1

二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

(1)　$(a+b)^5$　(2)　$(a-b)^7$　(3)　$(x+3)^5$

(4)　$(m-2)^4$　(5)　$(2x-y)^6$　(6)　$(3x+2y)^5$

2

次の式の展開式における，[　]内に指定した項の係数を求めよ。

(1)　$(a+5)^9$　$[a^8]$　(2)　$(2x-5)^4$　$[x^2]$

(3)　$(3-a)^{10}$　$[a^7]$　(4)　$(2x-3y)^7$　$[x^4y^3]$

3

次の式の展開式における，[　]内に指定した項の係数を求めよ。

(1)　$\left(x^3+\dfrac{2}{x}\right)^7$　$[x^5]$　(2)　$\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$　[定数項]

4

次の式の展開式における，[　]内に指定した項の係数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)^{10}$　$[a^3b^5c^2]$　(2)　$(x+2y-z)^7$　$[x^2y^2z^3]$

5

次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0+3{}_n\mathrm{C}_1+3^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n{}_n\mathrm{C}_n=4^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

6

等式 $(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$ が常に成り立つことを用いて，次の等式を証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$$

7

二項定理を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$　(2)　$(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$　$(x>0)$

8

21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{9}$

次の式の展開式における，[　]内に指定した項の係数を求めよ。

(1)　$(a+b+c)^8$ $[a^4b^3c]$

(2)　$(x+y+z)^{10}$ $[x^6z^4]$

(3)　$(3p+q+2r)^5$ $[pq^2r^2]$

(4)　$(2x+3y-z)^7$ $[x^2y^3z^2]$

$\boxed{10}$

$\left(x^2-x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ の展開式において，定数項を求めよ。

$\boxed{1}$

解説

(1) $(a+b)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5$

$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

(2) $(a-b)^7$

$={}_7\mathrm{C}_0a^7+{}_7\mathrm{C}_1a^6(-b)+{}_7\mathrm{C}_2a^5(-b)^2$

$+{}_7\mathrm{C}_3a^4(-b)^3+{}_7\mathrm{C}_4a^3(-b)^4+{}_7\mathrm{C}_5a^2(-b)^5+{}_7\mathrm{C}_6a(-b)^6+{}_7\mathrm{C}_7(-b)^7$

$=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7$

(3) $(x+3)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4\cdot3+{}_5\mathrm{C}_2x^3\cdot3^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2\cdot3^3+{}_5\mathrm{C}_4x\cdot3^4+{}_5\mathrm{C}_53^5$

$=x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$

(4) $(m-2)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0m^4+{}_4\mathrm{C}_1m^3(-2)+{}_4\mathrm{C}_2m^2(-2)^2+{}_4\mathrm{C}_3m(-2)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-2)^4$

$=m^4-8m^3+24m^2-32m+16$

(5) $(2x-y)^6$

$={}_6\mathrm{C}_0(2x)^6+{}_6\mathrm{C}_1(2x)^5(-y)+{}_6\mathrm{C}_2(2x)^4(-y)^2$

$+{}_6\mathrm{C}_3(2x)^3(-y)^3+{}_6\mathrm{C}_4(2x)^2(-y)^4+{}_6\mathrm{C}_5(2x)(-y)^5+{}_6\mathrm{C}_6(-y)^6$

$=64x^6-192x^5y+240x^4y^2-160x^3y^3+60x^2y^4-12xy^5+y^6$

(6) $(3x+2y)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0(3x)^5+{}_5\mathrm{C}_1(3x)^4(2y)+{}_5\mathrm{C}_2(3x)^3(2y)^2+{}_5\mathrm{C}_3(3x)^2(2y)^3+{}_5\mathrm{C}_4(3x)(2y)^4+{}_5\mathrm{C}_5(2y)^5$

$=243x^5+810x^4y+1080x^3y^2+720x^2y^3+240xy^4+32y^5$

$\boxed{2}$

解説

(1) 展開式の一般項は　${}_9\mathrm{C}_ra^{9-r}5^r=5^r{}_9\mathrm{C}_ra^{9-r}$

よって，a^8 の項の係数は，一般項の係数部分に $r=1$ を代入して

$5^1{}_9\mathrm{C}_1=5\cdot9=45$

(2) 展開式の一般項は　${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}(-5)^r=2^{4-r}(-5)^r{}_4\mathrm{C}_rx^{4-r}$

よって，x^2 の項の係数は，一般項の係数部分に $r=2$ を代入して

$2^{4-2}(-5)^2{}_4\mathrm{C}_2=4\cdot25\cdot6=600$

(3) 展開式の一般項は　${}_{10}\mathrm{C}_r3^{10-r}(-a)^r=3^{10-r}(-1)^r{}_{10}\mathrm{C}_ra^r$

よって，a^7 の項の係数は，一般項の係数部分に $r=7$ を代入して

$3^{10-7}(-1)^7{}_{10}\mathrm{C}_7=27\cdot(-1)\cdot120=-3240$

(4) 展開式の一般項は　${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}(-3y)^r=2^{7-r}(-3)^r{}_7\mathrm{C}_rx^{7-r}y^r$

よって，x^4y^3 の項の係数は，一般項の係数部分に $r=3$ を代入して

$2^{7-3}(-3)^3{}_7\mathrm{C}_3=16\cdot(-27)\cdot35=-15120$

$\boxed{3}$

解説

(1) 展開式の一般項は　${}_7\mathrm{C}_r(x^3)^{7-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_rx^{21-3r}2^rx^{-r}=2^r{}_7\mathrm{C}_rx^{21-4r}$

$21-4r=5$　を解いて　$r=4$

よって，x^5 の項の係数は　$2^4{}_7\mathrm{C}_4=16\cdot35=560$

(2) 展開式の一般項は

${}_5\mathrm{C}_r(2x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3x^2}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r2^{5-r}x^{15-3r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^rx^{-2r}=2^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r{}_5\mathrm{C}_rx^{15-5r}$

$15-5r=0$　を解いて　$r=3$

よって，定数項は

$$2^{5-3}\left(-\frac{1}{3}\right)^3{}_5\mathrm{C}_3=4\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)\cdot10=-\frac{40}{27}$$

$\boxed{4}$

解説

(1) $\{(a+b)+c\}^{10}$ の展開式において，c^2 を含む項は　${}_{10}\mathrm{C}_2(a+b)^8c^2$

また，$(a+b)^8$ の展開式において，a^3b^5 の項の係数は　${}_8\mathrm{C}_5$

よって，$(a+b+c)^{10}$ の展開式における $a^3b^5c^2$の項の係数は

${}_{10}\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_5=2520$

(2) $\{(x+2y)+(-z)\}^7$ の展開式において，z^3 を含む項は

${}_7\mathrm{C}_3(x+2y)^4(-z)^3=-{}_7\mathrm{C}_3(x+2y)^4z^3$

また，$(x+2y)^4$ の展開式において，x^2y^2 の項は　${}_4\mathrm{C}_2x^2(2y)^2=2^2{}_4\mathrm{C}_2x^2y^2$

よって，$(x+2y-z)^7$ の展開式における $x^2y^2z^3$ の項の係数は

$-{}_7\mathrm{C}_3\times2^2{}_4\mathrm{C}_2=-840$

$\boxed{5}$

解説

二項定理により，次の等式が成り立つ。

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……①

(1) 等式①において　$x=3$　とすると　$(1+3)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_13+{}_n\mathrm{C}_23^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n3^n$

よって，次の等式が成り立つ。

${}_n\mathrm{C}_0+3{}_n\mathrm{C}_1+3^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n{}_n\mathrm{C}_n=4^n$

(2) 等式①において　$x=-\dfrac{1}{2}$　とすると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，次の等式が成り立つ。

$${}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\boxed{6}$

解説

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

$(x+1)^n={}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$

である。

$(1+x)^n(x+1)^n$ を展開したとき，x^n の項は

$(1+x)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_0$，$(x+1)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_0x^n$ を選んで掛け合わせ，

$(1+x)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_1x$，$(x+1)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}$ を選んで掛け合わせ，

$(1+x)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_2x^2$，$(x+1)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}$ を選んで掛け合わせ，……

$(1+x)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_nx^n$，$(x+1)^n$ から ${}_n\mathrm{C}_n$ を選んで掛け合わせ，

これらを加えることで得られる。

よって，$(1+x)^n(x+1)^n$ を展開したときの x^n の項の係数は

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2$$

一方，$(1+x)^{2n}$ を展開したときの一般項は ${}_{2n}\mathrm{C}_rx^r$ であるから，$(1+x)^{2n}$ を展開したときの x^n の項の係数は　${}_{2n}\mathrm{C}_n$　となる。

$(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$　であるから，両辺を展開したときの x^n の項の係数は等しい。

したがって　$${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$$

$\boxed{7}$

解説

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{n}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$

${}_n\mathrm{C}_2>0$，${}_n\mathrm{C}_3>0$，……，${}_n\mathrm{C}_n>0$，$\dfrac{1}{n}>0$

であるから，$n\geqq2$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n>0$$

よって

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)=1+n\times\frac{1}{n}=2$$

したがって　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2)　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

[1]　$n=2$ のとき

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

[2]　$n\geqq3$ のとき

${}_n\mathrm{C}_3>0$，……，${}_n\mathrm{C}_n>0$，$x>0$　であるから

$${}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n>0$$

よって　$(1+x)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

したがって，[1]，[2] より，$n\geqq2$ のとき

$$(1+x)^n\geqq1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

$\boxed{8}$

解説

二項定理を用いて，21^{10} を計算すると

$21^{10}=(20+1)^{10}$

$={}_{10}\mathrm{C}_0 20^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1 20^9+{}_{10}\mathrm{C}_2 20^8+\cdots\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8 20^2+{}_{10}\mathrm{C}_9 20+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

$=20^2(20^8{}_{10}\mathrm{C}_0+20^7{}_{10}\mathrm{C}_1+20^6{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_8)+200+1$

したがって，21^{10} を $400\,(=20^2)$ で割ったときの余りは　$200+1=201$

$\boxed{9}$

解説

(1)　$\dfrac{8!}{4!3!1!}=280$

(2)　$\dfrac{10!}{6!0!4!}=210$

(3)　$(3p+q+2r)^5$ を展開したときの pq^2r^2 の項は

$$\frac{5!}{1!2!2!}(3p)q^2(2r)^2=\frac{5!}{1!2!2!}\times3\cdot2^2\times pq^2r^2$$

よって，求める係数は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}\times3\cdot2^2=360$

(4)　$(2x+3y-z)^7$ を展開したときの $x^2y^3z^2$ の項は

$$\frac{7!}{2!3!2!}(2x)^2(3y)^3(-z)^2=\frac{7!}{2!3!2!}\times2^2\cdot3^3\cdot(-1)^2\times x^2y^3z^2$$

よって，求める係数は　$\dfrac{7!}{2!3!2!}\times2^2\cdot3^3\cdot(-1)^2=22680$

$\boxed{10}$

解説

$\left(x^2-x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ を展開したときの一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}(x^2)^p(-x)^q\left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{8!}{p!q!r!}(-1)^qx^{2p+q-r}\qquad ただし，p+q+r=8$$

$p+q+r=8$，$2p+q-r=0$ を満たす 0 以上の整数 p，q，r の組は，次の 2 つである。

$$(p,\ q,\ r)=(0,\ 4,\ 4),\ (2,\ 1,\ 5)$$

よって，定数項は　$\dfrac{8!}{0!4!4!}(-1)^4+\dfrac{8!}{2!1!5!}(-1)^1=70-168=-98$