高1数学綜合SA＋　5月度第1講演習問題

$\boxed{1}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos x \leqq \sqrt{3}\sin x$

$\boxed{2}$

次の関数の最大値と最小値を求めよ。(1)，(2) については，そのときの x の値も求めよ。

(1)　$y = \sin x - \cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$　　(2)　$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

(3)　$y = 2\sin x - \sqrt{5}\cos x$

$\boxed{3}$

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

$\boxed{4}$

関数 $y = 2\sin x\cos x - (\sin x + \cos x) + 3$ について

(1)　$\sin x + \cos x = t$ として，y を t で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

次の値を求めよ。

(1)　$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$　　(2)　$\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$　　(3)　$\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$

(4)　$\sin 105^\circ \cos 15^\circ$　　(5)　$\sin 105^\circ \sin 15^\circ$　　(6)　$\cos 37.5^\circ \cos 7.5^\circ$

$\boxed{6}$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos 3x + \cos x = 0$　　(2)　$\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$

$\boxed{7}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y = \sin x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，方程式は

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

ゆえに，① から　$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$　　よって　$x=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$

(2)　$\cos x\leqq\sqrt{3}\sin x$ から　$\sqrt{3}\sin x-\cos x\geqq 0$　……①

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，① より

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqq 0 \quad\cdots\cdots②$$

また，$0\leqq x<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$

ゆえに，② から　$0\leqq x-\frac{\pi}{6}\leqq\pi$　　よって　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{7}{6}\pi$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ であるから　$y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき　$x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$　　よって　$x=\frac{7}{4}\pi$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ のとき　$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　　よって　$x=\frac{3}{4}\pi$

したがって　$x=\frac{3}{4}\pi$ で最大値 $\sqrt{2}$，$x=\frac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

(2)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから　$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$ であるから　$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

よって　$-\sqrt{3}\leqq y\leqq 2$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$　　よって　$x=\pi$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　　よって　$x=\frac{\pi}{6}$

したがって　$x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2，$x=\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}$

(3)　$2\sin x-\sqrt{5}\cos x=\sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}\sin(x+\alpha)=3\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$

よって　$y=3\sin(x+\alpha)$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ であるから，y の最大値は 3，最小値は -3

$\boxed{3}$

(解説)

$$y=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

よって　$-2+2\leqq y\leqq 2+2$　　すなわち　$0\leqq y\leqq 4$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　　よって　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　　よって　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0

別解　$y=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=\left\{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ であるから　$0\leqq\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

よって　$0\leqq y\leqq 4$

$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ すなわち $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$ のとき　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ すなわち $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ のとき　$x+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi$

よって　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$\sin x+\cos x=t$ の両辺を 2 乗すると　　$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$

よって　　$2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに　　$y=(t^2-1)-t+3=t^2-t+2$　…… ①

(2)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

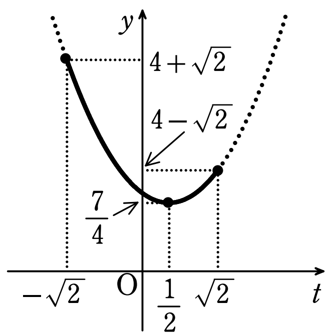
$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots ②$$

(3)　① を変形すると　　$y=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

② の範囲で，y は

$t=-\sqrt{2}$ で最大値 $4+\sqrt{2}$，

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{7}{4}$　をとる。



$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$\sin 105^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$$=2\sin 60^\circ\cos 45^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(2)　$\cos 105^\circ+\cos 15^\circ=2\cos\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$$=2\cos 60^\circ\cos 45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3)　$\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\dfrac{105^\circ-15^\circ}{2}$

$$=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)　$\sin 105^\circ\cos 15^\circ=\dfrac{1}{2}\{\sin(105^\circ+15^\circ)+\sin(105^\circ-15^\circ)\}$

$$=\frac{1}{2}(\sin 120^\circ+\sin 90^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

(5)　$\sin 105^\circ\sin 15^\circ=-\dfrac{1}{2}\{\cos(105^\circ+15^\circ)-\cos(105^\circ-15^\circ)\}$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 90^\circ)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

(6)　$\cos 37.5^\circ\cos 7.5^\circ=\dfrac{1}{2}\{\cos(37.5^\circ+7.5^\circ)+\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)\}$

$$=\frac{1}{2}(\cos 45^\circ+\cos 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{6}$

解説

(1) $\cos 3x+\cos x=0$ から　$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0$

すなわち　$2\cos 2x\cos x=0$

よって　$\cos 2x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ から　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\cos 2x=0$ から　$2x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

また，$\cos x=0$ から　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

したがって，解は　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

別解　3倍角の公式により，$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$ であるから，方程式は

$$(-3\cos x+4\cos^3 x)+\cos x=0$$
$$4\cos^3 x-2\cos x=0$$
$$2\cos x(2\cos^2 x-1)=0$$

よって　$\cos x=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=0$ より　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　$x=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

したがって，解は　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(2) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x+\sin x)-\sin 2x=2\sin 2x\cos x-\sin 2x$
$=\sin 2x(2\cos x-1)$

ゆえに，方程式は　$\sin 2x(2\cos x-1)=0$

よって　$\sin 2x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ から　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\sin 2x=0$ から　$2x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

よって　$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

また，$\cos x=\frac{1}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

別解　$\sin 2x=0$ は次のように解いてもよい。

$\sin 2x=0$ から　$2\sin x\cos x=0$

よって　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　$x=0,\ \pi$

$\cos x=0$ より　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\boxed{7}$

解説

$$y=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq 2x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{3}\pi$ であるから　$-1\leqq\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\leqq y\leqq-\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{4}$　すなわち　$-\frac{1}{4}\leqq y\leqq\frac{3}{4}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{3}=\pi$　よって　$x=\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$　よって　$x=\frac{5}{6}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3}{4}$，$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$