$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

(1)　$0<a<2$ とする。2 次関数 $y=-x^2+2ax-2a+3$ $(0\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -4 となるように，定数 a の値を定めよ。

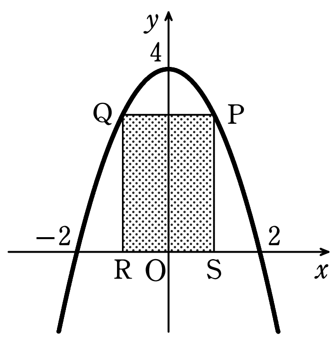
(2)　2 次関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -2 となるように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{2}$

a は定数とする。2 次関数 $y=x^2+4x+1$ $(a\leqq x\leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

放物線 $y=-x^2+4$ がある。この放物線と x 軸で囲まれた部分に，右の図のように長方形 PQRS を内接させる。この長方形の周の長さが最大になるときの PQ の長さを求めよ。



$\boxed{4}$

x と y を変数とする関数 $z=x^2-6xy+10y^2+2y$ について，次の問いに答えよ。

(1)　y を定数とみると，z は x の 2 次関数と考えられる。このとき z の最小値 m を y を用いて表せ。

(2)　m の最小値と，最小値をとる y の値を求めよ。

(3)　z の最小値と，最小値をとる x，y の値を求めよ。

$\boxed{5}$

2 次関数 $y=2x^2-x$ のグラフを平行移動した曲線のうち，x 軸に接し，点 $(2,\ 2)$ を通るものの方程式を求めよ。

$\boxed{6}$

次の問いに答えよ。

(1)　2 次不等式 $ax^2-x+b<0$ の解が $x<-3$，$2<x$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

(2)　2 次不等式 $ax^2+bx+2>0$ の解が $-2<x<\frac{1}{2}$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

7

2 次方程式 $x^2+2(a-1)x+3-a^2=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，1 つの解が正，他の解が負となるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

8

関数 $f(x)=ax^2-4x+a-3$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　すべての数 x に対して，$f(x)$ は常に正の値をとる。

(2)　$f(x)$ はある x の値に対して正の値をとる。

(3)　$f(x)$ は正の値も負の値もとる。

9

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x^2+2x-15|=-x+3$　　(2)　$|x^2-4|<x+2$

10

方程式 $|x^2-4x|=x+k$ の実数解の個数がちょうど 2 個となるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{1}$

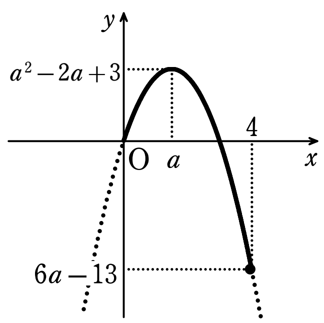
(解説)

(1)　関数は

$$y=-(x-a)^2+a^2-2a+3\ (0\leqq x\leqq 4)$$

と表される。$0<a<2$ であるから，グラフは，

右の図の実線部分になる。



よって，この関数は $x=4$ で最小値 $6a-13$ をとる。

ゆえに　$6a-13=-4$

これを解いて　$a=\dfrac{3}{2}$

これは $0<a<2$ を満たす。　　答　$a=\dfrac{3}{2}$

(2)　関数は　$y=(x-a)^2-a^2-a\ (0\leqq x\leqq 2)$ と表される。

$a\leqq 0$ のとき　関数は $x=0$ で最小値をとる。

よって　　$-a=-2$

これを解いて　　$a=2$　これは $a\leqq 0$ を満たさない。

$0<a<2$ のとき　関数は $x=a$ で最小値をとる。

よって　$-a^2-a=-2$

これを解いて　$a=1,\ -2$

このうち，$0<a<2$ を満たすのは　$a=1$

$2\leqq a$ のとき　関数は $x=2$ で最小値をとる。

よって　　$4-5a=-2$

これを解いて　$a=\dfrac{6}{5}$　これは $2\leqq a$ を満たさない。

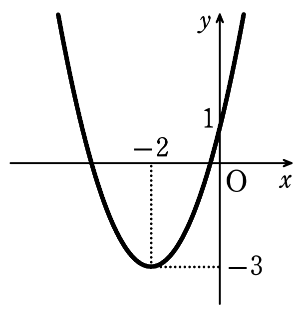
答　$a=1$

$\boxed{2}$

(解説)

関数は　$y=(x+2)^2-3$ と表される。

よって，この関数のグラフは，右の図のようになる。



最小値をとる x の値は，次のように場合分けされる。

$a<-4$ のとき

関数は $x=a+2$ で最小値 $a^2+8a+13$ をとる。

$-4\leqq a<-2$ のとき

関数は $x=-2$ で最小値 -3 をとる。

$-2\leqq a$ のとき

関数は $x=a$ で最小値 a^2+4a+1 をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

点 P の座標を $(t,\ -t^2+4)$ とおく。このとき，$0<t<2$ である。

長方形 PQRS の周の長さを L とすると

$$L=2(\mathrm{PQ}+\mathrm{PS})=2(2t-t^2+4)=-2(t-1)^2+10$$

よって，L は $t=1$ で最大値 10 をとる。

このときの PQ の長さは　$2t=2$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$z=x^2-6y\cdot x+(10y^2+2y)=(x-3y)^2+y^2+2y$

よって　$m=y^2+2y$

(2)　$m=(y+1)^2-1$

よって，m は $y=-1$ で最小値 -1 をとる。

(3)　(1) より，z は $x=3y$ で最小値をとる。

(2) より最小値をとる y の値は -1 である。

このとき　$x=-3$

よって，z は $x=-3$，$y=-1$ で最小値 -1 をとる。

$\boxed{5}$

(解説)

$y=2x^2-x$ のグラフを平行移動した曲線のうち，x 軸に接するものの方程式は，

$y=2(x-k)^2$ とおくことができる。

この曲線が点 $(2,\ 2)$ を通るから　$2=2(2-k)^2$

これを解いて　$k=1,\ 3$

よって，求める方程式は

$$y=2(x-1)^2\quad (y=2x^2-4x+2)$$

$$y=2(x-3)^2\quad (y=2x^2-12x+18)$$

6

(解説)

(1)　$y=ax^2-x+b$ のグラフが $x<-3$，$2<x$ の範囲で x 軸より下方にあればよい。

すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通ればよいから

$a<0$ ……①

$0=9a+3+b$ ……②

$0=4a-2+b$ ……③

②と③から　$a=-1$，$b=6$　これは，①を満たす。

答　$a=-1$，$b=6$

(2)　$y=ax^2+bx+2$ のグラフが $-2<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲で x 軸より上方にあればよい。

すなわち，上に凸である放物線で，2 点 $(-2,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通ればよいから

$a<0$ ……①

$0=4a-2b+2$ ……②

$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+2$ ……③

②と③から　$a=-2$，$b=-3$　これは，①を満たす。

答　$a=-2$，$b=-3$

7

(解説)

$f(x)=x^2+2(a-1)x+3-a^2$ とおく。$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線である。
よって，与えられた条件を満たすためには

[1]　$f(x)=0$ の判別式 $D>0$　　[2]　$f(0)<0$

となればよい。

[1] について　$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(3-a^2)=2a^2-2a-2$

$D>0$ となる a の値の範囲は　$a<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<a$ ……①

[2] について　$f(0)=3-a^2$ であるから，$f(0)<0$ となる a の値の範囲は

$a<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<a$ ……②

①，②の共通範囲を求めて　$a<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<a$

参考　$y=f(x)$ のグラフが下に凸の放物線のとき，$f(0)<0$ であれば，必ず $D>0$ となる。

8

(解説)

(1)　$a<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となる。上に凸の放物線は，常に正の値をとる，ということにはならないから，与えられた条件は満たさない。

$a=0$ のとき　$f(x)=-4x-3$

このとき $f(x)$ は $x>-\dfrac{3}{4}$ で負の値をとるから，与えられた条件は満たさない。

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となる。

与えられた条件を満たすためには，$f(x)=0$ の判別式 D について　$D<0$　となればよい。

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)=-(a+1)(a-4)$$

であるから　$(a+1)(a-4)>0$

よって　$a<-1$，$4<a$

$a>0$ であるから　$4<a$

以上より，求める a の値の範囲は　$a>4$

(2)　$a<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となる。

与えられた条件を満たすためには，$f(x)=0$ の判別式 D について　$D>0$　となればよい。

よって　$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$

ゆえに　$-1<a<4$

$a<0$ であるから　$-1<a<0$

$a=0$ のとき　$f(x)=-4x-3$

このとき $f(x)$ は $x<-\dfrac{3}{4}$ で正の値をとるから，与えられた条件を満たす。

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となる。下に凸の放物線は，ある x の値に対して正の値をとるから，与えられた条件を満たす。

以上より，求める a の値の範囲は　$a>-1$

(3)　$a=0$ のとき　$f(x)=-4x-3$

このとき $f(x)$ は正の値も負の値もとるから，与えられた条件を満たす。

$a\neq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは放物線となるから，与えられた条件を満たすためには，$f(x)=0$ の判別式 D について　$D>0$　となればよい。

よって　$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$

ゆえに　$-1<a<4$

$a\neq 0$ であるから　$-1<a<0$，$0<a<4$

以上より，求める a の値の範囲は　$-1<a<4$

$\boxed{9}$

(解説)

(1) [1] $x^2+2x-15\geqq 0$ すなわち $x\leqq -5,\ 3\leqq x$ のとき，方程式は

$$x^2+2x-15=-x+3$$

これを解いて　$x=-6,\ 3$

$x\leqq -5,\ 3\leqq x$ であるから　$x=-6,\ 3$

[2] $x^2+2x-15<0$ すなわち $-5<x<3$ のとき，方程式は

$$-(x^2+2x-15)=-x+3$$

これを解いて　$x=-4,\ 3$

$-5<x<3$ であるから $x=-4$

以上から，求める解は　$x=-6,\ 3,\ -4$

(2) [1] $x^2-4\geqq 0$ すなわち $x\leqq -2,\ 2\leqq x$ のとき，不等式は

$$x^2-4<x+2$$

これを解いて　$-2<x<3$

$x\leqq -2,\ 2\leqq x$ であるから　$2\leqq x<3$ ……①

[2] $x^2-4<0$ すなわち $-2<x<2$ のとき，不等式は

$$-(x^2-4)<x+2$$

これを解いて　$x<-2,\ 1<x$

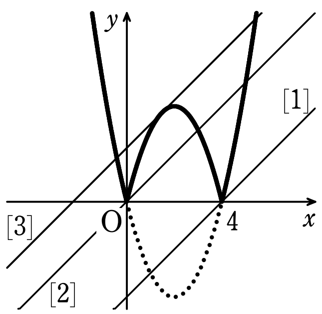
$-2<x<2$ であるから $1<x<2$ ……②

①，② から，求める解は　$1<x<3$

$\boxed{10}$

(解説)

関数 $y=|x^2-4x|$ のグラフをかくと，右の図のようになる。これに関数 $y=x+k$ のグラフをかき加える。



図の [1]，[2]，[3] の k の値を求める。

[1] のとき　直線 $y=x+k$ は点 $(4,\ 0)$ を通る。

よって　$0=4+k$

ゆえに　$k=-4$

[2] のとき　直線 $y=x+k$ は原点を通る。

よって　$0=0+k$

ゆえに　$k=0$

[3] のとき　関数 $y=-(x^2-4x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ が接している。

よって，$-(x^2-4x)=x+k$ が重解をもつ。

$-(x^2-4x)=x+k$　より　$x^2-3x+k=0$

この方程式の判別式を D とすると　$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot k=9-4k=0$

ゆえに　$k=\dfrac{9}{4}$

方程式 $|x^2-4x|=x+k$ の実数解は，関数 $y=|x^2-4x|$ のグラフと直線 $y=x+k$ の共有点の x 座標となる。

したがって，関数 $y=|x^2-4x|$ のグラフと直線 $y=x+k$ の共有点の個数が 2 個となる k の値の範囲を求めればよいから

$$-4<k<0,\ \frac{9}{4}<k$$