$\boxed{1}$

$a \fallingdotseq 0$ とする。3 点 A$(0,\ 2a)$，B$(-\sqrt{3}a,\ -a)$，C$(\sqrt{3}a,\ -a)$ を頂点とする △ABC はどのような形の三角形か。

$\boxed{2}$

2 点 A(-2)，B(6) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：1 に内分する点　(2)　5：3 に内分する点　(3)　中点

(4)　3：1 に外分する点　(5)　1：2 に外分する点　(6)　3：5 に外分する点

$\boxed{3}$

次の点の座標を求めよ。

(1)　点 P$(-1,\ 4)$ に関して，原点 O と対称な点 O$'$

(2)　点 Q$(1,\ 2)$ に関して，点 A$(8,\ -3)$ と対称な点 B

(3)　点 R$(2,\ -5)$ に関して，点 C$(-2,\ -7)$ と対称な点 D

(4)　点 S$(3,\ 1)$ に関して，点 E$(\sqrt{2},\ -2)$ と対称な点 F

$\boxed{4}$

次の 3 点を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

(1)　A$(2,\ 3)$，B$(1,\ 5)$，C$(3,\ 4)$

(2)　O$(0,\ 0)$，A$(6,\ -2)$，B$(-3,\ -7)$

(3)　A$(3,\ 0)$，B$(-1,\ 2\sqrt{3})$，C$(4,\ \sqrt{3})$

$\boxed{5}$

次の点の座標を求めよ。

(1)　x 軸上の点で，2 点 A$(4,\ -3)$，B$(-5,\ 4)$ から等距離にあるもの

(2)　y 軸上の点で，2 点 A$(-2,\ 3)$，B$(-6,\ 5)$ から等距離にあるもの

(3)　直線 $y=2x$ 上の点で，2 点 A$(3,\ 1)$，B$(-1,\ 0)$ から等距離にあるもの

$\boxed{6}$

3 点 A$(3,\ 2)$，B$(-1,\ 0)$，C を頂点とする三角形が正三角形になるとき，点 C の座標を求めよ。

$\boxed{7}$

4 点 A$(-3,\ 2)$，B$(-1,\ -4)$，C$(5,\ -2)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。

(1)　対角線 AC，BD の交点の座標を求めよ。

(2)　頂点 D の座標を求めよ。

$\boxed{8}$

△ABC の重心を G とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{9}$

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(3,\ 2)$ を通り，2 点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を通る直線に平行

(2)　点$(2,\ -3)$ を通り，2 点$(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に垂直

$\boxed{10}$

2 点 A$(1,\ -7)$，B$(5,\ 3)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

$\boxed{11}$

3 直線 $x+3y=2$，$x+y=0$，$ax-2y=-4$ が 1 点で交わるように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{12}$

2 直線 $2x-3y+4=0$，$x+4y-9=0$ の交点と点 $(3,\ 7)$ を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{13}$

k は定数とする。方程式 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ で表される直線 ℓ について，直線 ℓ は k の値に関係なく定点を通ることを示せ。また，その定点の座標を求めよ。

$\boxed{14}$

点 $(2,\ -3)$ と次の直線の距離を求めよ。ただし，分母は有理化せよ。

(1) $3x+4y-9=0$　(2) $2x+y-6=0$　(3) $5x-12y-7=0$

(4) $y=x-3$　(5) $x=-3$　(6) $y=4$

$\boxed{15}$

a は正の定数とする。点 $(5,\ -1)$ と直線 $ax-4y-4=0$ と距離が 3 であるとき，a の値を求めよ。

1

解説

$AB^2=(-\sqrt{3}a)^2+(-3a)^2=12a^2$

$BC^2=(2\sqrt{3}a)^2=12a^2$

$CA^2=(-\sqrt{3}a)^2+(3a)^2=12a^2$

よって　$AB=BC=CA$

したがって，△ABC は正三角形である。

2

解説

(1)　$\dfrac{1\times(-2)+3\times 6}{3+1}=\dfrac{16}{4}=4$　　(2)　$\dfrac{3\times(-2)+5\times 6}{5+3}=\dfrac{24}{8}=3$

(3)　$\dfrac{-2+6}{2}=\dfrac{4}{2}=2$　　(4)　$\dfrac{-1\times(-2)+3\times 6}{3-1}=\dfrac{20}{2}=10$

(5)　$\dfrac{-2\times(-2)+1\times 6}{1-2}=\dfrac{10}{-1}=-10$　　(6)　$\dfrac{-5\times(-2)+3\times 6}{3-5}=\dfrac{28}{-2}=-14$

3

解説

求める点の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　$\dfrac{0+x}{2}=-1$，$\dfrac{0+y}{2}=4$ より

$x=-2$，$y=8$

よって　$(-2,\ 8)$

(2)　$\dfrac{8+x}{2}=1$，$\dfrac{-3+y}{2}=2$ より

$x=-6$，$y=7$

よって　$(-6,\ 7)$

(3)　$\dfrac{-2+x}{2}=2$，$\dfrac{-7+y}{2}=-5$ より

$x=6$，$y=-3$

よって　$(6,\ -3)$

(4)　$\dfrac{\sqrt{2}+x}{2}=3$，$\dfrac{-2+y}{2}=1$ より

$x=6-\sqrt{2}$，$y=4$　　よって　$(6-\sqrt{2},\ 4)$

4

解説

(1)　$\left(\dfrac{2+1+3}{3},\ \dfrac{3+5+4}{3}\right)$ より　$(2,\ 4)$

(2)　$\left(\dfrac{0+6+(-3)}{3},\ \dfrac{0+(-2)+(-7)}{3}\right)$ より　$(1,\ -3)$

(3)　$\left(\dfrac{3+(-1)+4}{3},\ \dfrac{0+2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)$ より　$(2,\ \sqrt{3})$

5

解説

(1)　求める点を $P(x,\ 0)$ とする。

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(x-4)^2+(0+3)^2=(x+5)^2+(0-4)^2$

これを解くと　　$x=-\dfrac{8}{9}$

したがって，求める座標は　$\left(-\dfrac{8}{9},\ 0\right)$

(2)　求める点を $P(0,\ y)$ とする。

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(0+2)^2+(y-3)^2=(0+6)^2+(y-5)^2$

これを解くと　　$y=12$

したがって，求める座標は　$(0,\ 12)$

(3)　求める点を $P(t,\ 2t)$ とする。

$AP=BP$ であるから　$AP^2=BP^2$

よって　$(t-3)^2+(2t-1)^2=(t+1)^2+(2t-0)^2$

これを解くと　　$t=\dfrac{3}{4}$

したがって，求める座標は　$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{2}\right)$

6

解説

点 C の座標を $(x,\ y)$ とする。

△ABC が正三角形になるとき　$AB=BC=CA$

$AB^2=BC^2$ から　$(-4)^2+(-2)^2=(x+1)^2+y^2$

よって　$x^2+y^2+2x-19=0$　……①

$BC^2=CA^2$ から　$(x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$

よって　$y=-2x+3$　……②

② を ① に代入して整理すると　$x^2-2x-2=0$

これを解くと　　$x=1\pm\sqrt{3}$

② から，$x=1+\sqrt{3}$ のとき　$y=1-2\sqrt{3}$

$x=1-\sqrt{3}$ のとき　$y=1+2\sqrt{3}$

したがって，点 C の座標は　$(1+\sqrt{3},\ 1-2\sqrt{3})$，$(1-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$

7

解説

(1)　求める点の座標は，対角線 AC の中点の座標であるから　$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{2+(-2)}{2}\right)$

よって　$(1,\ 0)$

(2)　頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると，対角線 BD の中点の座標は　$\left(\frac{-1+x}{2},\ \frac{-4+y}{2}\right)$

これが，$(1,\ 0)$ と一致するから　$\frac{-1+x}{2}=1$，$\frac{-4+y}{2}=0$

よって　$x=3$，$y=4$

したがって，頂点 D の座標は　$(3,\ 4)$

8

解説

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとって，△ABC の各頂点を次のようにおく。

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$

このとき，△ABC の重心 G の座標は　$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\{(-c-a)^2+b^2\}+\{(c-a)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$

$$\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2=\left\{\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{a}{3}-c\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}+4\left\{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{b}{3}-b\right)^2\right\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

したがって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2$

9

解説

(1)　求める直線の傾きは　$\frac{7-(-2)}{5-(-3)}=\frac{9}{8}$

よって，求める直線の方程式は　$y-2=\frac{9}{8}(x-3)$　すなわち　$y=\frac{9}{8}x-\frac{11}{8}$

(2)　2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線の傾きは

$\frac{1-(-5)}{8-(-4)}=\frac{1}{2}$ であるから，求める直線の傾きは　-2

よって，求める直線の方程式は　$y-(-3)=-2(x-2)$

すなわち　$y=-2x+1$

10

解説

直線 AB の傾きは　$\frac{3-(-7)}{5-1}=\frac{5}{2}$

また，線分 AB の中点の座標は　$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{-7+3}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ -2)$

よって，線分 AB の垂直二等分線は，点 $(3,\ -2)$ を通り，傾きが $-\frac{2}{5}$ の直線である。

したがって，求める方程式は　$y-(-2)=-\frac{2}{5}(x-3)$

すなわち　$y=-\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$

11

解説

連立方程式 $\begin{cases}x+3y=2\\x+y=0\end{cases}$ を解くと　$x=-1$，$y=1$

よって，2 直線 $x+3y=2$，$x+y=0$ の交点の座標は $(-1,\ 1)$ である。

3 直線が 1 点で交わるのは，直線 $ax-2y=-4$ が点 $(-1,\ 1)$ を通るときであるから

$a\cdot(-1)-2\cdot1=-4$　　したがって　$a=2$

12

解説

k を定数として

$$k(2x-3y+4)+(x+4y-9)=0$$

とすると，この方程式は 2 直線

$$2x-3y+4=0,\ x+4y-9=0$$

の交点を通る直線を表す。

これが点 $(3,\ 7)$ を通るとすると

$$k(2\cdot3-3\cdot7+4)+(3+4\cdot7-9)=0$$

これを解いて　$k=2$

よって，求める直線の方程式は

$$2(2x-3y+4)+(x+4y-9)=0$$

すなわち　$5x-2y-1=0$

13

解説

$(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ を変形すると　$k(x+2y-5)+(2x-3y+4)=0$

この式は，$x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ のとき，k の値に関係なく常に成り立つ。

このとき　$x=1$，$y=2$

したがって，与えられた直線は，k の値に関係なく定点 $(1,\ 2)$ を通る。

$\boxed{14}$

(解説)

(1) $\dfrac{|3\cdot 2+4\cdot(-3)-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

(2) $\dfrac{|2\cdot 2+(-3)-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3) $\dfrac{|5\cdot 2-12\cdot(-3)-7|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{39}{13}=3$

(4) $y=x-3$ を変形すると　$x-y-3=0$

よって　$\dfrac{|2-(-3)-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(5) $x=-3$ を変形すると　$x+3=0$

よって　$\dfrac{|2+3|}{\sqrt{1^2}}=5$

(6) $y=4$ を変形すると　$y-4=0$

よって　$\dfrac{|-3-4|}{\sqrt{1^2}}=7$

$\boxed{15}$

(解説)

点 $(5,\ -1)$ と直線 $ax-4y-4=0$ との距離は　$\dfrac{|a\cdot 5-4\cdot(-1)-4|}{\sqrt{a^2+(-4)^2}}=\dfrac{|5a|}{\sqrt{a^2+16}}$

この距離が 3 であるとき　$\dfrac{|5a|}{\sqrt{a^2+16}}=3$

すなわち　$|5a|=3\sqrt{a^2+16}$

両辺を 2 乗して　$25a^2=9(a^2+16)$

$a^2=9$

$a>0$ であるから　$a=3$