_{n+1} - z_n = \alpha\alpha^n$ $(n \geqq 0)$

よって，$n \geqq 1$ のとき　$z_n = z_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\alpha^k = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha\alpha^k$

$0° < \theta° < 90°$ より，$\alpha \neq 1$ であるから　$z_n = \dfrac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$　……①

ゆえに，$z_n = z_0$ となる n $(n \geqq 1)$ が存在するとき，$\alpha \neq 0$であるから，① より

$\alpha^n = 1$　　よって　$\cos(n\theta)° + i\sin(n\theta)° = 1$

ゆえに　$n\theta = 360k$　(k は整数)

よって，$\theta = \dfrac{360k}{n}$ であるから，θ は有理数である。

逆に，θ が有理数のとき，$\theta = \dfrac{q}{p}$ (p は自然数，q は整数) と表される。

このとき　$360p\theta = 360q$

$n = 360p$ とすると，n は自然数であり

$\cos(n\theta)° + i\sin(n\theta)° = \cos(360q)° + i\sin(360q)° = 1$

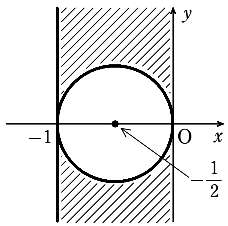
ゆえに，$(\cos\theta° + i\sin\theta°)^n = 1$ すなわち $\alpha^n = 1$ であるから，① より　$z_n = 0$

すなわち，$z_n = z_0$ となる n が存在する。

以上により，題意は示された。

11

解答　［図］ 境界線を含まない



解説

$\mathrm{AB} = |z-1|$

$\mathrm{BC} = |z^2 - z| = |z||z-1|$

$\mathrm{AC} = |z^2 - 1| = |z+1||z-1|$

A，B，C が鋭角三角形をなすならば，AB，BC，AC はいずれも 0 でないから

$z \neq 0,\ \pm 1$　……①

このもとで，$|z-1| \neq 0$ より △ABC は 3 辺の長さが

$a = 1$，$b = |z|$，$c = |z+1|$

の三角形 T と相似である。

よって，△ABC が鋭角三角形であることは，三角形 T が鋭角三角形であることと同値で，その条件は

$$\begin{cases} a^2 + b^2 > c^2 & \cdots\cdots ② \\ b^2 + c^2 > a^2 & \cdots\cdots ③ \\ c^2 + a^2 > b^2 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② から

$1 + |z|^2 > |z+1|^2$

$1 + |z|^2 > |z|^2 + z + \overline{z} + 1$

$z + \overline{z} < 0$　……②′

③ から

$|z|^2 + |z+1|^2 > 1$

$2|z|^2 + z + \overline{z} > 0$

$\left(z + \dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} > \dfrac{1}{4}$

$\left|z + \dfrac{1}{2}\right|^2 > \dfrac{1}{4}$

ゆえに　$\left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$　……③′

④ から

$|z+1|^2 + 1 > |z|^2$

$|z|^2 + z + \overline{z} + 1 + 1 > |z|^2$

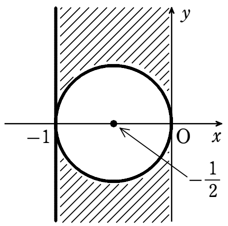
$z + \overline{z} > -2$　……④′

$z = x + yi$ (x，y は実数) とおくと，②′，④′ から

$-1 < x < 0$　……⑤

③′，⑤ がともに成り立つならば，① も成り立つ。

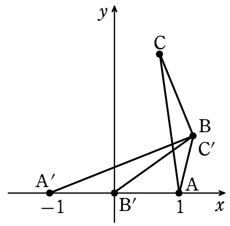
よって，z の存在範囲は右の図の斜線部分である。境界線上の点を含まない。



参考　複素数 z は ① を満たすから，A(1)，B(z)，C(z^2) を実軸方向に -1 だけ平行移動して $\dfrac{1}{|z-1|}$ 倍し，原点を中心に $-\arg(z-1)$ 回転し，さらに実軸方向 -1 だけ平行移動させると，A，B，C はそれぞれ A′(−1)，B′(0)，C′(z) に移る。

このとき，A′，B′ は定点で，C′(z) のみ動く。

△ABC∽△A′B′C′ であるから，△ABC が鋭角三角形であることと△A′B′C′ が鋭角三角形であることは同値である。

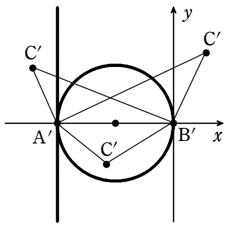


∠A′B′C′ が直角または鈍角 $\Longleftrightarrow$ $x \geqq 0$

∠B′C′A′ が直角または鈍角 $\Longleftrightarrow$ $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$

∠C′A′B′ が直角または鈍角 $\Longleftrightarrow$ $x \leqq -1$

であるから，鋭角三角形になるための z の存在範囲は解答の図のようになる。



12

解答　略

解説

C が 1，-1 を通るから，C の中心は虚軸上にある．

よって，中心を表す複素数を bi (b は実数) とおく．

C の半径の 2 乗は　$|1 - bi|^2 = 1 + b^2$

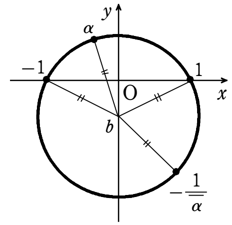
ここで　$|\alpha - bi|^2 = (\alpha - bi)\overline{(\alpha - bi)} = (\alpha - bi)(\overline{\alpha} + bi)$

$= |\alpha|^2 + (\alpha - \overline{\alpha})bi + b^2$

これが半径の 2 乗に等しいから

$|\alpha|^2 + (\alpha - \overline{\alpha})bi + b^2 = 1 + b^2$

すなわち　$(\alpha - \overline{\alpha})bi = 1 - |\alpha|^2$　……①



また　$\left|-\dfrac{1}{\alpha} - bi\right|^2 = \left(-\dfrac{1}{\alpha} - bi\right)\overline{\left(-\dfrac{1}{\alpha} - bi\right)} = \left(-\dfrac{1}{\alpha} - bi\right)\left(-\dfrac{1}{\overline{\alpha}} + bi\right)$

$= \dfrac{1}{|\alpha|^2} + \left(\dfrac{1}{\overline{\alpha}} - \dfrac{1}{\alpha}\right)bi + b^2 = \dfrac{1}{|\alpha|^2} - \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{|\alpha|^2}bi + b^2$

① から　$\left|-\dfrac{1}{\alpha} - bi\right|^2 = \dfrac{1}{|\alpha|^2} - \dfrac{1 - |\alpha|^2}{|\alpha|^2} + b^2 = 1 + b^2$

これは半径の 2 乗に等しい．

ゆえに，C は $-\dfrac{1}{\alpha}$ も通る．

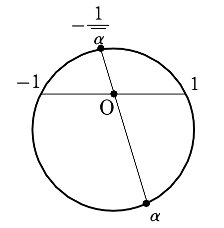
別解　$|\alpha| = r$ とおくと　$-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}} = -\dfrac{1}{r^2}\overline{\alpha}$

よって，3 点 α，0，$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ はこの順に一直線上にある．

ここで　$|\alpha| \times \left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}\right| = r \cdot \dfrac{1}{|\overline{\alpha}|} = r \cdot \dfrac{1}{r} = 1$

また　$1 \times 1 = 1$

よって，4 点 α，$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$，1，$-1$ と点 O について，方べ



きの定理の逆により，1，-1，α，$-\dfrac{1}{\alpha}$ は同一円周上にある．

13

解答 (1) β，γ は $1+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$，$1+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

(2) $\arg\alpha=\dfrac{\pi}{9}$，$\arg\beta=\dfrac{4}{9}\pi$，$\arg\gamma=\dfrac{16}{9}\pi$

解説

(1) △ABC の重心を G とする。△ABC は正三角形であるから重心 G は外心でもある。

G を表す複素数は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ すなわち 1

よって，B または C は点 G を中心として点 A を $\dfrac{2}{3}\pi$ または $-\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転させた点である。

ゆえに，β，γ は $1+\left\{\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}(\alpha-1)$

すなわち $1+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$，$1+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

(2) 正三角形 ABC の 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ であることから AG$=1$

すなわち $|z|=1$

一方，(1) から $\alpha\beta\gamma=(1+z)(1-z+z^2)=1+z^3$

よって $|1+z^3|=1$ かつ ($1+z^3$ の虚部)>0

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと $1+z^3=(1+\cos3\theta)+i\sin3\theta$

$|1+z^3|=1$ から $|1+z^3|^2=1$

よって $(1+\cos3\theta)^2+\sin^2 3\theta=1$

すなわち $\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$

このとき $\sin3\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [($1+z^3$ の虚部)>0 から]

したがって $z^3=\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi\right)$ (k は整数)

$3\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$ から $\theta=\dfrac{2}{9}\pi+\dfrac{2}{3}k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると $\theta=\arg z=\dfrac{2}{9}\pi$，$\dfrac{8}{9}\pi$，$\dfrac{14}{9}\pi$

このとき，円周角の定理により $\arg(1+z)=\dfrac{\pi}{9}$，$\dfrac{4}{9}\pi$，$\dfrac{16}{9}\pi$

題意により，これらが $\arg\alpha$，$\arg\beta$，$\arg\gamma$ であるから，条件より

$$\arg\alpha=\frac{\pi}{9},\quad \arg\beta=\frac{4}{9}\pi,\quad \arg\gamma=\frac{16}{9}\pi$$

14

解答 (1) 中心は点 $\dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (2) 略

解説

(1) $a_1=1$，$a_2=i$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ から $a_3=1+i$，$a_4=1+2i$

ゆえに $b_1=i$，$b_2=\dfrac{1+i}{i}=1-i$，$b_3=\dfrac{1+2i}{1+i}=\dfrac{(1+2i)(1-i)}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$$\arg\frac{b_2-b_3}{b_1-b_3}=\arg\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}=\arg i=\frac{\pi}{2}$$

よって，円 C は 2 点 i，$1-i$ を直径の両端とする円である。

したがって，中心は $\dfrac{i+(1-i)}{2}=\dfrac{1}{2}$，半径は $\left|\dfrac{1}{2}-i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となる。

(2) $\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ……[A] であることを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

(1) から，[A] は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$\left|b_k-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つと仮定する。

$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ から $\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}}=1+\dfrac{a_k}{a_{k+1}}$

ゆえに $b_{k+1}=1+\dfrac{1}{b_k}$ よって $b_k=\dfrac{1}{b_{k+1}-1}$

$\left|b_k-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であるから $\left|\dfrac{1}{b_{k+1}-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

ゆえに $\left|\dfrac{3-b_{k+1}}{b_{k+1}-1}\right|=\sqrt{5}$

よって $|b_{k+1}-3|=\sqrt{5}|b_{k+1}-1|$

したがって $|b_{k+1}-3|^2=5|b_{k+1}-1|^2$

$$(b_{k+1}-3)(\overline{b_{k+1}}-3)=5(b_{k+1}-1)(\overline{b_{k+1}}-1)$$
$$4b_{k+1}\overline{b_{k+1}}-2b_{k+1}-2\overline{b_{k+1}}=4$$
$$(2b_{k+1}-1)(2\overline{b_{k+1}}-1)=5$$
$$|2b_{k+1}-1|^2=5$$

よって $|2b_{k+1}-1|=\sqrt{5}$

ゆえに $\left|b_{k+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$n=k+1$ のときも [A] が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，$\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となり，b_n は円 C 上にある。