$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

(1)　$2x-y=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値と，最小値をとる x，y の値を求めよ。

(2)　$x+2y+3=0$ のとき，xy 最大値と，最大値をとる x，y の値を求めよ。

$\boxed{2}$

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=4$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　x^2+y^2 の最小値と，最小値をとる x，y の値を求めよ。

(3)　x^2+y^2 の最大値と，最大値をとる x，y の値を求めよ。

$\boxed{3}$

関数 $y=x^2-2ax+a^2+4a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を求めよ。ただし、a は定数とする。

$\boxed{4}$

k は定数とする。2 次関数 $y=x^2+2kx+4k$ の最小値を m とするとき，次に問いに答えよ。

(1)　m を k の式で表せ。

(2)　k の関数 m の最大値と，最大値をとる k の値を求めよ。

$\boxed{5}$

2 次関数 $y=x^2-2x+a$ の値が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で常に負となるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$

a は定数とする。2 次関数 $y=-x^2+2x+2$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。$M(a)$ および $m(a)$ を a の式で表せ。また，$M(a)$，$m(a)$ のグラフをそれぞれかけ。

$\boxed{7}$

∠C を直角とする直角三角形 ABC の斜辺 AB 上(ただし，2 点 A，B を除く)に点 D をとり，D から辺 BC，CA に引いた垂線の足を，それぞれ E，F とする。BC$=6$，CA$=4$ のとき，△ADF と △DBE の面積の和が最小になるような線分 AF の長さを求めよ。また，そのときの △ADF と △DBE の面積の和を求めよ。

$\boxed{8}$

関数 $y=(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+2x=t$ とおくとき，t の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)+1$ の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$

x と y を変数とする関数 $z=x^2-6xy+10y^2+2y$ について，次の問いに答えよ。

(1)　y を定数とみると，z は x の 2 次関数と考えられる。このとき z の最小値 m を y を用いて表せ。

(2)　m の最小値と，最小値をとる y の値を求めよ。

(3)　z の最小値と，最小値をとる x，y の値を求めよ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$2x-y=1$ から　$y=2x-1$　…… ①

$x^2+y^2=x^2+(2x-1)^2=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$

よって，x^2+y^2 は $x=\frac{2}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

このとき ① から　$y=-\frac{1}{5}$

答　$x=\frac{2}{5}$，$y=-\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

(2)　$x+2y+3=0$ から　$x=-2y-3$　…… ①

$xy=(-2y-3)y=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

よって，xy は $y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

このとき ① から　$x=-\frac{3}{2}$

答　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$x+y=4$ から　$y=4-x$

$y\geqq 0$ であるから　$4-x\geqq 0$

よって　$x\leqq 4$

これと条件の $x\geqq 0$ から　$0\leqq x\leqq 4$

参考　y の値の範囲も同様に考えて　$0\leqq y\leqq 4$

(2)　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2(x-2)^2+8$

よって，x^2+y^2 は $0\leqq x\leqq 4$ の範囲で $x=2$ のとき最小値 8 をとる。

このとき　$y=4-2=2$

答　$x=2$，$y=2$ で最小値 8 をとる。

(3)　$0\leqq x\leqq 4$ の範囲で考えると $2(x-2)^2+8$ すなわち x^2+y^2 は，$x=0$，4 のとき最大値 16 をとる。

また　$x=0$ のとき $y=4$，$x=4$ のとき $y=0$

答　$(x,\ y)=(0,\ 4)$，$(4,\ 0)$ で最大値 16 をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

関数は $y=(x-a)^2+4a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ と表される。

[1]　$a<0$ のとき

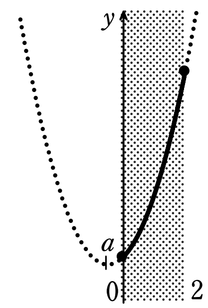
グラフは右の図の実線部分である。

よって，関数は

$x=0$ で

最小値 a^2+4a

をとる。



[2]　$0\leqq a<2$ のとき

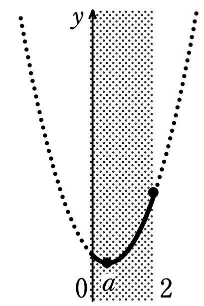
グラフは右の図の実線部分である。

よって，関数は，

$x=a$ で

最小値 $4a$

をとる。



[3]　$2\leqq a$ のとき

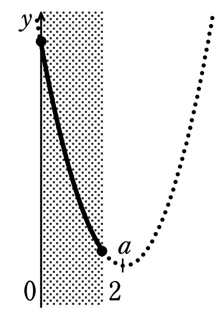
グラフは右の図の実線部分である。

よって，関数は，

$x=2$ で

最小値 a^2+4

をとる。



$\boxed{4}$

(解説)

(1)　関数は $y=(x+k)^2-k^2+4k$ と表される。

したがって　　$m=-k^2+4k$

(2)　$m=-(k-2)^2+4$　であるから，m の最大値は 4，最大値をとる k の値は 2

$\boxed{5}$

(解説)

関数は $y=(x-1)^2-1+a$ と表される。

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲で考えると，この関数は，$x=3$ のとき最大値 $3+a$ をとる。

条件を満たすためには，$3+a$ が負となればよい。

よって　　$3+a<0$

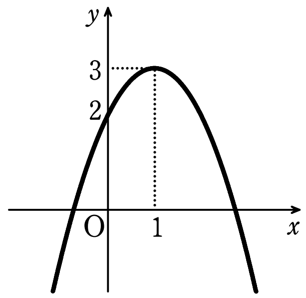
これを解いて　　$a<-3$

6

解説

関数は $y=-(x-1)^2+3$ と表される。

よって，この関数のグラフは，右の図のようになる。



最大値，最小値について，場合分けを行う。

【最大値について】

$a<0$ のとき，$x=a+1$ で最大値をとる。

　よって　$M(a)=-a^2+3$

$0\leqq a<1$ のとき，$x=1$ で最大値をとる。

　よって　$M(a)=3$

$1\leqq a$ のとき，$x=a$ で最大値をとる。

　よって　$M(a)=-a^2+2a+2$

$M(a)$ のグラフは，次の図のようになる。

【最小値について】

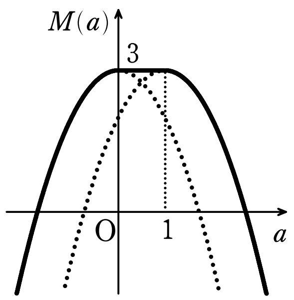
$a<\dfrac{1}{2}$ のとき，$x=a$ で最小値をとる。

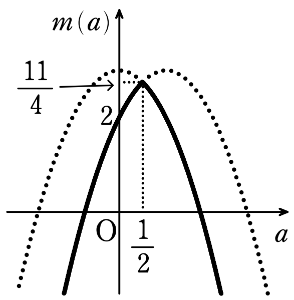
　よって　$m(a)=-a^2+2a+2$

$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき，$x=a+1$ で最小値をとる。

　よって　$m(a)=-a^2+3$

$m(a)$ のグラフは，次の図のようになる。





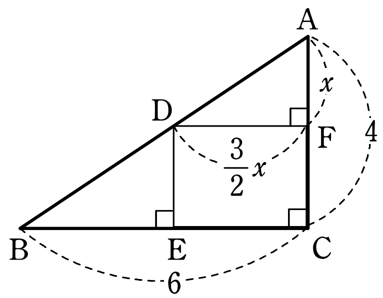
7

解説

右の図のように，線分 AF の長さを x とおく。

このとき，$0<x<4$ である。

3 つの三角形 △ABC，△ADF，△DBE は互いに相似であるから，次のことがわかる。



$$\mathrm{DF}=\frac{3}{2}x,\quad \mathrm{DE}=4-x,\quad \mathrm{BE}=\frac{3}{2}(4-x)$$

△ADF と △DBE の面積の和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot\frac{3}{2}(4-x)$$

$$=\frac{3}{4}(2x^2-8x+16)=\frac{3}{2}(x-2)^2+6$$

よって，S は $x=2$ で最小値 6 をとる。

答　線分 AF の長さは 2，面積は 6

8

解説

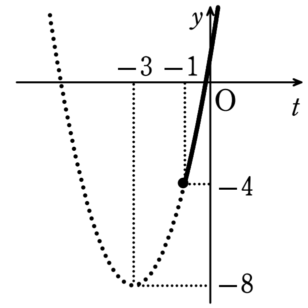
(1)　$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$　である。

　よって，求める t の値の範囲は　$t\geqq-1$

(2)　$y=(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)+1$

$$=t^2+6t+1=(t+3)^2-8\quad(t\geqq-1)$$

　よって，横軸を t，縦軸を y としたグラフは，右の図のようになる。



　ゆえに，最小値は -4

　このとき　　$t=-1$

　すなわち　$x^2+2x=-1$

　これを解いて　$x=-1$

　よって，$x=-1$ で最小値 -4 をとる。

9

解説

(1)　$z=x^2-6y\cdot x+(10y^2+2y)=(x-3y)^2+y^2+2y$

　よって　$m=y^2+2y$

(2)　$m=(y+1)^2-1$

　よって，m は $y=-1$ で最小値 -1 をとる。

(3)　(1) より，z は $x=3y$ で最小値をとる。

　(2) より最小値をとる y の値は -1 である。

　このとき　$x=-3$

　よって，z は $x=-3$，$y=-1$ で最小値 -1 をとる。