$\boxed{1}$

次の２次関数のグラフが x 軸と接するように，定数 k の値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+6x+5-k$　　(2)　$y=x^2-2kx+k$

$\boxed{2}$

k は定数とする。次の問いに答えよ。

(1)　２次関数 $y=x^2+4x-k+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(2)　２次関数 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}kx-\frac{1}{4}k^2+k-1$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

$\boxed{3}$

次の２次関数のグラフと直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=-x+2$　　(2)　$y=-x^2+1$，$y=-4x+5$

(3)　$y=x^2-x+4$，$y=2x+2$　　(4)　$y=3x^2-4x+2$，$y=2x+5$

$\boxed{4}$

次の２次関数のグラフと直線 $y=2x-3$ の共有点の個数を求めよ。

(1)　$y=x^2+6x+1$　　(2)　$y=x^2+5x-1$　　(3)　$y=2x^2+x-2$

$\boxed{5}$

２次関数 $y=x^2$ のグラフと直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数が２個となるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{6}$

２次関数 $y=x^2-3x+9$ のグラフが，直線 $y=5x-k$ に接するように，定数 k の値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

$\boxed{7}$

次の２つの２次関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+x-7$，$y=-x^2+3x+5$　　(2)　$y=2x^2+x-5$，$y=x^2+3x-1$

(3)　$y=-3x^2-8x-20$，$y=6x^2+16x-4$

$\boxed{8}$

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x-4<0$　　(2)　$x^2-6x+7>0$

(3)　$2x^2+5x-1\geqq 0$　　(4)　$-3x^2+6x-2\geqq 0$

$\boxed{9}$

次の２次不等式を解け。

(1) $x^2+2x+1 \leqq 0$　　(2) $x^2-6x+9>0$

(3) $4x^2+20x+25<0$　　(4) $-4x^2+12x-9 \leqq 0$

(5) $x^2+2x+2>0$　　(6) $-x^2+6x-11 \geqq 0$

$\boxed{10}$

次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x^2-x>0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x^2+3x-9<0 \\ 3x^2+11x-4<0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ x^2+x-1 \geqq 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2-10x+20<0 \\ -x^2+6x-3>0 \end{cases}$

$\boxed{11}$

次の不等式を解け。

(1) $5<x^2+4x \leqq 21$　　(2) $3x+4<x^2<5$

$\boxed{12}$

次の２次不等式を解け。

(1) $x(4+x)<\frac{1}{2}(1-x)^2-3$　　(2) $3(x-1)^2-12 \leqq 6x^2-(3+x)^2$

$\boxed{13}$

次の問いに答えよ。

(1) ２次不等式 $ax^2-x+b<0$ の解が $x<-3$，$2<x$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

(2) ２次不等式 $ax^2+bx+2>0$ の解が $-2<x<\frac{1}{2}$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{14}$

２次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\frac{5}{4}$ であるとき，２次不等式 $bx^2+ax+4 \geqq 0$ の解を求めよ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　2 次方程式 $x^2+6x+5-k=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(5-k)=4+k$$

与えられた条件を満たすためには，$D=0$ となればよいから　　$4+k=0$

これを解いて　　$k=-4$

このとき関数は　$y=x^2+6x+9=(x+3)^2$

よって，接点の座標は　$(-3,\ 0)$

答　$k=-4$，接点の座標は $(-3,\ 0)$

(2)　2 次方程式 $x^2-2kx+k=0$ の判別式を Dとすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot k=k^2-k$$

与えられた条件を満たすためには，$D=0$ となればよいから　　$k^2-k=0$

これを解いて　　$k=0,\ 1$

$k=0$ のとき関数は　$y=x^2$

よって，接点の座標は　$(0,\ 0)$

$k=1$ のとき関数は　$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

よって，接点の座標は　$(1,\ 0)$

答　$k=0$，接点の座標は $(0,\ 0)$

$k=1$，接点の座標は $(1,\ 0)$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　2 次方程式 $x^2+4x-k+4=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot(-k+4)=k$$

よって　$k>0$ のとき，共有点の個数は 2 個

$k=0$ のとき，共有点の個数は 1 個

$k<0$ のとき，共有点の個数は 0 個

(2)　2 次方程式 $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}kx-\frac{1}{4}k^2+k-1=0$ の判別式を D とすると

$$D=\left(\frac{1}{2}k\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}k^2+k-1\right)=k-1$$

よって　$k>1$ のとき，共有点の個数は 2 個

$k=1$ のとき，共有点の個数は 1 個

$k<1$ のとき，共有点の個数は 0 個

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　共有点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x+2 \end{cases}$ の解である。この連立方程式を解いて

$$x=1,\ y=1 \quad \text{または} \quad x=-2,\ y=4$$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 1)$，$(-2,\ 4)$

(2)　共有点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=-4x+5 \end{cases}$ の解である。この連立方程式を解いて

$$x=2,\ y=-3$$

よって，共有点の座標は　$(2,\ -3)$

(3)　共有点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=x^2-x+4 \\ y=2x+2 \end{cases}$ の解である。この連立方程式を解いて

$$x=1,\ y=4 \quad \text{または} \quad x=2,\ y=6$$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 4)$，$(2,\ 6)$

(4)　共有点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=3x^2-4x+2 \\ y=2x+5 \end{cases}$ の解である。

この連立方程式を解いて

$$x=1-\sqrt{2},\ y=7-2\sqrt{2} \quad \text{または} \quad x=1+\sqrt{2},\ y=7+2\sqrt{2}$$

よって，共有点の座標は　$(1-\sqrt{2},\ 7-2\sqrt{2})$，$(1+\sqrt{2},\ 7+2\sqrt{2})$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$y=x^2+6x+1$ と $y=2x-3$ から y を消去すると　　$x^2+6x+1=2x-3$

すなわち　$x^2+4x+4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

よって，共有点の個数は　1 個

(2)　$y=x^2+5x-1$ と $y=2x-3$ から y を消去すると　　$x^2+5x-1=2x-3$

すなわち　$x^2+3x+2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$D=3^2-4\cdot1\cdot2=1>0$

よって，共有点の個数は　2 個

(3)　$y=2x^2+x-2$ と $y=2x-3$ から y を消去すると　　$2x^2+x-2=2x-3$

すなわち　$2x^2-x+1=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot1=-7<0$

よって，共有点の個数は　0 個

$\boxed{5}$

(解説)

$y=x^2$ と $y=-2x+k$ から y を消去すると　　$x^2=-2x+k$

すなわち　$x^2+2x-k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-k)=1+k$

共有点の個数が 2 個となるのは $D>0$ のときであるから　　$1+k>0$

よって，求める k の値の範囲は　$k>-1$

$\boxed{6}$

（解説）

$y=x^2-3x+9$ と $y=5x-k$ から y を消去すると　　$x^2-3x+9=5x-k$

すなわち　$x^2-8x+(9+k)=0$　…… ①

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(9+k)=-k+7$

条件から　$D=0$　　　よって　$k=7$

このとき ① は　$x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$

よって　$x=4$　　このとき　$y=13$

答　$k=7$，接点の座標は $(4,\ 13)$

$\boxed{7}$

（解説）

(1)　$y=x^2+x-7$　と　$y=-x^2+3x+5$ から y を消去すると

$x^2+x-7=-x^2+3x+5$

すなわち　$x^2-x-6=0$

これを解いて　$x=-2,\ 3$

$x=-2$ のとき $y=-5$，　$x=3$ のとき $y=5$

よって，共有点の座標は　$(-2,\ -5)$，$(3,\ 5)$

(2)　$y=2x^2+x-5$　と　$y=x^2+3x-1$　から y を消去すると　　$2x^2+x-5=x^2+3x-1$

すなわち　　$x^2-2x-4=0$

これを解いて　$x=1\pm\sqrt{5}$

$x=1-\sqrt{5}$ のとき $y=8-5\sqrt{5}$　　$x=1+\sqrt{5}$ のとき $y=8+5\sqrt{5}$

よって，共有点の座標は

$(1-\sqrt{5},\ 8-5\sqrt{5})$，$(1+\sqrt{5},\ 8+5\sqrt{5})$

(3)　$y=-3x^2-8x-20$　と　$y=6x^2+16x-4$ から y を消去すると

$-3x^2-8x-20=6x^2+16x-4$

すなわち　$9x^2+24x+16=0$

これを解いて　$x=-\dfrac{4}{3}$　　このとき　$y=-\dfrac{44}{3}$

よって，共有点の座標は　$\left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{44}{3}\right)$

$\boxed{8}$

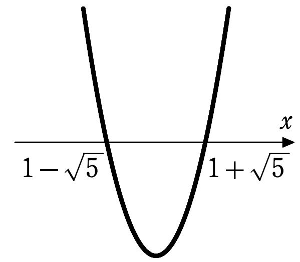
（解説）

(1)　2 次方程式 $x^2-2x-4=0$ を解くと

$x=1\pm\sqrt{5}$

よって，2 次不等式 $x^2-2x-4<0$ の解は

$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$

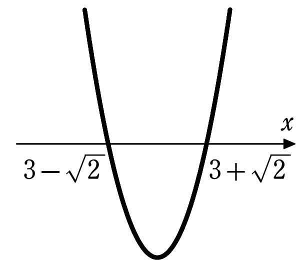


(2)　2 次方程式 $x^2-6x+7=0$ を解くと

$x=3\pm\sqrt{2}$

よって，2 次不等式 $x^2-6x+7>0$ の解は

$x<3-\sqrt{2}$，$3+\sqrt{2}<x$

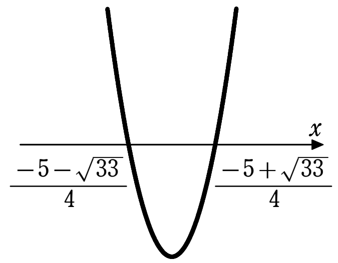


(3)　2 次方程式 $2x^2+5x-1=0$ を解くと

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

よって，2 次不等式 $2x^2+5x-1\geqq 0$ の解は

$x\leqq\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$，$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}\leqq x$



(4)　与えられた不等式の両辺に -1 を掛けると

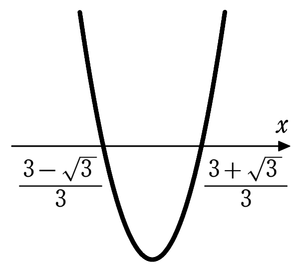
$3x^2-6x+2\leqq 0$

2 次方程式 $3x^2-6x+2=0$ を解くと

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

よって，与えられた 2 次不等式の解は

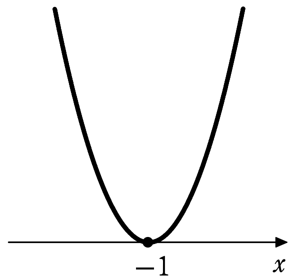
$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$



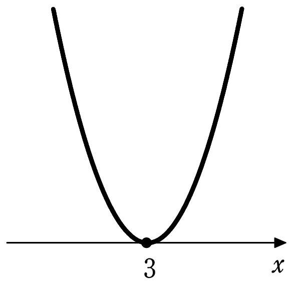
$\boxed{9}$

解説

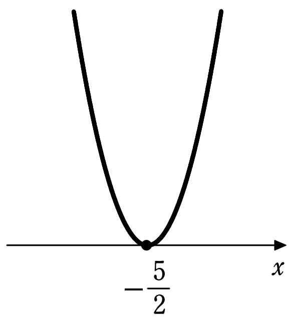
(1)　$x^2+2x+1=(x+1)^2$ であるから，2 次関数
$y=x^2+2x+1$ のグラフは，点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接する。
よって，2 次不等式 $x^2+2x+1 \leqq 0$ の解は　$x=-1$



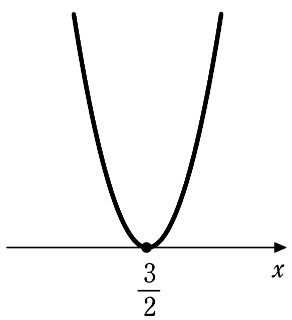
(2)　$x^2-6x+9=(x-3)^2$ であるから，2 次関数
$y=x^2-6x+9$ のグラフは，点 $(3,\ 0)$ で x 軸に接する。
よって，2 次不等式 $x^2-6x+9>0$ の解は
3 以外のすべての実数



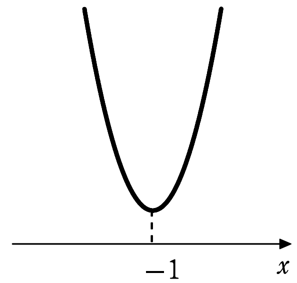
(3)　$4x^2+20x+25=(2x+5)^2$ であるから，2 次関数
$y=4x^2+20x+25$ のグラフは，点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ で x 軸に接する。
よって，2 次不等式 $4x^2+20x+25<0$ の解は　なし



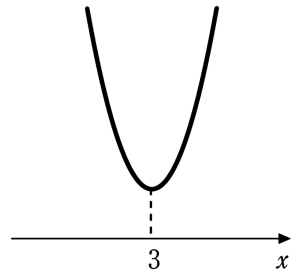
(4)　与えられた不等式の両辺に -1 を掛けると
$4x^2-12x+9 \geqq 0$
$4x^2-12x+9=(2x-3)^2$
であるから，2 次関数 $y=4x^2-12x+9$ のグラフは，
点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ で x 軸に接する。
よって，与えられた 2 次不等式の解は　すべての実数



(5)　$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ であるから，2 次関数
$y=x^2+2x+2$ のグラフは，x の値によらず，常に x 軸より上方にある。
よって，2 次不等式 $x^2+2x+2>0$ の解は
すべての実数



(6)　与えられた不等式の両辺に -1 を掛けると
$x^2-6x+11 \leqq 0$
$x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ であるから，2 次関数
$y=x^2-6x+11$ のグラフは，x の値によらず，
常に x 軸より上方にある。
よって，2 次不等式 $x^2-6x+11 \leqq 0$ の解は　なし
したがって，与えられた 2 次不等式の解もない



$\boxed{10}$

(解説)

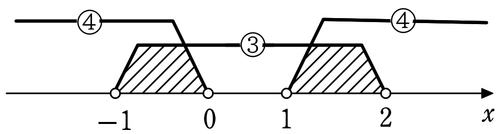
(1) $\begin{cases} x^2-x-2<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-x>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$(x+1)(x-2)<0$

よって　$-1<x<2$　……③

② から　$x(x-1)>0$

よって　$x<0,\ 1<x$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$-1<x<0,\ 1<x<2$

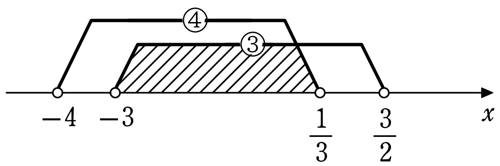
(2) $\begin{cases} 2x^2+3x-9<0 & \cdots\cdots ① \\ 3x^2+11x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$(x+3)(2x-3)<0$

よって　$-3<x<\dfrac{3}{2}$　……③

② から　$(x+4)(3x-1)<0$

よって　$-4<x<\dfrac{1}{3}$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$-3<x<\dfrac{1}{3}$

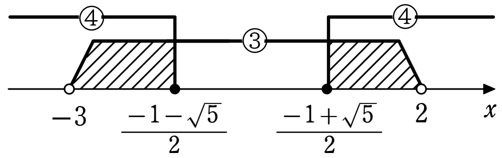
(3) $\begin{cases} x^2+x-6<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+x-1\geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$(x-2)(x+3)<0$

よって　$-3<x<2$　……③

方程式 $x^2+x-1=0$ の解は　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって，② の解は　$x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq x$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$-3<x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq x<2$

(4) $\begin{cases} x^2-10x+20<0 & \cdots\cdots ① \\ -x^2+6x-3>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

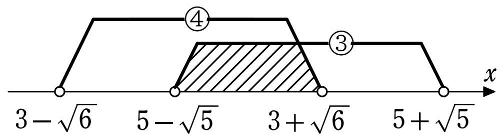
方程式 $x^2-10x+20=0$ の解は　$x=5\pm\sqrt{5}$

よって，① の解は　$5-\sqrt{5}<x<5+\sqrt{5}$　……③

② を変形して　$x^2-6x+3<0$

方程式 $x^2-6x+3=0$ の解は　$x=3\pm\sqrt{6}$

よって，② の解は　$3-\sqrt{6}<x<3+\sqrt{6}$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$5-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{6}$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　$5<x^2+4x\leqq 21$ は，次のように表すことができる。

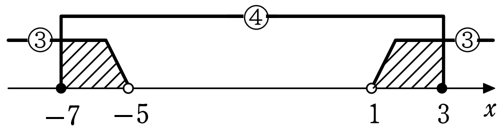
$$\begin{cases} x^2+4x-5>0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x-21\leqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　　$(x-1)(x+5)>0$

よって　　$x<-5,\ 1<x$　……③

② から　　$(x-3)(x+7)\leqq 0$

よって　　$-7\leqq x\leqq 3$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$-7\leqq x<-5,\ 1<x\leqq 3$

(2)　$3x+4<x^2<5$ は，次のように表すことができる。

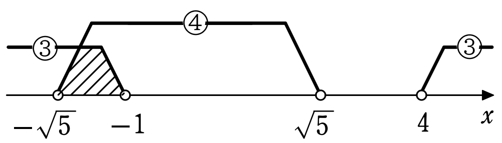
$$\begin{cases} x^2-3x-4>0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-5<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　　$(x+1)(x-4)>0$

よって　　$x<-1,\ 4<x$　……③

② から　　$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})<0$

よって　　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$　……④



③，④ の共通範囲を求めて　$-\sqrt{5}<x<-1$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　与えられた不等式を変形すると　$x^2+10x+5<0$

方程式 $x^2+10x+5=0$ の解は　$x=-5\pm 2\sqrt{5}$

よって，求める解は　$-5-2\sqrt{5}<x<-5+2\sqrt{5}$

(2)　与えられた不等式を変形すると　$x^2\geqq 0$

この不等式は，すべての実数 x について成り立つ。

よって，求める解は　　すべての実数

$\boxed{13}$

(解説)

(1)　$y=ax^2-x+b$ のグラフが $x<-3,\ 2<x$ の範囲で x 軸より下方にあればよい。

すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通ればよいから

$a<0$　……①

$0=9a+3+b$　……②

$0=4a-2+b$　……③

② と ③ から　$a=-1,\ b=6$　これは，① を満たす。

答　$a=-1,\ b=6$

(2)　$y=ax^2+bx+2$ のグラフが $-2<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲で x 軸より上方にあればよい。

すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-2,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通ればよいから

$a<0$　……①

$0=4a-2b+2$　……②

$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+2$　……③

② と ③ から　$a=-2,\ b=-3$　これは，① を満たす。

答　$a=-2,\ b=-3$

$\boxed{14}$

(解説)

$y=4x^2+ax+b$ のグラフは下に凸であるから，$1<x<\dfrac{5}{4}$ の範囲で x 軸より下方にあればよい。

すなわち，2 点 $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$ を通ればよいから

$0=4+a+b$　……①

$0=\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{4}a+b$　……②

① と ② から　$a=-9,\ b=5$

よって，解を求める 2 次不等式は　$5x^2-9x+4\geqq 0$

$(5x-4)(x-1)\geqq 0$

ゆえに　　$x\leqq\dfrac{4}{5},\ 1\leqq x$