$\boxed{1}$

数直線上に 3 点 A(-7)，B(9)，C があり，線分 AB を 3：1 に内分する点を P，7：3 に外分する点を Q とする。

(1)　線分 PQ の中点の座標を求めよ。

(2)　線分 AC を 6：1 に外分する点が P であるとき，点 C の座標を求めよ。

$\boxed{2}$

△ABC の重心を G とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{3}$

2 点 A$(1,\ -7)$，B$(5,\ 3)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$

次の 3 直線が三角形をつくらないような定数 a の値を求めよ。

$x-2y=-5$　……①，$3x+2y=-7$　……②，$ax-y=1-a$　……③

$\boxed{5}$

k は定数とする。方程式 $(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ で表される直線 ℓ について，直線 ℓ は k の値に関係なく定点を通ることを示せ。また，その定点の座標を求めよ。

$\boxed{6}$

円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=kx+5$ が接するとき，定数 k の値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

$\boxed{7}$

中心が点 $(-2,\ 3)$ で，直線 $y=3x-1$ に接するような円の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$

点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{9}$

次の 2 つの円の位置関係 (異なる 2 点で交わる，接する，共有点をもたない) を調べよ。

(1)　$x^2+(y-3)^2=4$，$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

(2)　$x^2+y^2=4$，$x^2+y^2-2x+2y-14=0$

(3)　$x^2+y^2-4x+2y-11=0$，$x^2+y^2+2x-6y+9=0$

(4)　$x^2+y^2+2x-6y+6=0$，$x^2+y^2-4x-8y+19=0$

$\boxed{10}$

2 つの円 $x^2+y^2=9$，$x^2+y^2-4x-2y+3=0$ は 2 点で交わる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　2 つの交点と原点を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

$\boxed{11}$

円 $x^2+y^2-2(a-1)x-4ay+5a^2-2a-4=0$ の中心 P について，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を a で表せ。

(2)　a の値が変化するとき，点 P はどんな図形上にあるか。

$\boxed{12}$

次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　$\mathrm{AB}=4$ である 2 点 A，B に対して，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=26$ を満たす点 P

(2)　$\mathrm{AB}=6$ である 2 点 A，B に対して，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=12$ を満たす点 P

1

(解説)

(1)　点 P の座標は　$\dfrac{1\cdot(-7)+3\cdot 9}{3+1}=5$

点 Q の座標は　$\dfrac{-3\cdot(-7)+7\cdot 9}{7-3}=21$

よって，線分 PQ の中点の座標は　$\dfrac{5+21}{2}=13$

(2)　点 C の座標を x とすると，点 P の座標について　$\dfrac{-1\cdot(-7)+6\cdot x}{6-1}=5$

よって　$x=3$

したがって，点 C の座標は　3

2

(解説)

直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとって，△ABC の各頂点を次のようにおく。

$A(a,\ b)$，$B(-c,\ 0)$，$C(c,\ 0)$

このとき，△ABC の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

$AB^2+AC^2=\{(-c-a)^2+b^2\}+\{(c-a)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$

$$BG^2+CG^2+4AG^2=\left\{\left(\frac{a}{3}+c\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{a}{3}-c\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}+4\left\{\left(\frac{a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{b}{3}-b\right)^2\right\}$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

したがって　$AB^2+AC^2=BG^2+CG^2+4AG^2$

3

(解説)

直線 AB の傾きは　$\dfrac{3-(-7)}{5-1}=\dfrac{5}{2}$

また，線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{-7+3}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ -2)$

よって，線分 AB の垂直二等分線は，点 $(3,\ -2)$ を通り，傾きが $-\dfrac{2}{5}$ の直線である。

したがって，求める方程式は　$y-(-2)=-\dfrac{2}{5}(x-3)$

すなわち　$y=-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{4}{5}$

4

(解説)

① の傾きは $\dfrac{1}{2}$，② の傾きは $-\dfrac{3}{2}$，③ の傾きは a である。

3 直線が三角形をつくらないのは，次の場合である。

[1]　③ が ① または ② と平行になる。

③ が ① と平行になるとき　$a=\dfrac{1}{2}$

③ が ② と平行になるとき　$a=-\dfrac{3}{2}$

[2]　3 直線が 1 点で交わる。

連立方程式 $\begin{cases} x-2y=-5 \\ 3x+2y=-7 \end{cases}$ を解くと　$x=-3$，$y=1$

よって，2 直線 ①，② の交点の座標は $(-3,\ 1)$

③ が点 $(-3,\ 1)$ を通るとき　$a\cdot(-3)-1=1-a$

したがって　$a=-1$

以上から，求める a の値は　$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{3}{2}$，-1

5

(解説)

$(k+2)x+(2k-3)y=5k-4$ を変形すると　$k(x+2y-5)+(2x-3y+4)=0$

この式は，$x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$ のとき，k の値に関係なく常に成り立つ。

このとき　$x=1$，$y=2$

したがって，与えられた直線は，k の値に関係なく定点 $(1,\ 2)$ を通る。

$\boxed{6}$

(解説)

2 つの方程式から y を消去して

$$x^2+(kx+5)^2=9$$

整理して　$(k^2+1)x^2+10kx+16=0$

この方程式の判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=(5k)^2-16(k^2+1)=9k^2-16$

円と直線が接するとき，$D=0$ であるから

$$9k^2-16=0$$

したがって　　$k=\pm\dfrac{4}{3}$

$k=\dfrac{4}{3}$ のとき，接点の x 座標は　$x=-\dfrac{5k}{k^2+1}=-\dfrac{12}{5}$

このとき y 座標は　$y=\dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{12}{5}\right)+5=\dfrac{9}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(-\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

$k=-\dfrac{4}{3}$ のとき，接点の x 座標は　$x=-\dfrac{5k}{k^2+1}=\dfrac{12}{5}$

このとき y 座標は　$y=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{12}{5}+5=\dfrac{9}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

$\boxed{7}$

(解説)

円の半径は，点 $(-2,\ 3)$ と直線 $y=3x-1$ の距離 d に等しい。

$y=3x-1$ を変形すると　$3x-y-1=0$

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-3-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

よって，求める円の方程式は　$(x+2)^2+(y-3)^2=10$

$\boxed{8}$

(解説)

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$

よって，この円の中心は点 $(1,\ -3)$，半径は $\sqrt{10}$ である。

したがって，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直ではないから，求める接線の方程式は $y-1=m(x-3)$ とおける。

変形すると　$mx-y-3m+1=0$

円の中心 $(1,\ -3)$ とこの直線の距離が半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$$\frac{|m+3-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$$|-2m+4|=\sqrt{10(m^2+1)}$$

両辺を 2 乗して　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

$$3m^2+8m-3=0$$

よって　　　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，求める接線の方程式は　$3x+y-10=0$，$x-3y=0$

9

(解説)

(1)～(4) において，与えられた 2 円を順に ①，② とする。また，円 ① の半径を r，円 ② の半径を r'，2 円 ①，② の中心間の距離を d とする。

(1) 円 ① の中心は点 $(0,\ 3)$，円 ② の中心は点 $(1,\ 2)$ であるから

$$d=\sqrt{(1-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$$

また，$r=2$，$r'=3$ であるから

$$|r-r'|=1,\quad r+r'=5$$

よって　$|r-r'|<d<r+r'$

したがって，2 円は異なる 2 点で交わる。

(2) 円 ② の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y+1)^2=16$$

円 ① の中心は点 $(0,\ 0)$，円 ② の中心は点 $(1,\ -1)$ であるから

$$d=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

また，$r=2$，$r'=4$ であるから

$$|r-r'|=2$$

よって　　$d<|r-r'|$

したがって，2 円は共有点をもたない。

参考　円 ① は円 ② の内部にある。

(3) 円 ① の方程式を変形すると

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16$$

円 ② の方程式を変形すると

$$(x+1)^2+(y-3)^2=1$$

円 ① の中心は点 $(2,\ -1)$，円 ② の中心は点 $(-1,\ 3)$ であるから

$$d=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2}=5$$

また，$r=4$，$r'=1$ であるから

$$r+r'=5$$

よって　　$d=r+r'$

したがって，2 円は接する。

参考　円 ① と円 ② は外接する。

(4) 円 ① の方程式を変形すると

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4$$

円 ② の方程式を変形すると

$$(x-2)^2+(y-4)^2=1$$

円 ① の中心は点 $(-1,\ 3)$，円 ② の中心は点 $(2,\ 4)$ であるから

$$d=\sqrt{(2+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$$

また，$r=2$，$r'=1$ であるから

$$r+r'=3$$

よって　　$d>r+r'$

したがって，2 円は共有点をもたない。

参考　円 ① は円 ② の外部にある。

10

(解説)

k を定数として　$k(x^2+y^2-9)+x^2+y^2-4x-2y+3=0$　…… ① とおくと，① は，2 円の交点を通る図形を表す。

(1) ① が直線を表すのは，x^2，y^2 の係数が 0 となるときである。① において，$k=-1$ とおくと　$-x^2-y^2+9+x^2+y^2-4x-2y+3=0$

整理して　$2x+y-6=0$

よって，求める直線の方程式は　$2x+y-6=0$

(2) ① において，$x=0$，$y=0$ を代入すると

$$-9k+3=0 \qquad \text{よって} \quad k=\frac{1}{3}$$

これを ① に代入して　$\dfrac{1}{3}(x^2+y^2-9)+x^2+y^2-4x-2y+3=0$

整理して　$x^2+y^2-3x-\dfrac{3}{2}y=0$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{16}$$

よって，求める円の中心の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，　半径は　$\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{11}$

(解説)

(1)　$x^2+y^2-2(a-1)x-4ay+5a^2-2a-4=0$

を変形すると　$\{x-(a-1)\}^2+(y-2a)^2=5$

よって，円の中心 P の座標は　$(a-1,\ 2a)$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=a-1,\quad y=2a$$

$x=a-1$ から　$a=x+1$

これを $y=2a$ に代入して

$$y=2(x+1)\quad \text{すなわち}\quad y=2x+2$$

よって，点 P は，直線 $y=2x+2$ 上にある。

$\boxed{12}$

(解説)

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　直線 AB を x 軸，線分 AB の垂直二等分線を y 軸とし，点 A，B の座標をそれぞれ，$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ とする。

条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=26$ から

$$(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=26$$

整理して　$x^2+y^2=9$

よって，求める軌跡は，線分 AB の中点を中心とする半径 3 の円である。

(2)　直線 AB を x 軸，線分 AB の垂直二等分線を y 軸とし，点 A，B の座標をそれぞれ $(-3,\ 0)$，$(3,\ 0)$ とする。

条件 $\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2=12$ から

$$(x+3)^2+y^2-\{(x-3)^2+y^2\}=12$$

整理して　$x=1$

よって，求める軌跡は，線分 AB を 2：1 に内分する点を通り直線 AB に垂直な直線である。